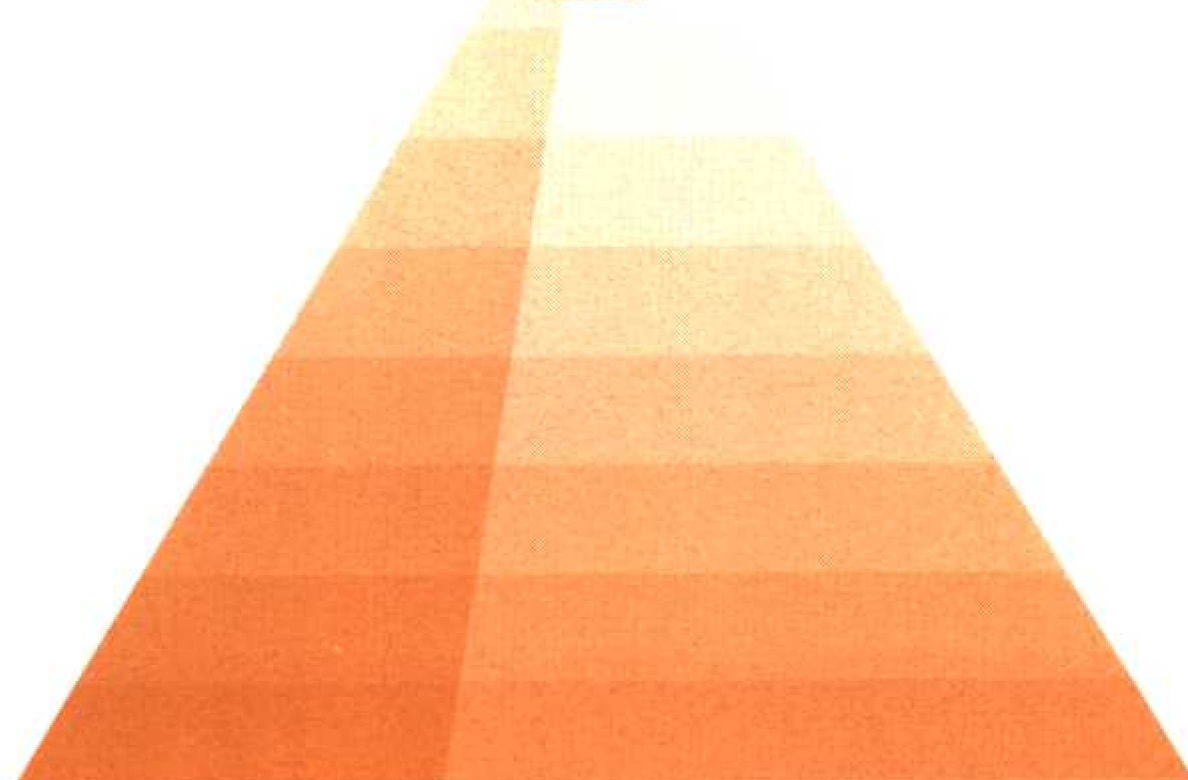




世界数学奥林匹克解题大辞典

中国数学奥林匹克委员会
南开大学数学系





《世界数学奥林匹克解题大辞典》编委会

序 言



王元

数学奥林匹克是对青少年极其有益的一项活动.它通过科学与趣味相统一的丰富多彩的题目,使许许多多的优秀学生在中学时期就经受了考验,接受了各种现代数学思想的熏陶,使他们提高了能力,增长了知识,开阔了眼界.数学奥林匹克活动的广泛开展,不仅丰富了中学生的课外活动,促进了中学数学教学的改革,而且发现和培养了一大批有才能的青年,这些青年将成为我国科学界在新世纪赶超世界先进水平的中坚力量.

数学竞赛中没有失败者.虽然每年参加中国数学奥林匹克的选手百余人,作为国家队出国参加国际数学奥林匹克的选手也只有六人,但是,那些因为运气不佳,培训不足,见识不广或临场发挥不理想等因素而没有获胜的学生也不是失败者.他们在参加竞赛及培训中所培养起来的求解难题的兴趣和欲望,那种永不满足,勇攀高峰的精神,分析问题的严密的逻辑思维,解决问题的灵活多样的应变能力以及对现代数学思想的理解和积累,正是进行成功的科学研究并在将来成为科学家的必要条件.因此说,这远比在一次竞赛中获胜更为宝贵.他们中的许多人进入大学后成为学习尖子,有些人正在攻读硕士和博士学位并成为数学研究队伍中的后起之秀,就是最有力的证明.即使对于那些进入大学后改学其他

专业的学生，他们也将因思维敏捷，头脑灵活，勇于创新和具有较强的数学能力而使自己终身受益．因此，数学奥林匹克必将继续下去．

数学奥林匹克已有一百多年的历史，且越来越受到重视．现在，每年举办数学奥林匹克的国家和地区已超过70个．已有的竞赛题目成千上万，其中构思独特，新颖别致，灵活深邃的题目有几千道之多，而且还在以每年几百道的速度继续增长．这些题目散载于国内外的各种书籍与杂志之中，任何个人手中的资料都很不完整，使用起来极不方便．这次河北少年儿童出版社邀请国内数学奥林匹克界的专家、教授和高级教练员共同精选了国内外数学奥林匹克的试题，并给出精辟、准确的解答，编写了这套《世界数学奥林匹克解题大辞典》．这是一次很有意义的壮举，是一项艰苦而又巨大的工程，是我国数学奥林匹克事业的一项基本建设．本书的出版，必将推动我国的数学奥林匹克事业稳步地向前发展，有助于我国在国际数学奥林匹克中保持优势，立于世界数学强国之林．就此我以兴奋的心情对这套解题大辞典的出版表示热烈的祝贺，并对在此书编写过程中付出辛勤劳动的各位作者和出版过程中做出多方面努力的编辑人员及支持本书出版的各位领导表示衷心的感谢．

近十年来，我国学生在国际数学奥林匹克中不断取得好成绩，我国所提供的候选题也接连被选为试题，这是值得高兴的事情．但是，我们也应清醒地看到，与一些先进国家相比，我国开展数学奥林匹克和参加国际数学奥林匹克的时间毕竟不长，这方面的资料也不很完全．因此，这套辞典的内容也是不很完全的．此外，以后每年新出现的竞赛题目也要补充进来．希望大家继续努力，不断完善这套大辞典的内容，为数学奥林匹克事业做出新贡献．



目 录

第一章 数 1
- 第1节 数字 1
- 第2节 求数 16
- 第3节 性质 44
- 第4节 存在性 67
- 第5节 因式 115
- 第6节 变换 127

第二章 集合 153
- 第1节 性质 153
- 第2节 子集 174
- 第3节 最小 196

第4节 最大 228
第三章 等式 259
第1节 求值 259
第2节 证明 284
第四章 方程 330
第1节 一元二次方程 330
第2节 代数方程 348
第3节 超越方程 386
第4节 含两个方程的方程组 401
第5节 含三个以上方程的方程组 419
第6节 在特集上解方程 446
第7节 应用题 474
第8节 其他 505
第五章 多项式 533
第1节 多项式及其系数的值 533
第2节 多项式的根 568
第3节 多项式的性质 593
第4节 求多项式 650
第六章 函数 668
第1节 函数的值 668
第2节 函数的性质 694
第3节 最大与最小 742
第4节 整数集上的函数方程 795
第5节 有理数集上的函数方程 819
第6节 实数集上的函数方程 827
第七章 概率 867
第八章 数列 884
第1节 求值与求通项公式 884
第2节 证明一般项的性质 910

第3节 存在性与构造 948
第4节 周期性与收敛性 982
第5节 数列不等式 1012
第九章 不等式 1043
第1节 解不等式与不等式解集的性质 1043
第2节 求参数值与最值 1064
第3节 常量及整变量不等式 1102
第4节 一元函数和三角不等式 1127
第5节 两个或三个变量的不等式 1147
第6节 多个变量的不等式 1182
附录
索引 1263
历届国际数学奥林匹克概况 1285
编者的话

第一章　数

第1节　数字

1·1　用 $S(n)$ 表示自然数 n 的所有数字之和.

(1)　是否存在自然数 n,使 $n+S(n)=1980$?

(2)　证明:任何两个连续自然数中能有一个表示成 $n+S(n)$ 的形式,其中 n 是某一个自然数.

(第14届全苏数学奥林匹克,1980年)

[解]　(1) $1962+S(1962)=1980$.

(2) 我们将 $S(n)+n$ 记作 S_n,如果数 n 的末位数字为9,那么 $S_{n+1}<S_n$;如果末位数字不是9,那么 $S_{n+1}=S_n+2$.对于任意自然数 $m>2$,选取最大的 N,使 $S_N<m$,那么 $S_{N+1}\geqslant m$.显然,N 的末位数字不是9.因此 $S_{N+1}=m$ 或者 $S_{N+1}=m+1$.又显然 $S_1=2$,于是命题得证.

1·2　证明:对于任意自然数 k,存在无穷多个不含数字0的自然数 t(十进制记数法),使得 t 与 kt 的数字和相同.

(第4届全苏数学奥林匹克,1970年)

[证]　如果把数 k 记为

$$k=\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_0},$$

不妨设 $a_0\geqslant 1$,t 表示由 m 个9组成的数,

$$t=\underbrace{99\cdots 9}_{m个}=10^m-1,$$

其中 $m > n$.那么

$kt = a_n a_{n-1} \cdots (a_0 - 1) 99 \cdots 9 (9 - a_n)(9 - a_{n-1}) \cdots (9 - a_1)(10 - a_0) kt$ 的数字之和就是 t 的数字之和,它等于 $9m$.

1·3　给定一正45边形,问能否把0、1、…、9这10个数字放到它的顶点上,使得对于任何两个不同的数字都存在一条边,这条边的两端点用这两个数字标号.

(第3届全俄数学奥林匹克,1963年)

[解]　不能.事实上,任一数字 a 与其他9个数字中的每一个能构成9对数字,如果这些"数字对"都找到用相应数字标号的45边形的边,那么,至少要把 a 放在它的5个顶点上.由于总共10个数字,因此为了摆好它们必须要50个顶点.此与题设矛盾.

所以题目条件中所要求数字的摆法不可能实现.

1·4　证明:存在能被 5^{1000} 整除且在其十进制表示中不包含数字0的数.

(第1届全苏数学奥林匹克,1967年)

[证]　数 5^{1000} 的末位数字是5,如果 5^{1000} 的表示中不包含0,命题得证,否则存在整数 $k > 1$,使得在 5^{1000} 的十进制记数法中,从末位数起第 k 位上是0,而其后第1位至第 $k-1$ 位的所有数字都异于0.

把 $5^{1000} \cdot 10^{k-1}$ 与 5^{1000} 相加后得到能被 5^{1000} 整除的数,并且这个数的原 k 个数字都不等于0.如果 $5^{1000} \cdot 10^{k-1} + 5^{1000}$ 的表示中不包含0,命题也得证,否则我们重复上述过程,可以得到后1000位数字都不等于0且能被 5^{1000} 整除的数.现在除后1000个数字,去掉这个数中其余所有的数字,这样所得到的数显然也能被 5^{1000} 整除.于是命题得证.

1·5　n 为固定正整数,求出所有具有以下性质的正整数的和:在二进制中,这个数恰有 $2n$ 个数字,其中 n 个1,n 个0(首位数字不能为0).

(第23届加拿大数学奥林匹克,1991年)

[解]　这种正整数首位数字必须为1,而在其他 $2n-1$ 位中恰有 n 位上是0,因此共有 C_{2n-1}^{n} 个.自右数起第 k 位($1 \leqslant k \leqslant 2n-1$)上的1表示 2^{k-1},出现 C_{2n-2}^{n} 次(除了从右数起的第 k 位及第 $2n$ 位外,其余的 $2n-2$ 位中恰有 n 个数字为0),所以这种正整数的总和为

$$2^{2n-1} \times C_{2n-1}^{n} + (2^{2n-2} + \cdots + 2 + 1) \times C_{2n-2}^{n}$$

$= 2^{2n-1} \times C_{2n-1}^{n} + (2^{2n-1} - 1) \times C_{2n-2}^{n}.$

1·6　设 n 是整数,如果 n^2 的十位数字是 7,那么 n^2 的个位数字是什么?

（第 10 届加拿大数学奥林匹克,1978 年）

[解]　设 $n = 10x + y$,其中 x 和 y 是整数,且 $0 \leqslant y \leqslant 9$,于是,我们有

$$\begin{aligned} n^2 &= 100x^2 + 20xy + y^2 \\ &= 20(5x^2 + xy) + y^2 \end{aligned}$$

如果 n^2 的十位数字是奇数 7,那么 y^2 的十位数字是奇数,由此推得

$$y^2 = 16 \text{ 或 } 36.$$

所以,n^2 的个位数字必须是 6.

1·7　设 a_n 是 $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ 的个位数字,$n = 1,2,3,\cdots$ 试证:$0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 是有理数.

（中国高中数学联赛,1984 年）

[证]　由于 $k^2,(k+10)^2,(k+20)^2,\cdots,(k+90)^2$ 具有相同的个位数字,所以这 10 个数字的和

$$k^2 + (k+10)^2 + (k+20)^2 + \cdots + (k+90)^2$$

的个位数字为 0.

从而

$$\begin{aligned} a_{n+100} &= 1^2 + 2^2 + \cdots + (n+100)^2 \text{ 的个位数字} \\ &= [a_n + (n+1)^2 + (n+2)^2 + \cdots + (n+100)^2] \text{ 的个位数字} \\ &= \{a_n + [(n+1)^2 + (n+11)^2 + (n+21)^2 + \cdots + (n+91)^2] + [(n+2)^2 + (n+12)^2 + (n+22)^2 + \cdots + (n+92)^2] + \cdots + [(n+10)^2 + (n+20)^2 + \cdots + (n+100)^2]\} \text{ 的个位数字} \\ &= a_n. \end{aligned}$$

因此 $0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 是循环小数,即为有理数.

1·8　某个数的偶次方是一个四位数,首位数字是 3,末位是 5,求此数.

（基辅数学奥林匹克,1946 年）

[解] 所求的数的末位数字应为 5. 它不可能是一位数字也不可能是三位数字. 适合条件的惟一数字为 55.

1·9 在等式$\overline{x5}\cdot\overline{3yz}=7850$中还原数字 x,y,z.

（第 13 届全俄数学奥林匹克,1987 年）

[解] 因为 $300\leqslant\overline{3yz}<400$,由原等式得

$$19<7850\div400<\overline{x5}\leqslant7850\div300<27,$$

所以 $x=2$.

又 $\overline{3yz}=7850\div25=314$,

所以 $y=1,z=4$.

故 $x=2,y=1,z=4$.

1·10 从1 开 始,依次写自然数,问在第一百万个位置上的数字是几?

（第 2 届友谊杯国际数学竞赛,1988 年）

[解] 因为 1 位数有 9 个,2 位数有 90 个,3 位数有 900 个,…,而 $900000\times6>1000000$. 所以所求的数字不在某一个七位数上. 又因为 $9+90\times2+900\times3+9000\times4+90000\times5=488889$,所以所求的数字一定在某一个六位数上.

因为 $1000000-488889=511111$,

$$511111=6\times85185+1,$$

故所求的数字是第 85186 个六位数(即 185185) 的第一个数字,也就是 1.

1·11 整数 a、b、c 成等比数列,在十进制数 $N=a^3+b^3+c^3-3abc$ 中,末位数字为 0,倒数第二位数字为 2,这可能吗?

（第 12 届全俄数学奥林匹克,1986 年）

[解] 若十进数 N 的末两位为 20,则

$$N=100M+20(M\text{ 为整数})$$

它能被 5 整除而不能被 25 整除.

另一方面,我们可以证明,若 N 被素数 p 整除,则它被 p^2 整除.

事实上,因为数列的公比 q 为有理数. 设 $q=\frac{m}{n}$(m、n 互素),则 $c=\frac{am^2}{n^2}$, 因此 a 被 n^2 整除.

设 $a=kn^2$,则 $b=kmn$, $c=km^2$,其中 k 为整数.

于是 $N=k^3(n^3-m^3)^2$.如果 N 被素数 p 整除,那么 k 或者 n^3-m^3 被 p 整除,从而 N 被 p^2 整除.

所以 N 的末两位数为 20 是不可能的.

1·12　公共汽车票的号码是六位数,如果号码的前三位数字之和等于后三位数字之和,则称有这个号码的票是"幸运"的.证明所有幸运票的号码之和能被 13 整除.

(第 5 届全俄数学奥林匹克,1965 年)

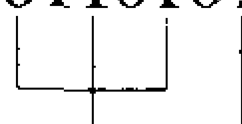
[证]　如果幸运票的号码是 A,那么号码为 $A'=999999-A$ 的票也是幸运的.而且 $A'\neq A$.因为

$A+A'=1001\times 999=13\times 77\times 999$

能被 13 整除,所以所有幸运票号码的和能被 13 整除.

1·13　给定0 和 1 的有限数列,它具有性质:

(1) 如果在数列的某一处连续抽出 5 个数字并且在另外任何一处同样也连续抽出 5 个数字,那么这些 5 个数字将不相同(它们可以重叠地连接在一起,例如 0110101).



(2) 如果把数字 0 或者 1 添加到数列的右边,那么性质(1) 不再成立.

证明这个数列的前 4 个数字与后 4 个数字相同.

(第 3 届全苏数学奥林匹克,1969 年)

[证]　设 $abcd$ 为最后的四个数字,在数列中一定有连续的 5 个数字 $abcd0$(否则可以添加 0 并保持性质(1),但这又与性质(2) 矛盾) 以及 $abcd1$.所以四数组 $abcd$ 在数列中出现三次.

因为 0 或 1 都在 $abcd$ 之前至多出现 1 次,所以这三个 $abcd$ 中有一个在它之前没有任何数字.这就是说,这个数列的前四个数字与后四个数字相同.

1·14　证明:在任何39 个 连续自然数中存在一个自然数,它的各位数字之和能被 11 整除.

(第 1 届全俄数学奥林匹克,1961 年)

[证]　在已知数的前 20 个数中存在两个数,它们在十进制记数法中末位数等于零.

在这两个数中必有一个数,它的末位数 0 之前是不等于 9 的数字,设这个数为 N,S 为 N 的数字之和,那么

$N, N+1, \cdots, N+9, N+19$

含于已知的 39 个数之中,且对应的数字和分别为

$S, S+1, \cdots, S+10.$

然而在 11 个相邻数中必有一个能被 11 整除.故命题得证.

1·15　任取一个能被9 整除的1962 位的数,它的各位数字之和记为 a,a 的各位数字之和记为 b,b 的各位数字之和记为 c.问 c 等于多少?

(第 2 届全俄数学奥林匹克,1962 年)

[解]　因为任何一个数本身以及它的数字和在除以 9 时有相同的余数,
所以 $c \geqslant 9$,且 $9 \mid c$.

另一方面,$a \leqslant 1962 \times 9 < 19999$,
因此 $b < 1 + 4 \times 9 = 37$,
所以 $c \leqslant 11$.故得 $c = 9$.

1·16　N 是 1990 位数,并且是 9 的倍数.N 的各位数字之和为 N_1,N_1 的各位数字之和为 N_2,N_2 的各位数字之和为 N_3.求 N_3.

(日本数学奥林匹克代表队选拔试题,1990 年)

[解]　若一个数是 9 的倍数,那么它的各位数字之和也是 9 的倍数,因为 N 是 9 的倍数,所以 N_1 是不大于 9×1990 的 9 的倍数;又因为 9×1990 是 5 位数,所以 N_2 是不大于 $9 \times 5 = 45$ 的 9 的倍数,于是,我们就得到 $N_3 = 9$.

1·17　设 A 是十进制数 4444^{4444} 的各位数字之和,而 B 是 A 的各位数字之和,求 B 的各位数字之和(这里所有的数都是十进制数).

(第 17 届国际数学奥林匹克,1975 年)

[解]　首先进行估位,数 10000^{4444} 有 $4 \times 4444 + 1 = 17777$ 位数字,而每位数字最大只能是 9,并且 $4444^{4444} < 10000^{4444}$,所以有

$$A < 17777 \times 9 = 159993.$$

现在把 A 记为

$$A = a_5 \cdot 10^5 + a_4 \cdot 10^4 + a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 \cdot 10^0,$$

这里 $0 \leqslant a_i \leqslant 9 \quad (i = 0,1,2,3,4)$,并且 $a_5 \leqslant 1$.因此,有

$B \leqslant 1+5\times 9=46.$

又记 $B=b_1\times 10+b_0$,这里 $0\leqslant b_0\leqslant 9, 0\leqslant b_1\leqslant 4$,类似可知,对于 B 的数字和 C,有

$c<4+9=13.$

另一方面,有

$$4444^{4444}\equiv 7^{4444} \pmod 9,$$

$$7^{4444}\equiv 7^{4443}\times 7$$

$$\equiv (7^3)^{1481}\times 7$$

$$\equiv (342+1)^{1481}\times 7 \pmod 9.$$

$$7^{4444}\equiv 1^{1481}\times 7\equiv 7 \pmod 9$$

因此 $4444^{4444}\equiv 7 \pmod 9$ ①

由于一个整数与它的数字之和在除以 9 时,总有相同的余数,因此

$4444^{4444}\equiv A\equiv B\equiv C \pmod 9$ ②

由 ①、② 得 $C\equiv 7 \pmod 9$

又由于 $c<13$,故 B 的数字和等于 7.

1·18 求出所有的自然数 n:在十进制中,一切由 $n-1$ 个 1 及 1 个 7 构成的 n 位数都是质数.

(第 31 届国际数学奥林匹克预选题,1990 年)

[**解**] 设 m 是一个由 $n-1$ 个 1 和 1 个 7 构成的 n 位数,则它可写为如下形式:

$m=A_n+6\times 10^k.$

这里 A_n 是一个由 n 个 1 构成的 n 位数,且 $0\leqslant k\leqslant n-1$.

若 n 被 3 整除,则 m 的数字和能被 3 整除,从而 m 不是质数.

若 n 不能被 3 整除,设

$A_n\equiv r \pmod 7,$

因为

$10^0\equiv 1,\ 10^1\equiv 3,\ 10^2\equiv 2,\ 10^3\equiv 6,\ 10^4\equiv 4,\ 10^5\equiv 5 \pmod 7.$

及 $A_1\equiv 1,\ A_2\equiv 4,\ A_3\equiv 6,\ A_4\equiv 5,\ A_5\equiv 2,\ A_6\equiv 0 \pmod 7$,因此,仅当 $6\mid n$ 时,有

$A_n\equiv 0 \pmod 7.$

现在 $3\nmid n$,所以 $r\neq 0$.

若 $n \geqslant 6$,则我们总可以选取 k,$(0 \leqslant k \leqslant 5)$,使得

$$6 \times 10^k \equiv -10^k \equiv Fr(\bmod 7),$$

这样

$$m = A_n + 6 \times 10^k \equiv r + 7 - r \equiv 0(\bmod 7),$$

从而,m 不是质数,因此,只需检查 $n = 1,2,4,5$ 的情况:

对于 $n = 1$,7 为质数.

对于 $n = 2$,17 和 71 都是质数.

对于 $n = 4$,不难看出 $1711 = 29 \times 59$.

对于 $n = 5$,利用上表,不难看出

$$A_5 + 6 \times 10^2 = 11711 \equiv 0(\bmod 7).$$

所以,只有 $n = 1$ 或 2 为所求.

1・19　下面是一个八位数除以一个三位数的算式,试求商,并说明理由.

```
              7 * * * *
        ________________
  * * * ) * * * * * * * 8
            * * *
        ________________
            * * * *
              * * *
        ________________
                * * * *
                * * * *
        ________________
                      0
```

(中国上海市数学竞赛,1958 年)

[解]　原式标号如下:

$$\begin{array}{r} 7\,y_2y_3y_4y_5 \\ x_1x_2x_3\overline{\smash{)}\,a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7\,8} \\ \underline{b_1b_2b_3} \\ c_1c_2a_5a_6 \\ \underline{d_1d_2d_3} \\ e_1e_2a_7\,8 \\ \underline{e_1e_2a_7\,8} \\ 0 \end{array}$$

其中所有文字都表示十进制数码,且下标为 1 的文字都不等于 0.

(1) 因为在第一次试商 7 后，同时移下二位数码$\overline{a_5a_6}$，说明$\overline{c_1c_2a_5} < \overline{x_1x_2x_3}$；所以 $y_2 = 0$，同理，$y_4 = 0$.

(2) 四位数$\overline{a_1a_2a_3a_4}$与三位数$\overline{b_1b_2b_3}$之差为二位数$\overline{c_1c_2}$，只有在 $a_1 = 1, a_2 = 0, b_1 = 9$，且$\overline{a_3a_4} < \overline{b_2b_3}$时才行，否则其差必为三位数.

同理，$C_1 = 1, C_2 = 0, d_1 = 9, \overline{a_5a_6} < \overline{d_2d_3}$.

(3) 因为 $C_2 = 0$，所以 $a_4 = b_3$，又因为 $C_1 = 1$，且$\overline{a_3a_4} < \overline{b_2b_3}$，从而有 $a_3 < b_2$，所以 $a_3 = 0, b_2 = 9$.

(4) 因为$7 \cdot \overline{x_1x_2x_3} = \overline{b_1b_2b_3} = \overline{99b_3}$，所以 $x_1 = 1, x_2 = 4$；否则若 $x_1 \geqslant 2$ 或 $x_1 = 1, x_2 \geqslant 5$ 时，$7 \cdot \overline{x_1x_2x_3} \geqslant 1050$；又若 $x_1 = 1, x_2 \leqslant 3$ 时，$7 \cdot \overline{x_1x_2x_3} < 980$.

由 $7 \cdot \overline{14x_3} = \overline{99b_3}$，即 $7 \cdot (140 + x_3) = 990 + b_3$，
所以 $7 \cdot x_3 = 10 + b_3$，$\therefore x_3 = 2, b_3 = 4$，从而 $a_4 = b_3 = 4$.

(5) 因为 $y_5 \cdot 142$ 是四位数，所以 $y_5 \geqslant 8$，即 $y_5 = 8$ 或 9；又因 $y_5 \cdot 142$ 的末位数必须是 8，所以 $y_5 = 9$.

(6) 因为$\overline{e_1e_2a_7} < \overline{x_1x_2x_3}$，所以 $e_1 = 1$，
由$\overline{1a_5} - d_2 = e_1 = 1$，不论 a_5 为何数，必有 $d_2 = 9$.

由 $y_3 \cdot \overline{x_1x_2x_3} = \overline{d_1d_2d_3}$，即 $y_3 \cdot 142 = \overline{99d_3}$，
所以 $y_3 = 7, d_3 = 4$(理由同(4)).

(7) 由 $e_1e_2a_78 = 9 \times 142 = 1278$，$\therefore e_2 = 2, a_7 = 7$.

从而$\overline{c_1c_2a_5a_6} = \overline{d_1d_2d_3} + \overline{e_1e_2} = 994 + 12 = 1006$.

$\therefore \quad a_5 = 0, a_6 = 6$.

所以，商为 70709，而原式为：

$$
\begin{array}{r}
70709 \\
142 \overline{)100406 78} \\
994 \\
\hline
1006 \\
994 \\
\hline
1278 \\
1278 \\
\hline
0
\end{array}
$$

1·20　一个整数称为可被其数字和整除，如果：(1) 它的数字都

不为0;(2)它可以被它的数字和整除(例如322可被其数字和整除).证明:有无限多个可被数字和整除的整数.

(第16届加拿大数学奥林匹克,1984年)

[证] 我们来证明,对于任何自然数 n,数$\underbrace{11\cdots1}_{3^n个}$可被 3^n 整除.

事实上,$n=1$ 时,111 可被数字和 $1+1+1=3$ 整除,结论成立.

假设 $n=k$ 时,$\underbrace{11\cdots1}_{3^k个}$可被其数字和 3^k 整除,那么由于

$$\underbrace{11\cdots1}_{3^{k+1}个}=1\underbrace{00\cdots0}_{3^k位}1\underbrace{00\cdots0}_{3^k位}1\times\underbrace{11\cdots1}_{3^k个}$$

第一个因数可被3整除,第二个因数由归纳假设可被 3^k 整除,所以它们的乘积可被 3^{k+1} 整除.

根据数学归纳原理,$\underbrace{11\cdots1}_{3^n个}$可被 3^n 整除,其中 $n=1,2,\cdots$.

由于$\underbrace{11\cdots1}_{3^n个}$中 n 的任意性,因此满足题目条件的整数有无穷多个.

1·21 试用一个 n 的函数,表示乘积 $9\times99\times9999\times\cdots\times(10^{2^n}-1)$ 在十进制下各位数字的和.

(第21届美国数学奥林匹克,1992年)

[解] 先证如下引理:设自然数 m 的位数不多于 d,$M=(10^k-1)m(k\geqslant d)$.则

$$S(M)=9k,$$

这里 $S(M)$ 表示 M 中各位数字的和.

为此,我们令 $M=(10^k-1)m=p+q+r$,这里

$$p=10^k(m-1),q=10^d-m,$$

$$r=10^k-10^d.$$

若 $m-1$ 的十进制表示是

$$m-1=\overline{a_1a_2\cdots a_d},$$

则 $p=\overline{a_1a_2\cdots a_d00\cdots0}(k\text{ 个 }0)$.

$$\begin{aligned}q&=(10^d-1)-(m-1)\\&=99\cdots9-(m-1)\\&=99\cdots9(d\text{ 个 }9)-\overline{a_1a_2\cdots a_d}\\&=\overline{b_1b_2\cdots b_d},\end{aligned}$$

$$a_i + b_i = 9.(i = 1,2,\cdots,d)$$

$$\begin{aligned} r &= (10^k - 1) - (10^d - 1) \\ &= 99\cdots9(k\text{ 个 }9) - 99\cdots9(d\text{ 个 }9) \\ &= 99\cdots900\cdots0(k - d\text{ 个 }9, d\text{ 个 }0) \end{aligned}$$

所以，$M = \overline{a_1a_2\cdots a_d00\cdots0}(k\text{ 个 }0) + \overline{b_1\cdots b_d} + 9\cdots90\cdots0(k - d\text{ 个 }9, d\text{ 个 }0)$

$= \overline{a_1a_2\cdots a_d99\cdots9b_1b_2\cdots b_d}(k - d\text{ 个 }9)$

从而，$S(M) = 9k$.

记所给乘积为 M_1，令

$$m = 9 \times 99 \times \cdots \times (10^{2^{n-1}} - 1)$$

则 $M_1 = (10^{2^n} - 1)m$

又 $m < 10^{1+2+\cdots+2^{n-1}} = 10^{2^{n-1}}$，

所以，m 的位数 $\leqslant 2^n$. 由引理知

$$S(M_1) = 9 \cdot 2^n.$$

1·22 证明：用数字1 和 2 可以组成 2^{n+1} 个数，每一个数都是 2^n 位，而且每两个数至少在 2^{n-1} 个数位上不相同.

（第 9 届全苏数学奥林匹克，1975 年）

[证] 当 $n = 1$ 时，4 个数 11，21，12，22 满足条件，因此，$n = 1$ 时命题成立.

设已经构造出由 2^{n+1} 个数组成的集合 A_n，它的每个数都为 2^n 位数，同时这些数中的任意两个都至少在 2^{n-1} 个数位上的数字不相同.

我们考察由数 aa 和aa' 构成的集合A_{n+1}，其中 $a \in A_n$，ab 表示把数 b 添写到a 上所得到的数，a' 表示把a 中的 1 变为 2，把 a 中的 2 变为 1 之后得到的新数. 所有这些数都是 2^{n+1} 位，它们共有 2^{n+2} 个.

另一方面，对于任意 $a, b \in A_n$，数 aa 和aa'、aa 和bb' 恰好在2^n 个数位上不相同，根据归纳假设，数 aa 和 bb 至少在 2^n 个数位上不相同，因此对于 A_{n+1} 中任意两个数至少在 2^n 个数位上不相同.

根据数学归纳原理，对于任意自然数 n，原命题都成立.

1·23 如果一个$2n$ 位数它本身是完全平方，而且用它的前 n 个数字和后 n 个数字所组成的数也都是完全平方(这里第 2 个 n 位数可以从数字 0 开始，但不能等于 0，而由前 n 个数字组成的第一个 n 位数

不能从 0 开始),则称这个数为奇异数.

(1) 求所有两位数和四位数的奇异数.

(2) 有六位的奇异数吗?

(3) 证明存在 20 位的奇异数.

(4) 证明 100 位的奇异数至多有 10 个.

(5) 证明存在 30 位的奇异数.

(第 11 届全苏数学奥林匹克,1977 年)

[解] (1) 容易验证,只有一个两位奇异数 49.

设$\overline{xt}^2$ 是 4 位奇异数,则

$$(10x+t)^2 = 100x^2 + 20xt + t^2$$

其中$20xt+t^2$是小于10的自然数的平方且$x^2 \geqslant 10$,于是$x \geqslant 4$,$xt \leqslant 4$,由此得 $x=4$,$t=1$,故只有一个四位奇异数 1681.

(2) 有.例如 $256036 = 506^2$.

(3) 为了得到形式为$(10^5x+1)^2 = 10^{10}x^2 + 2\cdot 10^5x + 1$ 的 20 位奇异数,只要求整数 x,使

$$10^9 \leqslant x^2 < 10^{10},\text{且}$$
$$2\cdot 10^5x + 1 = y^2 < 10^{10}$$

为此,我们可以取 $x = 5\cdot 10^4 - 1$,代入上式,得到 20 位的奇异数

$$4999900001^2 = 24999000019999800001,$$

这个奇异数由 49999^2 和 99999^2“组成”.

(4) 对于任意的正整数 k,$4k$ 位的奇异数只能是

$$(10^kx+t)^2 = 10^{2k}x^2 + 2\cdot 10^kxt + t^2$$

其中 $10^{2k-1} \leqslant x^2 < 10^{2k}$,$2\cdot 10^kxt + t^2 < 10^{2k}$,于是我们得到

$$x > 3\cdot 10^{k-1},$$
$$6\cdot 10^{2k-1}t < 10^{2k},$$

由此得 $t = 1$

由奇异数的定义,我们可以假设

$$2\cdot 10^kx + 1 = (2u+1)^2,$$

它等价于

$$2^{k-1}5^kx = u(u+1)$$

上式仅在以下三种情形成立:

1) $u+1$ 能被 $5\cdot 10^{k-1}$ 整除.

2) u 能被 2^{k-1} 整除, $u+1$ 能被 5^k 整除.

3) u 能被 5^k 整除, $u+1$ 能被 2^{k-1} 整除.

因为 $2u+1<10^k$,即 $u<5\cdot 10^{k-1}$,因此,每种情形至多给出一个解.也就是说,对于任意的正整数 k,至多存在 3 个 $4k$ 位奇异数.

取 $k=25$,于是原命题得证.

(5) 我们来证明对于任意的正整数 k,至少存在一个$(4k+2)$位奇异数,为此我们取

$$z^2 = v + w^2$$

其中 $v=25\cdot 10^{2k-1}$, w 为不小于$\sqrt{v}$ 的最小自然数.

设 $y = w^2 - v$

于是有 $z^2 = 4vw^2 + y^2$

$$= 10^{2k+1}w^2 + y^2 \quad ①$$

因为 $w - 1 < \sqrt{v}$

即 $(w-1)^2 \leqslant v - 1$,所以

$$y = w^2 - v \leqslant 2(w-1) < 2\sqrt{v},$$

从而得 $y^2 < 4v = 10^{2k+1}$ ②

另一方面

$$10^{2k} < v \leqslant w^2 = v + y < v + 2\sqrt{v} < 3v < 10^{2k+1},$$

即 $10^{2k} < w^2 < 10^{2k+1}$ ③

由 ①、②、③ 知, z^2 是 $4k+2$ 位的奇异数,取 $k=7$,于是原命题得证.

1·24 是否存在具有下列性质的自然数 n:(十进制的)数 n 的各位数字之和等于 1000,而数 n^2 的各位数字之和等于 1000^2?

(第 19 届全苏数学奥林匹克,1985 年)

[证] 我们来证明,对于任意自然数 m,都存在均由数字 1 或 0 组成的自然数 n,使得数 n 的各位数字之和等于 m,而数 n^2 的各位数字之和等于 m^2.

事实上,当 $m=1$ 时,存在 $n=1$ 满足条件,故上述结论成立.

设 $m=k$ 时,存在均由数字 1 或 0 组成的自然数 n_k,使得数 n_k 的各位数字之和为 k,数 n_k^2 的各位数字之和为 k^2.

我们令 $n_{k+1} = 10^{p+1}\cdot n_k + 1$,其中 p 是数 n_k 的位数,显然数 n_{k+1} 均由 1 或 0 组成,且它的各位数字之和等于 $k+1$.

另一方面，$n_{k+1}^2 = 10^{2p+2} \cdot n_k^2 + 2 \cdot 10^{p+1} \cdot n_k + 1$，因此，$n_{k+1}^2$ 的各位数字之和为 $k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$. 这就是说，$m = k+1$ 时，上述结论也成立.

根据数学归纳原理，m 是任意自然数时，上述结论都成立，特别地，$m = 1000$ 时，结论成立，即原命题成立.

1·25 求满足下列条件的一切自然数 x：x 的各位数字之积等于 $44x - 86868$，而各位数字之和是完全立方数.

（第 52 届莫斯科数学奥林匹克，1989 年）

[解] 因 $44x \geqslant 86868$

故 $x \geqslant \left[\frac{86868 + 43}{44}\right] = 1975.$

从而 x 至少为四位数. 另一方面，若 x 的位数 $k \geqslant 5$，则

$$44x - 86868 > 4 \times 10^k - 10^5 \geqslant 3 \times 10^k > 9^k$$

于是得 $44x - 86868 > p(x)$（x 的 k 个数字之积）矛盾，故 x 恰为四位数.

由已知 x 的四位数字之和 $S(x)$ 满足 $1 \leqslant S(x) \leqslant 36$. 故 $S(x) = 1, 8$ 或 27.

显然 $S(x) = 1$ 不合要求.

因为 $0 < p(x) \leqslant 9^4 = 6561$，

所以 $x \leqslant \left[\frac{86868 + 6561}{44}\right] = 2123.$

而满足 $1975 \leqslant x \leqslant 2123$ 且使 $S(x) = 8$ 或 27，$p(x) \neq 0$ 的 x 只有 1989，1998，2114，2123 四个，经检验只有 $x = 1989$ 的各位数字的积等于 $44x - 86868$，因此 $x = 1989$ 是本题的惟一解.

1·26 在圆周的一直径的两端标着数字1，把所得的每一个半圆周再等分，并在两条弧的分点写上其端点上的数字之和(第一步). 然后再等分所得到的 4 条弧，并在它们的分点写上其端点的数字之和(第二步). 依此类推，共进行了几步. 求所写出的一切数字之和.

（第 3 届全俄数学奥林匹克，1963 年）

[解] 在第一步之后所有数之和等于 $6 = 2 \times 3$.

设 S_n 为 n 步之后所有数之和，不难证明在 $n+1$ 步之后所有数的和将等于 $2S_n + S_n = 3S_n$.

于是,数字和每一步都是前一步的3倍.因此第 n 步时,和等于 2×3^n.

1·27　求不能表示成 $|3^a-2^b|$ 的最小素数 p,这里 a 和 b 是非负整数.

（中国国家队选拔赛,1995 年）

[解]　经检验,2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37 都可以写成 $|3^a-2^b|$ 的形式,其中 a,b 是非负整数:

$$2=3^1-2^0,3=2^2-3^0,5=2^3-3^1,$$
$$7=2^3-3^0,11=3^3-2^4,13=2^4-3^1,$$
$$17=3^4-2^6,19=3^3-2^3,23=3^3-2^2,$$
$$29=2^5-3^1,31=2^5-3^0,37=2^6-3^3.$$

猜测 41 是不能表示成这种形式的最小素数.为了证实这一猜测,我们用反证法.

如果方程

$$2^u-3^v=41 \qquad ①$$

有非负整数解 (u,v),则有

$$2^u>41,$$

即　$u\geqslant 6.$

因此,$-3^v\equiv 1 \pmod 8$

但 3^v 模 8 的剩余只可能是 1 或 3,与上式矛盾.故方程 ① 无非负整数解.

如果方程

$$3^x-2^y=41 \qquad ②$$

有非负整数解 (x,y),则

$$3^x>41,$$

即　$x\geqslant 4.$

因此　$2^y\equiv 1 \pmod 3$

从而 y 是偶数.设 $y=2t$,则 ② 化为

$$3^x-4^t=41,$$

于是,我们有

$$3^x\equiv 1 \pmod 4,$$

从而 x 也是偶数.设 $x=2s$,则 ② 化为

$$3^{2s}-2^{2t}=41$$
$$(3^s+2^t)(3^s-2^t)=41.$$

因为 41 是素数,所以有

$$\begin{cases}3^s+2^t=41\\3^s-2^t=1\end{cases}$$
$$\begin{cases}3^s=21\\2^t=20\end{cases}$$

这是不可能的.故方程 ② 没有非负整数解.

综上所述,41 不能表示成 $|3^a-2^b|$ 的形式,其中 a 和 b 是非负整数.

故所求的最小素数 p 为 41.

第 2 节　求数

1·28　计算 $7^{\log_{49}5}-0.5$.

(基辅数学奥林匹克,1939 年)

[解]　$7^{\log_{49}5}-0.5=\dfrac{7^{\log_{49}5}}{7^{0.5}}=\dfrac{7^{\log_7\sqrt{5}}}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}=\dfrac{1}{7}\sqrt{35}$.

1·29　已知 $\lg 2=0.30103$,计算 $M=1+10^4+\dfrac{10^4(10^4-1)}{1\cdot2}+\dfrac{10^4(10^4-1)(10^4-2)}{1\cdot2\cdot3}+\cdots+\dfrac{10^4(10^4-1)}{1\cdot2}+10^4+1$ 有多少位数字.

(基辅数学奥林匹克,1939 年)

[解]　$M=(1+1)^{10^4}=2^{10000}$.

$$\begin{aligned}\lg M&=10000\lg 2\\&=10000\times0.30103\\&=3010.3.\end{aligned}$$

所以,M 有 3011 位数字.

1·30　试求 $\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}+\dfrac{4}{5!}+\cdots+\dfrac{19}{20!}$ 的近似值,精确到第三位小

数.

（中国北京市数学竞赛，1957 年）

［解］ 由$\frac{n-1}{n!}=\frac{n}{n!}-\frac{1}{n!}=\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}$得

$$\begin{aligned}&\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\frac{4}{5!}+\cdots+\frac{19}{20!}\\&=\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{19!}-\frac{1}{20!}\right)\\&=\frac{1}{2!}-\frac{1}{20!}\\&\approx 0.500.\end{aligned}$$

1・31 用 α_n 表示最接近于$\sqrt{n}$ 的整数，求和$\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\cdots+\frac{1}{\alpha_{1980}}$

（第 12 届全苏数学奥林匹克，1978 年）

［解］ 因为 $\alpha_n=k$ 等价于

$$k-\frac{1}{2}<\sqrt{n}<k+\frac{1}{2},$$

即 $k^2-k<n\leqslant k^2+k$,

所以 $\frac{1}{\alpha_{(k-1)k+1}}+\frac{1}{\alpha_{(k-1)k+2}}+\cdots+\frac{1}{\alpha_{k(k+1)}}=\frac{1}{k}\cdot 2k=2$,

故 $$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}\right)+\left(\frac{1}{\alpha_3}+\frac{1}{\alpha_4}+\frac{1}{\alpha_5}+\frac{1}{\alpha_6}\right)+\cdots\\&+\left(\frac{1}{\alpha_{43\cdot 44+1}}+\frac{1}{\alpha_{43\cdot 44+2}}+\cdots+\frac{1}{\alpha_{44\cdot 45}}\right)\\&=2\cdot 44\\&=88.\end{aligned}$$

1・32 求所有的自然数 x，使得 x^2 为形如 $x^2=2525******89$ 的十二位数（* 号表示的六个未知数字不必一样）.

（第 15 届全俄数学奥林匹克，1989 年）

［解］ 写出末位数字是3或7的所有两位数的平方，可知所求数 x 的末两位数可以是 17,33,67,83. 因为所求数平方后前四位数字是 2525. 所以

$$2525\times 10^8<x^2<2526\times 10^8.$$

即 $\sqrt{2525}\times 10^4 < x < \sqrt{2526}\times 10^4$.

开平方,得

$$\sqrt{2525} = 50.2493\cdots,$$
$$\sqrt{2526} = 50.2593\cdots.$$

因此,$502493 < x < 502593$.在这个区间内末两位数是17,33,67,83的数共有四个,它们是:502517,502533,502567,502583.这四个数正是本题所求的自然数 x.

1·33 求所有的自然数 $n\in[1000,2000]$,使得 $a_n = \sqrt{57121+35n}$ 是自然数.

(第15届全俄数学奥林匹克,1989年)

[解] 根据条件 $1000\leqslant n\leqslant 2000$,得

$$a_n \geqslant \sqrt{57121+35\times 1000} = 303.51441\cdots$$

及 $a_n \leqslant \sqrt{57121+35\times 2000} = 356.54032\cdots$,

即 $304\leqslant a_n\leqslant 357$

又因为 $57121 = 1632\times 35+1$,

所以 $a_n = \sqrt{35(n+1632)+1}$.

即 $a_n^2-1 = (a_n-1)(a_n+1)$ 可被 $35 = 5\times 7$ 整除.

因此, $7\mid(a_n-1)$ 或 $7\mid(a_n+1)$.

即 $a_n = 7k+1$ 或 $a_n = 7k-1$.$(k\in z)$

在第一种情况下,$304\leqslant 7k+1\leqslant 357$,即 $44\leqslant k\leqslant 50$.用计算器对 $k = 44,45,\cdots,50$ 计算 $a_n^2-1 = (7k+1)^2-1$,并从中选出能被5整除者,得 $n = \left[\dfrac{a_n^2-1}{35}\right]-1632$ 的四个值:1096($k = 44, a_n = 309$),1221($k = 45, a_n = 316$),1749($k = 49, a_n = 344$)和1888($k = 50$, $a_n = 351$).

在第二种情况下,$a_n = 7k-1$ 且 $44\leqslant k\leqslant 51$.类似可得四个 n 值:1185($k = 45, a_n = 314$),1312($k = 46, a_n = 321$),1848($k = 50, a_n = 349$)及1989($k = 51, a_n = 356$).

1·34 求出使数144…4(n 个4)为自然数的平方的一切 n 的值.

(第13届全俄数学奥林匹克,1987年)

[解] 容易验证 $n = 2$ 或3时,144,1444分别是12,38的平方.

我们来证明 $N = 144\cdots4$(n 个 4,$n \geqslant 4$) 不能是任何自然数的平方.

事实上,$\frac{N}{4} = 3611\cdots1$($n-2$ 个 1),而以 1 为结尾的自然数平方,末两个数只可能是 01,21,41,61,81,而不可能是以 11 为结尾,因此$\frac{N}{4}$不是自然数的平方,从而 N 也不是自然数的平方.

因此,$144\cdots4$(n 个 4) 除了 $n = 2,3$ 外,再也没有可能是自然数平方的情况.

1·35 某四位数由四个连续数字依次组成.如果从左起前两位数字交换一下,所得的数是完全平方数,求该四位数.

(基辅数学奥林匹克,1954 年)

[解] 设所求四位数的千位数字为 a,则百位数字、十位数字和个位数字分别是 $a+1, a+2$ 和 $a+3(1 \leqslant a \leqslant 6)$ 或者 $a-1, a-2$ 和 $a-3(3 \leqslant a \leqslant 9)$.

由题意可得

$(a+1) \times 1000 + a \times 100 + (a+2) \times 10 + (a+3) = 1111a + 1023$ 为完全平方数,其中 $1 \leqslant a \leqslant 6$,

或者$(a-1) \times 1000 + a \times 100 + (a-2) \times 10 + (a-3) = 1111a - 1023$ 为完全平方数,其中 $3 \leqslant a \leqslant 9$.

经直接验算得 3456 为所求.

1·36 求所有这样的四位数,在它的左边写上400后是整数的平方.

(基辅数学奥林匹克,1954 年)

[解] 设$\overline{abcd}$是所求的四位数,由于$\overline{400abcd}$是七位数,且是完全平方数,所以

$$\overline{400abcd} = (\overline{20lm})^2 \quad ①$$

将 ① 改写为

$$400 \times 10^4 + \overline{abcd} = (20 \times 10^2 + 10l + m)^2.$$

将上式右边平方并化简,得

$$\overline{abcd} = 4000(10l + m) + (10l + m)^2. \quad ②$$

由于 l、m 是一个数的十位,个位数字,所以由 ② 式得

$$l=0,0<m\leqslant 2,$$

即 $\quad m=1$ 或 $m=2$.

于是所求的数是 4001 或 8004.

1·37　四个首位数字相同的三位数互不相等,且具有性质:它们的和能被它们之中的 3 个数整除.求这 4 个数.

(第 3 届全苏数学奥林匹克,1969 年)

[解]　设 x_1,x_2,x_3,x_4 为所求的数,S 为它们的和,a 为它们共同的第一个数字,于是,我们有

$$100a\leqslant x_i\leqslant 100(a+1),(i=1,2,3,4)$$

利用这些不等式,我们得到

$$x_i+300a\leqslant S<x_i+300(a+1),$$

由此有

$$1+\frac{300a}{x_i}\leqslant\frac{S}{x_i}<1+\frac{300(a+1)}{x_i},$$

又因为 $\quad a\leqslant\frac{x_i}{100}<a+1,$

所以 $\quad 1+\frac{3a}{a+1}<\frac{S}{x_i}<4+\frac{3}{a}.$

当 $a=1$ 时,我们得到 $2.5<\frac{S}{x_i}<7$,而当 $a\geqslant 2$ 时,$3<\frac{S}{x_i}<5.5$.

因为四个商 $\frac{S}{x_i}$ 中的三个是整数且不相同而在 3 和 5.5 之间只有两个整数,所以 $a\geqslant 2$ 的情形不可能出现.因此 $a=1$ 且整的商数应该在数 3,4,5 及 6 中寻找.

因为从 100 到 199 的任何两个三位数之比小于 2,所以,3 和 6 不可能同时是商数,于是,只剩两种可能:(1) 三个整的商数是 3,4,5;(2) 三个整的商数是 6,5,4.

在这两种情形中 S 都被 60 整除,我们设

$$S=60k.$$

在第一种情形所求数为 $12k,15k,20k,13k$.

所有数的第一个数字仅当 $k=9$ 时才都等于 1,因此,所求的四个数为 108,135,180,117.

在第二种情形,所求数为:$10k,12k,15k,23k$,因为 $23k$ 与 $10k$ 之

比大于 2，所以此种情形无解.

总之，此解只有一组解：108，135，180，117.

1·38　求所有这样的自然数：它们中的每一个等于它自己所有因数个数的平方.

（第 20 届全苏数学奥林匹克，1986 年）

［**解**］　显然，自然数 1 是本题的一个解.

设数 $n = m^2$ 有 $m(>1)$ 个因数，因为完全平方数的因数个数为奇数，所以 m 为奇数. 设 $m = 2k+1$，于是，n 有 k 个小于 m 的因数，但 n 是奇数，从而 n 的因数都是奇数，因此 n 能被 $2k-1$ 整除，因为相邻两个奇数都互素，所以必有 $m = 3$，从而 $n = 9$.

故本题的解为 1 和 9.

1·39　求使 n^n 有 k 个数字，k^k 有 n 个数字的所有自然数 n，k.

（第 8 届全苏数学奥林匹克，1974 年）

［**解**］　$n = k$，且 $k = 1, 8$ 或 9.

如果 n^n 有 k 个数字，而 k^k 有 n 个数字，则

$$10^{k-1} < n^n < 10^k,$$

$$10^{n-1} < k^k < 10^n.$$

不妨设 $n \geqslant k$，于是，我们有

$$n < 10 \text{ 且 } k < 10.$$

若 $n = 1$，则因为此时 n^n 有一位数字，所以 $k = 1$，验证知 $n = k = 1$ 是问题的一个解.

若 $n = 2$，则因为此时 $n^n = 4$ 有一位数字，所以 $k = 1$，但此时 k^k 没有 n 位数字，不合题意.

同理由 $3^3 < 100, 4^4 < 10^3, 5^5 < 10^4, 6^6 < 10^5, 7^7 < 10^6$ 可知，$n = 3,4,5,6,7$ 时都不合题意.

由 $10^7 < 8^8 < 10^8, 10^8 < 9^9 < 10^9$ 可知，$n = k = 8, n = k = 9$ 是问题的解.

故本题的解为 $n = k = 1, n = k = 8, n = k = 9$.

1·40　设 n 是五位数（第一位数码不是零），m 是由 n 取消它的中间一位数码后所成的四位数，试确定一切能使 $\frac{n}{m}$ 是整数的 n.

（第 3 届加拿大数学奥林匹克，1971 年）

[解] 设 $n = \overline{xyzuv} = x \cdot 10^4 + y \cdot 10^3 + z \cdot 10^2 + u \cdot 10 + v$. 其中 x, y, z, u, v 是数码 $0, 1, 2, \cdots, 8$ 或 9, $x \geqslant 1$.

$$m = \overline{xyuv} = x \cdot 10^3 + y \cdot 10^2 + u \cdot 10 + v,$$

我们先证明 $9m < n < 11m$.

事实上,不等式 $9m < n$,即

$$9(x \cdot 10^3 + y \cdot 10^2 + u \cdot 10 + v) < x \cdot 10^4 + y \cdot 10^3 + z \cdot 10^2 + u \cdot 10 + v,$$ 它等价于

$$80u + 80v < 10^3 \cdot x + 10^2 \cdot y + 10^2 \cdot z,$$

这显然是正确的.

不等式 $n < 11m$,即

$$x \cdot 10^4 + y \cdot 10^3 + z \cdot 10^2 + u \cdot 10 + v < 11(x \cdot 10^3 + y \cdot 10^2 + u \cdot 10 + v),$$

它等价于

$$10^2 \cdot z < 10^3 \cdot x + 10^2 \cdot y + 10^2 u + 10v,$$

这显然是正确的.

于是 $9m < n < 11m$ 成立. 设 $k = \frac{n}{m} \in N$,则 $n = km$,于是得 $9 < k < 11$. 因 k 是整数,所以 $k = 10$,于是 $n = 10m$,即

$$x \cdot 10^4 + y \cdot 10^3 + z \cdot 10^2 + u \cdot 10 + v = 10(x \cdot 10^3 + y \cdot 10^2 + u \cdot 10 + v),$$

或 $z \cdot 10^2 = 90u + 9v = 9(10u + v)$.

因 9 能除尽 $z \cdot 10^2$,但 3 不能除尽 10^2,所以 $z = 9t$(t 为整数),从而

$$t \cdot 10^2 = 10u + v.$$

由此得 $t = u = v = 0$,因而推得

$$u = \overline{xy000} = N \cdot 10^3, 10 \leqslant N \leqslant 99.$$

1·41 设 a, b 是正整数,当 $a^2 + b^2$ 被 $a + b$ 除时,商为 q,余数为 r,求所有的数对 (a, b),使 $q^2 + r = 1977$.

(第 19 届国际数学奥林匹克,1977 年)

[解] 因为 $a^2 + b^2 = q(a + b) + r$,其中 $0 \leqslant r < a + b$. 所以

$$\frac{a^2 + b^2}{a + b} < q + 1.$$

故 $q \geqslant 45$ 时,$q^2 \geqslant 2025$, $r \leqslant -48$,这与 $r > 0$ 矛盾,所以 $q \leqslant 44$,并且

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}<45.$$

当 $q\leqslant 43$ 时，$q^2=1849$，$r\geqslant 128$，$a+b>128$，不妨设 $a\geqslant b$，则 $a\geqslant\frac{1}{2}(a+b)$.

当 $a\leqslant\frac{2}{3}(a+b)$ 时，$b\geqslant\frac{1}{3}(a+b)$，

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}\geqslant\frac{\left[\frac{1}{2}(a+b)\right]^2+\left[\frac{1}{3}(a+b)\right]^2}{a+b}=\frac{13}{36}(a+b).$$

因为 $(a+b)>128$，

所以 $\frac{a^2+b^2}{a+b}>46$，(这与 $\frac{a^2+b^2}{a+b}<45$ 矛盾).

当 $a>\frac{2}{3}(a+b)$ 时，

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}>\frac{\left[\frac{2}{3}(a+b)\right]^2}{a+b}=\frac{4}{9}(a+b)>56,$$

这与 $\frac{a^2+b^2}{a+b}<45$ 矛盾.

所以 $q>43$.

但由于 $q\leqslant 44$，故 $q=44$ 且 $r=41$，所以有

$$a^2+b^2=44(a+b)+41,$$

即 $(a-22)^2+(b-22)^2=1009$.

解得 $\begin{cases}a_1=50,\\b_1=37;\end{cases}$ $\begin{cases}a_2=50,\\b_2=7;\end{cases}$ $\begin{cases}a_3=37,\\b_3=50;\end{cases}$ $\begin{cases}a_4=7,\\b_4=50.\end{cases}$

即所求的数对 (a,b) 有下列四组：

$(50,37)$，$(50,7)$，$(37,50)$，$(7,50)$.

1·42 试求出所有的四元实数组 (x_1,x_2,x_3,x_4)，使其中任一个数与其他三数积的和都等于 2.

（第 7 届国际数学奥林匹克，1965 年）

[解] 令 $x_1x_2x_3x_4=d$,

故 $x_i+\dfrac{d}{x_i}=2,(i=1,2,3,4)$,

故 $x_i=1\pm\sqrt{1-d},(i=1,2,3,4)$.

显然 $d\leqslant 1$.有以下五种情况:

(1)$d=(1+\sqrt{1-d})^4\geqslant 1\geqslant d$,

则 $d=1,x_i=1,(i=1,2,3,4)$.

(2)$d=(1-\sqrt{1-d})(1+\sqrt{1-d})^3$

$=d(1+\sqrt{1-d})^2$,

则 $d=0$(不难验证这是不可能的.)或 $d=1$(同(1)).

(3) $d=(1-\sqrt{1-d})^2(1+\sqrt{1-d})^2=d^2$.

则 $d=0$ 或 1(同(2)).

(4)$d=(1-\sqrt{1-d})^3(1+\sqrt{1-d})$

$=d(1-\sqrt{1-d})^2$,

则 $d=0$ 或 1(同(2))或 $d=-3$,此时 x_i 中有三个为 -1,一个为 $+3$.

(5)$d=(1-\sqrt{1-d})^4$,则

$$0\leqslant d=\left(\frac{d}{1+\sqrt{1-d}}\right)^4\leqslant d^4\leqslant d,$$

所以 $d=1$,同(1).

综上,或者 $x_1=x_2=x_3=x_4=1$,或者其中有三个为 -1,一个为 $+3$.

1·43 试求出所有的整数 a,b,c,其中 $1<a<b<c$,且使得 $(a-1)(b-1)(c-1)$ 是 $abc-1$ 的约数.

(第 33 届国际数学奥林匹克,1992 年)

[解] 由题设有 $a\geqslant 2,b\geqslant 3,c\geqslant 4$,故

$$\frac{a-1}{a}=1-\frac{1}{a}\geqslant\frac{1}{2},\frac{b-1}{b}\geqslant\frac{2}{3},\frac{c-1}{c}\geqslant\frac{3}{4}.$$

所以 $abc\leqslant 4(a-1)(b-1)(c-1)$,

$$S=\frac{abc-1}{(a-1)(b-)(c-1)}<4.$$

由题设知 $S\in N$,从而 $S=1,2,3$.下面分三种情形讨论:

(A)若 $S=1$,即 $(a-1)(b-1)(c-1)=abc-1$,亦即

$$a+b+c=ab+bc+ca \quad ①$$

但由 $a<ab, b<bc, c<ca$,有 $a+b+c<ab+bc+ca$,与①矛盾.

(B) 若 $S=2$,即

$$2(a-1)(b-1)(c-1)=abc-1<abc \quad ②$$

从而 a,b,c 全是奇数,再由 $c>b>a>1$,得 $a\geqslant 3, b\geqslant 5, c\geqslant 7$.

若 $b\geqslant 7$,则 $c\geqslant 9$,从而

$$\frac{(a-1)(b-1)(c-1)}{abc}\geqslant \frac{2}{3}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}=\frac{32}{63}>\frac{1}{2}.$$

这与②相违,所以只能有 $b=5, a=3$,代入②得

$$16(c-1)=15c-1,$$

解得 $c=15$.

(C) 若 $S=3$,即

$$3(a-1)(b-1)(c-1)=abc-1<abc. \quad ③$$

若 $a\geqslant 3$,则 $b\geqslant 4, c\geqslant 5$,从而

$$\frac{(a-1)(b-1)(c-1)}{abc}\geqslant \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2}{5}>\frac{1}{3},$$

这与③式矛盾,所以只能有 $a=2$.

若 $b\geqslant 5$,则

$$\frac{(a-1)(b-1)(c-1)}{abc}\geqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}=\frac{1}{3}.$$

仍得矛盾,故只能 $b=3,4$.

若 $b=3$,由③得

$$6(c-1)=6c-1,$$

此方程无解.

若 $b=4$,由③得

$$9(c-1)=8c-1,$$

解得 $c=8$.

综上讨论,得本题的解为

$$\begin{cases}a=3,\\ b=5,\\ c=15;\end{cases} \text{和} \begin{cases}a=2,\\ b=4,\\ c=8.\end{cases}$$

1・44 递增数列2,3,5,6,7,10,11,…,包含所有既不是平方数

又不是立方数的正整数.试求此数列的第500项.

（第8届美国数学邀请赛，1990年）

［解］ 易知$[\sqrt{500}]=22$，$[\sqrt[3]{500}]=7$，$[\sqrt[6]{500}]=2$，（$[x]$表示不超过x的最大的整数）.

因此在自然数500以内共有$22+7-2=27$个平方数或立方数.

现考虑从501～530中有多少个平方数或立方数，由计算知，只有一个数$512=8^3$.因此，

$a_{500}=500+27+1=528.$

1·45 设$p_n=1+2^n+3^n+4^n$，求出所有使得p_n能被5整除的正整数n.

（新加坡中学数学竞赛，1989年）

［解］ 因为$2\equiv 2(\mathrm{mod}5)$，$2^2\equiv 4(\mathrm{mod}5)$，

$2^3\equiv 3(\mathrm{mod}5)$，$2^4\equiv 1(\mathrm{mod}5)$.

所以 $2^n\equiv 2^{n+4}(\mathrm{mod}5)$，

同理 $3^n\equiv 3^{n+4}(\mathrm{mod}5)$，$4^n\equiv 4^{n+4}(\mathrm{mod}5)$，

因此 $p_n\equiv p_{n+4}(\mathrm{mod}5)$，

又 $P_1\equiv 0(\mathrm{mod}5)$，$P_2\equiv 0(\mathrm{mod}5)$，

$P_3\equiv 0(\mathrm{mod}5)$，$P_4\equiv 4(\mathrm{mod}5)$，

故对于所有不是4的倍数的正整数n，都有$5\mid p_n$.

1·46 一个自然数的真因子是指除1与其本身以外的正整数因子.一个比1大的自然数称为“好的”，如果它等于它的所有不同的真因子的积.最初10个“好的”自然数之和是多少？

（第5届美国数学邀请赛，1987年）

［解］ 显然，“好的”自然数是两个质数的积或一个质数的立方，因此，最初10个“好的”自然数之和是

$$6+8+10+14+15+21+22+26+27+33$$
$$=182.$$

1·47 如果一个自然数n能够同时惟一表示为$k(k\geqslant 2)$个自然数的和$a_1+a_2+\cdots+a_k$与它们之积$a_1a_2\cdots a_k$，那么此自然数称为“好”数.例如10就是“好”数，因为$10=5+2+1+1+1=5\times 2\times 1\times 1\times 1$，且此种表示惟一.试用质数这个术语指明哪些自然数是“好”数.

（第6届爱尔兰数学奥林匹克，1993年）

[解]　若 n 是质数,则 n 就不是"好"数.因为 $n = n \cdot 1 < n+1$,这种 n 就不能表示成相同整数的和与积.

若 $n = p \cdot q$,这里 p、q 都是质数,则

$n = pq = p + q + 1 \times (pq - p - q)$,且这种表示惟一.

若 $n = abc$,这里 a, b, c 都是大于 1 的整数,则

$n = abc = ab + c + 1 \times (abc - ab - c)$

$= a + b + c + 1 \times (abc - a - b - c)$.故这种表示不惟一.

所以当且仅当 n 是两位质数之积时,n 才是"好"数.

1·48　在表示式 $x_1 : x_2 : \cdots : x_n$ 中用加括号来指出运算次序,其结果可记为分数形式:

$$\frac{x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}}{x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_{n-k}}}$$

(同时,$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中的每一个字母可能在分子上,也可能在分母上.)问用一切可能的办法加括号能得到多少个不同的分数?

(第 4 届全俄数学奥林匹克,1964 年)

[解]　显然,x_1 将在所得分数的分子上.

当任意加括号时,因为在 x_2 前的除号或者与 x_2 有关,或者是与 x_2 在其分子上的某个表达式有关,所以 x_2 都在分母上.

我们再用归纳法来证明其余 $n-2$ 个字母 $x_3, x_4, \cdots, x_n$ 中的每一个字母可以不依赖于其余字母而落在分子上或分母上,因此总共可得到 2^{n-2} 个分数.

事实上,当 $n = 3$ 时,可以得到 2 个分数:

$$(x_1 : x_2) : x_3 = \frac{x_1}{x_2 x_3} \text{ 及 } x_1 : (x_2 : x_3) = \frac{x_1 x_3}{x_2}.$$

所以当 $n = 3$ 时,结论成立.

假设结论对 $n = k$ 成立,我们来证明它对 $n = k+1$ 成立.

设在某次加括号后表达式 $x_1 : x_2 : \cdots : x_k$ 能写成某个分数 A 的形式,如果在这个表达式中用 $x_k : x_{k+1}$ 代替 x_k,那么 x_k 仍将在它原先在 A 中所在的位置,而 x_{k+1} 将不会在 x_k 原先的位置上,也就是说,如果 x_k 原先在分母上,那么 x_{k+1} 就会在分子上,并且反过来也对.

另一方面,在分数 A 中加括号之后一定会有 $(p : x_k)$ 形式的表达式,其中 P 为字母 x_{k-1} 或者某个括号,用表示式 $[(P : x_k) : x_{k+1}] = P$

$:(x_k \cdot x_{k+1})$ 来代替$(p : x_k)$后,显然在原来的分数 A 中,用 $x_k \cdot x_{k+1}$ 代替了 x_k.也就是说,x_{k+1} 可以在 x_k 同样的位置上,即同在分子上或同在分母上.

根据数学归纳原理,其余 $n-2$ 个字母中的每一个都可以不依赖于其他字母而落在分子或分母上.

因此,用一切可能的办法加括号,可以得到 2^{n-2} 个不同的分数.

1·49 整数1,2,…,n 的排列满足:每个数或者大于它之前的所有数,或者小于它之前的所有数.试问有多少个这样的排列?

(第 21 届加拿大数学奥林匹克,1989 年)

[解] 记所求的排列个数为 a_n.

$n=1$ 时,只有数 1,显然 $a_1=1$.

对于 $n \geqslant 2$,如果数 n 排在第 i 位,则它之后的 $n-i$ 个数完全确定,即只能是 $n-i, n-i-1, \cdots, 1$.而它之前的 $i-1$ 个数有 a_{i-1} 种排法,考虑到 n 所在的不同位置,则必有

$$a_n = 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}.$$

由 $a_1 = 1$ 可得 $a_2 = 1 + a_1 = 2$

$$a_3 = 1 + a_1 + a_2 = 2^2$$

$$a_4 = 1 + a_1 + a_2 + a_3 = 8 = 2^3$$

由此可猜想 $a_n = 2^{n-1}$,用第二数学归纳法不难证明我们的猜想成立.

1·50 一个非负整数的有序对(m,n)称为"简单的",如果在做 $m+n$ 的加法时用不着进位,$m+n$ 称为有序对(m,n)的和.求和为 1492 的"简单的"非负整数有序对的个数.

(第 5 届美国数学邀请赛,1987 年)

[解] m,n 的个位数字可以是 2,0;1,1;0,2 三种.

同理,十位数字有十种,百位数字有五种,千位数字有两种.

因此,所求个数是 $3 \times 10 \times 5 \times 2 = 300$.

1·51 设 n 为偶数,从整数 $1,2,\cdots,n$ 中选出四个不同的数 a,b,c,d,满足 $a+c=b+d$,证明:选取的方法(不考虑 a,b,c,d 的顺序)共有 $\dfrac{n(n-2)(2n-5)}{24}$ 种.

(澳大利亚数学奥林匹克,1989 年)

[解] 不妨设 $a>b>d$,则 $d>c$.考虑从 $1,2,\cdots,n$ 中选出三

个数 $a>b>c$,满足 $a+c-b\neq b$ 的选法:选三个数 $a>b>c$ 有 C_n^3 种,其中满足 $a+c=2b$ 的就是a 与c 同奇偶的,共有$\frac{1}{2}n(\frac{n}{2}-1)$ 种.(先从 $1,2,\cdots,n$ 中取定一个有 n 种方法,与它同奇偶的数有$\frac{n}{2}-1$ 个,有$\frac{n}{2}-1$种选法.由于不计顺序,共$\frac{1}{2}n(\frac{n}{2}-1)$种选法),因此三元数组$\{(a,b,c),n\geqslant a>b>c\geqslant 1,a+c-b\neq b\}$ 共有

$$C_n^3-\frac{1}{2}n\left(\frac{n}{2}-1\right)=\frac{1}{12}n(n-2)(2n-5)$$

种.上述每个三元数组确定一个符合题目要求的 4 元数组,但每个四元数组(a,b,c,d) 出现两数(a,b,c) 及(a,d,c) 产生相同的四元数组,所以问题的答案是$\frac{1}{24}n(n-2)(2n-5)$.

1·52　设 $n\in N$,且使 $37.5^n+26.5^n$ 为正整数.求 n 的值.

(中国上海市高中数学竞赛,1998 年)

[解]　因为

$$37.5^n+26.5^n=\frac{1}{2^n}(75^n+53^n)$$

且当 n 是偶数时,

$$75^n+53^n\equiv(-1)^n+1^n\equiv 2\pmod 4,$$

即　$75^n+53^n=4l+2\quad(l\in N)$,

故此时　$37.5^n+26.5^n=\frac{1}{2^{n-1}}(2l+1)$ 不是正整数.

而当 n 是奇数时,

$$\begin{aligned}75^n+53^n&=(75+53)(75^{n-1}-75^{n-2}\times 53+\cdots+53^{n-1})\\&=2^7\cdot(2m+1),m\in N.\end{aligned}$$

故只有当 $n=1,3,5,7$ 时,$37.5^n+26.5^n$ 是正整数.

所求 n 的值为 1,3,5,7.

1·53　某学生没有注意写在两个7 位 数之间的乘号,将其误认为是一个 14 位数.该 14 位数恰好是原来乘积的 3 倍.试求这 3 个数.

(第 57 届莫斯科数学奥林匹克,1995 年)

[解]　原来的算式是　1666667×3333334.

事实上,设这两个 7 位数分别为 x 和 y. 由题意可知,

$$3xy = 10^7 \cdot x + y,$$

故

$$y = \frac{10^7 \cdot x}{3x - 1},$$

从而 $10^7 x$ 应是 $3x - 1$ 的倍数. 但

$$10^7 x = 3333333 \cdot (3x - 1) + x + 3333333,$$

所以,存在正整数 k,使

$$x + 3333333 = k(3x - 1).$$

当 $k = 1$ 时,解得 $x = 1666667, y = 3333334$.

当 $k \geqslant 2$ 时,解得 $x < 10^6$,不合题意.

因此,所求 3 数为 1666667,3333334,16666673333334.

1·54　对任一正整数 n,令 $d(n)$ 表示 n 的正因数(包括 1 和 n 本身) 的个数. 试确定所有可能的正整数 K,使得存在正整数 n,满足 $\frac{d(n^2)}{d(n)} = K$.

(第 39 届国际数学奥林匹克,1998 年)

[解]　如果 K 是一个可能的正整数,使得存在 $n \in N$,满足

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = K.$$

我们设 n 的素数分解式为

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \cdots p_s^{\alpha_s}.$$

于是

$$d(n) = \prod_{i=1}^{s} (\alpha_i + 1),$$

$$d(2n) = \prod_{i=1}^{s} (2\alpha_i + 1),$$

又由　$d(n^2) = K \cdot d(n)$ 得

$$\prod_{i=1}^{s} (2\alpha_i + 1) = K \cdot \prod_{i=1}^{s} (\alpha_i + 1)$$

上式左端为奇数,因此 K 为奇数.

下面证明:每一个奇数都是题中所说的可能的正整数 K.

用数学归纳法.

事实上,由$\frac{d(1^2)}{d(1)}=1$可知,$1\in S$,其中S表示题中所说的"所有可能的正整数K的集合"即

$$S=\left\{K \mid K\in N,\text{且存在 } n\in N,\text{使}\frac{d(n^2)}{d(n)}=K\right\}.$$

设$2i-1\in S$,其中$i=1,2,\cdots,K$.

下面继证:$2K+1\in S$.

为此,我们设$2K+2=2^m\cdot t$,$m\in N$,t是奇数.因为t是小于$2K+1$的奇数,所以由归纳假设知$t\in s$.即存在

$$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_1}\cdot\cdots p_s^{\alpha_s}$$

使得 $$\prod_{i=1}^{s}\frac{(2\alpha_i+1)}{(\alpha_i+1)}=t.$$

令$\beta=2t(2^{m-1}-1)$,$\gamma=t(2^{m-1}\beta+1)-1$.于是我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{2\beta+1}{\beta+1}\cdot\frac{4\beta+1}{2\beta+1}\cdot\cdots\cdot\frac{2^{m-1}\beta+1}{2^{m-2}\beta+1}\cdot\frac{2\gamma+1}{\gamma+1}\cdot\prod_{i=1}^{s}\frac{(2\alpha_i+1)}{(\alpha_i+1)}\\
&=\frac{2^{m-1}\beta+1}{\beta+1}\cdot\frac{2t(2^{m-1}\beta+1)-1}{t\cdot(2^{m-1}\beta+1)}\cdot t\\
&=\frac{2t(2^{m-1}\beta+1)-1}{\beta+1}\\
&=2^mt-\frac{2t(2^{m-1}-1)+1}{\beta+1}\\
&=2^mt-1\\
&=2K+1
\end{aligned}$$

因此,存在正整数

$$n'=q_1^{\beta}q_2^{2\beta}\cdots q_{m-1}^{2^{m-2}\beta}\cdot q_m^{\gamma}\cdot p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdot\cdots p_s^{\alpha_s}$$

其中$q_1,q_2,\cdots,q_m,p_1,p_2,\cdots,p_s$是$m+s$个两两不同的素数,使得

$$\frac{d(n'^2)}{d(n')}=2K+1,$$

由数学归纳法原理知,每一个奇数都是题中所说的正整数K.

综上所述,所有可能的正整数K就是所有的正奇数.

1·55　求所有非负整数 n,使得 $2^{2^n}+5$ 是一个质数.

(韩国数学奥林匹克,1993 年)

[解]　当 $n=0$ 时,

$$2^{2^n}+5=2^{2^0}+5=2^1+5=2+5=7$$

是质数.当 $n>1$ 时,因为 $2\equiv-1\pmod 3$

所以

$$2^{2^n}+5\equiv(-1)^{2^n}+2=1+2\equiv 0(\bmod 3),$$

且

$$2^{2^n}+5>3,$$

从而

$$2^{2^n}+5$$

是 3 的倍数,且不等于 3,故它必是合数.

综上所述,所求的非负整数仅有 $n=0$.

1·56　试求具有如下性质的最大自然数:它的末位数不为 0,在删去它的某一位数(但不是首位数)之后,原来的数恰是所得的数的整数倍.

(第 57 届莫斯科数学奥林匹克,1994 年)

[解]　设原来的数是所得的数的 b 倍,其中 b 是正整数.那么,我们有

$$\begin{aligned}&\overline{a_k\cdots a_{l+1}}\cdot 10^l+a_l\cdot 10^{l-1}+\overline{a_{l-1}\cdots a_1}\\&=b(\overline{a_k\cdots a_{l+1}}\cdot 10^{l-1}+\overline{a_{l-1}\cdots a_1})\end{aligned}\qquad ①$$

易知 $1<b<20$,且由 $a_1\neq 0$ 可知 $b\neq 10$.

如果 $b>10$,则 $k=l+1,l=k-1$.此时,① 式可化为

$$a_k\cdot 10^{k-1}+a_{k-1}\cdot 10^{k-2}+\overline{a_{k-2}\cdots a_1}=b(a_k\cdot 10^{k-2}+\overline{a_{k-2}\cdots a_1}),$$

即

$$[a_{k-1}-(b-10)a_k]\cdot 10^{k-2}=(b-1)\cdot\overline{a_{k-2}\cdots a_1},\qquad ②$$

由上式可知

$$a_{k-1}>(b-10)a_k,\qquad ③$$

并且当 $\overline{a_{k-2}\cdots a_1}$ 是 2 的倍数时,注意到 $a_1\neq 0$,可得 $b-1$ 是 5^{k-2} 的倍数.从而有

$$5^{k-2} \leqslant b-1 \leqslant 18,$$
$$k \leqslant 3,$$
即原数在这种情况下最多是3位数. 同样地，当$\overline{a_{k-2}\cdots a_1}$是5的倍数时，可得 $b-1$ 是 2^{k-2} 的倍数. 从而有
$$2^{k-2} \leqslant b-1 \leqslant 18,$$
$$k \leqslant 6,$$
即原数在这种情况下最多是 6 位数.

如果 $k=6$,则 $b-1$ 是 2^4 的倍数,从而得 $b=17$,$\overline{a_4a_3a_2a_1}$ 是 $5^4=625$ 的倍数. 又由 ③ 可知 $a_5>7a_6$,因此 $a_6=1$,$a_5=8$ 或 9. 将这些结果代入 ② 得
$$[8-7\times1]\cdot10^4=16\cdot\overline{a_4a_3a_2a_1}, \quad ④$$
或
$$[9-7\times1]\cdot10^4=16\cdot\overline{a_4a_3a_2a_1}. \quad ⑤$$
由 ④ 得 $\overline{a_4a_3a_2a_1}=5^4=625$.
此时原数 $\overline{a_6a_5a_4a_3a_2a_1}=180625$.
因为 $180625=17\times10625$,所以 180625 是符合题目要求的一个数.
由 ⑤ 得 $\overline{a_4a_3a_2a_1}=2\times5^4=1250$,
显然不符合 $a_1\neq0$ 的要求.

如果 $b<10$,那么可将 ① 式化为
$$[(10-b)\overline{a_k\cdots a_{l+1}}+a_l]\cdot10^{l-1}=(b-1)\overline{a_{l-1}\cdots a_1} \quad ⑥$$
由于所求的是满足条件的最大的正整数,因此不妨设 $k\geqslant6$. 此时显然 $l>1$.

如果$\overline{a_{l-1}\cdots a_1}$是2的倍数,由 ⑥ 可知,$b-1$是$5^{l-1}$的倍数. 从而有
$$5^{l-1}\leqslant b-1\leqslant8,$$
$$l=2.$$
代入 ⑥ 得
$$[(10-b)\overline{a_k\cdots a_3}+a_2]\cdot10=(b-1)\cdot a_1\leqslant72,$$
因此 $k\leqslant3$,
即此时原数位数不大于 3.

如果$\overline{a_{l-1}\cdots a_1}$ 是 5 的倍数,那么 $b-1$ 是 2^{l-1} 的倍数,从而有
$$2^{l-1}\leqslant b-1\leqslant8,$$

$l \leqslant 4.$

当 $b-1=8, l=4, \overline{a_3a_2a_1}=7\times 5^3=875$ 时,⑥式右端最大,此时⑥式化为

$$\overline{a_k\cdots a_5}+a_4=7.$$

因此 $k=5$,

即此时原数位数为5.

综上所述,符合题目要求的最大的正整数是六位数180625.

1·57 求所有正整数 k,使得有 k 个连续正整数之和是一个正整数的立方.

(保加利亚数学奥林匹克,1994年)

[解] 记

$$S_n(k)=n+(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+k-1)$$
$$=\frac{1}{2}k(2n+k-1),$$

这里 n 是一个正整数.令

$$t=2n+k-1$$

那么

$$n=\frac{1}{2}(t-k+1)$$

于是,我们有

$$S_n(k)=\frac{1}{2}kt.$$

由于 n 是一个正整数,因此 t 与 k 的奇偶性不同,且 $t>k$.

当 k 是奇数时,t 是偶数,可取 $t=2k^2, n=\frac{1}{2}(2k^2-k+1)$,使得

$$S_n(k)=\frac{1}{2}kt=k^3.$$

当 k 是偶数时,t 是一个奇数.设

$$k=2^rS,(r \text{ 和 } S \text{ 为正整数}, S \text{ 为奇数}).$$

则

$$S_n(k)=\frac{1}{2}kt=2^{r-1}\cdot St.$$

若 $r-1$ 不是3的倍数,由 s 和 t 都是奇数可知,$S_n(k)$ 不可能是一个整

数的立方.若 $r-1$ 是3的倍数,则可取

$$t=S^2\cdot 3^{3r},n=\frac{1}{2}(S^2\cdot 3^{3r}-k+1),$$

使得

$$S_n(k)=\frac{1}{2}kt=2^{r-1}\cdot S^3\cdot 3^{3r}$$

是一个整数的立方.

综上所述,所有的正奇数 k 以及可以表示成 $k=2^rS$(其中 r 是正整数,S 是正奇数,$r-1$ 是3的倍数)的正偶数,为所求的所有正整数 k 的集合.

1·58 正整数 $n>1$,$A_n=\{x\in N\mid (x,n)\neq 1\}$.正整数 n 称为有趣的,如果对于任何 $x,y\in A_n$,有 $x+y\in A_n$.求所有有趣的大于1的正整数 n.

(保加利亚数学奥林匹克,1994年)

[解] p 是一个质数.我们先证明:若 $n=p^s(s\in N)$,则 n 是有趣的.

事实上,若有 $x\in N$,使 $(x,p^s)\neq 1$,则 x 是 p 的倍数,因而对于 x,$y\in A_{p^s}$,必有 x,y 都是 p 的倍数,从而 $x+y$ 是 p 的倍数,$(x+y,p^s)\neq 1$,即 $x+y\in A_{p^s}$.故 $n=p^s$ 是有趣的.

再证明:若 n 至少含有2个不同的质因数,则 n 不是有趣的.

事实上,若 n 至少含有2个不同的质因数,则

$n=p^sq$,p 是质数,$q,s\in N$,$q>1$,且 $(p,q)=1$.

选取 $x=p$,$y=q$.

因为 $(p,p^sq)=p\neq 1$,$(q,p^sq)=q\neq 1$,所以 $p\in A_{p^sq}$,$q\in A_{p^sq}$.

因为 $(p-q)=1$,所以 $(p+q,p)=1$,$(p+q,q)=1$.

从而有 $(p+q,p^sq)=1$,即 $p+q\notin A_{p^sq}$,因此 $n=p^sq$ 不是有趣的.

综上所述,所有有趣的大于1的正整数的集合为

$\{p^s\mid p$ 是质数,s 是正整数$\}$.

1·59 确定所有正有理数组 (x,y,z),使得 $x+y+z$,$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

$+\frac{1}{z}$，xyz 都是整数.（这里 $x\leqslant y\leqslant z$.）

（第 45 届波兰数学奥林匹克，1994 年）

［解］ 由于

$$xy+yz+zx=xyz\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right),$$

所以 $xy+yz+zx$ 也是整数.

令

$$\begin{aligned}f(u)&=(u-x)(u-y)(u-z)\\&=u^3-(x+y+z)u^2+(xy+yz+zx)u-xyz,\end{aligned}$$

则 $f(u)$ 为整系数三次多项式. 由于 x,y,z 是 $f(u)$ 的三个正有理数根，因此令

$$x=\frac{a}{b},a,b\in N,\text{且}(a,b)=1.$$

于是

$$b^2f\left(\frac{a}{b}\right)=0,$$

即

$$\frac{a^3}{b}-(x+y+z)\cdot a^2+(xy+yz+zx)\cdot ab-xyzb^2=0.$$

上式两端除左端第一项外，都是整数，因此，左端第一项 $\frac{a^3}{b}$ 也是整数，从而得

$$b=1,x=a,a\text{ 为正整数}.$$

同理，y,z 都是正整数.

若 $x=1$，则 $1+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ 是整数，从而 $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ 是整数. 若 $y\geqslant 3$，则 $z\geqslant y\geqslant 3$，于是有

$$0<\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leqslant\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\leqslant\frac{2}{3},$$

与 $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ 是整数矛盾. 因此 $y\leqslant 2$.

当 $x=1,y=1$ 时，只有 $z=1$ 能使 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ 是整数；当 $x=$

$1, y=2$ 时，只有 $z=2$ 能使 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ 是整数. 所以当 $x=1$ 时，有两组解：

$$\begin{cases}x=1,\\y=1,\\z=1;\end{cases}\qquad\begin{cases}x=1,\\y=2,\\z=2.\end{cases}$$

若 $x=2$，则当 $y=2$ 时，没有正整数 $z\geqslant 2$ 能使 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ 为整数；当 $y=3$ 时，只有 $z=6$ 符合条件；当 $y=4$ 时，只有 $z=4$ 符合条件；当 $y\geqslant 5$ 时，$z\geqslant 5$，于是 $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leqslant\frac{2}{5}$，$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leqslant\frac{1}{2}+\frac{2}{5}<1$，不存在符合条件的 z. 因此，当 $x=2$ 时，只有两组解：

$$\begin{cases}x=2,\\y=3,\\z=6;\end{cases}\qquad\begin{cases}x=2,\\y=4,\\z=4.\end{cases}$$

若 $x=3$，则 $y\geqslant 3$. 当 $y=3$ 时，显然，只有一组解：

$$\begin{cases}x=3,\\y=3,\\z=3.\end{cases}$$

当 $y\geqslant 4$ 时，$z\geqslant 4$，于是 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leqslant\frac{5}{6}<1$，无解.

综上所述，本题共有上面得到的五组解.

1·60　求最小的正整数 $n>1$，使得 $1^2,2^2,3^2,\cdots,n^2$ 的算术平均数是一个完全平方数.

（英国数学奥林匹克，1994 年）

［解］　设

$$\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n}=k^2,$$

其中 $k\in N$. 即

$$\frac{1}{6}(n+1)(2n+1)=k^2 \qquad ①$$

因为 $n\geqslant 2$，所以

$$\frac{1}{6}(n+1)(2n+1)\geqslant\frac{5}{2},$$

从而

$$k^2 \geqslant \frac{5}{2},$$

$$k \geqslant 2.$$

因为 $2n+1$ 是奇数，所以由 ① 知，n 必为奇数，令 $n = 2m-1, m \geqslant 2$，代入 ① 得

$$\frac{1}{3}m(4m-1) = k^2 \qquad ②$$

因此 m 是 3 的倍数或者 $4m-1$ 是 3 的倍数.

若 m 是 3 的倍数，则令 $m = 3t, t \in N$，代入 ② 得

$$t(12t-1) = k^2,$$

由于 t 与 $12t-1$ 互质，因此 t 与 $12t-1$ 都是完全平方数. 但

$$12t - 1 \equiv 3 \pmod 4,$$

这与“完全平方数除以 4 只能余 0 或 1” 矛盾. 所以必有 $4m-1 = 3t(t \in N)$，代入 ② 得

$$\frac{1}{4}(3t+1)t = k^2,$$

$$(3t+1)t = (2k)^2 \qquad ③$$

因为 $m = \frac{1}{4}(3t+1)$，所以 $3t+1$ 是 4 的倍数，从而 t 除以 4 的余数必为 1. 令

$$t = 4j+1 \quad (j \in N)$$

(因 $m \geqslant 2$，故 $t \geqslant 3$，从而有 $j \geqslant 1$.)

代入 ③，得

$$(3j+1)(4j+1) = k^2.$$

由于 $(4j+1)-(3j+1) = j$，而 $4j+1$ 与 j 互质，因此 $4j+1$ 与 $3j+1$ 互质，从而 $4j+1$ 与 $3j+1$ 都是完全平方数. 令

$$\begin{cases} 3j+1 = a^2, \\ 4j+1 = b^2. \end{cases} \qquad ④$$

其中 a 是不小于 2 的正整数，b 是不小于 3 的奇数. 由上式，得

$$3b^2 + 1 = 4a^2,$$

令

$$b = 2s+1, s \in N,$$

代入上式,得

$$12s(s+1)+4=4a^2,$$
$$3s(s+1)+1=a^2,$$

因为 $s(s+1)$ 必为偶数,所以 a 为奇数,且 $a\geqslant 3$. 于是,令

$$b=4c\pm 1, a=4d\pm 1,$$

这里 $c,d\in N$. 代入④,得

$$3(4c\pm 1)^2+1=4(4d\pm 1)^2,$$

展开,并化简,有

$$3c(2c\pm 1)=4d(2d\pm 1),$$

由上式可知,c 是 4 的倍数. 于是令

$$c=4e, e\in N,$$

因此,

$$b=4c\pm 1=16e\pm 1,$$

由

$$4j+1=b^2$$

得

$$j=\frac{b^2-1}{4}=\frac{(16e\pm 1)^2-1}{4}=8e(8e\pm 1),$$

于是

$$t=4j+1=32e(8e\pm 1)+1,$$

所以

$$m=\frac{1}{4}(3t+1)=24e(8e\pm 1)+1,$$

从而有

$$n=2m-1=48e(8e\pm 1)+1,$$

显然

$$n\geqslant 48\times 1\times(8\times 1-1)+1=337.$$

容易验证,$n=337$ 时

$$\begin{aligned}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n}&=\frac{1}{6}(n+1)(2n+1)\\&=\frac{1}{6}\times 338\times 675=169\times 225\\&=(13\times 15)^2.\end{aligned}$$

代数卷

综上所述，可知所求的最小的大于 1 的正整数 n 为 337.

1·61　求所有正整数 $n<200$，使得 $n^2+(n+1)^2$ 是一个完全平方数.

（北欧数学奥林匹克，1994 年）

［解］　设正整数 $n<200$，且满足

$$n^2+(n+1)^2=k^2, k\in N. \quad ①$$

那么显然有

$$k>n+1,$$

且

$$(n+1)^2=k^2-n^2=(k-n)(k+n) \quad ②$$

因为 $(n,n+1)=1$，所以由 ① 可知

$$(n,k)=1 \text{ 且 } (n+1,k)=1.$$

记

$$d=(k+n,k-n)$$

则 d 整除 $(k+n)-(k-n)=2n$. 又由 ② 知，d^2 整除 $(k-n)(k+n)=(n+1)^2$，从而 d 整除 $n+1$，于是 d 是 $2n$ 与 $n+1$ 的公约数，但 $(n,n+1)=1$，因此

$$d=1 \text{ 或 } 2.$$

当 $d=1$ 时，显然 $n+1$ 是奇数，且由 ② 可知，存在互质的正整数 $a,b(a>b\geqslant 2)$，使得

$$k+n=a^2, k-n=b^2, n+1=ab \quad ③$$

由上面三个式子中的前两式，解得

$$n=\frac{1}{2}(a^2-b^2),$$

由 ③ 式中的后一式，可知 a,b 都是奇数，且

$$ab-1=\frac{1}{2}(a^2-b^2)$$

即

$$a^2-2ba+(2-b^2)=0$$

由一元二次方程求根公式，得

$$a=b\pm\sqrt{2b^2-2}.$$

由于 $a>b$，因此舍去上式中的负号，得

$$a = b + \sqrt{2(b^2 - 1)}.$$

因为 $a, b \in N$,所以存在正整数 t,使得

$$b^2 - 1 = 2t^2, a = b + 2t, \quad ④$$

由上面两个式子中的第一式,有

$$2t^2 = (b-1)(b+1)$$

由于 b 是奇数,因此 $b-1, b+1$ 都是偶数,记

$$b - 1 = 2s, s \in N. \quad ⑤$$

则

$$b + 1 = 2(s+1).$$

于是有

$$2t^2 = 2s \cdot 2(s+1),$$

即

$$t^2 = 2s(s+1).$$

若 s 为偶数,则$(2s, s+1) = 1$,从而存在互质的正整数 c, d,使

$$2s = c^2, s + 1 = d^2, \quad ⑥$$

其中 c 为偶数,由上面三个式子,可得

$$t = cd \quad ⑦$$

由 ⑥、⑤ 可知

$$b - 1 = c^2,$$

将 ⑦ 代入 ④,有

$$a = b + 2cd$$

利用前两个式子和 ③ 的最后一式,得

$$\begin{aligned} n &= ab - 1 \\ &= (b + 2cd) \cdot b - 1 \\ &= (c^2 + 1 + 2cd)(c^2 + 1) - 1 \\ &= (c^2 + 1)^2 + 2cd(c^2 + 1) - 1 \\ &> (c^2 + 1)^2. \end{aligned}$$

由于 $n < 200$,因此由上式得

$$(c^2 + 1)^2 < 200,$$

从而

$$c^2 < 14$$

注意到 c 是偶数,所以有

$$c = 2,$$

由⑥,

$$s = 2, d^2 = 3 \text{ 矛盾.}$$

因此,s 必为奇数.

此时,$(s, 2(s+1)) = 1$.所以由 $t^2 = 2s(s+1)$ 可知,存在互质的两个正整数 c^*, d^*,使得

$$s = c^{*^2}, 2(s+1) = d^{*^2}, \quad ⑧$$

这里 c^* 是奇数,d^* 是偶数,从而

$$t = c^* d^*, \quad ⑨$$

将⑧代入⑤,有

$$b = 2c^{*^2} + 1, \quad ⑩$$

将⑨代入④,有

$$a = b + 2c^* d^* = 2c^{*^2} + 1 + 2c^* d^*, \quad ⑪$$

将上面两个式子代入③,得

$$\begin{aligned} n &= ab - 1 \\ &= (2c^{*^2} + 1 + 2c^* d^*)(2c^{*^2} + 1) - 1 \\ &= (2c^{*^2} + 1)^2 + 2c^* d^* (2c^{*^2} + 1) - 1 \\ &> (2c^{*^2} + 1)^2, \end{aligned}$$

由 $n < 200$,得

$$(2c^{*^2} + 1)^2 < 200,$$

从而有

$$2c^{*^2} + 1 < 15.$$

由于 c^* 是奇数,因此

$$c^* = 1.$$

由⑧得

$$s = 1, d^* = 2.$$

由⑩、⑪得

$$b = 3, a = 7.$$

由③得

$$n = ab - 1 = 20.$$

当 $d=2$ 时,因为 $(k+n,k-n)=d$,所以 $k+n$ 和 $k-n$ 都是偶数.因为 $(k,n)=1$,所以 k 和 n 都是奇数.因为 $\left(\frac{k+n}{2},\frac{k-n}{2}\right)=1$,且 $(n+1)^2=2^2\cdot\frac{k+n}{2}\cdot\frac{k-n}{2}$,所以存在互质的正整数 a^*,b^*,使得

$$\frac{k+n}{2}=a^{*2},\frac{k-n}{2}=b^{*2},\frac{1}{2}(n+1)=a^*b^*, \tag{12}$$

显然,其中 $a^*>b^*$,且

$$a^{*2}-b^{*2}=n. \tag{13}$$

代入 ⑫ 的第三式,得

$$\frac{1}{2}(a^{*2}-b^{*2}+1)=a^*b^*,$$

即

$$a^{*2}-2b^*a^*+(1-b^{*2})=0.$$

由一元二次方程求根公式,得

$$a^*=b^*+\sqrt{2b^{*2}-1},$$

这里已由 $a^*>b^*$ 删去了另一根,因为 $a^*,b^*\in N$,所以存在正整数 t^*,使得

$$2b^{*2}-1=t^{*2},a^*=b^*+t^*. \tag{14}$$

若 $b^*=1$,则

$$t^*=1,a^*=2.$$

代入 ⑬,得

$$n=3.$$

若 $b^*\geqslant 2$,则 $t^*\geqslant 2$,t^* 是奇数.记

$$t^*=2t+1,t\in N.$$

代入 ⑭,得

$$2b^{*2}-1=(2t+1)^2.$$

即

$$b^{*2}=2t^2+2t+1.$$

可见 b^* 是奇数.因为 $b^*\geqslant 2$,所以

$$2b^{*2}-1>b^{*2}.$$

从而

$$a^* = b^* + \sqrt{2b^{*2} - 1} > 2b^*.$$

于是

$$n + 1 = 2a^* b^* > 4b^{*2},$$

因为　$n < 200,$

所以　$4b^{*2} < 200,$

即　$b^{*2} < 50.$

注意 b^* 是奇数,可知

$$b^* \in \{3,5,7\}$$

由 ⑭,$b^* = 3$ 和 7 时,$t^{*2} = 17$ 或 97,矛盾;而当 $b^* = 5$ 时,有 $t^* = 7, a^* = 12$,从而由 ⑬,得

$$n = a^{*2} - b^{*2} = 119.$$

经检验,$n = 3,20,119$ 时,都满足本题的条件.因此,$n = 3,20,119$ 是本题的所有解.

第3节　性质

1·62　试证如果 x,y,z 及 $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$ 都是有理数,那么,$\sqrt{x}$,$\sqrt{y}$,$\sqrt{z}$ 也是有理数.

(波兰数学奥林匹克,1957年).

[证]　设 $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = w,$

依题中条件,w 是有理数.则

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = w - \sqrt{z}.$$

将此式两边平方,得

$$x + y + 2\sqrt{xy} = w^2 - 2w\sqrt{z} + z.$$

由此得

$$2\sqrt{xy} = w^2 + z - x - y - 2w\sqrt{z}. \qquad ①$$

将 ① 式两端再次平方,得

$$4xy = (w^2 + z - x - y)^2 + 4w^2 z - 4w(w^2 + z - x - y)\sqrt{z},$$

即

$$4w(w^2+z-x-y)\sqrt{z}=(w^2+z-x-y)^2+4w^2z-4xy. \quad ②$$

当 $w(w^2+z-x-y)\neq 0$ 时,由等式②推知

$$\sqrt{z}=\frac{(w^2+z-x-y)^2+4w^2z-4xy}{4w(w^2+z-x-y)}.$$

在这种情形下,显然$\sqrt{z}$是有理数.

当 $w(w^2+z-x-y)=0$ 时,有两种可能:

(1) 若 $w=0$,那么$\sqrt{x}=\sqrt{y}=\sqrt{z}=0$.

(2) 若 $w\neq 0$,而 $w^2+z-x-y=0$. 于是从等式①得到$2\sqrt{xy}=-2w\sqrt{z}$. 因为数$2\sqrt{xy}$与$2w\sqrt{z}$非负. 所以从后一等式推知它们都等于零,也即$2w\sqrt{z}=0$. 但 $w\neq 0$,所以$\sqrt{z}=0$.

综上,$\sqrt{z}$是有理数. 类似地可以证明$\sqrt{x}$与$\sqrt{y}$也是有理数.

1·63 在实数 a 的无穷十进制展开式中有一切数字,设 v_n 是这个展开式中长为 n 的不同数字段的个数,证明:如果对于某一个 n,条件 $V_n\leqslant n+8$ 成立,那么数 a 是有理数.

(第17届全苏数学奥林匹克,1983年)

[证] 显然 $v_1=10$ 且 $v_n\leqslant v_{n+1}$

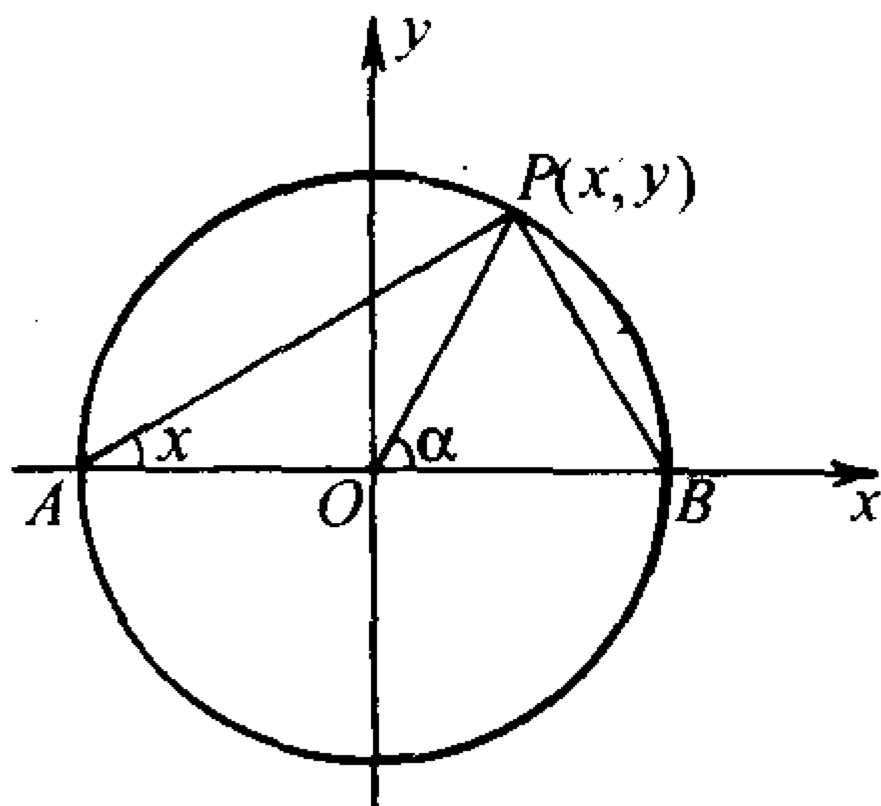
如果对于一切 n 有 $v_{n+1}>v_n$,则

$$\begin{aligned}v_n&\geqslant v_{n-1}+1\geqslant v_{n-2}+2\geqslant\cdots\\&\geqslant v_1+n-1\\&=n+9>n+8.\end{aligned}$$

此与题设矛盾,因此,必存在某个自然数 n,能使 $v_n=v_{n+1}$,从而这个小数是循环小数,即这个小数是有理数.

1·64 试证任意一个角的正弦和余弦可以用有理数表示的充要条件是:这个角的半角的正切或者是有理数,或者是不确定的.

(匈牙利数学奥林匹克,1908年)



[证] 如图建立直角坐标系,使单位圆的圆心与坐标原点重合,以 O 为顶点,Ox 轴为始边作角 α,则有

$$\cos\alpha=x,\quad \sin\alpha=y,$$

其中 x 和 y 是单位圆周上点 p 的坐标.

因为 $\angle PAO=\frac{\alpha}{2}$，若直线 AP 的斜率为 m，即 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=m$，则直线 BP 的斜率等于 $-\frac{1}{m}$. 若 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 都是有理数，则直线 AP 的斜率 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ 也是有理数，其中若 $\alpha=2k\pi+\pi(k\in Z)$，则 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ 不确定. 反之，若 $m=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ 是有理数，则由直线 AP 和直线 BP 的方程

$$y=m(x+1) \text{ 和 } y=-\frac{1}{m}(x-1),$$

不难求出它们交点 P 的坐标是有理数，即 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 都是有理数. 若 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ 不确定，则容易得到这时 $\cos\alpha=-1$，$\sin\alpha=0$，即 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 也是有理数.

1·65　证明：数 x 为有理数当且仅当在数列 $x, x+1, x+2, x+3, \cdots$ 中可选出三个不同的项构成等比数列.

（第 25 届加拿大数学奥林匹克，1993 年）

［解］　充分性：假设 $x+a, x+b, x+c$ 是等比数列，其中 a、b、c 是非负整数，且 $0\leqslant a<b<c$，则

$$(x+a)(x+c)=(x+b)^2,$$

即
$$(a+c)x+ac=2bx+b^2,$$

或
$$(a+c-2b)x=b^2-ac.$$

若 $a+c=2b$，则 $b^2=ac=a(2b-a)$，即 $(a-b)^2=0$，从而 $a=b$，矛盾.（或由 $b^2=ac\leqslant\left(\frac{a+c}{2}\right)^2=b^2$ 知 $a=c$ 矛盾.）

因此，$a+c-2b\neq0$，从而得 $x=\frac{b^2-ac}{a+c-2b}$ 是有理数.

必要性：若 x 为有理数，则可选取足够大的自然数 n，使

$$x+n>0.$$

设 $x+n=\frac{h}{k}$，其中 h, k 都是自然数，因为条件

$$\frac{h}{k}\left(\frac{h}{k}+c\right)=\left(\frac{h}{k}+b\right)^2$$

等价于 $C=\frac{k}{h}\left(\frac{2bh}{k}+b^2\right)=2b+\frac{b^2k}{h}$,

因此选取 $b=h, c=2h+kh$

就有 $x+n=\frac{h}{k}, x+n+b=\frac{h(1+k)}{k}$,

$$
\begin{aligned}
x+n+c&=\frac{h}{k}(1+2k+k^2)\\
&=\frac{h}{k}(1+k)^2
\end{aligned}
$$

组成一等比数列.

1·66 数 $\sin\frac{\pi}{18}\sin\frac{3\pi}{18}\sin\frac{5\pi}{18}\sin\frac{7\pi}{18}\sin\frac{9\pi}{18}$ 是否为有理数?

(波兰数学奥林匹克,1976 年)

[解] 由倍角公式得

$$
\begin{aligned}
\sin\frac{8\pi}{18}&=2\sin\frac{4\pi}{18}\cos\frac{4\pi}{18}=4\sin\frac{2\pi}{18}\cos\frac{2\pi}{18}\cos\frac{4\pi}{18}\\
&=8\sin\frac{\pi}{18}\cos\frac{\pi}{18}\cos\frac{2\pi}{18}\cos\frac{4\pi}{18}.
\end{aligned}
$$

注意到 $\cos\alpha=\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)$,知

$$
\sin\frac{8\pi}{18}=8\sin\frac{\pi}{18}\sin\frac{8\pi}{18}\sin\frac{7\pi}{18}\sin\frac{5\pi}{18}.
$$

因此 $\sin\frac{\pi}{18}\sin\frac{5\pi}{18}\sin\frac{7\pi}{18}=\frac{1}{8}$.

而 $\sin\frac{3\pi}{18}=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}, \sin\frac{9\pi}{18}=\sin\frac{\pi}{2}=1$,所以

$$
\sin\frac{\pi}{18}\sin\frac{3\pi}{18}\sin\frac{5\pi}{18}\sin\frac{7\pi}{18}\sin\frac{9\pi}{18}=\frac{1}{16}.
$$

从而得知题中的数是有理数.

1·67 试证如果 n 是自然数,那么

$$
(\sqrt{2}-1)^n=\sqrt{m}-\sqrt{m-1},
$$

这里 m 是一个自然数.

(波兰数学奥林匹克,1953 年)

[证] 首先,我们证明一个辅助命题:对任何自然数 n,存在自然数 a,b,使

$$\begin{cases}(1-\sqrt{2})^n=\sqrt{a^2}-\sqrt{2b^2},\\ a^2-2b^2=(-1)^n.\end{cases}$$

当 $n=1$ 时,结论正确.事实上,取 $a=b=1$ 即可.假定 $n=k$ 时结论成立.那么当 $n=k+1$ 时,

$$\begin{aligned}&(1-\sqrt{2})^{k+1}=(1-\sqrt{2})^k(1-\sqrt{2})=(\sqrt{a^2}-\sqrt{2b^2})(1-\sqrt{2})\\ =&(a-b\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=a+2b-(a+b)\sqrt{2}\\ =&\sqrt{(a+2b)^2}-\sqrt{2(a+b)^2}=\sqrt{a_1^2}-\sqrt{2b_1^2}.\end{aligned}$$

这里 a_1,b_1 是自然数,且

$$\begin{aligned}a_1^2-2b_1^2&=(a+2b)^2-2(a+b)^2\\ &=-a^2+2b^2\\ &=-(a^2-2b^2)\\ &=(-1)^k(-1)\\ &=(-1)^{k+1}.\end{aligned}$$

这说明当 $n=k+1$ 时结论也正确,从而得知辅助命题对任何自然数 n 成立.

应用这个命题,不难推出本题结论.事实上,若 n 为偶数,则

$$(\sqrt{2}-1)^n=(1-\sqrt{2})^n=\sqrt{a^2}-\sqrt{2b^2}.$$

其中 a,b 是自然数,因而 $a^2,2b^2$ 也是自然数,而且 $a^2-2b^2=1$.

若 n 是奇数,则

$$(\sqrt{2}-1)^n=-(1-\sqrt{2})^n=\sqrt{2b^2}-\sqrt{a^2},$$

这里 $2b^2,a^2$ 是自然数,而且

$$2b^2-a^2=-(a^2-2b^2)=-(-1)=1.$$

1·68　对整数 $n,n\geqslant 2$,试确定满足条件

$$a^n=a+1,b^{2n}=b+3a$$

的正实数 a,b 的大小,并证明之.

(第 22 届美国数学奥林匹克,1993 年)

[解]　我们将证明对每个 $n\geqslant 2$,有 $a>b$.

事实上,显然 $a\neq 1$,于是我们有

$$(a+1)^2>4a,$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{2n}=\frac{b+3a}{(a+1)^2}<\frac{b+3a}{4a}\qquad ①$$

假如 $b \geqslant a$，则

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{2n} \geqslant \frac{b}{a} \geqslant \frac{b+3a}{4a}.$$

此与 ① 式矛盾，故 $a > b$.

1·69　试证如果将和数

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}+\cdots+\frac{1}{1984\cdot 1985\cdot 1986}$$

表示为最简分数形式，那么该分数的分子将被 1987 整除.

（第 13 届全俄数学奥林匹克，1987 年）

［解］　该和式共662个（偶数）加项. 将与首末两项等距的项相加，得到的分数可写成

$$\frac{(1987-\overline{3m+1})(1987-\overline{3m+2})(1987-\overline{3m+3})+(3m+1)(3m+2)(3m+3)}{(3m+1)(3m+2)(3m+3)(1987-\overline{3m+1})(1987-\overline{3m+2})(1987-\overline{3m+3})}$$

$$=\frac{1987Mm}{(3m+1)(3m+2)(3m+3)(1987-\overline{3m+1})(1987-\overline{3m+2})(1987-\overline{3m+3})}$$

其中 $m=0,1,2,\cdots,330$，Mm 为整数.

形如这样的分数相加，和数的分子仍有因数 1987. 注意到 1987 是素数，且大于公分母中的每个因数，所以当和数化为最简分数时，分子仍保留因数 1987，所以它被 1987 整除.

注　这个命题的条件可推广为如下形式：

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}+\cdots+\frac{1}{(p-3)(p-2)(p-1)},$$

其中 $p=6k+1$，$(k\in Z)$，且为素数.

1·70　n 为非负整数，$d_0,d_1,d_2,\cdots,d_n$ 为0，1或2. $d_0+3d_1+\cdots+3^kd_k+\cdots+3^nd_n$ 是正整数的平方. 证明：在 $0\leqslant i\leqslant n$ 中至少有一个 i，使 $d_i=1$.

（澳大利亚数学奥林匹克，1989 年）

［证］　易知平方数除以 3 余数为 0 或 1. 如果 $d_0\neq 1$，则 $d_0=0$，从而

$$3(d_1+3d_2+\cdots+3^{n-1}d_n)$$

是平方数，括号中的数应被 3 整除. 即 $d_1=0$. 于是 $d_2+3d_3+\cdots+3^{n-2}d_n$ 是正整数的平方.

依此类推，如果 d_i 均不为 1，那么逐步得出 $d_2,d_3,\cdots,d_n$ 均必须为

0,这与 $d_0+3d_1+\cdots+3^n d_n$ 为正整数矛盾.

故本题结论成立.

1·71　设正整数 n 的不同因数的个数为 $N(n)$. 例如 24 有因数 1,2,3,4,6,8,12,24. 所以 $N(24)=8$. 试确定 $N(1)+N(2)+\cdots+N(1989)$ 是奇数还是偶数.

（澳大利亚数学奥林匹克,1989 年）

［解］　由于 d 是 n 的因数时,$\frac{n}{d}$ 也是 n 的因数,并且只有 n 为完全平方数,即 $d=\sqrt{n}$ 时,$d=\frac{n}{d}$,所以,一般情况下,n 的因数是成对(d 与 $\frac{n}{d}$ 是一对)出现的,只有在 n 为完全平方数时,有一个因数 $\sqrt{n}$ 不能配对,这就表明当且仅当 n 为完全平方数时,$N(n)$ 为奇数.

由于 $45^2>1989>44^2$,因此,1,2,…,1989 中有 44 个完全平方数,即和式中有 44 个奇数,从而和式是偶数.

1·72　给定了 $2n$ 个不同的数 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n$,并将它们按如下法则填入方格表,即在位于第 i 行和第 j 列相交处的方格内填入数 a_j+b_j,证明:如果各列数的乘积相等,那么各行数的乘积亦相等.

（第 25 届全苏数学奥林匹克,1991 年）

［证］　我们来考察多项式

$$f(x)=\prod_{i=1}^{n}(x+a_i)-\prod_{j=1}^{n}(x-b_j),$$

其次数低于 n,如果对一切 $j=1,\cdots,n$,都有 $f(b_j)=\prod_{i=1}^{n}(a_i+b_j)=c$,则多项式 $f(x)-c$ 至少有 n 个不同的根,因此可知对一切 x 都有 $f(x)-c=0$,从而有

$$C=f(-a_i)=-\prod_{j=1}^{n}(-a_i-b_j)$$

$$=(-1)^{n+1}\prod_{j=1}^{n}(a_i+b_j),$$

此即为所证.

1·73　在 $n\times n$ 的正方形表格中任意地填上 1 或者 -1,n 为奇数,在每一列的下面写上这一列中所有数的乘积,而在每一行的右边写

上这一行中所有数的乘积，证明：所写的 $2n$ 个乘积的和不等于零.

（第2届全俄数学奥林匹克，1962年）

[证] 设 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 为每一行的乘积，$q_1,q_2,\cdots,q_n$ 为每一列的乘积，那么

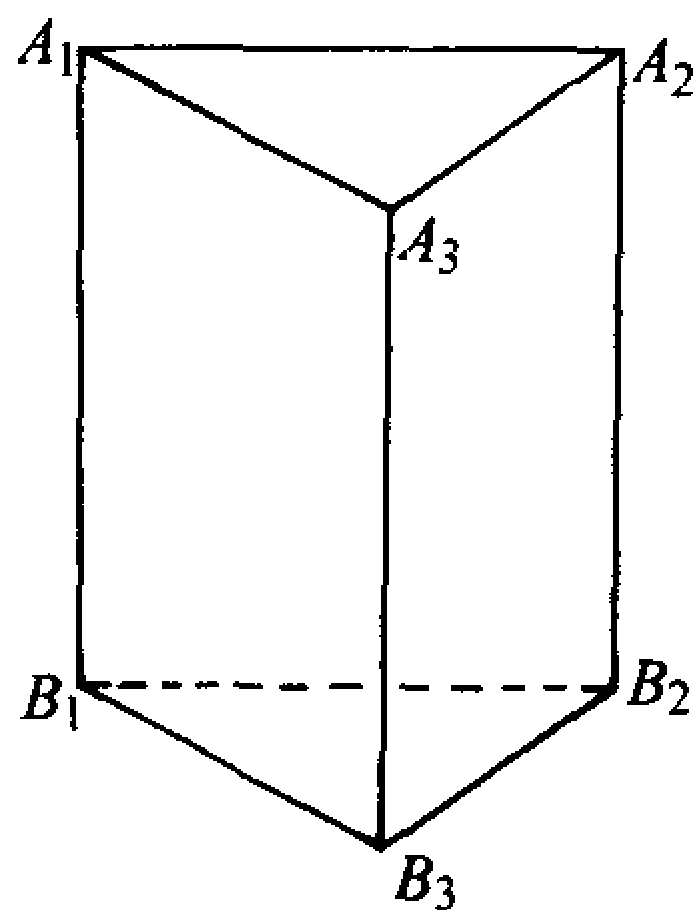
$$p_1\cdot p_2\cdots p_n = q_1q_2\cdots q_n$$

因此在 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 中以及在 $q_1,q_2,\cdots,q_n$ 中 -1 的个数的奇偶性相同.不妨设在 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 中以及在 $q_1,q_2,\cdots,q_n$ 中 -1 的个数都是奇数，又因为 n 是奇数，所以其中 $+1$ 的个数都是偶数，因此在 $p_1,p_2,\cdots,p_n,q_1,q_2,\cdots,q_n$ 中 -1 的个数都是奇数的2倍，而 $+1$ 的个数是偶数的2倍，故 $p_1+p_2+\cdots+p_n+q_1+q_2+\cdots+q_n\neq 0$.

1·74 将三棱柱的每一个顶点标上一个数，使每一个顶点所标上的数等于所有相交于这个顶点的棱的另一个端点所标上的数的算术平均值.试证：三棱柱的顶点所对应的所有六个数都相等.

（匈牙利数学奥林匹克，1935年）

[证] 如图所示，A_1,A_2,A_3 和 B_1,B_2,B_3 分别表示三棱柱的上底面的顶点和下底面的顶点，a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 是标在这些顶点的数.



不妨设 a_1 为上述6个数中最小的数，则有 $a_1=\dfrac{a_2+a_3+b_1}{3}$，因为 n 个数的算术平均值不小于这 n 个数中的最小的数，而 a_1 不大于 a_2,a_3,b_1 中的任何一个，所以这四个数应该相等.因此 b_1 也是上面6个数中最小的数，同理可得 $b_1=b_2=b_3=a_1$.于是，上述的6个数都相等.

1·75 设 n 是大于6的自然数，$a_1,a_2,\cdots,a_k$ 是所有小于 n 且与 n 互素的自然数，如果

$$a_2-a_1=a_3-a_2=\cdots=a_k-a_{k-1}>0,$$

求证：n 或者是素数或者是2的某个正整数幂.

（第32届国际数学奥林匹克，1991年）

[证] 令 $M=\{a_1,a_2,\cdots,a_{k-1},a_k\}$，

因为 $(1,n)=1,(n-1,n)=1$，故必有 $a_1=1,a_k=n-1$.令 $d=a_2$

$-a_1>0$,则 M 可写成:

$$M=\{1,1+d,1+2d,\cdots,n-1\}$$

下面就 d 的值分别讨论:

若 $d=1$,则 $M=\{1,2,\cdots,n-1\}$,即 n 与所有小于它的自然数互素,所以 n 为一素数.

若 $d=2$,则 $M=\{1,3,5,\cdots,n-1\}$,即 n 是偶数,且与一切小于 n 的奇数互素,故 n 是 2 的乘幂.

若 $d\geqslant3$,则 $3\notin M$,即$(3,n)>1$,故 $3\mid n$.由 $n-1=1+(k-1)d$,得 $n-2=(k-1)d$,若 $3\mid d$,则 $3\mid 2$,此不可能,故 $3\nmid d$,又 $1+d\in M$,若有 $3\mid 1+d$,则$(1+d,n)\geqslant3$,矛盾,故 $3\nmid 1+d$.由此得 $3\mid d-1$,$3\mid d+2$,从而 $3\mid 1+2d$,即 $1+2d$ 不在 M 中,这意味着 M 中只有两个数:$1,n-1$.

不难证明:小于 n 且与 n 互素的自然数只有 1 和 $n-1$ 时,自然数 n 只有 3 种可能:$n=3,n=4,n=6$,均与 $n>6$ 矛盾.故 $d\geqslant3$ 不可能出现,命题得证.

1·76 设 a_n 为下述自然数N的个数:N的各位数字之和为n 且每位数字只能取 1,3 或 4.求证 a_{2n} 是完全平方数,这里 $n=1,2,\cdots$.

(中国高中数学联赛,1991 年)

[证] 设 $N=\overline{x_1x_2\cdots x_k}$,其中 $x_1,x_2,\cdots,x_k\in\{1,3,4\}$,且 $x_1+x_2+\cdots+x_k=n(n>4)$.若删去 x_k,则由于 x_k 可取 1,3,4,因此 $x_1+x_2+\cdots+x_{k-1}$ 分别可取 $n-1,n-3,n-4$.故有

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-3}+a_{n-4}\quad(n>4).$$

作数列$\{f_n\}$,它满足

$$f_0=1,f_1=1,f_n=f_{n-1}+f_{n-2}\quad(n>1).$$

我们猜想:$a_{2n-1}=f_{n-1}f_n$, ①

$a_{2n}=f_n^2$. ②

当 $n=1,2$ 时,$a_1=1,a_2=1,a_3=2,a_4=4$,

显然 ①、② 都成立.

设当 $n=k-1,k$ 时,①、② 成立,即

$$a_{2k-3}=f_{k-2}f_{k-1},$$

$$a_{2k-1}=f_{k-1}f_k,$$

$$a_{2k-2} = f_{k-1}^2,$$
$$a_{2k} = f_k^2,$$

于是,当 $n = k + 1$ 时,

$$\begin{aligned} a_{2k+1} &= a_{2k} + a_{2k-2} + a_{2k-3} \\ &= f_k^2 + f_{k-1}^2 + f_{k-2}f_{k-1} \\ &= f_k^2 + f_{k-1}(f_{k-1} + f_{k-2}) \\ &= f_k^2 + f_{k-1}f_k \\ &= f_k(f_k + f_{k-1}) \\ &= f_kf_{k+1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{k+2} &= a_{2k+1} + a_{2k-1} + a_{2k-2} \\ &= f_kf_{k+1} + f_{k-1}f_k + f_{k-1}^2 \\ &= f_kf_{k+1} + f_{k-1}(f_k + f_{k-1}) \\ &= f_kf_{k+1} + f_{k-1}f_{k+1} \\ &= f_{k+1}(f_k + f_{k-1}) \\ &= f_{k+1}^2. \end{aligned}$$

这就是说,当 $n = k + 1$ 时,①、② 也成立.

根据数学归纳原理,对于任意自然数 n,①、② 都成立,故 a_{2n} 是完全平方数($n = 1,2,\cdots$).

1·77　给定自然数 n,考虑形式为$\dfrac{1}{pq}$ 的一切分数,其中 p、q 互质,$0 < p < q \leqslant n, p + q > n$. 证明:所有那样的分数之和等于$\dfrac{1}{2}$.

（第 3 届全苏数学奥林匹克,1969 年）

[证]　当 $n = 2$ 时,命题显然成立.

设当 $n = k$ 时命题成立,即 $n = k$ 时符合题目要求的所有分数之和等于$\dfrac{1}{2}$.

则当 $n = k + 1$ 时,应在 $n = k$ 时所对应的所有分数中,去掉所有分数$\dfrac{1}{p(k + 1 - p)}$,并且补充所有形如$\dfrac{1}{p(k + 1)}$ 和 $\dfrac{1}{(k + 1 - p)(k + 1)}$ 的分数(这里 p、$k + 1$ 互质,且 $0 < p < k + 1$).由

于

$$\frac{1}{p(k+1-p)}=\frac{1}{p(k+1)}+\frac{1}{(k+1-p)(k+1)},$$

因而所有分数的总和不变.这就是说,$n=k+1$时,符合题目要求的所有分数之和仍等于$\frac{1}{2}$.

根据数学归纳原理,对于任意自然数 n,原命题成立.

1·78　对正整数 $n\geqslant 1$ 的一个划分 π,是指将 n 分成一个或若干个正整数之和,且按非减顺序排列(如 $n=4$,划分 π 有 $1+1+1+1$, $1+1+2$, $1+3$, $2+2$, 4).对任一划分 π,定义 $A(\pi)$ 为划分 π 中数1出现的个数,定义 $B(\pi)$ 为划分 π 中出现的不同数字的个数(如对 $n=13$ 的一个划分 π:$1+1+2+2+2+5$ 而言,$A(\pi)=2$, $B(\pi)=3$).

求证:对任意正整数 n,其所有划分 π 的 $A(\pi)$ 之和等于 $B(\pi)$ 之和.

(第15届美国数学奥林匹克,1986年)

[证]　设 $p(n)$ 表示对正整数 n 的划分个数,且令 $P(0)=1$.

我们首先证明:对任意正整数 n,其所有划分 π 的 $A(\pi)$ 之和等于

$$p(n-1)+p(n-2)+\cdots+p(0).$$

事实上,我们可对 $A(\pi)$ 之和计算如下:对每一个至少有一个"1"的划分拿去第一个"1",这种情况将发生 $P(n-1)$ 次,即对 n 的所有划分 π 中,第一个数是"1"的划分有 $p(n-1)$ 个;同理对 n 的所有划分 π 中第二个数"1"的划分有 $p(n-2)$ 个;…;对 n 的所有划分 π 中第 $n-1$ 个数是"1"的划分有 $p(1)=1$ 个;对 n 的所有划分 π 中第 n 个数是"1"的划分有 $p(0)=1$ 个.

所以 $A(\pi)$ 的和等于

$$p(n-1)+p(n-2)+\cdots+p(0).$$

我们再来证明:对任意正整数 n,其划分 π 的 $B(\pi)$ 之和等于

$$p(n-1)+p(n-2)+\cdots+p(0).$$

事实上,我们可设想一个有 $p(n)$ 行 n 列的矩阵.

若划分 $\pi_i(i=1,2,\cdots,p(n))$ 中有数字 $d(1\leqslant d\leqslant n)$,则在第 i 行,第 d 列的位置上打一个"√",我们用两种不同的方法计算打"√"数.

(1) 各行分别计"√"数 $= B(\pi i)(i = 1,2,\cdots,p(n))$，再将这 $p(n)$ 个数相加，即为 $B(\pi)$ 之和；

(2) 各列分别计"√"数.

由于对 n 的所有含 d 的划分与对 $n-d$ 的所有划分是一一对应的，所以第 d 列中的"√"数应为 $p(n-d)(d = 1,2,\cdots,n)$. 再将这 n 个数相加得

$$p(n-1) + p(n-2) + \cdots + p(0).$$

由(1)、(2)可知，$B(\pi)$ 之和等于

$$p(n-1) + p(n-2) + \cdots + p(0).$$

综上所述，命题得证.

1·79 自然数 k 具有性质：如果 n 被 k 整除，那么，由 n 的数字按相反次序写成的数也能被 k 整除. 证明 k 是 99 的因子.

（第 1 届全苏数学奥林匹克，1967 年）

[证] 因为对于满足条件的任意自然数 k，都存在能被 k 整除且首位数字为 1 的数，并且由题意可知，把这个数的数字按相反次序写成的数也能被 k 整除且末位数字为 1，所以 k 与 10 互质.

另一方面，对于满足条件的任意自然数 k，都存在从数字 500 开始的且能被 k 整除的数 $500abc\cdots z$（$a,b,c,\cdots,z$ 是这个数的数字），因此能被 k 整除的数还有：

(1) $z\cdots cba005$，

(2) 数和

$$\begin{array}{r} z\cdots cba00\,500\cdots0 \\ +\qquad\qquad 500abc\cdots z \\ \hline z\cdots cba01000abc\cdots z \end{array}$$

(3) 上述和的反序数 $z\cdots ba00010ab\cdots z$

(4) 数差

$$\begin{array}{r} z\cdots ba01000abc\cdots z \\ -\ z\cdots ba00010abc\cdots z \\ \hline 990000\cdots0 \end{array}$$

这就是说，$990000\cdots0$ 能被 k 整除. 又因为 k 与 10 互质，所以 99 能被 k 整除.

1·80 试证前 n 个自然数的和整除前 n 个自然数的积的充分且

必要条件为 $n+1$ 不是奇素数.

（第 24 届加拿大数学奥林匹克，1992 年）

[证]　前 n 个自然数的和为 $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$，前 n 个自然数的积为 $1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n=n!$.

充分性：$n+1$ 不是奇素数，则 $n+1$ 必为偶数或可约奇数.

(1) 若 $n+1$ 为偶数，则 n 为奇数，

当 $n=1$ 时命题显然成立；

当 $n\geqslant 3$ 时，有 $\frac{n+1}{2}\leqslant n-1$.

$$\frac{n+1}{2}\mid(n-1)!,$$

因此有 $\frac{n(n+1)}{2}\mid(n-1)!\cdot n$，

即 $(1+2+\cdots+n)\mid 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n$.

(2) 若 $n+1$ 为可约奇数，则 n 为偶数，设 $n+1=k_1\cdot k_2$，

则有 $k_1,k_2\leqslant\frac{n+1}{3}\leqslant n-1$.

若 $k_1\neq k_2$，则有 $k_1\cdot k_2\mid(n-1)!$，

即 $n+1\mid(n-1)!$，因此有 $\frac{n(n+1)}{2}\mid n!$.

若 $k_1=k_2=p$，则 $p\geqslant 3, n-1=p^2-2\geqslant 3p-2=2p+(p-2)>2p$，$(n-1)!$ 为多于 $2p$ 个连续自然数的乘积，

因此有 $p^2\mid(n-1)!$，进而 $\frac{np^2}{2}\mid n(n-1)!$

即　$\frac{n(n+1)}{2}\mid n!$.

必要性：若 $n+1$ 为奇素数，由于

$$(1+2+3+\cdots+n)\mid 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n,$$

即 $\frac{n(n+1)}{2}\mid n!$，

则有 $n+1\mid p$（p 为不大于 n 的某个数），这是不可能的，因此 $n+1$ 不是奇素数.

1·81　证明：1984 个 连续正整数的平方和不是一个整数的平

方.

(第 16 届加拿大数学奥林匹克,1984 年)

[证] 设 1984 个连续正整数的平方和为

$$S = n^2 + (n+1)^2 + \cdots + (n+1983)^2$$

则
$$\begin{aligned} S &= 1984n^2 + 1983 \times 1984n + \frac{1983 \times 1984 \times 3967}{6} \\ &= 1984n(n+1983) + 32 \times 31 \times 661 \times 3967 \\ &= 32 \times [62n(n+1983) + 31 \times 661 \times 3967]. \end{aligned}$$

由于 $62n(n+1983) + 31 \times 661 \times 3967$ 是奇数,因此 S 能被 32 整除;但不能被 64 整除,故 S 不是完全平方数.

1·82 证明:所有形如$\frac{1}{mn}$的数之和不是整数,其中 m,n 是自然数,且 $1 \leqslant m < n \leqslant 1986$.

(第 20 届全苏数学奥林匹克,1986 年)

[证] 在 1 至 1986 的数中,被 3^6 整除的数有两个:$729 = 3^6$ 和 $1458 = 2 \cdot 3^6$, 除$\frac{1}{729 \cdot 1458}$外,通过求公分母得所有分数的和为分数$\frac{a}{3^{11} \cdot b}$,其中 a 为整数,b 不被 3 整除.因此所有形如$\frac{1}{mn}$的数的和不可能是整数.

1·83 证明:一个正整数是至少两个连续正整数的和,必须而且只需它不是 2 的幂.

(第 8 届加拿大数学奥林匹克,1976 年)

[证] 如果 n 是两个或更多个连续正整数的和,那么可设

$$n = k + (k+1) + \cdots + (k+l) = \frac{(2k+l)(l+1)}{2}.$$

若 l 是偶数,则 n 有奇因子 $l+1$,从而 n 不是 2 的幂;若 l 是奇数,则 n 有奇因子 $2k+l$,从而 n 也不是 2 的幂.

反过来,如果 n 不是 2 的幂,那么可设

$$n = 2^r(2t+1), (r \geqslant 0, t \geqslant 1)$$

若 $t < 2^r$,则

$$n = (2^r - t) + (2^r - t + 1) + \cdots + (2^r - 1) + 2^r + (2^r + 1) + \cdots + (2^r + t);$$

若 $t \geqslant 2^r$，则

$$n = (t - 2^r + 1) + (t - 2^r + 2) + \cdots + (2^r + t).$$

这样，n 都表示成了两个或更多个的连续正整数的和.

1·84 （在下面三个小题中不用数表、计算尺等作为辅助工具.）

（1） 证明：满足 $x = \dfrac{x^2+1}{198}$ 的 x 值在 $\dfrac{1}{198}$ 和 $197 \cdot 99494949\cdots$ 之间；

（2） 用(1)的结果证明 $\sqrt{2} < 1.41421356$；

（3） $\sqrt{2} < 1.41421356$ 对吗？

（第 4 届加拿大数学奥林匹克，1972 年）

[解] （1） 由已知方程得

$$x^2 - 198x + 1 = 0,$$

解之得 $x_1 = 99 + \sqrt{99^2 - 1} = 99 + 70\sqrt{2}$，

$x_2 = 99 - 70\sqrt{2}$.

显然，$x_1 = \dfrac{x_1^2+1}{198} > \dfrac{1}{198}$，$x_2 = \dfrac{x_2^2+1}{198} > \dfrac{1}{198}$.

又由 $x_1 + x_2 = 198$，$x_1x_2 = 1$ 可知

$$x_1 = 198 - x_2 < 198 - \frac{1}{198} = 197.99494949\cdots,$$

$$x_2 = 198 - x_1 < 198 - \frac{1}{198} = 197.99494949\cdots.$$

故 $\dfrac{1}{198} < x_1 < 197.99494949\cdots$，

$\dfrac{1}{198} < x_2 < 197.99494949\cdots$.

（2） 由(1)知

$$\sqrt{2} = \frac{x_1 - 99}{70} < \frac{197.99494949\cdots - 99}{70} < 1.41\dot{4}2135\dot{7}.$$

（3） $(1.41421356)^2 = 1.9999999932\cdots < 2$，

因此 $\sqrt{2} > 1.41421357$.

1·85 设 a、b、n 都是自然数，并且 $a > 1$，$b > 1$，$n > 1$；又 A_{n-1} 和 A_n 是 a 进制数，B_{n-1} 和 B_n 是 b 进制数，并且 A_{n-1}、A_n、B_{n-1} 和 B_n 可

表示为如下形式:

$$A_{n-1}=\overline{x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_0},A_n=\overline{x_nx_{n-1}\cdots x_0},$$

（a 进制写出）

$$B_{n-1}=\overline{x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_0},B_n=\overline{x_nx_{n-1}\cdots x_0}.$$

（b 进制写出）

此外 $x_n\neq 0,x_{n-1}\neq 0$,试证:

当 $a>b$ 时,$\dfrac{A_{n-1}}{A_n}<\dfrac{B_{n-1}}{B_n}$.

（第 12 届国际数学奥林匹克,1970 年）

［证］ 因为

$$A_{n-1}=x_{n-1}a^{n-1}+x_{n-2}a^{n-2}+\cdots+x_1a+x_0,$$

$$A_n=x_na^n+x_{n-1}a^{n-1}+\cdots+x_1a+x_0.$$

并且 $a>1$,所以

$$\frac{A_{n-1}}{A_n}=1-\frac{x_na^n}{x_na^n+x_{n-1}a^{n-1}+\cdots+x_1a+x_0}$$

$$=1-\frac{x_n}{x_n+x_{n-1}\cdot\frac{1}{a}+\cdots+x_1\cdot\frac{1}{a^{n-1}}+x_0\cdot\frac{1}{a^n}};$$

同理 $$\frac{B_{n-1}}{B_n}=1-\frac{x_n}{x_n+x_{n-1}\cdot\frac{1}{b}+\cdots+x_1\cdot\frac{1}{b^{n-1}}+x_0\cdot\frac{1}{b^n}},$$

又因为 $a>b>1$,即 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$,并且 $x_n\neq 0,x_{n-1}\neq 0$,

所以 $$x_n+x_{n-1}\cdot\frac{1}{a}+\cdots+x_1\cdot\frac{1}{a^{n-1}}+x_0\cdot\frac{1}{a^n}$$

$$<x_n+x_{n-1}\cdot\frac{1}{b}+\cdots+x_1\cdot\frac{1}{b^{n-1}}+x_0\cdot\frac{1}{b^n},$$

从而 $$\frac{x_n}{x_n+x_{n-1}\cdot\frac{1}{a}+\cdots+x_1\cdot\frac{1}{a^{n-1}}+x_0\cdot\frac{1}{a^n}}$$

$$>\frac{x_n}{x_n+x_{n-1}\cdot\frac{1}{b}+\cdots+x_1\cdot\frac{1}{b^{n-1}}+x_0\cdot\frac{1}{b^n}}$$

于是 $$\frac{A_{n-1}}{A_n} < \frac{B_{n-1}}{B_n}.$$

1・86 证明:任何不超过 $n!$ 的自然数至多可以表示为 n 个这样的数之和,这些数中,任何两个都不相等,并且每个数都是 $n!$ 的因子.

(第 2 届全苏数学奥林匹克,1968 年)

[证] 当 $n = 1$ 时,结论显然成立.

假设 $n = k$ 时,结论成立.

设 $a \leqslant (n+1)!$ 且 $a = d(n+1) + r$,其中 $d \leqslant n!$,$0 \leqslant r \leqslant n + 1$.

由归纳假设

$$d = d_1 + d_2 + \cdots + d_l,$$

这里 d_i 是 $n!$ 的不同的因数,且 $l \leqslant n$,于是,我们有

$$a = d_1(n+1) + \cdots + d_l(n+1) + r$$

在这个和中的加数不多于 $n+1$ 个,每一个加数都是 $(n+1)!$ 的因数而且它们都不相同,故命题得证.

1・87 已知 n 个正整数 $a_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 满足 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n \leqslant 2n$,其中任意两个 $a_i, a_j(i \neq j)$ 的最小公倍数都大于 $2n$. 求证:

$$a_1 > \left[\frac{2n}{3}\right]$$

其中 $\left[\frac{2n}{3}\right]$ 表示 $\frac{2n}{3}$ 的整数部分.

(中国上海市高中数学竞赛,1994 年)

[证] 将每个 a_i 写成

$$2^{\alpha_i}(2t_i - 1)$$

的形式,其中 α_i 为非负整数,t_i 为自然数. 对任意的 $i \neq j$,因为 $[a_i, a_j] > 2n$,所以

$$2t_i - 1 \neq 2t_j - 1.$$

于是,$2t_1 - 1, 2t_2 - 1, \cdots, 2t_n - 1$ 是 $1, 3, \cdots, 2n-1$ 的一个排列.

若 $a_1 \leqslant \left[\frac{2n}{3}\right]$,则 $3a_1 \leqslant 2n$,即

$$2^{\alpha_1}(6t_1 - 3) \leqslant 2n.$$

故 $6t_1-3$ 也是不超过 $2n-1$ 的正奇数,从而存在 $j\neq 1$,使

$$6t_1-3=2t_j-1.$$

于是$[a_1,a_j]=\begin{cases}2^{\alpha_j}(2t_j-1)=3a_1\leqslant 2n,\alpha_1\geqslant\alpha_j\text{ 时},\\2^{\alpha_j}(2t_j-1)=a_j\leqslant 2n,\alpha_1<\alpha_j\text{ 时}.\end{cases}$

此与题设$[a_1,a_j]>2n$ 矛盾.因此

$$a_1>\left[\frac{2n}{3}\right].$$

1·88　设 a,b,c,d 为自然数,并且 $ab=cd$.试问:$a+b+c+d$ 能否为质数?

(第 58 届莫斯科数学奥林匹克,1996 年)

[解]　$a+b+c+d$ 不可能是质数.

事实上,因为 $ab=cd$,所以存在正整数 c_1,c_2,d_1,d_2,使

$$c=c_1c_2,d=d_1d_2,a=c_1d_1,b=c_2d_2.$$

于是

$$\begin{aligned}a+b+c+d&=c_1d_1+c_2d_2+c_1c_2+d_1d_2\\&=(c_1+d_2)(d_1+c_2)\end{aligned}$$

为合数.

1·89　证明:无论在数 12008 的两个0之间添加多少个3,所得的数都可被 19 整除.

(第 58 届莫斯科数学奥林匹克,1996 年)

[证]　我们有

$$\begin{aligned}120\underbrace{33\cdots3}_{n\text{个}3}08&=12\underbrace{66\cdots6}_{n+1\text{个}6}40-6\underbrace{33\cdots3}_{n+1\text{个}3}2\\&=20\times6\underbrace{33\cdots3}_{n+1\text{个}3}2-6\underbrace{33\cdots3}_{n+1\text{个}3}2\\&=19\times6\underbrace{33\cdots3}_{n+1\text{个}3}2\end{aligned}$$

故原命题得证.

1·90　设 a 和 b 是两个给定的自然数,使得$\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}$是整数.证明:$a$ 和 b 的最大公约数不超过 $\sqrt{a+b}$.

(第 20 届俄罗斯数学奥林匹克决赛,1994 年)

[解]　因为

$$\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}=\frac{a^2+b^2+a+b}{ab},$$

$$(a,b)\mid a,(a,b)\mid b$$

所以,若记$(a,b)=d$,我们就有

$$d^2\mid ab,$$

$$d^2\mid a^2+b^2,$$

$$ab\mid(a^2+b^2+a+b).$$

于是,我们推得

$$d^2\mid(a+b),$$

$$d^2\leqslant a+b,$$

$$d\leqslant\sqrt{a+b},$$

即 $(a,b)\leqslant\sqrt{a+b}$.

1·91 证明:存在无穷多个合数 n,使 $3^{n-1}-2^{n-1}$ 是 n 的倍数.

(第58届莫斯科数学奥林匹克,1996年)

[证] 令

$$n=3^{2^t}-2^{2^t},t\geqslant 2,t\in N.$$

则 $n>5$,且 n 是 $3^2-2^2=5$ 的倍数,从而 n 是合数.

下面先证明:$3^{2^t}-1$ 可被 2^{t+2} 整除,其中 $t\geqslant 2$.

事实上,$t=2$ 时,$3^{2^t}-1=80,2^{t+2}=16$,此时 $3^{2^t}-1$ 可被 2^{t+1} 整除.

设 $t=k$ 时,仍能整除.

当 $t=k+1$ 时,我们有

$$3^{2^{k+1}}-1=(3^{2^k}-1)(3^{2^k}+1)$$

由归纳假设 $3^{2^k}-1$ 可被 2^{k+2} 整除,而 $3^{2^k}+1$ 可被2整除,所以$3^{2^{k+1}}-1$ 可被 $2^{(k+1)+2}$ 整除.

由数学归纳法原理,对于任意自然数 $t\geqslant 2,3^{2^t}-1$ 可被 2^{t+2} 整除.

注意到 2^{2^t} 可被 2^{t+2} 整除.所以 $n-1$ 可被 2^{t+2} 整除.设 $n-1=2^{t+2}\cdot B$,B 为整数.则 $3^{n-1}-2^{n-1}=(3^{2^t})^{4B}-(2^{2^t})^{4B}$

是 $3^{2^t}-2^{2^t}$ 的倍数,即是 n 的倍数.

1·92　x,y,p,n,k 都是自然数,且满足

$$x^n + y^n = p^k.$$

证明:如果 n 是大于1的奇数,p 是奇素数,那么 n 可以表示为 p 的以自然数为指数的幂.

(第22届俄罗斯数学奥林匹克决赛,1996年)

[证]　设 m 为 x,y 的最大公约数,则

$x = mx_1, y = my_1, x_1, y_1 \in N, (x_1, y_1) = 1.$

由已知得

$$m^n(x_1{}^n + y_1{}^n) = p^k$$

于是存在非负整数 α,使

$$m = p^\alpha,$$

$$x_1{}^n + y_1{}^n = p^{k-n\alpha}. \quad ①$$

由于 n 是奇数,因此

$$(x_1 + y_1)A = p^{k-n\alpha},$$

其中　$A = x_1{}^{n-1} - x_1{}^{n-2}y_1 + x_1{}^{n-3}y_1{}^2 - \cdots - x_1y_1{}^{n-2} + y_1{}^{n-1}.$

由于 p 是奇素数,因此 $p \geqslant 3, x_1 + y_1 \geqslant 3$, x_1 与 y_1 中至少有一个大于1.而 $n > 1$,所以 $A > 1$.于是 $x_1 + y_1$ 和 A 都能被 P 整除,且存在自然数 β,使

$$x_1 + y_1 = P^\beta.$$

于是

$$A = x_1{}^{n-1} - x_1{}^{n-2}(p^\beta - x_1) + x_1{}^{n-3}(p^\beta - x_1)^2 - \cdots - x_1(p^\beta - x_1)^{n-2} + (p^\beta - x_1)^{n-1}$$

$$= nx_1{}^{n-1} + B \cdot P,$$

其中 B 是某个整数.

由①可得,p 与 x_1 互素.(否则,p 可以整除 x_1,于是 p 也可以整除 y_1,与 $(x_1, y_1) = 1$ 矛盾.)

因为 A 是 P 的倍数,所以 $nx_1{}^{n-1}$ 是 P 的倍数,从而 n 是 p 的倍数.设 $n = pq$,于是由原方程得

$$(x^p)^q + (y^p)^q = p^k.$$

如果 $q = 1$,那么 $n = p$.

如果 $q > 1$,那么 q 为大于1的奇数,用上面证明的结果可知,q 是

p 的倍数.

不断重复这个过程,便可以推出,对某个自然数 l,有

$$n = p^l.$$

因此原命题得证.

1・93 设 p 是 n 个实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的乘积.若 $p-x_k$ 是奇数,$k=1,2,\cdots,n$.证明:$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都是无理数.

(世界城市际数学联赛,1995 年)

[证] 设 $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$ 是整数,并且 a,b,c,d 都是整数,$(a,b)=1$,$(c,d)=1,b>0,d>0$,则由

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$$

可知

$$b \mid (ad-bc),$$

从而有

$$b \mid ad, b \mid d.$$

同理可得 $d \mid b$.因此 $b=d$.

假设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都是有理数,$x_i=\frac{a_i}{b_i}$,其中 a_i,b_i 是整数,$(a_i,b_i)=1,b_i>0$,则

$$\frac{a_i}{b_i}-\frac{a_j}{b_j}=(p-x_j)-(p-x_i)$$

是整数,从而有

$$b_i=b_j,1\leqslant i<j\leqslant n.$$

于是

$$p-x_1=\frac{a_1a_2\cdots a_n}{b_1^n}-\frac{a_1}{b_1}$$

是整数,从而有

$$b_1^n=b_1,(n\geqslant 2),$$

$$b_1=1,$$

故 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都是整数.

若 $p=x_1x_2\cdots x_n$ 是奇数,则 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都是奇数,$p-x_k$ 都是

偶数，$k=1,2,\cdots,n$，矛盾.

若 $p=x_1x_2\cdots x_n$ 是偶数，则 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中至少存在一个 x_k 是偶数，从而 $p-x_k$ 是偶数，矛盾.

综上所述，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中至少有一个 x_k 是无理数.

由 $x_i-x_k=(p-x_k)-(p-x_i)$ 是整数，其中

$$1\leqslant i\leqslant n, i\neq k,$$

可知 x_i 是无理数.

故 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都是无理数.

1·94 n 是一个正奇数，求证：$n(n-1)^{(n-1)^n+1}+n$ 是 $((n-1)^n+1)^2$ 的倍数.这个性质对偶数 n 成立吗？证明你的结论.

（罗马尼亚国家队选拔考试，1994 年）

［证］ 当 n 为正奇数时，

$$\begin{aligned}(n-1)^n+1&=n^n-c_n^1\cdot n^{n-1}+\cdots-c_n^{n-2}n^2+c_n^{n-1}\cdot n\\&=n^2q,\end{aligned}$$

这里 q 是一个正奇数，且与 n 互质.于是

$$(n-1)^{n^2q}=n^{n^2q}-c_{n^2q}^1\cdot n^{n^2q-1}+\cdots+c_{n^2q}^1\cdot n-1,$$

可见

$$(n-1)^{n^2q}+1=n^3\cdot r, \qquad ①$$

这里 r 是一个正奇数.另一方面，

$$\begin{aligned}&(n-1)^{n^2q}+1=((n-1)^n)^{nq}+1\\&=((n-1)^n+1)\cdot(((n-1)^n)^{nq-1}-((n-1)^n)^{nq-2}+\cdots+1)\end{aligned}$$

其中

$$(n-1)^n+1=n^2q,$$

$$\begin{aligned}&((n-1)^n)^{nq-1}-((n-1)^n)^{nq-2}+\cdots\cdots+1\\&\equiv(-1)^{nq-1}-(-1)^{nq-2}+\cdots\cdots+1 \quad (\bmod q)\\&\equiv\underbrace{1+1+\cdots\cdots+1}_{nq\text{个}1} \quad (\bmod q)\\&\equiv 0(\bmod q)\end{aligned}$$

因此

$$(n-1)^{n^2q}+1=q^2s, \qquad ②$$

这里 s 是一个正奇数.

由 ① 和 ②,并注意到$(n,q)=1$,可知:

$$(n-1)^{n^2q}+1=n^3q^2t,$$

这里 t 是一个正奇数,

因此 $\quad n(n-1)^{n^2q}+n=n^4q^2t,$

注意到

$$(n-1)^n+1=n^2q,$$

所以有

$$n(n-1)^{n^2q}+n=((n-1)^n+1)^2t.$$

从而命题的第一部分得证.

当 n 为偶数时,这个性质不一定成立.

由于

$$2(2-1)^{(2-1)^2+1}+2=4,$$
$$((2-1)^2+1)^2=4,$$

因此,$n=2$ 时这个性质还成立.

当偶数 $n\geqslant 4$ 时,由于

$$(n-1)^n\equiv -1(\bmod((n-1)^n+1))$$

且

$$(n-1)^n+1=kn+2,$$

这里 k 是一个正整数,因此

$$\begin{aligned}(n-1)^{(n-1)^n+1}&=(n-1)^{kn+2}\\&=((n-1)^n)^k\cdot(n-1)^2\\&\equiv(-1)^k\cdot(n-1)^2\quad(\bmod((n-1)^n+1)),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}n(n-1)^{(n-1)^n+1}+n&=n((n-1)^{(n-1)^n+1}+1)\\&\equiv n\cdot((-1)^k(n-1)^2+1)\\&\quad(\bmod((n-1)^n+1))\end{aligned}$$

在上式中,由于当 $n\geqslant 4$ 时,

$$\begin{aligned}&(n-1)^n+1-|n((-1)^k(n-1)^2+1)|\\\geqslant&(n-1)^n+1-n[n(n-1)^2+1]\\=&(n-1)\{(n-1)[(n-1)^{n-2}-n]-1\}\\>&0\end{aligned}$$

(上面用到了$(n-1)^{n-2}>n \quad (n\geqslant 4)$时.这一点很容易用数学归纳法来证明.)

因此

$$n(n-1)^{(n-1)^n+1}+n\not\equiv 0(\bmod((n-1)^n+1)),$$

从而 $n(n-1)^{(n-1)^n+1}+n$不是 $(n-1)^n+1$的倍数,所以,当n为不小于4的偶数时,题目所述的性质不成立.

1·95　设m和n是已知的正整数,m以十进制表示时位数为d,其中$d\leqslant n$.求 $(10^n-1)m$以十进制表示时所有各位数字的总和.

(中国香港数学奥林匹克,1994年)

[解]　用$f(x)$表示正整数x的各位数字的总和,设$m=\overline{a_1a_2\cdots a_d00\cdots0}$,$a_d\neq 0$.

把$(10^n-1)m=m\cdot 10^n-m$写成减法的竖式,并注意$d\leqslant n$,有

$$\begin{array}{lr} & a_1a_2\cdots a_d00\cdots0\,00\cdots000\cdots0 \\ -) & a_1a_2\cdots a_d00\cdots0 \\ \hline \end{array}$$

因此

$$\begin{aligned} f((10^n-1)m) &= f(\overline{a_1a_2\cdots a_d}\cdot 10^n-\overline{a_1a_2\cdots a_d}) \\ &= f(m)-1+(9n+1)-f(m) \\ &= 9n, \end{aligned}$$

即所求的各位数字的总和是$9n$.

第4节　存在性

1·96　是否存在自然数x,y,使x^2+y与y^2+x都是整数的平方.

(第6届全俄数学奥林匹克,1966年)

[解]　不妨设$x\geqslant y$,那么

$$x^2<x^2+y\leqslant x^2+x<(x+1)^2,$$

即x^2+y不是整数的平方,故这样的x,y不存在.

1·97　给定n个不同的正数$a_1,a_2,\cdots,a_n$,用它们组成一切可能的和(分别有1至n个加数),证明:在这些和中至少存在$n(n+1)/2$个

两两不同的数.

(第 3 届全俄数学奥林匹克,1963 年)

[证] 不妨设 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.

我们研究数表

$$a_1, a_2, \cdots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$$

$$a_1 + a_n, a_2 + a_n, \cdots, a_{n-2} + a_n, a_{n-1} + a_n,$$

$$a_1 + a_{n-1} + a_n, \cdots, \cdots, a_{n-2} + a_{n-1} + a_n,$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

在这个数表中,同一行的右边的数都大于它左边的数,而下一行中的最小的数都大于它上一行中的最大的数,因此,所写的数两两不同,它们的个数为 $n + (n-1) + \cdots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$.

从而命题得证.

1·98 给定两个正质数 p、q. 整数 n 如果能表示成 $n = px + qy$ 的形式,其中 x, y 为非负整数,则称 n 是“好数”;在相反的情形,则称为是“坏数”.

(1) 证明:存在整数 c,使整数 n 与 $c - n$ 中始终一个是好数,一个是坏数.

(2) 坏的非负数共有多少个?

(第 5 届全俄数学奥林匹克,1965 年)

[解] (1) 因为 p 和 q 是互质的自然数,所以每一个整数 z 能表示为 $z = px + qy$.

任何一个这样的表示都能由某一个固定的 $z = pa + qb$ 按照一般公式 $z = p(a - qt) + q(b + pt)$ 得到,其中 t 是整数,并且存在使 $0 \leqslant x \leqslant q - 1$ 的惟一表示.

我们把每一个整数 z 与整数对 (x, y) 相对应,使得

$$0 \leqslant x \leqslant q - 1, z = px + qy.$$

显然不同的数与不同的数对相对应,而且仅当 $y \geqslant 0$ 时,z 是好数. (如果 $z = px + qy$ 是好数,那么当 $x = qt + \gamma \geqslant 0$ 时有 $z = px + q(y + t), 0 \leqslant \gamma \leqslant q - 1$.)

如果 $z = px + qy$ 是好数 $(0 \leqslant x \leqslant q - 1)$,那么 $z' = (q - 1 - x)p$

$+(-1-y)q$ 是坏数;反过来,如果 z 是坏数,则 z' 是好数,而且点 (x, y) 和 $(q-1-x, -1-y)$ 关于 $(x_0, y_0) = \left(\frac{q-1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 对称.

因为 $z + z' = pq - p - q = 2z_0 = c$,所以数 z 和 z' 所对应的点关于数 $z_0 = px_0 + qy_0 = \frac{(pq-p-q)}{2}$ 所对应的点对称.

这就是说,好数 z 对应于坏数 $c - z = z'$,反过来也对,于是(1)得证.

(2) 因为最小的好数等于 0,所以最大的坏数将是 c,于是共有 $\frac{c+1}{2} = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$ 个坏数.

1·99 求证:对任何正整数 n,都存在 n 个相继的正整数,它们都不是素数的整数幂.

(第 30 届国际数学奥林匹克,1989 年)

[证] 令 $N = [(n+1)!]^2 + 1$,

则 $N+1, N+2, \cdots, N+n$ 这 n 个相继的正整数就满足要求.

若不然,则有正整数 $j, m, 1 \leqslant j \leqslant n, m \geqslant 2$ 和素数 p,使得

$$N + j = p^m. \quad ①$$

由 N 的定义可见,$(1+j) \mid (N+j)$,但 $(1+j)^2 \nmid (N+j)$.

由 ① 知,$1 + j = p^k$,k 为正整数,但 $(1+j)^2 \mid (N-1)$,

故 $p^{2k} \mid (N-1)$,

从而 $p^{k+1} \mid (N-1)$,所以 $p^{k+1} \nmid (N+j)$.

由 ① 知必有 $m = k$.

从而有 $N + j = p^m = p^k = 1 + j$,矛盾.这就证明了 $N+1, N+2, \cdots, N+n$ 即为所求.

1·100 给定正数 $a_1, a_2, \cdots, a_m, b_1, b_2, \cdots, b_n$,且 $a_1 + a_2 + \cdots + a_m = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$.证明:可以把至多 $m+n-1$ 个正数放到 m 行 n 列的空表格中去,使得第 i 行的一切数之和等于 a_i,而第 j 列的一切数之和等于 b_j.

(第 2 届全俄数学奥林匹克,1962 年)

[解] 当 $m + n = 2$ 时,即 $m = n = 1$ 时,结论显然成立.

假设当 $m + n = k$ 时结论成立,当 $m + n = k + 1$ 时,从 $m + n$ 个

已知数 $a_1,a_2,\cdots,a_m,b_1,b_2,\cdots,b_n$ 中挑选最小的一个，不妨设它为 a_1，我们把 a_1 放到左上角，接着剪去第一行，剩下的是对 $(m-1)\times n$ 的表格及 $a_2,\cdots,a_m,b_1-a_1,b_2,\cdots,b_n$ 来解这个题.

可以把至多 $(m-1)+n-1$ 个正数放到剩下的 $(m-1)\times n$ 的空表格中去，使得第 i 行的一切数之和等于 $a_i+1(i=1,2,3,\cdots,m-1)$，第一列的一切数之和为 b_1-a_1，第 j 列的一切数之和为 $b_j(j=2,3,\cdots,n)$，再加上已经放到原 $m\times n$ 表格左上角的 a_1，这样就有至多 $m+n-1$ 个正数，放到 $m\times n$ 的表格中，使得第 i 行的一切数之和为 $a_i(i=1,2,\cdots,m)$，第 j 列的一切数之和为 $b_j(j=1,2,\cdots,n)$.

故原命题成立.

1·101　设 p 是大于2的素数. 试证 $\frac{2}{p}$ 可以而且仅有一种办法表示成

$$\frac{2}{p}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$

的形式，这里 x,y 是不同的正整数.

（匈牙利数学奥林匹克，1933 年）

[证]　将方程

$$\frac{2}{p}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \qquad ①$$

的两边同乘以 $2xyp$，并将右边的 $2xp$ 和 $2yp$ 移到左边，且两边同加上 p^2，方程 ① 变成

$$(2x-p)(2y-p)=p^2. \qquad ②$$

因为 $x\neq y$，所以 ② 式左边的两个因子是不相同的，而它们的乘积等于 p^2，因此只可能一个因子等于 1，而另一个因子等于 p^2，不妨设

$$2x-p=1,\ 2y-p=p^2,$$

则得到方程 ① 的一组解：

$$x=\frac{p+1}{2},\ y=p\frac{p+1}{2}.$$

若将 x 和 y 互换位置，则得到方程 ① 的另一组解：

$$x=p\frac{p+1}{2},\ y=\frac{p+1}{2}.$$

方程组 ① 只有上面两组解，因此若不考虑 ① 式中 x 和 y 的次序时，$\frac{2}{p}$

只有一种办法表示成 ① 式的形式.

1·102 (1) n 个整数的积等于 n,和等于 0,证明数 n 被 4 整除.

(2) 设 n 为被 4 整除的自然数,证明可以找到 n 个整数,使其积为 n,其和为 0.

(第 18 届全苏数学奥林匹克,1984 年)

[证] (1) 如果 n 是奇数,那么由乘积等于 n 可知,n 个整数都为奇数,其和不等于 0,此与题设矛盾,故 n 为偶数.如果 n 不能被 4 整除,那么由乘积等于 n 可知,因数中只有一个偶数,因此,它们的和也不等于 0,仍与题设矛盾,故 n 必能被 4 整除.

(2) 设 $n = 4k$,如果 k 为奇数,那么

$$n = 2 \cdot (-2k) \cdot 1^{3k-2} \cdot (-1)^k,$$

如果 k 为偶数,那么

$$n = (-2) \cdot (-2k) \cdot 1^{3k} \cdot (-1)^{k-2}.$$

1·103 证明:在绝对值不超过 $2n-1$ 的任意 $2n+1$ 个不同的整数中,可以找到三个数,它们的和等于 0.

(第 17 届全苏数学奥林匹克,1983 年)

[证] 当 $n = 1$ 时,命题变为:在绝对值不超过 1 的任意 3 个不同的整数中,有 3 个数的和为 0,它显然成立.

设 $n = k$ 时命题成立,即在绝对值不超过 $2k-1$ 的任意 $2k+1$ 个不同的整数中,必有 3 个数的和为 0.

当 $n = k+1$ 时,给定绝对值不超过 $2k+1$ 的任意 $2k+3$ 个不同的整数组成的集合 A,此时我们分两种情况讨论:

(1) 如果在 A 中存在 $2k+1$ 个数,它们的绝对值不超过 $2k-1$,那么根据归纳假设,命题成立;

(2) 如果在 A 中,至少有 3 个数,它们的绝对值超过 $2k-1$,此时,数 $2k+1$ 和 $-2k-1$ 至少有 1 个在 A 中.

若数 $2k+1$ 和 $-2k-1$ 都在 A 中,我们在绝对值不超过 $2k+1$ 的所有整数中除去数 $-2k-1$,然后将余下的数分为 $2k+1$ 组:$(0, 2k+1)$,$(1, 2k)$,$(2, 2k-1)$,…,$(k, k+1)$ 以及 $(-1, -2k)$,$(-2, -2k+1)$,…,$(-k, -k-1)$.而在 A 中除去数 $-2k-1$ 外还有 $2k+2$ 个数,因此 A 中至少有这 $2k+1$ 组数中的一组数,这组数再加上数 $-2k-1$ 或 $2k+1$,其和为 0.

若数 $2k+1$ 和 $-2k-1$ 只有一个在 A 中，不妨设 $2k+1$ 在 A 中，$-2k-1$ 不在 A 中，此时数 $2k$ 和 $-2k$ 必在 A 中，我们在绝对值不超过 $2k+1$ 的所有整数中除去数 $-2k-1$，再除去数 k 和 $2k+1$，然后将余下的数分成 $2k$ 组：$(0,2k),(1,2k-1),\cdots,(k-1,k+1)$ 以及 $(-1,-2k),(-2,-2k+1),\cdots,(-k,-k-1)$. 而在 A 中本没有数 $-2k-1$，再除去数 k 和 $2k+1$ 后，至少有 $2k+1$ 个数，因此 A 中至少有这 $2k$ 组数中的一组数，这组数再加上数 $-2k$ 或 $2k+1$，其和为 0.

这就是说，$n=k+1$ 时命题也成立.

故对于任意自然数 n，原命题都成立.

1·104　自然数 p 和 q 互质，区间 $[0,1]$ 被分成 $p+q$ 个相等的区间. 证明：除去最左边的和最右边的两个区间外，在其余的每个区间中有下列 $p+q-2$ 个数中的一个数：

$$\frac{1}{p},\frac{2}{p},\cdots,\frac{p-1}{p},\frac{1}{q},\frac{2}{q},\cdots,\frac{q-1}{q}.$$

（第 13 届全苏数学奥林匹克，1979 年）

［证］　因为 p、q 互质，那么它们之中的每一个数都与 $n=p+q$ 互质. 因此 $\frac{i}{p},\frac{j}{q},\frac{i+j}{n}(i=1,2,\cdots,p-1;j=1,2,\cdots,q-1)$ 都不相同. 又因为 $\frac{i+j}{p+q}$ 总在 $\frac{i}{p}$ 和 $\frac{j}{q}$ 之间. 所以所有分数 $\frac{i}{p}$、$\frac{j}{q}$ 都在不同的区间 $\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]$ 中，$k=1,2,\cdots,n-2$.

1·105　设 n 是奇数，试证有在 $2n$ 个整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 $b_1,b_2,\cdots,b_n$，使得对任意整数 $k(0<k<n)$，下列 $3n$ 个数

$$a_i+a_{i+1},a_i+b_i,b_i+b_{i+k},i=1,2,\cdots,n.$$

被 $3n$ 除所得余数互不相同，其中 $a_{n+1}=a_1,b_{n+j}=b_j(0<j<n)$.

（第 8 届中国中学生数学冬令营，1993 年）

注　中国中学生数学冬令营即中国数学奥林匹克.

［解］　令

$a_i=3i-2,b_i=3i-3,i=1,2,\cdots,n$，则这 $2n$ 个数满足题中的要求.

事实上，因为

$$d_i=a_i+a_{i+1}=6i-1,i=1,2,\cdots,n.$$

$$d_j - d_i = 6(j-i), 1 \leqslant i < j \leqslant n,$$

故知 $d_j - d_i < 6n$，且 $d_j - d_i$ 为 3 的偶数倍，又因已知 n 为奇数，所以 $d_j - d_i \not\equiv 0 \pmod{3n}$，这就证明了 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 除以 $3n$ 所得的余数互不相同.

同理，因为

$$\beta_i = a_i + b_i = 6i - 5, \qquad i = 1, 2, \cdots, n,$$

$$\beta_j - \beta_i = 6(j-i) \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant n;$$

$$\gamma_i = b_i + b_{i+k} = 6i - 6 + 3k, i = 1, 2, \cdots, n.$$

$$\gamma_j - \gamma_i = 6(j-i), \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant n,$$

故知 $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$ 与 $\{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n\}$ 分别为与 $3n$ 互不相同的整数，又因对任意 i，$(1 \leqslant i \leqslant n)$ 都有

$$d_i \equiv 2, \beta_i \equiv 1, \gamma_i \equiv 0 \pmod 3,$$

所以这 $3n$ 个数被 $3n$ 除所得的余数各不相同.

1・106 *MO* 牌足球由若干多边形皮块用三种不同颜色的丝线缝制而成，它有以下特点：

(1) 任一多边形皮块的一条边恰与另一多边形皮块的同样长的一条边用一种颜色的丝线缝合；

(2) 足球上每一结点，恰好是三个多边形的顶点，每一结点的三条缝线的颜色互不相同.

试证可以在 *MO* 牌足球的每一结点上放置一个不等于 1 的复数，使得每一多边形的所有顶点上放置的复数的乘积都等于 1.

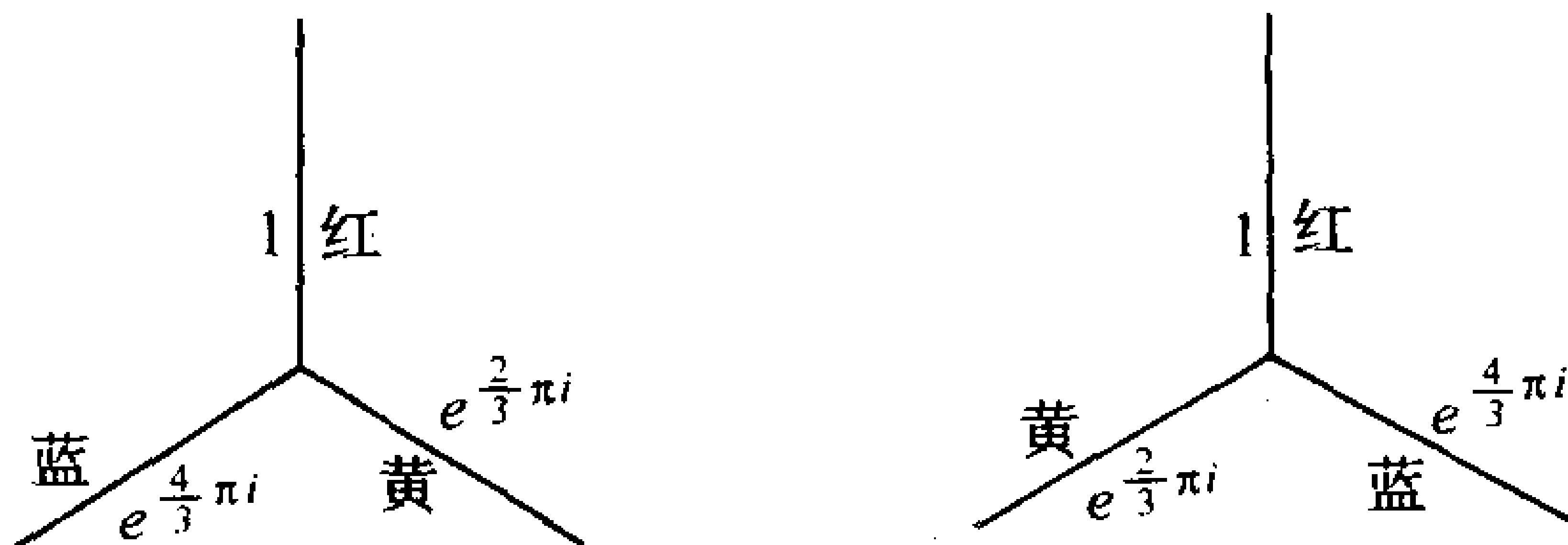
（第 6 届中国中学生数学冬令营，1991 年）

［证］ 设三种颜色是红、黄、蓝.

我们把所有结点分成两类，如果按逆时针方向绕结点一周，过该结点的三条缝线的颜色依次为红、蓝、黄，那么称这个结点为第一类结点，如果依次为红、黄、蓝，那么称这个结点为第二类结点(如下页图).

只要在第一类结点和第二类结点分别放置复数 $e^{\frac{2}{3}\pi i}$ 和 $e^{\frac{4}{3}\pi i}$，便满足题中要求.

事实上，我们可令红、黄、蓝三色缝线分别对应于复数 $1, e^{\frac{2}{3}\pi i}$，$e^{\frac{4}{3}\pi i}$，于是每一多边形皮块的任一条边都放置了一个复数.



对于任一多边形 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，设其顶点按逆时针顺序排列并设它的顶点 A_i 放置的复数为α_i，它的边 $A_{i-1}A_i$ 放置的复数为β_i（$i=1,2,\cdots,n$），且 $A_0=A_n$，则 $\alpha_i=\dfrac{\beta_{i+1}}{\beta_i}(i=1,2,\cdots,n)$，且 $\beta_{n+1}=\beta_1$.

注意到

$$\frac{e^{\frac{2}{3}\pi i}}{1}=\frac{e^{\frac{4}{3}\pi i}}{e^{\frac{2}{3}\pi i}}=\frac{1}{e^{\frac{4}{3}\pi i}}=e^{\frac{2}{3}\pi i},$$

$$\frac{e^{\frac{4}{3}\pi i}}{1}=\frac{e^{\frac{2}{3}\pi i}}{e^{\frac{4}{3}\pi i}}=\frac{1}{e^{\frac{2}{3}\pi i}}=e^{\frac{4}{3}\pi i}.$$

因此

$$\alpha_1\cdot\alpha_2\cdots\alpha_n=\frac{\beta_2}{\beta_1}\cdot\frac{\beta_3}{\beta_2}\cdot\cdots\cdot\frac{\beta_n}{\beta_{n-1}}\cdot\frac{\beta_1}{\beta_n}=1.$$

1·107　能否把1，1，2，2，…，1986，1986 这些数排成一行，使得两个 1 之间夹着一个数，两个 2 之间夹着两个数，…，两个 1986 之间夹着一千九百八十六个数？

（第 1 届中国中学生数学冬令营，1986 年）

[证]　不可能做到. 下面用反证法证明这个结论.

由题设，若能排成，设第一个数 k 写在第 a_k 位，第二个数 k 写在第 b_k 位，则必有

$$b_k-a_k=k+1,$$

取 $k=1,2,\cdots,1986$，则

$$\sum_{k=1}^{1986}(b_k-a_k)=\sum_{k=1}^{1986}(k+1)$$

即
$$\sum_{k=1}^{1986}(b_k+a_k)-2\sum_{k=1}^{1986}a_k=\sum_{k=1}^{1986}(k+1)$$

$$1+2+3+\cdots+1986+1987+\cdots+3972-2\sum_{k=1}^{1986}a_k$$
$$=2+3+4+\cdots+1986+1987.$$
$$\frac{3972\times 3973}{2}-2\sum_{k=1}^{1986}a_k=\frac{1986\times 1989}{2},$$
$$1986\times 3937-2\sum_{k=1}^{1986}a_k$$
$$=993\times 1989.$$
此式左边为偶数,右边为奇数,因此不可能成立.

即题设所要求的排法不可能存在.

1·108 (1) 试找出两个自然数 x 和 y,使得 $xy+x$ 和 $xy+y$ 是两个不同的自然数的平方.

(2) 能否在 988 和 1991 之间找出这样的 x 和 y?

(第 25 届全苏数学奥林匹克,1991 年)

[解] (1) 取 $x=1$ 和 $y=8$,就符合题目的条件.

(2) 不妨设 $y>x$,于是有

$$x^2<xy+x<xy+y$$

设 $xy+x=(x+a)^2$, $xy+y=(x+a+b)^2$,其中 a,b 为正整数,于是两个平方数的差

$$(xy+y)-(xy+x)$$
$$=(x+a+b)^2-(x+a)^2$$
$$=b(2x+2a+b)$$
$$>2x+1.$$

即有 $\qquad y-x>2x+1,$

于是 $\qquad y>3x+1.$

这在所给定的区间是不可能的.

1·109 设 $p_1,p_2,\cdots,p_{1993}=p_0$ 为 xy 平面上相异的 1993 个点,且具有下列性质:

(1) 对每个 $i=1,2,\cdots,1993$, p_i 的坐标 x_i, y_i 都是整数.

(2) 对每个 $i=0,1,\cdots,1992$,线段 $\overline{p_ip_{i+1}}$ 除端点 p_i、p_{i+1} 外不含其他具有两坐标均为整数的点.

证明:其中至少有一个 i, $0\leqslant i\leqslant 1992$,使得线段 $\overline{p_ip_{i+1}}$ 上有一点

$Q(q_x, q_y)$ 满足 $2q_x$ 与 $2q_y$ 都是奇数.

（第 5 届亚太地区数学奥林匹克,1993 年）

[证]　设 $\overrightarrow{p_ip_{i+1}} = [u_i, v_i], i = 0,1,2,\cdots,1992$ 由 $\overline{p_ip_{i+1}}$ 线段上不含端点以外的格子点可知,u_i, v_i 互质,从而 u_i, v_i 中至少有一个奇数.若 u_i, v_i 全是奇数,那么 $\overline{p_ip_{i+1}}$ 的中点 $\left(\dfrac{u_i}{2}, \dfrac{v_i}{2}\right)$ 满足结论要求,从而命题成立;若 u_i, v_i 的奇偶性不同,则

$$u_i + v_i \equiv 1 (\bmod 2) \quad ①$$

即　$u_i + v_i$ 为奇数.

故若这 1993 条线段均不包含满足证明条件的 Q,则

$$\sum_{i=0}^{1992} (u_i + v_i) \equiv 1 (\bmod 2) \quad ②$$

但　$\sum\limits_{i=0}^{1992} \overrightarrow{p_ip_{i+1}} = \vec{0}$,故知 $\sum\limits_{i=0}^{1992} u_i = \sum\limits_{i=0}^{1992} v_i = 0$

此与 ② 互相矛盾.

于是命题得证.

1·110　若一个整数恰为一个边长为整数的直角三角形的面积(设为 $x, y, z \in N$,且 $x^2 + y^2 = z^2$)就称之为毕达哥拉斯数.求证:对每个大于 12 的正整数 n,在 n 与 $2n$ 之间必有一个毕达哥拉斯数.

（第 6 届朝鲜数学奥林匹克,1992 年）

[证]　方程 $x^2 + y^2 = z^2$ 的正整数解为

$$x = (a^2 - b^2)c,\ y = 2abc,\ z = (a^2 + b^2)c.$$

或　$$x = 2abc,\ y = (a^2 - b^2)c,\ z = (a^2 + b^2)c.$$

这里 a, b, c 为正整数,并且 $a > b$.于是直角三角形面积为 $ab(a^2 - b^2)c^2$,因此,毕达哥拉斯数具有形式:$ab(a^2 - b^2)c^2$

因为　$$\begin{aligned} ab(a^2 - b^2) &= b(a^3 - a) - a(b^3 - b) \\ &= b(a-1)a(a+1) - a(b-1)b(b+1) \\ &\equiv 0 (\bmod 6) \end{aligned}$$

所以,毕达哥拉斯数必为6的倍数,注意到,若 m 是一个毕达哥拉斯数,则 mc^2 也是毕达哥拉斯数.当 $a = 2, b = 1, c = 1$ 时可得最小的毕达哥拉斯数6,依次令 $a = 2, b = 1, c = 2$;$a = 3, b = 2, c = 1$;$a = 2, b = 1, c = 3$ 可分别得毕达哥拉斯数 24,30,54 等等.若 $13 \leqslant n \leqslant 23$,则 n

$< 24 < 2n$；若 $24 \leqslant n \leqslant 29$，则 $n < 30 < 2n$；若 $30 \leqslant n \leqslant 53$，则 $n < 54 < 2n$，……

假设 $c \geqslant 3$，那么 $6c^2 \leqslant 6(c+1)^2 \leqslant 12c^2$，因此若 $6c^2 \leqslant n \leqslant 6(c+1)^2 - 1$，则 $n < 6(c+1)^2 < 2n$. 由于 $6c^2$ 和 $6(c+1)^2$ 同为毕达哥拉斯数，由归纳法立即可证得所要求的结论.

1·111 试证任何一个正的既约真分数 $\frac{m}{n}$ 可以表示成两两互异的自然数倒数之和.

（波兰数学奥林匹克，1937 年）

[证] 取自然数 k 满足不等式 $n \leqslant 2^k$. 设 q 和 r 分别是 $2^k m$ 除以 n 的商和余数，也即 $2^k m = qn + r$，这里 $0 \leqslant r < n$. 于是

$$\frac{m}{n} = \frac{2^k m}{2^k n} = \frac{qn + r}{2^k n} = \frac{q}{2^k} + \frac{r}{2^k n}. \qquad ①$$

因为 $\frac{m}{n} < 1$，所以 $q < 2^k$.

又因为，在二进制中，数 q 可以写成

$$q = q_0 + q_1 \cdot 2 + q_2 \cdot 2^2 + \cdots + q_{k-1} \cdot 2^{k-1},$$

其中数字 $q_i = 0$ 或 1，$i = 0,1,2,\cdots,k-1$. 于是

$$\frac{q}{2^k} = q_0 \frac{1}{2^k} + q_1 \frac{1}{2^{k-1}} + q_2 \frac{1}{2^{k-2}} + \cdots + q_{k-1} \frac{1}{2}. \qquad ②$$

按定义，数 r 和 k 满足不等式 $r < n \leqslant 2^k$. 因此，在二进制下，数 r 写成

$$r = r_0 + r_1 2 + r_2 2^2 + \cdots + r_{k-1} 2^{k-1},$$

其中 $r_j = 0$ 或 1，$j = 0,1,2,\cdots,k-1$. 由此得

$$\frac{r}{2^k n} = r_0 \frac{1}{2^k n} + r_1 \frac{1}{2^{k-1} n} + \cdots + r_{k-1} \frac{1}{2n}. \qquad ③$$

另外，因为 $r < n$，所以当 $j = 0,1,\cdots,k-1$ 时，有不等式

$$r_j \frac{1}{2^{k-j} n} = \frac{r_j 2^j}{2^k n} \leqslant \frac{r}{2^k n} < \frac{1}{2^k},$$

因此，和数 ③ 中的每个非零加项小于和数 ② 中任何非零加项. 这表明和数 ② 和 ③ 含有不同的加项.

于是，由关系式①、②、③知，可将数 $\frac{m}{n}$ 表示成两两互异的 $\frac{1}{t}$ 形式的分数之和，其中 t 是自然数.

1·112　设有理数$\frac{r}{s}$的十进制小数形式是

$$\frac{r}{s}=0.k_1k_2k_3\cdots.$$

试证在数列

$$a_1=10\frac{r}{s}-k_1,a_2=10^2\frac{r}{s}-(10k_1+k_2),$$

$$a_3=10^3\frac{r}{s}-(10^2k_1+10k_2+k_3),\cdots$$

中至少有两个重合.

（匈牙利数学奥林匹克,1908年）

[证]　取有理数$\frac{r}{s}$的无穷十进制小数的m位,得到数

$$0.k_1k_2\cdots k_m=\frac{k_1}{10}+\frac{k_2}{10^2}+\cdots+\frac{k_m}{10^m},$$

它不大于$\frac{r}{s}$,而这个数加上$\frac{1}{10^m}$则大于$\frac{r}{s}$,即

$$0\leqslant\frac{r}{s}-\left(\frac{k_1}{10}+\frac{k_2}{10^2}+\cdots+\frac{k_m}{10^m}\right)<\frac{1}{10^m}.$$

将以上不等式乘以10^m,得到非负数

$$a_m=\frac{10^mr-s(10^{m-1}k_1+10^{m-2}k_2+\cdots+k_m)}{s}$$

由于$a_m<1$,因此a_m的分子只能取数$0,1,2,\cdots,s-1$中的某一个,即序列$a_1,a_2,\cdots,a_m,\cdots$的每一项可以根据它的分子等于数$0,1,2,\cdots,s-1$中的哪一个来分成$s$类,所以在序列的前$s+1$项中就一定存在两个相等的项.

1·113　如果一个数能分解成k个大于1的连续自然数的乘积,那么我们就说这个数具有性质$p(k)$.

(1) 求一数k,对于它,同时具有性质$p(k)$和$p(k+2)$的数N存在.

(2) 证明:同时具有性质$p(2)$和$p(4)$的数不存在.

（第15届全苏数学奥林匹克,1981年）

[解]　(1)$k=3$是所求的一个数.事实上,我们有

$$720 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 8 \cdot 9 \cdot 10.$$

(2) 若数 s 具有性质 $p(2)$ 和 $p(4)$，则存在自然数 m 和 n，使得

$$s = m(m+1) = n(n+1)(n+2)(n+3)$$

于是我们有

$$s + 1 = m^2 + m + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2 \qquad ①$$

但是

$$m^2 < m^2 + m + 1 < (m+1)^2,$$

因此 $m^2 + m + 1$ 不是完全平方数，此与 ① 式矛盾，故同时具有性质 $p(2)$ 和 $p(4)$ 的数不存在.

1·114　证明：$m(m+1)$ 不是任何整数的 k 次幂、其中 m 为自然数，k 为大于 1 的自然数.

（第 4 届全俄数学奥林匹克，1964 年）

[证]　假设 $m(m+1)$ 是某一个自然数的 k 次幂，因为 m 和 $m+1$ 互质，所以其中的每一个都是某一数的 k 次幂、设 $m = a^k, a \in N$. 于是，我们有

$$\begin{aligned}(a+1)^k &> (a+1)a^{k-1} \\ &= a^k + a^{k-1} \\ &\geqslant m + 1\end{aligned}$$

上式表明，$m+1$ 不能表示成某一整数的 k 次幂，矛盾.

故 $m(m+1)$ 不是任何整数的 k 次幂.

1·115　试证对于任何自然数 n，和数 $\sum\limits_{k=0}^{n} 2^{3k} C_{2n+1}^{2k+1}$ 不能被 5 整除.

（第 16 届国际数学奥林匹克，1974 年）

[证]　设 $x_m = \sum\limits_{k} 2^{3k} C_m^{2k+1} (0 < 2k+1 \leqslant m)$

$$y_m = \sum_{k} 2^{3k} C_m^{2k} (0 \leqslant 2k \leqslant m)$$

显然，当 m 为大于 1 的奇数时，x_m 即表示题中的和数.

根据组合数的性质 $C_r^{s+1} + C_r^s = C_{r+1}^{s+1}$，容易验证

$$\begin{cases} x_m + y_m = x_{m+1} & ① \\ 8x_m + y_m = y_{m+1} & ② \end{cases}$$

现在我们用数学归纳法来证明:当 m 为奇数时,x_m 不能被 5 整除;而 m 为偶数时,y_m 不能被 5 整除.

事实上,因为 $x_1=1,x_3=11,y_2=9$,故对一切 $m\leqslant 3$,结论成立.现设对一切 $m\leqslant i$,结论成立,我们要推出对一切 $m\leqslant i+1$,结论也成立.

应用①、②若干次后,可得

$$\begin{aligned}x_{m+3}&=x_{m+2}+y_{m+2}\\&=9x_{m+1}+2y_{m+1}\\&=5(5x_m+2y_m)+y_m;\\y_{m+3}&=5(17x_m+5y_m)+3x_m.\end{aligned}$$

由此推得:对于任何自然数 n,和数 $\sum\limits_{k=0}^{n}2^{3k}C_{2n+1}^{2k+1}$不能被 5 整除.

1·116　两个连续整数的平方和可以等于另一个整数的平方(如 $3^2+4^2=5^2$).

(1) 证明:当 $m=3,4,5,6$ 时,m 个连续整数的平方和不可能是另一个整数的平方.

(2) 找出 11 个连续整数的平方和是另一个整数平方的例子.

(第 4 届爱尔兰数学奥林匹克,1991 年)

[解] (1)若 x 为整数,则 $x^2\equiv 0$ 或 $1(\bmod 3)$,$x^2\equiv 0$ 或 $1(\bmod 4)$.

但 $$(x-1)^2+x^2+(x+1)^2=3x^2+2\equiv 2(\bmod 3),$$

$$\begin{aligned}&(x-1)^2+x^2+(x+1)^2+(x+2)^2\\=&4x^2+4x+6\\\equiv&2(\bmod 4),\end{aligned}$$

因此三个或四个连续整数的平方和不可能是另一个整数的平方.

同理, $$\begin{aligned}&(x-2)^2+(x-1)^2+x^2+(x+1)^2+(x+2)^2\\&=5x^2+10\\&\equiv x^2+2\\&\equiv 2\text{ 或 }3(\bmod 4).\end{aligned}$$

因此,五个连续整数的平方和也不可能是另一个整数的平方.同理可证 $m=6$ 的情况.

(2)11 个连续整数的平方和能够表示为

$$(x-5)^2+(x-4)^2+\cdots+x^2+\cdots+(x+4)^2+(x+5)^2$$

$= 11(x^2 + 10)$.

显然，当 $x = \pm 1$ 时，这是一个整数的平方.

1·117 (1) 能否把0,1,2,…,9这10个数分放到圆周上，使任何两个相邻数之差等于3、4或5?

(2) 能否把1,2,…,13分放到圆周上，使任何两个相邻数之差等于3、4或5?

(第1届全苏数学奥林匹克,1967年)

[解] (1) 显然0,1,2,8,9中的任意两个数字不可能相邻，就是说它们应该每隔一个地放在圆周上，但是上面所写数字中与7相邻的只能是2，因此，数字7不可能在其余5个位置的任何一个上，所以不可能把0,1,2,…,9这10个数分放到圆周上，使任何两个相邻数之差等于3,4或5.

(2) 数1,2,3,11,12,13中的任何两个不可能相邻；又由于这些数中只有1能与4相邻，只有13能与10相邻，因此10和4应该相邻，然而这与条件矛盾，所以不可能把1,2,…,13分放到圆周上，使任何两个相邻数之差等于3,4或5.

1·118 是否存在实数 a,b，满足：

(1) $a + b$ 为有理数，而对于每一个自然数 $n \geqslant 2$，$a^n + b^n$ 是无理数?

(2) $a + b$ 是无理数，而对于每一个自然数 $n \geqslant 2$，$a^n + b^n$ 是有理数?

(第23届全苏数学奥林匹克,1989年)

[解] (1) 满足要求的实数 a,b 存在.

事实上，可令 $a = 1 - \sqrt{2}$，$b = \sqrt{2}$，则 $a + b = 1$ 是有理数；而 $n \geqslant 2$ 时，$a^n + b^n = (1 - \sqrt{2})^n + (\sqrt{2})^n$ 是无理数.

(2) 满足要求的实数 a,b 不存在.

事实上，如果存在实数 a,b，使当 $n \geqslant 2$ 时，$a^n + b^n$ 都是有理数，那么由

$$2a^2b^2 = (a^2 + b^2)^2 - (a^4 + b^4)$$

知，a^2b^2 是有理数. 又由

$$a^2b^2(a + b) = (a^3 + b^3)(a^2 + b^2) - (a^5 + b^5)$$

知，$a + b$ 是有理数，与题目要求矛盾.

1·119 (1) 证明:能把数 1,2,…,32 摆成某种次序,使任何两数之和的一半不等于在这两个数之间的任何数.

(2) 能否把数 1,2,3,…,100 摆成某种次序,使得任何两个数和的一半不等于在这两个数之间的任何数?

(第 8 届全苏数学奥林匹克,1974 年)

[解] (1) 我们先把所有数写成一行,在左半行中写上偶数 $2k_1$,右半行中写上奇数 $2k_1+1$,同时左、右不同两半中的任意两数之和的 $\frac{1}{2}$ 不是整数,因而不包含在这两半之中.

接着再把每一半按 k_1 是偶数还是奇数分成两部分$\left(两个\frac{1}{4}\right)$,并把形式为 $4k_2,4k_2+2,4k_2+1,4k_2+3$ 的数分别放到这 4 个部分中去,左边一半中不同部分的两数之和的 $\frac{1}{2}$ 是奇数,因而不包含在这两个部分之中,同样,右边一半中不同部分的两数之和的 $\frac{1}{2}$ 是偶数,也不包含在这一半的两部分之中.

继续把每一部分按 k_2 是偶数还是奇数再分成两部分,依次类推最后得到摆法如下:

8,24,16,32,4,20,12,28,6,22,14,30,2,18,10,26,7,23,15,31,3,19,11,27,5,21,13,29,1,17,9,25.

显然这种摆法符合命题(1) 要求,故命题(1) 得证.

(2) 我们来证明这个结论对于任意数 N 成立.为此,只要证明它对 $N=2^n$ 成立(可把多余的数去掉,例如,从 $128=2^7$ 个数的摆法中可以去掉大于 100 的数,因此得到了 $N=100$ 个数的摆法).

事实上,因为摆法(1,2),(2,4,1,3) 符合要求,所以当 $n=1$ 和 $n=2$ 时,结论成立.假设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 N 个数 $1,2,\cdots,N(N=2^n)$ 的满足条件的摆法,于是

$2a_1,2a_2,\cdots,2a_N,2a_1-1,2a_2-1,\cdots,2a_N-1$ 将是 $2N$ 个数 $1,2,\cdots,2N(2N=2^{n+1})$ 的摆法:在这种摆法中,不同的两半中的数的奇偶性不同,因此不同两半中的任意两数之和的一半不是整数,它不包含在这两半之中.

如果同一半中某两数之和的一半恰等于这两数位置之间的某一个

数，那么就与归纳假设矛盾，因此，这种摆法是符合要求的摆法.

根据数学归纳原理，对于任意自然数 n，2^n 个自然数都有符合题目要求的摆法.

故原命题得证.

1·120　给定一无穷算术级数，它的每一项都是正整数，且其中一项是完全平方数，证明：这个级数有无穷多个完全平方数.

（第 3 届全俄数学奥林匹克，1963 年）

[证]　设级数的公差等于 d，且设其中一项 $a = m^2$，这里 m 为自然数.

由于当 k 为任意自然数时，数

$$\begin{aligned}(m + kd)^2 &= m^2 + 2mkd + k^2d^2 \\ &= a + d(2km + k^2d)\end{aligned}$$

都是级数的项，因此，级数有无穷项是自然数的平方.

1·121　整数9 可表示成两个连续整数的和 $9 = 4 + 5$，同时，它恰可用两种不同的方法写成连续整数和：

$$9 = 4 + 5 = 2 + 3 + 4.$$

是否有这样的整数，它可以表示成 1990 个连续整数的和，并且恰有 1990 种不同的方法表示成连续整数和.

（第 31 届国际数学奥林匹克预选题，1990 年）

[证]　我们证明 $m = 5^{10} \cdot 199^{180}$ 这个数.

(a) 可以写成 1990 个连续整数的和；

(b) 恰有 1990 种不同的方法写成连续整数和.

(a) 事实上，设 $n = \dfrac{5^9 \cdot 199^{179} - 1989}{2}$，则

$$\begin{aligned}&n + (n + 1) + \cdots + (n + 1989) \\ &= 1990n + \frac{1990 \times 1989}{2} \\ &= \frac{1990}{2} \times 5^9 \times 199^{179} \\ &= 5^{10} + 199^{180}.\end{aligned}$$

(b) 设 n 与 k 为正整数，有

$$m = n + (n + 1) + \cdots + (n + k)$$

$$= (k+1)n + \frac{k(k+1)}{2},$$

即 $\quad 2m = (k+1)(2n+k).$

$$2m = 2^1 \times 5^{10} \times 199^{180}$$

共有

$$(1+1)\times(10+1)\times(180+1) = 2\times 1991$$

个因数.将因数 a 与 $b=\dfrac{2m}{a}$ 配对,共得 1991 时,去掉 $(1,2m)$ 那一对后,剩下 1990 对,每一对因数 (a,b) 产生一组 (k,n).

设 $b>a$,则 $k=a-1$, $n=\dfrac{b-a+1}{2}$(a,b 中恰有一个是偶数,所以 n 是自然数).反之,每一组 (n,k) 产生一对因数 (a,b),所以(b)式成立.

1·122 如果正整数 n 的因数中无一个是完全平方数.求证:没有互质的正整数 x 和 y,使得 x^n+y^n 是 $(x+y)^3$ 的倍数.

(罗马尼亚国家队选拔考试,1994 年)

[证] 用反证法.

如果有互质的正整数 x 和 y,使得 x^n+y^n 是 $(x+y)^3$ 的倍数.令

$$s = x+y,$$

显然,$s \geqslant 2$.

当 n 是偶数时,

$$x^n+y^n = x^n+(s-x)^n \equiv 2x^n \pmod s.$$

由反证假设

$$x^n+y^n \equiv 0 \pmod s$$

因此有

$$2x^n \equiv 0 \pmod s.$$

因为 x 与 y 互质,所以 x 与 s 互质,从而由上式可得

$$2 \equiv 0 \pmod s$$

故 $\quad s=2$,

并推出 $\quad x=1$ 且 $y=1$.

此时 $\quad x^n+y^n=2$, $(x+y)^3=8$.显然与反证假设矛盾.

因而 n 必为奇数.当 n 为奇数时,

$$x^n+y^n = x^n+(s-x)^n$$

$$\equiv C_n^2 s^2(-x)^{n-2} + C_n^1 s(-x)^{n-1} \pmod{s^3}$$

即

$$x^n + y^n \equiv -\frac{1}{2}n(n-1)s^2x^{n-2} + nsx^{n-1} \pmod{s^3}.$$

由于 $x^n + y^n$ 是s^3的倍数,因而有整数 k,使得

$$-\frac{1}{2}n(n-1)sx^{n-2} + nx^{n-1} = ks^2$$

由上式可知,nx^{n-1} 是 s 的倍数.但 x 与s 互质,所以 n 是s 的倍数,并因此可知

$$-\frac{1}{2}n(n-1)sx^{n-2}$$

是 s^2 的倍数,从而由上面的等式又可推出 nx^{n-1} 是 s^2 的倍数,故得 n 是 s^2 的倍数,此与题设条件"n 的因数中无一个是完全平方数"矛盾.

于是,原命题得证.

1·123　求证:有无限多个正整数 n,具有下述性质:对每个具有 n 项的整数等差数列$a_1,a_2,\cdots,a_n$,集合$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$的算术平均值与标准方差都是整数.

注　对任何实数集合$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,这集合的算术平均值定义为

$$\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n);$$

这集合的标准方差定义为

$$x^* = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{x})^2}.$$

(中国台北市数学奥林匹克,1994 年)

[证]　设正整数 n 满足题设条件.

对于任一整数等差数列$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,记公差为 d.显然 d 为整数,且

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = na_1 + \frac{1}{2}n(n-1)d.$$

记

$$\overline{a} = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n),$$

则由上面两式,有

$$\overline{a} = a_1 + \frac{1}{2}(n-1)d, d \text{ 为任意整数}.$$

由上式可知,$\overline{a}$ 为整数当且仅当 n 为奇数.

现在来分析标准方差.(下设 n 是奇数.)

易知,当 n 是奇数时,有

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}(a_j - \overline{a})^2 &= \sum_{j=1}^{n}\left[a_j - a_1 - \frac{1}{2}(n-1)d\right]^2 \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left[(j-1)d - \frac{1}{2}(n-1)d\right]^2 \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left[j - \frac{1}{2}(n+1)\right]^2 d^2 \\ &= 2d^2\left[1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}(n-1)\right)^2\right] \\ &= 2d^2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}(n-1) \cdot \frac{1}{2}(n+1) \cdot n \\ &= \frac{1}{12}d^2(n^2-1)n,\end{aligned}$$

于是,标准方差

$$\begin{aligned}a^* &= \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(a_j - \overline{a})^2} = \sqrt{\frac{1}{12}d^2(n^2-1)} \\ &= d\sqrt{\frac{1}{12}(n^2-1)},\end{aligned}$$

要满足题目条件,则 a^* 是整数,从而存在非负整数 m,使得

$$\frac{1}{12}(n^2-1) = m^2,$$

即

$$n^2 - 12m^2 = 1 \qquad ①$$

显然,$m = 0$, $n = 1$ 是 ① 的一组非负整数解.

下面证明:

$$\begin{cases} m_k = \dfrac{1}{4\sqrt{3}}[(7+4\sqrt{3})^k - (7-4\sqrt{3})^k], \\ n_k = \dfrac{1}{2}[(7+4\sqrt{3})^k + (7-4\sqrt{3})^k], \quad k \in N, \end{cases}$$

是方程 ① 的全部正整数解.

事实上,对任意的 $k \in N$,

$$n_k^2 - 12m_k^2 = \frac{1}{4}[(7+4\sqrt{3})^k + (7-4\sqrt{3})^k]^2$$
$$- \frac{1}{4}[(7+4\sqrt{3})^k - (7-4\sqrt{3})^k]^2$$
$$= (7+4\sqrt{3})^k \cdot (7-4\sqrt{3})^k$$
$$= [(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})]^k$$
$$= 1,$$

因此,m_k,n_k 适合方程 ①.

又由二项式定理,有

$$m_k = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[C_k^1(4\sqrt{3}) \cdot 7^{k-1} + C_k^3(4\sqrt{3})^3 \cdot 7^{k-3} + \cdots + \begin{cases}(4\sqrt{3})^k, & k \text{ 为奇数}, \\ C_k^{k-1} \cdot 7 \cdot (4\sqrt{3})^{k-1}, & k \text{ 为偶数}.\end{cases}\right]$$

$$= 2\left[C_k^1 \cdot 7^{k-1} + C_k^3(4\sqrt{3})^2 \cdot 7^{k-3} + \cdots + \begin{cases}(4\sqrt{3})^{k-1}, & k \text{ 为奇数} \\ C_k^{k-1} \cdot 7(4\sqrt{3})^{k-2}, & k \text{ 为偶数}\end{cases}\right]$$

因此,m_k 是正整数.而

$$n_k = 7^k + C_k^2 \cdot 7^{k-2}(4\sqrt{3})^2 + \cdots + \begin{cases}C_k^{k-1}7(4\sqrt{3})^{k-1}, & k \text{ 为奇数}, \\ (4\sqrt{3})^k, & k \text{ 为偶数},\end{cases}$$

因此 n_k 也是正整数,从而(m_k, n_k),$k \in N$ 是方程 ① 的正整数解,本题得证.

注 设(m^*, n^*)是方程 ① 的任一正整数解.则

$$n^{*2} - 12m^{*2} = 1,$$

因为

$$(1, \infty) = \bigcup_{k=1}^{\infty}((7+4\sqrt{3})^{k-1}, (7+4\sqrt{3})^k],$$

且 $n^* + 2\sqrt{3}m^* > 4$,所以存在正整数 k,使得

$$(7+4\sqrt{3})^{k-1} < n^* + 2\sqrt{3}m^* \leqslant (7+4\sqrt{3})^k,$$

两端同乘以$(7-4\sqrt{3})^{k-1}$,有

$$1 < (n^* + 2\sqrt{3}m^*)(7-4\sqrt{3})^{k-1} \leqslant 7+4\sqrt{3}. \qquad ②$$

注意到若令　$m_0 = 0, n_0 = 1$,则有

$$(7-4\sqrt{3})^{k-1} = n_{k-1} - 2\sqrt{3}m_{k-1}, k \in N.$$

因此

$$\begin{aligned}&(n^* + 2\sqrt{3}m^*)(7-4\sqrt{3})^{k-1}\\ =& (n^* + 2\sqrt{3}m^*)(n_{k-1} - 2\sqrt{3}m_{k-1})\\ =& (n^* n_{k-1} - 12m^* m_{k-1}) + 2\sqrt{3}(m^* n_{k-1} - n^* m_{k-1}) \qquad ③\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}&(n^* - 2\sqrt{3}m^*)(7+4\sqrt{3})^{k-1}\\ =& (n^* - 2\sqrt{3}m^*)(n_{k-1} + 2\sqrt{3}m_{k-1}),\\ =& (n^* n_{k-1} - 12m^* m_{k-1}) - 2\sqrt{3}(m^* n_{k-1} - n^* m_{k-1}). \qquad ④\end{aligned}$$

将上面两式相乘,

$$\overline{m} = m^* n_{k-1} - n^* m_{k-1}, \overline{n} = n^* n_{k-1} - 12m^* m_{k-1}, \qquad ⑤$$

可得

$$\begin{aligned}&(\overline{n} + 2\sqrt{3}\overline{m})(\overline{n} - 2\sqrt{3}\overline{m})\\ =& (n^* + 2\sqrt{3}m^*)(7-4\sqrt{3})^{k-1} \cdot (n^* - 2\sqrt{3}m^*)(7+4\sqrt{3})^{k-1}\\ =& n^{*2} - 12m^{*2} = 1,\end{aligned}$$

即

$$\overline{n}^2 - 12\overline{m}^2 = 1,$$

因此$\overline{n},\overline{m}$ 也是方程 ① 的一组解.

由 ②、③、⑤,有

$$1 < \overline{n} + 2\sqrt{3}\overline{m} \leqslant 7+4\sqrt{3} \qquad ⑥$$

由上式及 ⑤ 式,有

$$\overline{n} + 2\sqrt{3}\overline{m} > 1 > \overline{n} - 2\sqrt{3}\overline{m} > 0,$$

于是

$$\overline{m} > 0, \overline{n} > 0$$

因此,$\overline{m},\overline{n}$ 是满足 ⑥ 的方程 ① 的正整数解.

从而必有

$$\overline{m} = 2, \overline{n} = 7.$$

代入 ③、④,有

$$\begin{cases}(n^* + 2\sqrt{3}m^*)(7-4\sqrt{3})^{k-1} = 7+4\sqrt{3},\\ (n^* - 2\sqrt{3}m^*)(7+4\sqrt{3})^{k-1} = 7-4\sqrt{3}.\end{cases}$$

即

$$\begin{cases} n^* + 2\sqrt{3}m^* = (7+4\sqrt{3})^k, \\ n^* - 2\sqrt{3}m^* = (7-4\sqrt{3})^k. \end{cases}$$

解得

$$m^* = m_k, \quad n^* = n^k.$$

因此,方程 ① 的全部非负整数解是(m_k, n_k),其中 k 是任意非负整数,从而满足题设条件的所有正整数集合为

$$\left\{ \frac{1}{2}[(7+4\sqrt{3})^k + (7-4\sqrt{3})^k] \mid k\text{为非负整数} \right\}.$$

1·124　假设 n 个两两不同的实数$x_1, x_2, \cdots, x_n$(正整数 $n \geqslant 4$)满足条件

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$$

和

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1.$$

求证:一定能在 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中找到4个不同的实数 a, b, c, d,使得

$$a + b + c + nabc \leqslant x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3 \leqslant a + b + d + nabd.$$

(第45届波兰数学奥林匹克,1994年)

[证]　先讨论

$$x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3 > 0 \qquad ①$$

的情况.不妨设

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n.$$

第一步,我们来证明:在 n 个两两不同的实数$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中一定能找到3个实数 x_i, x_j, x_k,使得

$$x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3 < x_i + x_j + x_k + nx_ix_jx_k \qquad ②$$

分三种情况来证明 ②.

第一种情况:$0 < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n$ 时.

由于 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 两两不同,且$\sum_{j=1}^{n} x_j^2 = 1, n \geqslant 4$,因此

$$x_j^2 < 1, j = 1, 2, \cdots, n.$$

于是

$$x_{n-2}^3 = x_{n-2} \cdot x_{n-2}^2 < x_{n-2},$$

同理可得

$$x_{n-1}^3 < x_{n-1},$$

$x_n^3 < x_n$.

设 $x_1 < x_2 < \cdots < x_k \leqslant 0 < x_{k+1} < x_{k+2} < \cdots < x_n$,

其中 $k \leqslant n-3$. 由于 $\sum_{j=1}^{n} x_j = 0$,因此

$x_1 < 0$.

当 $k < n-3$ 时,

$$
\begin{aligned}
& x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3 \\
& < (x_{k+1}^3 + x_{k+2}^3 + \cdots + x_{n-3}^3) + (x_{n-2}^3 + x_{n-1}^3 + x_n^3) \\
& < (n-3-k)x_{n-3}^3 + (x_{n-2} + x_{n-1} + x_n) \\
& < n x_{n-2} x_{n-1} x_n + x_{n-2} + x_{n-1} + x_n.
\end{aligned}
$$

因此,此时 ② 式成立.

当 $k = n-3$ 时,

$$
\begin{aligned}
x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3 & < x_{n-2}^3 + x_{n-1}^3 + x_n^3 \\
& < x_{n-2} + x_{n-1} + x_n \\
& < n x_{n-2} x_{n-1} x_n + x_{n-2} + x_{n-1} + x_n,
\end{aligned}
$$

因此,此时 ② 式仍成立.

第二种情况:$x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-2} \leqslant 0 < x_{n-1} < x_n$ 时.

由已知,得

$$
\sum_{j=1}^{n-2} x_j = -(x_{n-1} + x_n), \qquad ③
$$

考虑和式

$$
\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{n-2} (x_j + x_{n-1} + x_n + n x_j x_{n-1} x_n) \\
& = \sum_{j=1}^{n-2} x_j + (n-2)(x_{n-1} + x_n) + n x_{n-1} x_n \sum_{j=1}^{n-2} x_j \\
& = -(x_{n-1} + x_n) + (n-2)(x_{n-1} + x_n) - n x_{n-1} x_n (x_{n-1} + x_n) \\
& = (x_{n-1} + x_n)(n - 3 - n x_{n-1} x_n). \qquad ④
\end{aligned}
$$

利用幂平均不等式,并注意 $-x_1, -x_2, \cdots, -x_{n-2}$ 是 $n-2$ 个不同的非负实数(即使有一个零),有

$$
(n-2)\sum_{j=1}^{n-2} x_j^2 = (n-2)\sum_{j=1}^{n-2} (-x_j)^2
$$

$$> \left(\sum_{j=1}^{n-2}(-x_j)\right)^2$$

$$= (x_{n-1} + x_n)^2,$$

即

$$\sum_{j=1}^{n-2} x_j^2 > \frac{1}{n-2}(x_{n-1} + x_n)^2,$$

由已知及上式，有

$$1 = x_{n-1}^2 + x_n^2 + \sum_{j=1}^{n-2} x_j^2$$

$$> x_{n-1}^2 + x_n^2 + \frac{1}{n-2}(x_{n-1} + x_n)^2$$

$$= \frac{n-1}{n-2}(x_{n-1}^2 + x_n^2) + \frac{2}{n-2}x_{n-1}x_n \qquad ⑤$$

由幂平均不等式，有

$$\left[\frac{1}{n-2}\sum_{j=1}^{n-2}(-x_j)^3\right]^{\frac{1}{3}} > \frac{1}{n-2}\sum_{j=1}^{n-2}(-x_j)$$

$$= \frac{1}{n-2}(x_{n-1} + x_n),$$

上式两端立方后，再乘以 $-(n-2)$，有

$$\sum_{j=1}^{n-2} x_j^3 < -\frac{1}{(n-2)^2}(x_{n-1} + x_n)^3.$$

利用上式，有

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^3 = (x_{n-1}^3 + x_n^3) + \sum_{j=1}^{n-2} x_j^3$$

$$< (x_{n-1}^3 + x_n^3) - \frac{1}{(n-2)^2}(x_{n-1} + x_n)^3$$

$$= (x_{n-1} + x_n)\left[(x_{n-1}^2 - x_{n-1}x_n + x_n^2) - \frac{1}{(n-2)^2}(x_{n-1} + x_n)^2\right]$$

$$= (x_{n-1} + x_n)\left[\frac{(n-3)(n-1)}{(n-2)^2}(x_{n-1}^2 + x_n^2) - \frac{n^2 - 4n + 6}{(n-2)^2}x_{n-1}x_n\right]$$

利用④、⑤及上式，有

$$\sum_{j=1}^{n-2}(x_j+x_{n-1}+x_n+nx_jx_{n-1}x_n)$$
$$>(x_{n-1}+x_n)\left[\frac{(n-3)(n-1)}{n-2}(x_{n-1}^2+x_n^2)+\frac{2(n-3)}{n-2}x_{n-1}x_n-nx_{n-1}x_n\right]$$
$$=(x_{n-1}+x_n)\left[\frac{(n-3)(n-1)}{n-2}(x_{n-1}^2+x_n^2)-\frac{n^2-4n+6}{n-2}x_{n-1}x_n\right]$$
$$>(n-2)\sum_{j=1}^{n}x_j^3,$$

由上式可知，必有一个正整数 $j\in\{1,2,\cdots,n-2\}$ 存在，使得

$$x_j+x_{n-1}+x_n+nx_jx_{n-1}x_n>\sum_{j=1}^{n}x_j^3,$$

因此，此时②式成立.

第三种情况：$x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}\leqslant 0<x_n$ 时.

记 A 是$\{1,2,\cdots,n-1\}$的所有2元子集的集合，则

$$|A|=C_{n-1}^2.$$

显然，

$$\sum_{(i,j)\in A}(x_i+x_j+x_n+nx_ix_jx_n)=\sum_{(i,j)\in A}(x_i+x_j)+C_{n-1}^2x_n+nx_n\sum_{(i,j)\in A}x_ix_j \quad ⑥$$

易知

$$\sum_{(i,j)\in A}(x_i+x_j)=(n-2)\sum_{j=1}^{n-1}x_j=-(n-2)x_n. \quad ⑦$$

由已知，

$$0=\left(\sum_{j=1}^{n}x_j\right)^2=\sum_{j=1}^{n}x_j^2+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j$$
$$=1+2\sum_{(i,j)\in A}x_ix_j+2x_n\sum_{j=1}^{n-1}x_j$$
$$=1+2\sum_{(i,j)\in A}x_ix_j-2x_n^2,$$

由上式,得

$$\sum_{(i,j)\in A} x_i x_j = x_n^2 - \frac{1}{2}$$

将 ⑦ 和上式代入 ⑥,有

$$\begin{aligned}
&\sum_{(i,j)\in A} (x_i + x_j + x_n + n x_i x_j x_n) \\
&= \left[\frac{1}{2}(n-1)(n-2) - (n-2)\right] x_n + n x_n \left(x_n^2 - \frac{1}{2}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}n^2 - 3n + 3\right) x_n + n x_n^3. \qquad ⑧
\end{aligned}$$

由幂平均不等式,有

$$\begin{aligned}
\left[\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}(-x_j)^3\right]^{\frac{1}{3}} &> \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}(-x_j) \\
&= \frac{1}{n-1}x_n,
\end{aligned}$$

对上式两端立方,再乘以 $-(n-1)$,有

$$\sum_{j=1}^{n-1} x_j^3 < -\frac{1}{(n-1)^2}x_n^3,$$

于是,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} x_j^3 &< \left[1 - \frac{1}{(n-1)^2}\right] x_n^3 \\
&= \frac{n(n-2)}{(n-1)^2} x_n^3 \qquad ⑨
\end{aligned}$$

由幂平均不等式,有

$$\begin{aligned}
1 &= x_n^2 + \sum_{j=1}^{n-1} x_j^2 \\
&> x_n^2 + \frac{1}{n-1}\left[\sum_{j=1}^{n-1}(-x_j)\right]^2 \\
&= x_n^2 + \frac{1}{n-1}x_n^2 \\
&= \frac{n}{n-1}x_n^2. \qquad ⑩
\end{aligned}$$

显然,当正整数 $n \geqslant 5$ 时,有

$$\frac{1}{2}n^2 - 3n + 3 = \frac{1}{2}n(n-6) + 3 > 0.$$

因此,当 $n \geqslant 5$ 时,将 ⑩ 代入 ⑧,并利用上式和 ⑨,有

$$\sum_{(i,j)\in A}(x_i + x_j + x_n + nx_ix_jx_n)$$

$$> \left(\frac{1}{2}n^2 - 3n + 3\right)x_n \cdot \frac{n}{n-1}x_n^2 + nx_n^3$$

$$= \frac{n}{n-1}x_n^3\left[\left(\frac{1}{2}n^2 - 3n + 3\right) + (n-1)\right]$$

$$= \frac{n(n-2)^2}{2(n-1)}x_n^3$$

$$> C_{n-1}^2\sum_{j=1}^{n}x_j^3.$$

由上式可知,当 $n \geqslant 5$ 时,必有某个 $(i,j) \in A$,使得

$$x_i + x_j + x_n + nx_ix_jx_n > \sum_{j=1}^{n}x_j^3,$$

因此,此时 ② 式成立.

当 $n = 4$ 时,$x_1 < x_2 < x_3 \leqslant 0 < x_4$.令

$$y_j = -x_j, j = 1,2,3. \quad ⑪$$

那么,有

$$y_1 > y_2 > y_3 \geqslant 0, x_4 = y_1 + y_2 + y_3 \quad ⑫$$

于是,由上两式可得

$$x_2 + x_3 + x_4 + 4x_2x_3x_4 - (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3)$$

$$= -x_1 + 4x_2x_3(y_1 + y_2 + y_3) - (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - (y_1 + y_2 + y_3)^3$$

$$= y_1 + 4y_2y_3(y_1 + y_2 + y_3) + (y_1^3 + y_2^3 + y_3^3) - (y_1 + y_2 + y_3)^3$$

$$= y_1 + 4y_2y_3(y_1 + y_2 + y_3) + (y_1^3 + y_2^3 + y_3^3) - [(y_1^3 + y_2^3 + y_3^3) + 3y_1^2(y_2 + y_3) + 3y_2^2(y_3 + y_1) + 3y_3^2(y_1 + y_2) + 6y_1y_2y_3]$$

$$= y_1[y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + (y_1 + y_2 + y_3)^2] + 4y_2y_3(y_1 + y_2 + y_3) - [3y_1^2(y_2 + y_3) + 3y_2^2(y_3 + y_1) + 3y_3^2(y_1 + y_2) + 6y_1y_2y_3]$$

$$= y_1[y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + (y_1 + y_2 + y_3)^2] - 2y_1y_2y_3 - 3y_1^2(y_2 + y_3) + y_2^2(y_3 - 3y_1) + y_3^2(y_2 - 3y_1)$$

$$= 2y_1^3 + y_2^2(y_3 - y_1) + y_3^2(y_2 - y_1) - y_1^2(y_2 + y_3)$$

$$= y_1^2[2y_1 - (y_2 + y_3)] - y_2^2(y_1 - y_3) - y_3^2(y_1 - y_2)$$

$$> y_1^2[2y_1 - (y_2 + y_3)] - y_1^2(y_1 - y_3) - y_1^2(y_1 - y_2)$$

$= 0.$

因此,此时不等式 ② 成立.

综上所述,我们第一步所要证的 ② 式得证.

下面我们先证明一个恒等式:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^3$$

$$= (a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3) + 3\sum_{j=1}^{n} a_j(a_1^2 + \cdots + a_{j-1}^2 + a_{j+1}^2 + \cdots + a_n^2) + 6\sum_{(i,j,k)\in B} a_i a_j a_k. \quad ⑬$$

其中 B 是 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的所有 3 元子集组成的集合.

事实上,

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^3$$

$$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

从右端第一个因式中任取一个 a_i,从右端第二个因式中任取一个 a_j,从右端第三个因式中任取一个 a_k,其乘积 $a_i a_j a_k$ 一定是上式右端用乘法分配律展开后所得到的某一项.

当 $i = j = k$ 时,$a_i a_j a_k = a_i^3$,没有与它同样项.

当 $i = j \neq k$ 时,$a_i a_j a_k = a_i^2 a_k$.同样的项有 $\frac{3!}{2!\cdot 1!} = 3$ 个,因此系数为 3.

当 i,j,k 两两不同时,$a_i a_j a_k$ 同样的项有 $3! = 6$ 个,因此系数为 6.

所以,⑬ 式成立.

由已知条件及 ⑬ 式,可得

$$0 = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^3$$

$$= (x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3) + 3\sum_{j=1}^{n} x_j(x_1^2 + \cdots + x_{j-1}^2 + x_{j+1}^2 + \cdots + x_n^2) + 6\sum_{(i,j,k)\in B} x_i x_j x_k$$

$$= (x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3) + 3\sum_{j=1}^{n} x_j(1 - x_j^2) + 6\sum_{(i,j,k)\in B} x_i x_j x_k$$

$$= -2(x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3) + 6\sum_{(i,j,k)\in B} x_i x_j x_k.$$

由上式,有

$$\sum_{(i,j,k)\in B} x_i x_j x_k = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{n} x_j^3$$

显然，有

$$\sum_{(i,j,k)\in B} (x_i + x_j + x_k) = C_{n-1}^2 \sum_{j=1}^{n} x_j = 0$$

由上面两个式子，有

$$\sum_{(i,j,k)\in B} (x_i + x_j + x_k + n x_i x_j x_k) = \frac{n}{3}\sum_{j=1}^{n} x_j^3. \qquad ⑭$$

令

$A_1 = \{x_{i_1} + x_{j_1} + x_{k_1} + n x_{i_1} x_{j_1} x_{k_1} \mid x_{i_1}, x_{j_1}, x_{k_1}$ 两两不同，且恰有两数取自满足 ② 的集合$(x_i, x_j, x_k)\}$，

$A_2 = \{x_{i_2} + x_{j_2} + x_{k_2} + n x_{i_2} x_{j_2} x_{k_2} \mid x_{i_2}, x_{j_2}, x_{k_2}$ 两两不同，且恰有两数取自集族$\{x_{i_1}, x_{j_1}, x_{k_1}\}$ 之一，

$A_3 = \{x_{i_3} + x_{j_3} + x_{k_3} + n x_{i_3} x_{j_3} x_{k_3} \mid x_{i_3}, x_{j_3}, x_{k_3}$ 两两不同，且恰有两数取自集族$\{x_{i_2}, x_{j_2}, x_{k_2}\}$ 之一.

以上所有 $x_{i_1}, x_{j_1}, x_{k_1}; x_{i_2}, x_{j_2}, x_{k_2}; x_{i_3}, x_{j_3}, x_{k_3}$ 都属于集合$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$. 显然

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{x_{i^*} + x_{j^*} + x_{k^*} + n x_{i^*} x_{j^*} x_{k^*} \mid x_{i^*}, x_{j^*}, x_{k^*}$ 两两不同，且都属于$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$.

事实上，对于任意的 $\alpha = x_{i^*} + x_{j^*} + x_{k^*} + n x_{i^*} x_{j^*} x_{k^*}$，若$(x_{i^*}, x_{j^*}, x_{k^*})$满足②，则 $\alpha \in A_2$，从而有 $\alpha \in A_1 \cup A_2 \cup A_3$. 若$(x_{i^*}, x_{j^*}, x_{k^*})$ 不满足 ② 且 $\alpha \notin A_1 \cup A_2 \cup A_3$，则存在

$$x_i + x_j + x_{k^*} + n x_i x_j x_{k^*} \in A_1,$$

其中 x_{k^*} 表示 $x_{i^*}, x_{j^*}, x_{k^*}$ 中的某一个，(x_i, x_j, x_k) 满足②. 于是存在

$$x_{i^*} + x_j + x_{k^*} + n x_{i^*} x_j x_{k^*} \in A_2$$

从而有

$$\alpha = x_{i^*} + x_{j^*} + x_{k^*} + n x_{i^*} x_{j^*} x_{k^*} \in A_3$$

即 $\alpha \in A_1 \cup A_2 \cup A_3$，矛盾.

下面我们在条件 ① 下，完成本题证明.

若 A_1 中有元素不大于 $\sum_{j=1}^{n} x_j^3$，则本题结论成立.

若 A_1 中所有元素都大于 $\sum_{j=1}^{n} x_j^3$，而 A_2 中有元素不大于 $\sum_{j=1}^{n} x_j^3$.，则本题结论也成立.

若 A_2 中所有元素都大于 $\sum_{j=1}^{n} x_j^3$，而 A_3 中有元素不大于 $\sum_{j=1}^{n} x_j^3$，则本题结论仍成立.

若 A_1, A_2, A_3 中所有元素都大于 $\sum_{j=1}^{n} x_j^3$，则对于 B 内任一元素 (i, j, k)，都有

$$x_i + x_j + x_k + n x_i x_j x_k > \sum_{j=1}^{n} x_j^3,$$

求和，得

$$\sum_{(i,j,k)\in B} (x_i + x_j + x_k + n x_i x_j x_k) > C_n^3 \sum_{j=1}^{n} x_j^3,$$

由 ①、⑭ 和上式，得

$$\frac{n}{3} > C_n^3,$$

即

$$\frac{n}{3} > \frac{1}{6} n(n-1)(n-2),$$

于是有

$$2 > (n-1)(n-2),$$

此与 $n \geqslant 4$ 矛盾.

因此，在条件 ① 下，本题结论成立.

若

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^3 < 0$$

则令

$$y_j = -x_j \quad (j = 1, 2, \cdots, n),$$

由已知条件及上面两个式子，有

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 0, \sum_{j=1}^{n} y_j^2 = 1, \sum_{j=1}^{n} y_j^3 > 0.$$

于是，由前面证过的结论，一定存在 $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ 中的 4 个不同的实

数 y_i, y_j, y_k, y_l，使得

$$y_i + y_j + y_k + ny_iy_jy_k \leqslant \sum_{j=1}^{n} y_j^3 \leqslant y_i + y_j + y_l + ny_iy_jy_l,$$

因此

$$x_i + x_j + x_k + nx_ix_jx_k \geqslant \sum_{j=1}^{n} x_j^3 \geqslant x_i + x_j + x_l + nx_ix_jx_l,$$

从而本题结论在此时成立.

若

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^3 = 0.$$

则 ⑭ 式的左端为零，如果所有 $x_i + x_j + x_k + nx_ix_jx_k$ 全为零，那么本题结论成立. 否则，至少有一个

$$x_i + x_j + x_k + nx_ix_jx_k > 0.$$

重复 ⑭ 式以后的讨论，并利用 ⑭，可以证得此时本题结论仍成立.

综上所述，原命题得到证明.

1·125　给定33个正整数，它们的全部质因子是 2,3,5,7 和 11. 求证：这 33 个正整数中必有两个的乘积是完全平方数.

（保加利亚数学奥林匹克，1994 年）

［证］　记这 33 个正整数为 $n_1, n_2, \cdots, n_{33}$.

由题设可知 $n_k = 2^{a_k}3^{b_k}5^{c_k}7^{d_k}11^{e_k}$,

其中 $k = 1,2,\cdots,33$；a_k, b_k, c_k, d_k, e_k 都是非负整数.

显然，当且仅当 $1 \leqslant i < k \leqslant 33$ 且 $a_i + a_k, b_i + b_k, c_i + c_k, d_i + d_k, e_i + e_k$ 都是偶数时，n_in_k 是完全平方数.

也就是说，当且仅当 $1 \leqslant i < k \leqslant 33$ 且 a_i 与 a_k 奇偶性相同，b_i 和 b_k 奇偶性相同，c_i 和 c_k 奇偶性相同，d_i 和 d_k 的奇偶性相同，e_i 和 e_k 的奇偶性相同时，n_in_k 是完全平方数.

考察由 5 个非负整数组成的数组

$(a_k, b_k, c_k, d_k, e_k)$　$(k = 1,2,\cdots,33)$.

如果两个数组第 m 个分量上的两个数的奇偶性相同，$m = 1,2,\cdots,5$，那么我们就把这两个数组归为同一类. 于是，上述 33 个数组至多可以分为 $2^5 = 32$ 类. 因此至少有两个数组属于同一类. 设数组 $(a_k, b_k, c_k, d_k, e_k)$ 与 $(a_i, b_i, c_i, d_i, e_i)$ 属于同一类，于是，n_in_k 是完全平方数.

1・126　试问：当且仅当实数 $x_0,x_1,\cdots,x_n(n\geqslant 2)$ 满足什么条件时，存在实数 $y_0,y_1,\cdots,y_n$，使得 $z_0^2=z_1^2+z_2^2+\cdots+z_n^2$　①
成立．其中 $z_k=x_k+iy_k$，i 为虚数单位，$k=0,1,2,\cdots,n$．证明你的结论．

（中国高中数学联赛，1997 年）

［解］　易知 ① 等价于

$$\begin{cases}\sum_{k=1}^{n}x_k^2-x_0^2=\sum_{k=1}^{n}y_k^2-y_0^2\\ \sum_{k=1}^{n}x_ky_k=x_0y_0\end{cases}\quad ②$$

若存在实数 $y_0,y_1,\cdots,y_n$ 使 ② 成立，则

$$x_0^2y_0^2=\left(\sum_{k=1}^{n}x_ky_k\right)^2$$

由柯西不等式可得

$$x_0^2y_0^2\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}y_k^2\right)\quad ③$$

如果　$x_0^2>\sum_{k=1}^{n}x_k^2$，则由 ② 可得

$$y_0^2>\sum_{k=1}^{n}y_k^2,$$

从而　$x_0^2y_0^2>\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}y_k^2\right)$，

此与 ③ 矛盾．于是得

$$x_0^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}x_k^2\quad ④$$

当　$x_0=\sum_{k=1}^{n}x_k^2$ 时，我们可取 $y_k=x_k$，$k=0,1,2,\cdots,n$．显然能使 ② 成立．

当　$x_0<\sum_{k=1}^{n}x_k^2$ 时，我们记 $a=\sum_{k=1}^{n}x_k^2-x_0>0$，

显然 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 不全为零，不妨设 $x_n\neq 0$．我们取

$$\begin{cases} y_k = 0, k = 0,1,2,\cdots,n-2; \\ y_{n-1} = \dfrac{ax_n}{\sqrt{x_{n-1}^2 + x_n^2}}; \\ y_n = \dfrac{-ax_{n-1}}{\sqrt{x_{n-1}^2 + x_n^2}}. \end{cases}$$

显然,也能使 ② 成立.

综上所述,所求的条件为

$$x_0^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

1·127　是否存在非零复数 a,b,c 及自然数 h,使得只要整数 k,l,m 满足 $|k|+|l|+|m| \geqslant 1996$,就必定成立

$$|1 < a + lb + mc| > \frac{1}{h}?$$

(中国国家队选拔赛,1996 年)

[解]　回答是“不存在”.

事实上,如果存在非零复数 a,b,c 和自然数 h,满足题中要求.

当复数 a,b 所对应的向量 $\vec{a},\vec{b}$ 在复平面上的夹角为 0 或 π 时,容易证明存在整数 k,l 和 m,其中 $m=0$,使得

$$\begin{cases} |k|+|l|+|0| \geqslant 1996 \\ |ka + lb + 0\cdot c| < \dfrac{1}{h} \end{cases}$$

同时成立,矛盾.

当复数 a,b 所对应的向量 $\vec{a},\vec{b}$ 在复平面上的夹角既不等于 0,也不等于 π 时,我们在复平面上以 $\vec{a},\vec{b}$ 所在直线为坐标轴,且分别以 $|a|$、$|b|$ 为单位长,构造一个斜坐标系.过坐标轴的每个整点作另一条坐标轴的平行线,两组平行线彼此相交,将复平面划分成网格平面.这些网格是彼此全等的平行四边形.

考察复数 c 所对应的向量 $\vec{c}$ 所在的直线.显然,对每个整数 m,mc 都对应这条直线上的一点,称为 c—整点.易见,c 整点都位于某个平行四边形中(包括周界).将每个含有 c— 整点的平行四边形都平移到位于第一象限且以原点为顶点的平行四边形 p 上,并使二者重合.这时,

每个 c— 整点也都随同所在的平行四边形移到 p 中,记其象点为 c'— 整点.不难看出,若 c 整点对应的复数为 mc,其所在的平行四边形的左下方顶点对应的复数为 $\lambda a+\mu b$,其中 λ,μ 都是整数,则其象点 c'— 整点对应的复数为 $mc-\lambda a-\mu b$.

将所有 c'— 整点所在的平行四边形 p 用平行于其边的平行线划分成有限多个小平行四边形,使每个小平行四边形的长对角线的长度都小于$\frac{1}{h}$. c'— 整点有无穷多个分布在有限多个小平行四边形中,由抽屉原理知必有无穷多个 c'— 整点落在同一个小平行四边形中.显然,这些 c'— 整点两两之间的距离都小于$\frac{1}{h}$.

将这样选出的无穷多个 c'— 整点所对应的复数记为

$$m_ic-\lambda_ia-\mu_ib,\ i=1,2,\cdots\cdots.$$

由于第 1 个 c'— 整点与后面的每点的距离都小于$\frac{1}{h}$,因此有

$$|(m_1-m_i)c+(\lambda_i-\lambda_1)a+(\mu_i-\mu_1)b|<\frac{1}{h} \qquad ①$$

$i=2,3,\cdots\cdots$ 由于这表示不同点对之间的距离,故三数组$(\lambda_i-\lambda_1,\mu_i-\mu_1,m_1-m_i)$两两不同且有无穷多组.因为满足

$$|\lambda_i-\lambda_1|+|\mu_i-\mu_1|+|m_1-m_i|<1996$$

的只有有限多组,故至少有一组使

$$|\lambda_i-\lambda_1|+|\mu_i-\mu_1|+|m_1-m_i|\geqslant 1996,$$

且使 ① 式成立.矛盾.

综上所述,符合题中条件的非零复数 a,b,c 和自然数 h 不存在.

1·128 对每一个正整数 n,若 n 的二进制表示中 1 的个数为偶数,则令 $a_n=0$,否则令 $a_n=1$.证明:不存在正整数 k 和 m 使得

$$a_{k+j}=a_{k+m+j}=a_{k+2m+j},0\leqslant j\leqslant m-1.$$

(第 53 届美国普特南数学竞赛,1993 年)

[证] 显然 $a_{2n}=a_n$,

$a_{2n+1}=1-a_{2n}=1-a_n$.

如果存在正整数 k 和 m,满足条件,那么可以假定 m 是满足条件的(k,m)中最小的一个 m.

若 m 是奇数,不妨设

$$a_k = a_{k+m} = a_{k+2m} = 0. \quad ①$$

($a_k = 1$ 的情况可类似地处理.)则 k 和 $k+m$ 中至少有一个为偶数,从而有

$$a_{k+1} = a_{k+m+1} = a_{k+2m+1} = 1$$

同样地,$k+1$ 和 $k+m+1$ 中至少有一个为偶数,从而有

$$a_{k+2} = a_{k+m+2} = a_{k+2m+2} = 0,$$

依次类推,因为 $m-1$ 是偶数,所以有

$$a_{k+m-1} = a_{k+2m-1} = a_{k+2m-1} = 0.$$

但 $k+m-1$ 和 $k+2m-1$ 中至少有一个是偶数,所以

a_{k+m} 与 a_{k+2m} 中至少有一个等于 1,此与 ① 矛盾.

故得,m 是偶数,于是

$k+j, k+m+j, k+2m+j (0 \leqslant j \leqslant m-1)$

三者的奇偶性完全相同.当 $k+j$ 为偶数时,由

$$a_{k+j} = a_{k+m+j} = a_{k+2m+j}$$

可得:

$$a_{\left[\frac{k}{2}\right]+\left[\frac{j}{2}\right]} = a_{\left[\frac{k}{2}\right]+\frac{m}{2}+\left[\frac{j}{2}\right]} = a_{\left[\frac{k}{2}\right]+m+\left[\frac{j}{2}\right]}, k, j \text{ 为偶数时};$$

或

$$a_{\left[\frac{k+1}{2}\right]+\left[\frac{j}{2}\right]} = a_{\left[\frac{k+1}{2}\right]+\frac{m}{2}+\left[\frac{j}{2}\right]} = a_{\left[\frac{k+1}{2}\right]+m+\left[\frac{j}{2}\right]}, k, j \text{ 为奇数时};$$

注意到 $0 \leqslant \left[\frac{j}{2}\right] \leqslant \frac{m}{2} - 1$,以上两式均与 m 的最小性矛盾.故命题得证.

1·129 对于给定的大于 1 的正整数 n,是否存在 $2n$ 个两两不同的正整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$,同时满足以下两个条件:

(1) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$;

(2) $n - 1 > \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i - b_i}{a_i + b_i} > n - 1 - \frac{1}{1998}$.

请说明理由.

(中国中学生数学冬令营,1998 年)

[解] 存在符合命题要求的 $2n$ 个数.

事实上,可令

$$\begin{cases}a_i = 2Mi & i = 1,2,\cdots,n-1, M \geqslant 8000n, M \in N;\\ b_i = 2i, & i = 1,2,\cdots,n-1;\\ a_n = (M-1)^2 n(n-1);\\ b_n = M(M-1)n(n-1).\end{cases}$$

显然上述 $2n$ 个数两两不同,且

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = n(n-1)(M^2 - M + 1).$$

另一方面,我们有

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i - b_i}{a_i + b_i} = (n-1) \cdot \frac{M-1}{M+1} - \frac{1}{2M-1} < n-1,$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i - b_i}{a_i + b_i} &= (n-1) - \frac{2(n-1)}{M+1} - \frac{1}{2M-1}\\ &> n-1-\frac{2(n-1)}{8000n} - \frac{1}{8000}\\ &> n-1-\frac{1}{4000} - \frac{1}{8000}\\ &> n-1-\frac{1}{1998}.\end{aligned}$$

1・130　是否存在自然数 n,使 $n!$的前面四位数为 1993?

(德国数学奥林匹克,1993 年)

[解]　存在.

设 $m = 1000100000$,当 $k < 99999$ 时,若

$(m+k)! = \overline{abcd\cdots}$,

则

$$\begin{aligned}(m+k+1)! &= (m+k)! \times (m+k+1)\\ &= \overline{abcd\cdots} \times 10001\cdots\\ &= \overline{abcx\cdots},\text{其中 } x = d \text{ 或 } d+1.\end{aligned}$$

于是,设 $m! = \overline{abcd\cdots}$,则$(m+1)!,(m+2)!,\cdots,(m+99999)!$中每一个的前四位数与前一个的相等或增加 1. 而且(由于左起第五位数字增加 a),至多经过 10 个数,前四位数就需增加 1. 这样 100000 个数 $m!,(m+1)!,\cdots,(m+99999)!$的前四位数跑遍 10000 个值,其中必有 1993 出现.

1・131　能否在9 × 9 的 方格表内填入自然数 1 至 8,每格一数,

使得表中每个 3×3 正方形中所填的 9 个数的和都相同?

(第 21 届俄罗斯数学奥林匹克决赛,1995 年)

[解] 先填出一张 9×9 的方格表 T:

0	1	2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	0	1	2
6	7	8	0	1	2	3	4	5
0	1	2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	0	1	2
6	7	8	0	1	2	3	4	5
0	1	2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	0	1	2
6	7	8	0	1	2	3	4	5

在 T 中每行都是 $0,1,2,\cdots,8$ 这 9 个数字,每个 3×3 正方形中所填的 9 数之和都是 36.

将数表 T 按逆时针方向旋转 $90°$,得数表 Q. 显然在 Q 中 $0,1,2,\cdots,8$ 这 9 个数字各出现 9 次,并且每个 3×3 正方形中所填的 9 数之和都是 36.

设在 T 中第 i 行第 j 列交叉处的小方格里填的数是 a_{ij},在 Q 中第 i 行第 j 列交叉处的小方格里填的数是 b_{ij},则有

$$a_{ij}\neq b_{ij},1\leqslant i\leqslant9,1\leqslant j\leqslant9.$$

构造一个新的 9×9 方格表 P. 在 P 中第 i 行第 j 列交叉处的小方格里填上数

$$9a_{ij}+b_{ij}+1,1\leqslant i\leqslant9,1\leqslant j\leqslant9.$$

显然在 P 中,自然数 $1,2,\cdots,81$ 中的每一个恰出现一次,并且每个 3×3 正方形中所填的 9 数之和都是

$$9\times36+36+9=369.$$

1·132 从 1 开始按自然数顺序自小而大一直写到自然数 n(n

>1),得到一个数.那么,是否可能使得到的数从左到右和从右到左的读法完全相同?证明你的结论.

(第22届俄罗斯数学奥林匹克决赛,1996年)

[解] 不可能.

若存在从1写到n的符合条件的数

$$N=123\cdots321,$$

记N的位数为m,显然有$m>18$.

记A是N的前$\left[\frac{m}{2}\right]$个数字组成的数,B是N的后$\left[\frac{m}{2}\right]$个数字组成的数.设A中含

$$\underbrace{99\cdots9}_{p个9}\quad\underbrace{|00\cdots0|}_{p个0}$$

段,但不含$\underbrace{99\cdots9}_{p+1个9}\quad\underbrace{|00\cdots0|}_{p+1个0}$段,那么

$$n<2\cdot10^{p+1},$$

从而n不超过$p+2$位.但此时B中含

$$\underbrace{|00\cdots0|}_{p个0}\quad\underbrace{99\cdots9}_{p个9}$$

段,说明n必超过$p+2$位,矛盾.

故原题的回答是否定的.

1・133　是否存在满足以下条件的3个大于1的自然数,其中每一个自然数的平方减1都能被其余的任何一个自然数整除?证明你的结论.

(第22届俄罗斯数学奥林匹克决赛,1996年)

[解] 不存在.

事实上,如果存在a,b,c满足问题的条件,不妨设$a\geqslant b\geqslant c$.

此时,因为a^2-1能被b整除,所以a与b互素.又因为c^2-1能被a,b整除,所以c^2-1能被它们的积ab整除.于是,我们有

$$c^2-1\geqslant ab.$$

另一方面,由$a\geqslant c,b\geqslant c$可得

$$ab\geqslant c^2,$$

矛盾.

故满足题设条件的3个数不存在.

1·134　一个 $n\times n$ 的矩阵(正方阵)称为 n 阶银矩阵,如果它的元素取自集合

$$S=\{1,2,\cdots,2n-1\},$$

并且对于每个 $i=1,2,\cdots,n$.它的第 i 行和第 i 列中的所有元素合起来恰好是 S 中的所有元素.证明:

(a)不存在 $n=1997$ 阶的银矩阵;

(b)有无限多个 n 的值,存在 n 阶银矩阵.

(第 38 届国际数学奥林匹克,1997 年)

[证]　(a)设 $n>1$,且存在 n 阶银矩阵 A.由于 S 中所有的 $2n-1$ 个数都要在 A 中出现,而 A 的主对角线上只有 n 个元素,因此至少有一个 $x\in S$,不在 A 的主对角线上.

取定这样的一个 x.对于每个 $i=1,2,\cdots,n$,记 A 的第 i 行和第 i 列的所有元素合起来构成的集合为 A_i,称为第 i 个 + 字,则 x 在每个 A_i 上恰出现一次.

假设 x 位于 A 的第 i 行、第 j 列($i\neq j$),则 x 属于 $A_i\cap A_j$.反过来,对于每个 A_i,有惟一的 A_j,使得 $x\in A_i\cap A_j$.因此 A 的 n 个十字两两配对,从而 n 为偶数.

因为 1997 不是偶数,所以不存在 1997 阶银矩阵.

(b)对于 $n=2$,$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&1\end{pmatrix}$ 是一个银矩阵.

对于 $n=4$,

$$A=\begin{pmatrix}1&2&5&6\\3&1&7&5\\4&6&1&2\\7&4&3&1\end{pmatrix}$$

是一个银矩阵.

一般地,假设存在 n 阶银矩阵 A,我们可以构造一个 $2n$ 阶矩阵

$$D=\begin{pmatrix}A&B\\C&A\end{pmatrix}$$

其中 B 是一个 $n\times n$ 矩阵,它是通过把 A 的每一个元素加上 $2n$ 而得到,c 也是一个 $n\times n$ 矩阵,它是通过把 B 的主对角线元素换成 $2n$ 而得到的.可以证明 D 是一个 $2n$ 阶银矩阵.

事实上,当 $i \leqslant n$ 时,D 的第 i 个十字是由 A 的第 i 个十字,B 的第 i 行和 C 的第 i 列构成. A 的第 i 个十字包含元素 $1,2,\cdots,2n-1$,而 B 的第 i 行和 C 的第 i 列包含元素 $2n,2n+1,\cdots,4n-1$. 所以 D 的第 i 个十字恰包含元素 $1,2,\cdots,4n-1$.

当 $i > n$ 时,D 的第 i 个十字是由 A 的第 $i-n$ 个十字,B 的第 $i-n$ 列和 C 的第 $i-n$ 行构成. 同理可证,此时 D 的第 i 个十字仍包括元素 $1,2,\cdots,4n-1$.

综上所述,我们构造的矩阵 D 是 $2n$ 阶银矩阵.

由数学归纳法原理,对于任意自然数 k,都存在 2^k 阶银矩阵. 从而原命题得证.

1·135　将自然数称为相似的,如果它们可用同样的一组数字写出(例如,112,121,211 是相似的,因为它们都可用数字组 1,1,2 写出). 证明:存在三个相似的 1995 位数,它们的各位数字中不含 0,但是其中两个数的和等于第三个数.

(第 21 届俄罗斯数学奥林匹克决赛,1995 年)

[解]　因为 1995 是 3 的倍数,并且有

$$459 + 495 = 954$$

所以有 1995 位数

$459459459\cdots459$,

$495495495\cdots495$,

$954954954\cdots954$,

符合题目的要求. 故命题得证.

1·136　证明:对于任何自然数 $k > 1$,都能找到一个 2 的方幂数,在它的末尾的 k 个数字中至少有一半是 9(例如,对于 $k = 2$,有 $2^{12} = 4096$;对于 $k = 3$,有 $2^{53} = \cdots992$;等等).

(第 57 届莫斯科数学奥林匹克,1995 年)

[证]　我们来证明,对任何自然数 k,在 $2^{10\cdot5^k+k+2}$ 的末 $k+2$ 位数中,至少有 $\left[\dfrac{2}{3}(k+2)\right]$ 个 9.

事实上,我们知道

$$2^{10} = 1024,$$

$$2^{10\cdot5^k} = 1024^{5^k} = (10^3 + 24)^{5^k}$$

$$= 10^{3\cdot 5^k} + 5^k \cdot 10^{3(5^k-1)} \cdot 24 + \cdots + 5^k \cdot 10^3 \cdot 24^{(5^k-1)} + 24^{5^k}$$

在上式的右端,10 的指数成递降排列,其中

$$5^k \cdot 10^3 \cdot 24^{(5^k-1)} = 10^{3+k} \cdot 3^{5^k-1} \cdot 2^{3\cdot 5^k-3-k},$$

因此

$$2^{10\cdot 5^k} \equiv 24^{5^k} \pmod{10^{3+k}},$$

于是

$$\begin{aligned} 2^{12\cdot 5^k} &= 2^{10\cdot 5^k} \cdot 2^{2\cdot 5^k} \equiv 24^{5^k} \cdot 4^{5^k} = 96^{5^k} \\ &= (10^2 - 2^2)^{5^k} \\ &\equiv 5^k \cdot 10^2 \cdot 2^{2(5^k-1)} - 2^{2\cdot 5^k} \\ &= 2^{2\cdot 5^k-2-k}(10^{k+2} - 2^{k+2}) \pmod{10^{3+k}}, \end{aligned}$$

所以

$$2^{10\cdot 5^k+k+2} \equiv 10^{k+2} - 2^{k+2} \pmod{10^{3+k}}.$$

由于 $2^{k+2} = 8^{\frac{k+2}{3}} < 10^{\frac{k+2}{3}}$,因此 $k+2$ 位数 $10^{k+2} - 2^{k+2}$ 至多在末尾的 $\left[\frac{k+2}{3}\right]$ 个数位上不是 9,从而至少在 $\left[\frac{2}{3}(k+2)\right]$ 个数位上都是 9.

故 $2^{10\cdot 5^k+k+2}$ 的末尾 $k+2$ 位数中,至少有 $\left[\frac{2}{3}(k+2)\right]$ 个 9,从而它的末尾的 k 个数字中至少有一半是 9. 原命题得证.

1・137　是否存在一个六位数 A,使得 $A, 2A, 3A, \cdots, 500000A$ 中任何一数的末尾六个数码不全相同?

（世界城市际数学联赛,1996 年）

[解]　设 A 是一个六位数.

若 A 是偶数,则 $500000A$ 的末尾有六个 0.

若 A 是 5 的倍数,则 $200000A$ 的末尾有六个 0.

因此,我们不妨设 A 的末尾数字为 1,3,7,9. 此时,对于任何奇数字 d,都存在一位数 b,使得 Ab 末尾数字为 d.

先选择 b_0,使 Ab_0 的末尾数字为 1. 设 Ab_0 的末尾两位数字为 $c_1 1$.

选择一位数 d_1,使得 d_1+c_1 等于 1 或 11. 选择 b_1,使得 Ab_1 的末位数字为 d_1. 因此 $A(10b_1+b_0)$ 的末两位数字为 11. 设 $A(10b_1+b_0)$ 的末三位数字为 $c_2 11$,选择一位数 d_2,使得 d_2+c_2 等于 1 或 11,存在 b_2,使得 Ab_2 的末位数字为 d_2. 因此 $A\times(100b_2+10b_1+b_0)$ 的末三位数字为 111. 依此类推,存在

$$B_1=10^5b_5+10^4b_4+10^3b_3+10^2b_2+10b_1+b_0$$

使得 AB_1 的末尾六个数字皆为 1.

对于 $2\leqslant k\leqslant 9$,设 B_k 是 kB_1 的后六位数字,那么 AB_k 的末尾六个数字皆为 k.

若 $A=999999$,则 $B_1=888889$.

反过来,若令 $A=888889$,则 $B_1=999999$. B_k 是 kB_1 的后六位数字,注意到

$kB_1=k\cdot(10^6-1)=k\cdot 10^6-k, 1\leqslant k\leqslant 9$,因此

$$B_k=10^6-k>500000.$$

这说明 $A=888889$ 时,

$A,2A,3A,\cdots,500000A$ 中任何一数的末六位数字都不全相同.

1·138 求证:存在无穷多个自然数 n,使得可将 $1,2,\cdots,3n$ 列成数表

$$\begin{array}{l}a_1,a_2,\cdots,a_n\\ b_1,b_2,\cdots,b_n\\ c_1,c_2,\cdots,c_n\end{array}$$

满足如下两个条件:

(1) $a_1+b_1+c_1=a_2+b_2+c_2=\cdots=a_n+b_n+c_n$,且为 6 的倍数;

(2) $a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=c_1+c_2+\cdots+c_n$,且为 6 的倍数.

(中国中学生数学冬令营,1997 年)

[证] 将满足上述两个条件的自然数 n 的集合记作 s. 若 $n\in s$,由条件(1)和(2)分别推知:存在自然数 s 和 t,使得

$$\begin{cases}\dfrac{3n(3n+1)}{2}=6sn,\\[2mm] \dfrac{3n(3n+1)}{2}=18t.\end{cases}$$

即 $\begin{cases}3n+1=4s\\ n(3n+1)=12t\end{cases}$

所以 $\begin{cases}n\equiv 1 \pmod 4\\ n\equiv 0 \pmod 3.\end{cases}$

从而有

$$n=12k+9, k\text{ 是非负整数}.$$

反过来,若 $n=12k+9, k=0,1,2,\cdots$,并且由 $1,2,\cdots,3n$ 列成的数表的行和都相等,列和也都相等,那么

$$\text{列和}=\frac{3(3n+1)}{2}=\frac{3(36k+28)}{2}=6(9k+7),$$

$$\text{行和}=\frac{n(3n+1)}{2}=\frac{n}{3}\cdot\frac{3(3n+1)}{2}=(4k+3)\cdot 6\cdot(9k+7).$$

可见,此时列和与行和都是 6 的倍数.

下面再来证明:当 $n=9^k, k=1,2,\cdots$ 时,可将 $1,2,\cdots,3n$ 列成一个 $3\times n$ 数表,使得数表中的行和都相等,列和也都相等.

当 $k=1$ 时,$n=9, 3n=27$.

此时,注意到

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&6&3\\3&0&6\\6&3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&8&6\\5&3&7\\9&4&2\end{pmatrix}$$

上式右端的 3×3 数表的行和都等于 15,列和也都等于 15. 将这个 3×3 数表的三行依次记作

$$\alpha(3),\ \beta(3),\ \gamma(3).$$

即 $\alpha(3)=(1,8,6),\ \beta(3)=(5,3,7),\ \gamma(3)=(9,4,2)$. 构造 3×9 数表

$$A_9=\begin{pmatrix}\alpha(3)&\beta(3)+18&\gamma(3)+9\\ \beta(3)+9&\gamma(3)&\alpha(3)+18\\ \gamma(3)+18&\alpha(3)+9&\beta(3)\end{pmatrix}$$

即

$$A_9=\begin{pmatrix}1&8&6&23&21&25&18&13&11\\14&12&16&9&4&2&19&26&24\\27&22&20&10&17&15&5&3&7\end{pmatrix}$$

这个数表的行和显然都相等,列和显然也都相等.

设当 $m = 9^k$ 时，可将 $1,2,\cdots,3m$ 列成一个 $3\times m$ 数表

$$A_m = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_m \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_m \end{pmatrix}$$

使得 A_m 的行和都相等，列和也都相等.

则当 $n = 9m = 9^{k+1}$ 时，我们可以构造一个 $3\times 3m$ 数表如下：

$$A_{3m} = \begin{pmatrix} \alpha(m) & \beta(m)+6m & \gamma(m)+3m \\ \beta(m)+3m & \gamma(m) & \alpha(m)+6m \\ \gamma(m)+6m & \alpha(m)+3m & \beta(m) \end{pmatrix}$$

其中 $\alpha(m),\beta(m),\gamma(m)$ 分别是 A_m 的第一行、第二行、第三行. 显然 A_{3m} 中的 $9m$ 个元素恰为 $1,2,\cdots,9m$，A_{3m} 的列和都相等，A_{3m} 的行和也都相等.

接着，我们再构造一个 $3\times n$ 数表，即 $3\times 9m$ 数表如下：

$$A_n = A_{9m} = \begin{pmatrix} \alpha(3m) & \beta(3m)+18m & \gamma(3m)+9m \\ \beta(3m)+9m & \gamma(3m) & \alpha(3m)+18m \\ \gamma(3m)+18m & \alpha(3m)+9m & \beta(3m) \end{pmatrix}$$

其中 $\alpha(3m),\beta(3m),\gamma(3m)$ 分别是 A_{3m} 的第一行、第二行、第三行. 显然 A_{9m} 中的列和都相等，A_{9m} 的行和也都相等，并且 A_{9m} 中的 $27m$ 个元素恰为 $1,2,\cdots,27m$.

根据数学归纳法原理，当 $n = 9^k, k = 1,2,\cdots$ 时，可将 $1,2,\cdots,3n$ 列成一个 $3\times n$ 数表，使得数表中的行和都相等，列和也都相等.

注意到 $k = 1$ 时，$9^k = 9$；而 $k > 1$ 时，

$$\begin{aligned} n &= 9^k = 9^k - 9 + 9 = 9\cdot(9^{k-1}-1)+9 \\ &= 9\cdot 8\cdot m + 9 \\ &= 12\cdot 6m + 9 \end{aligned}$$

其中 m 为整数. 因此 $n = 9^k, k = 1,2,\cdots$ 时，n 都可以表示成 $n = 12l + 9$（l 为整数）的形式. 所以，上面列出的数表 A_n 的行和与列和都是 6 的倍数.

故原命题得证.

1・139　现发行一种数学彩票，在 1 张彩票上填上前 100 个自然数中的 10 个数，开奖时从 1,2,…,100 中画去 10 个数. 若彩票上的 10 个数皆在剩余的 90 个数中，则该彩票中奖. 证明：

(1) 若购买 13 张彩票,则可通过适当地填写彩票,保证至少有 1 张中奖;

(2) 若购买 12 张彩票,则无论如何填写,都有可能无 1 张中奖.

(世界城市际数学联赛,1996 年)

[证] (1) 我们购买 13 张彩票后,可以用以下的方法填数:第一张上,填 1—10;第二张上,填 1—5 和 11—15;第三张上,填 6—15;第四张上,填 16—25;第五张上,填 16—20 和 26—30;第六张上,填 21—30;第七张上填 31—40;第八张上填 41—50;第九张上填 51—60;第十张上填 61—70;第十一张上填 71—80;第十二张上填 81—90;第十三张上填 91—100.

为防止前 3 张彩票中奖,需画去 1—15 内的两个数;为防止第四、五、六这 3 张彩票中奖,需画去 15—30 内的两个数;为防止后七张彩票中奖,需画去 31—100 内的七个数.因此,要使所买的 13 张彩票都不中奖,至少要画去

$$2+2+7=11$$

个数.

因为只画去 10 个数, 所以这 13 张彩票中至少有 1 张中奖.

1·140 设 $k_1<k_2<k_3<\cdots$ 是正整数,且没有两个是相邻的,又对于 $m=1,2,3,\cdots,S_m=k_1+k_2+\cdots+k_m$.求证:对每一个正整数 n,区间 $[S_n,S_{n+1})$ 中至少含有一个完全平方数.

(中国上海市高中数学竞赛,1996 年)

[证] 区间 $[S_n,S_{n+1})$ 中至少含有一个完全平方数的充要条件是 $[\sqrt{S_n},\sqrt{S_{n+1}})$ 中至少含有一个整数.

因此,要证本题,只需证明对每个 $n\in N$,都有

$$\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n}\geqslant 1.$$

这等价于

$$\sqrt{S_{n+1}}\geqslant\sqrt{S_n}+1,$$

$$S_n+k_{n+1}\geqslant(\sqrt{S_n}+1)^2,$$

$$k_{n+1}\geqslant 2\sqrt{S_n}+1.$$

因为 $k_{m+1}-k_m\geqslant 2$,所以

$$S_n=k_n+k_{n-1}+\cdots+k_1$$

$$\leqslant\begin{cases}k_n+(k_n-2)+\cdots+2=\dfrac{k_n(k_n+2)}{4}, k_n\text{ 是偶数时;}\\ k_n+(k_n-2)+\cdots+1=\dfrac{(k_n+1)^2}{4}, k_n\text{ 是奇数时}\end{cases}$$

$$\leqslant\frac{(k_n+1)^2}{4},$$

于是得 $k_n+1\geqslant 2\sqrt{S_n}$,

$$k_{n+1}\geqslant k_n+2\geqslant 2\sqrt{S_n}+1.$$

这就是我们所要证明的.故原命题得证.

1·141 证明:有无穷多对自然数 a,b,满足:

(1)a,b(均用十进制表示)位数相同;

(2)a,b 都是平方数;

(3)将 b 写在 a 后面,产生一个平方数.

(例如 $a=16,b=81,1681=41^2$)

(德国数学奥林匹克,1993 年)

[解] 令 $a=(5\times10^{n-1}-1)^2,b=(10^n-1)^2$,则 a,b 都是 $2n$ 位数,并且

$$\begin{aligned}&(5\times10^{n-1}-1)^2\times10^{2n}+(10^n-1)^2\\&=(5\times10^{2n-1})^2-(10^n-1)\times10^{2n}+(10^n-1)^2\\&=(5\times10^{2n-1}-(10^n-1))^2\end{aligned}$$

所以对任意 $n\in N,a,b$ 都是符合要求的数对.

1·142 是否存在完全平方数,其数字和为 1993?

(第 3 届中国澳门数学奥林匹克,1993 年)

[解] 存在.因为

$$\underbrace{99\cdots99}_{n\text{个}9}7^2=\underbrace{99\cdots99}_{n\text{个}9}4\underbrace{00\cdots00}_{n\text{个}0}9,$$

而当 $n=220$ 时,完全平方数

$$\underbrace{99\cdots99}_{220\text{个}9}4\underbrace{00\cdots0}_{220\text{个}0}9$$

的数字和为 1993.

注 也可以用另一组完全平方数

$$\underbrace{33\cdots33}_{n\text{个}3}4^2=\underbrace{11\cdots11}_{n+1\text{个}1}\underbrace{55\cdots55}_{n\text{个}5}6.$$

当 $n = 331$ 时,完全平方数

$$\underbrace{11\cdots11}_{332个1}\underbrace{55\cdots55}_{331个5}6$$

代数卷

的数字和为 1993.

1·143　是否存在 100 个正整数,使得它们的和与它们的最小公倍数相等?

(世界城市际数学联赛,1995 年)

[解]　存在.

事实上,我们可取以下 102 个数:

$1,2,2^2,2^3,\cdots,2^{67}$

和　$3,3\cdot2,3\cdot2^3,3\cdot2^5,\cdots,3\cdot2^{65}$.

它们的和为

$$2^{68}-1+3+3\cdot2\cdot\frac{(2^2)^{33}-1}{2^2-1}=3\cdot2^{67},$$

它们的最小公倍数也是 $3\cdot2^{67}$.

再把这 102 个数中的 4 和 8 换成 12,16 和 32 换成 48,这样得到了 100 个数.显然这样的 100 个数的和与最小公倍数都是 $3\cdot2^{67}$.

1·144　(1)是否存在4个不同的自然数,使得它们中任意三个数之和是素数?

(2)　5 个呢?

(世界城市际数学联赛,1995 年)

[解]　(1)存在.如 1,3,7,9 四个数就符合条件.

(2)　不存在.因为:任意一个自然数用3除所得余数只有0,1,2,三种.对于任意5个自然数,分别用3除,如果所得的余数中有三个分别是 0,1,2,那么这三个余数所对应的三个原数的和是 3 的倍数,不是素数;如果所得的余数至多有2种,那么在5个自然数中至少有3个数对应同一种余数,这 3 个数的和是 3 的倍数,不是素数.

所以,满足条件的 5 个自然数不存在.

1·145　一个六位数的首位数字是 5,是否总能够在它的后面再添加 6 个数字,使得所得的十二位数恰是一个完全平方数?

(世界城市际数学联赛,1995 年)

[解]　答案是否定的.

事实上,如果总能做到,那么,以5为首的10^5个六位数至少可以添加成10^5个12位完全平方数n^2.

另一方面,这些完全平方数满足

$$5 \times 10^{11} \leqslant n^2 < 6 \times 10^{11}$$

$$7 \times 10^5 < n < 8 \times 10^5$$

从而整数n的个数小于10^5,矛盾.

因此,答案是否定的.

第5节　因式

1·146　化简$\left(\dfrac{1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 8 + \cdots + n \cdot 2n \cdot 4n}{1 \cdot 3 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 18 + \cdots + n \cdot 3n \cdot 9n}\right)^{\frac{1}{3}}$.

(第7届加拿大数学奥林匹克,1975年)

[解]　因为对$1 \leqslant k \leqslant n$有

$$k \cdot 2k \cdot 4k = 8k^3,$$

$$k \cdot 3k \cdot 9k = 27k^3.$$

所以,原式$= \left[\dfrac{8(1^3 + 2^3 + \cdots + n^3)}{27(1^3 + 2^3 + \cdots + n^3)}\right]^{\frac{1}{3}}$

$$= \frac{2}{3}.$$

1·147　化简

$$(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)\cdots\cdots(2^{256}+1).$$

(基辅数学奥林匹克,1948年)

[解]　原式$= (2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)\cdots(2^{256}+1)$

$$= 2^{512} - 1.$$

1·148　计算$\sqrt{31 \times 30 \times 29 \times 28 + 1}$.

(第7届美国数学邀请赛,1989年)

[解]　由于

$$\begin{aligned}&(n-1)n(n+1)(n+2)+1\\=&(n^2+n)(n^2+n-2)+1\\=&(n^2+n)^2-2(n^2+n)+1\\=&(n^2+n-1)^2,\end{aligned}$$

因此,令上式中 $n=29$ 即得

$$28\times29\times30\times31+1=(29^2+29-1)^2=869^2,$$

故 $\sqrt{31\times30\times29\times28+1}=869.$

1·149　计算下式的值

$$\frac{(10^4+324)(22^4+324)(34^4+324)(46^4+324)(58^4+324)}{(4^4+324)(16^4+324)(28^4+324)(40^4+324)(52^4+324)}.$$

(第 5 届美国数学邀请赛,1987 年)

[解]　因为　$324=4\times81=4\times3^4$

所以,本题中分子,分母的各因式均为 x^4+4y^4 的形式.由于

$$\begin{aligned}&x^4+4y^4\\=&x^4+4x^2y^2+4y^4-4x^2y^2\\=&(x^2+2y^2)^2-(2xy)^2\\=&(x^2+2xy+2y^2)(x^2-2xy+2y^2)\\=&[(x+y)^2+y^2][(x-y)^2+y^2],\end{aligned}$$

因此

$$x^4+324=[(x+3)^2+9][(x-3)^2+9],$$

从而

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\frac{(7^2+9)(13^2+9)(19^2+9)(25^2+9)\cdots(55^2+9)(61^2+9)}{(1^2+9)(7^2+9)(13^2+9)(19^2+9)\cdots(49^2+9)(55^2+9)}\\&=\frac{61^2+9}{1^2+9}\\&=373.\end{aligned}$$

1·150　试证四个连续自然数的乘积加上1的算术平方根仍为自然数.

(中国上海市数学竞赛,1962 年)

[证]　设四个连续自然数为 $n-1,n,n+1,n+2(n\geqslant2)$,则有

$$\begin{aligned}&\sqrt{(n-1)n(n+1)(n+2)+1}=\sqrt{n^4+2n^3-n^2-2n+1}\\=&\sqrt{(n^2+n-1)^2}\\=&n^2+n-1\end{aligned}$$

为一自然数.

1·151　证明:$2^{1992}-1$ 能够表示成比 2^{248} 大的六个整数的积.

(第 6 届朝鲜数学奥林匹克,1992 年)

[解] $1992=8\times249$ 且 $249\times4=332\times3$

$$\begin{aligned}2^{1992}-1&=(2^{249})^8-1\\&=\{(2^{249})^4-1\}\{(2^{249})^4+1\}\\&=(2^{249}-1)(2^{249}+1)\{(2^{249})^2+1\}\{(2^{332})^3+1\}\\&=(2^{249}-1)(2^{249}+1)\{(2^{249})^2+2\times2^{249}+1-2^{250}\}(2^{332}+1)(2^{664}-2^{332}+1)\\&=(2^{249}-1)(2^{249}+1)(2^{249}+1-2^{125})(2^{249}+1+2^{125})(2^{332}+1)(2^{664}-2^{332}+1).\end{aligned}$$

显然六个因式中每一个都大于 2^{248}.

1·152 试问,对于哪些自然数 n,数 $3^{2n+1}-2^{2n+1}-6^n$ 为合数.

(第 24 届全苏数学奥林匹克,1990 年)

[解] 因为 $3^{2n+1}-2^{2n+1}-6^n=(3^n-2^n)(3^{n+1}+2^{n+1})$,并且当 $n>1$ 时,有 $3^n-2^n>1$,所以当 $n>1$ 时,原数为合数;另一方面,当 $n=1$ 时,该数等于 13,为质数,因此本题的解为 $n>1$.

1·153 证明:当 m 为任意自然数时,1978^m-1 不能被 1000^m-1 整除.

(第 12 届全苏数学奥林匹克,1978 年)

[证] 如果 1978^m-1 能被 $1000^m-1=d$ 整除,那么

$$1978^m-1000^m=2^m(989^m-500^m)$$

就能被 d 整除.又因为 d 是奇数,所以

$$989^m-500^m$$

能被 d 整除,此与 $989^m-500^m<d$ 矛盾.于是原命题得证.

1·154 证明:如果三个正数的乘积等于1,而且这些数的和严格大于它们的倒数之和,那么这三个数之中正好有一个数大于 1.

(第 4 届全苏数学奥林匹克,1970 年)

[解] 设 $x,y,\frac{1}{xy}$ 为所求的数,由已知条件得

$$x+y+\frac{1}{xy}>\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+xy.$$

移项并作恒等变形得到

$$(x-1)(y-1)\left(\frac{1}{xy}-1\right)>0.$$

由此看出,左边三个因式中正好有一个因式是正的.于是命题得证.

1·155　a,b 及 n 是固定的自然数,且对任何自然数 $k(k \neq b)$, $a - k^n$ 能被 $b - k$ 整除.证明 $a = b^n$.

(第 4 届全俄数学奥林匹克,1964 年)

[解]　因为 $k^n - b^n = (k - b)(k^{n-1} + k^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})$,所以 $k^n - b^n$ 被 $k - b$ 整除.

于是对任何 $k \neq b$,$(k^n - b^n) - (k^n - a) = a - b^n$ 能被 $k - b$ 整除.由 k 的任意性得 $a = b^n$.

1·156　设 a 和 b 是两个奇整数,试证:$a^3 - b^3$ 能被 2^n 整除,当且仅当 $a - b$ 能被 2^n 整除.

(匈牙利数学奥林匹克,1908 年)

[证]　由于 $a^3 - b^3$ 等于数 $A = a^2 + ab + b^2$ 和数 $B = a - b$ 的乘积,因此若 B 能被 2^n 整除,则乘积 AB 也能被 2^n 整除.

由于 a 和 b 是奇数,所以 $A = a^2 + ab + b^2$ 也是奇数,因此 A 和 2^n 互素.这时若乘积 AB 能被 2^n 整除,可推出 $B = a - b$ 能被 2^n 整除.

1·157　证明不存在自然数 n,使得数 $n^6 + 3n^5 - 5n^4 - 15n^3 + 4n^2 + 12n + 3$ 是完全平方数.

(第 2 届友谊杯国际数学竞赛,1988 年)

[解]
$$\begin{aligned}&n^6 + 3n^5 - 5n^4 - 15n^3 + 4n^2 + 12n + 3\\&= n(n + 3)(n^4 - 5n^2 + 4) + 3\\&= n(n + 3)(n^2 - 1)(n^2 - 4) + 3\\&= (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 3.\end{aligned}$$

因为连续两个自然数的积是偶数,连续五个自然数的积能被 5 整除,所以 $(n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ 能被 10 整除,即原式的个位数是 3,而完全平方数的个位数只能是 0,1,4,5,6,9 中的一个,因此所给的表达式不可能成为完全平方数.

1·158　(1) 证明:10201 在大于 2 的任何底数的记数法中都是合数.

(2) 证明:10101 在任何底数的记数法中都是合数.

(第 4 届加拿大数学奥林匹克,1972 年)

[解]　(1) 设 x 是底数,如果 $x > 2$,那么就有
$$\begin{aligned}10201 &= x^4 + 2x^2 + 1\\&= (x^2 + 1)^2.\end{aligned}$$

显然是合数.

(2) 因为 $10101 = x^4 + x^2 + 1$

$$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1).$$

并且上式右端两个因式都大于 1,所以乘积是合数.

1·159　求正整数对 a,b,使之满足:

(1) $ab(a+b)$ 不被 7 整除;

(2) $(a+b)^7 - a^7 - b^7$ 被 7^7 整除.

验证你的答案.

(第 25 届国际数学奥林匹克,1984 年)

[解]　我们有

$$(a+b)^7 - a^7 - b^7 = 7ab(a+b)(a^2+ab+b^2)^2.$$

由(1)和(2)知应有 $7^7 \mid 7ab(a+b)(a^2+ab+b^2)^2$,亦即 $7^3 \mid a^2+ab+b^2$.

下面我们来求满足

$$(a+b)^2 - ab = a^2 + ab + b^2 = 7^3 = 343 \qquad ①$$

的正整数对 a,b.

由于 $0 < ab \leqslant \frac{1}{4}(a+b)^2$,于是由 ① 可得估计式

$$343 \leqslant (a+b)^2 \leqslant 457.$$

解得 $19 \leqslant a+b \leqslant 21$.

令 $a+b=19$,由 ① 得 $ab=18$,联立解得 $a=18, b=1$,容易验证,这是一对满足(1)和(2)的正整数.

1·160　设 p 与 q 为自然数,满足

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}.$$

求证 p 可被 1979 整除.

(第 21 届国际数学奥林匹克,1979 年)

[证]　
$$\begin{aligned}\frac{p}{q} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{1319}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{1318}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{1319}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{659}\right)\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{1}{660}+\frac{1}{1319}\right)+\left(\frac{1}{661}+\frac{1}{1318}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{989}+\frac{1}{990}\right)$$

$$= 1979\times\left(\frac{1}{660\times 1319}+\frac{1}{661\times 1318}+\cdots+\frac{1}{989\times 990}\right)$$

所以,$1319!\times\frac{p}{q}$ 可被 1979 整除,从而 $1319!\times p$ 可被 1979 整除.可以验证,1979 是一个素数,故 1319!不能被 1979 整除,所以 p 可被 1979 整除.

1·161 已知 k,m,n 是正整数,$m+k+1$ 是大于 $n+1$ 的素数,记 $C_s=s(s+1)$,求证:

$(C_{m+1}-C_k)(C_{m+2}-C_k)\cdots(C_{m+n}-C_k)$ 能被 $C_1C_2\cdots C_n$ 整除.

(第 9 届国际数学奥林匹克,1967 年)

[证] 若乘积

$$(C_{m+1}-C_k)(C_{m+2}-C_k)\cdots(C_{m+n}-C_k) \qquad ①$$

等于 0,则结论显然成立.

若乘积①不等于 0,所有因子必定同号,不妨假定所有因子都是正数.

因为 $C_S=S(S+1)$,所以

$$C_p-C_q=p(p+1)-q(q+1)$$
$$=(p-q)(p+q+1)$$

于是乘积①化为

$$(C_{m+1}-C_k)(C_{m+2}-C_k)\cdots(C_{m+n}-C_k)$$
$$=(m+1-k)(m+1+k+1)(m+2-k)(m+2+k+1)\cdots(m+n-k)\cdots(m+n+k+1)$$
$$=[(m-k+1)(m-k+2)\cdots(m-k+n)]\cdot[(m+k+2)(m+k+3)\cdots(m+k+1+n)]$$
$$=\frac{(m+n-k)!}{(m-k)!}\cdot\frac{(m+k+1+n)!}{(m+k+1)!}.$$

由于 $C_1C_2\cdots C_n=n!(n+1)!$,所以

$$\frac{(C_{m+1}-C_k)(C_{m+2}-C_k)\cdots(C_{m+n}-C_k)}{C_1C_2\cdots C_n}$$
$$=\frac{(m+n-k)!}{(m-k)!n!}\cdot\frac{(m+k+1+n)!}{(m+k+1)!(n+1)!}$$

$$= C_{m+n-k}^{n} \cdot \frac{(m+k+1+n)!}{(m+k+1)!(n+1)!}$$

$$= C_{m+n-k}^{n} \cdot C_{m+n+k+1}^{n+1} \cdot \frac{1}{m+k+1}.$$

因为 C_{m+n-k}^{n} 是整数,所以我们只要证明:当 $m+k+1$ 是大于 $n+1$ 的素数时,$C_{m+n+k+1}^{n+1}$ 能被 $m+k+1$ 整除就可以了.

事实上,在 $(m+n+k+1)!$ 中,$m+k+1$ 就是它的一个因子,而 $m+k+1$ 是大于 $n+1$ 的素数,则在 $(n+1)!$ 及 $(m+k)!$ 中均不含有 $m+k+1$ 这个因子,所以当 $(m+n+k+1)!$ 被 $(n+1)!(m+k)!$ 除时,不可能约掉 $m+k+1$,因而 $C_{m+n+k+1}^{n+1}$ 能被 $m+k+1$ 整除.于是当乘积 ① 的各因子都是正数时,乘积 ① 能被 $C_1C_2\cdots C_n$ 整除.

同样可以证明,当乘积 ① 的各因子都是负数时,乘积 ① 能被 $C_1C_2\cdots C_n$ 整除.

1 · 162 (1) 确定所有的正整数 n,使得 2^n-1 能被 7 整除.

(2) 证明:对于所有的正整数 n,2^n+1 不能被 7 整除.

(第 6 届国际数学奥林匹克,1964 年)

[**解**] (1) 如果 n 是3的倍数,那么,我们可以设 $n=3k$(k 是正整数),

$$\begin{aligned} 2^n-1 &= 2^{3k}-1 \\ &= 8^k-1 \\ &= (8-1)(8^{k-1}+8^{k-2}+\cdots+1), \end{aligned}$$

所以 2^n-1 能被 7 整除.

如果 n 不是3的倍数,那么可设 $n=3k+1$,$n=3k+2$(k 为非负整数).

当 $n=3k+1$ 时,

$$\begin{aligned} 2^n-1 &= 2^{3k+}-1 \\ &= 2\cdot 2^{3k}-1 \\ &= 2\cdot 8^k-1 \\ &= 2(7+1)^k-1. \end{aligned}$$

由于 $(7+1)^k$ 被 7 除时余数为 1,$2(7+1)^k$ 被 7 除的余数为 2,$2(7+1)^k-1$ 被 7 除的余数为 1,于是 2^n-1 被 7 除余 1.

当 $n=3k+2$ 时,

$$
\begin{aligned}
& 2^n-1 \\
=\ & 4\cdot 8^k-1 \\
=\ & 4\cdot(7+1)^k-1.
\end{aligned}
$$

由于 $4\cdot(7+1)^k$ 被 7 除余 4,因此 $4\cdot(7+1)^k-1$ 被 7 除余 3,2^n-1 被 7 除余 3.

综上所述,当且仅当 n 是 3 的倍数时,2^n-1 能被 7 整除.

(2) 由(1) 可知,当 $n=3k,3k+1,3k+2$ 时,2^n 被 7 除的余数依次是 1,2,4.因此 2^n+1 被 7 除的余数依次为 2,3,5,这就是说,对任意正整数 n,2^n+1 总不能被 7 整除.

1・163　整数 A 与 B 的最后 k 个数字是相同的,证明:数 A^n 与 B^n(n 为自然数)的最后 k 个数字也相同.

(基辅数学奥林匹克,1940 年)

[证]　因为 A^n-B^n

$$=(A-B)(A^{n-1}+A^{n-2}B+\cdots+AB^{n-2}+B^{n-1}),$$

但 $A-B$ 的最后 k 个数字相同,即 $A-B$ 能被 10^k 整除.所以 A^n-B^n 也能被 10^k 整除.也就是说 A^n 与 B^n(n 为自然数)的最后 k 个数字也相同.

1・164　纯粹十进制循环小数是指小数 $0.\dot{a}_1\cdots\dot{a}_k$,它从小数点后开始出现重复的 k 个数字.例如:$0.243243243\cdots=\frac{9}{37}$.混合循环小数 $0.b_1\cdots b_m\dot{a}_1\cdots\dot{a}_k$ 是指最终出现循环,但不能化为一个纯粹循环小数.例如:$0.011363636\cdots=\frac{1}{88}$.

如果一个混合循环小数表示成既约分数 $\frac{p}{q}$,求证:分母 q 必可被 2 或 5 整除,或同时被它们整除.

(第 17 届美国数学奥林匹克,1988 年)

[证]　不妨设我们已将循环节尽可能地左移,因而在 $0.b_1\cdots b_m\dot{a}_1\cdots\dot{a}_k$ 中,$m\geqslant 1$,且 $b_m\neq a_k$.

由已知,这个循环小数等于分数 $\frac{p}{q}$,因此

$$\frac{p}{q}=\frac{(10^k-1)\overline{b_1\cdots b_m}+\overline{a_1\cdots a_k}}{(10^k-1)\cdot 10^m}.$$

整理得

$$\frac{p}{q}=\frac{10^k\cdot\overline{b_1\cdots b_m}+(\overline{a_1\cdots a_k}-\overline{b_1\cdots b_m}}{10^m(10^k-1)}.$$

上式右边分母中含有因数 10,而上式右边分子中,由于 $a_k\neq b_m$,因此分子不能被 10 整除,即分子不能同时被 2 和 5 整除.

如果上式右边分子中,既不含因数 2 也不含因数 5,那么 q 可同时被 2 和 5 整除.

如果上式右边分子中,含因数 2 但不含因数 5,那么 q 可被 5 整除.

如果上式右边分子中,含因数 5 但不含因数 2,那么 q 可被 2 整除.

综上所述,任何情况下,原命题都成立.

1·165 已知 m、n 是任意的非负整数,证明若规定 $0!=1$,则 $\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$ 是整数.

(第 14 届国际数学奥林匹克,1972 年)

[证] (把 m 看做常数,对 n 进行归纳)

$n=0$ 时,原式 $=\frac{(2m)!}{m!m!}=C_{2m}^m$ 是正整数,其中 m 是非负整数.

设当 $n=k$ 时命题成立,即

$$\frac{(2m)!(2k)!}{m!k!(m+k)!}$$

是正整数,其中 m 是任意非负整数.

则当 $n=k+1$ 时,

$$\begin{aligned}&\frac{(2m)!(2k+2)!}{m!(k+1)!(m+k+1)!}\\ =&\frac{(2m)!(2k)!}{m!k!(m+k)!}\cdot\frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)(m+k+1)}\\ =&\frac{(2m)!(2k)!}{m!k!(m+k)!}\cdot\frac{4k+2}{m+k+1}\\ =&\frac{(2m)!(2k)!}{m!k!(m+k)!}\cdot\frac{4(m+k+1)-(4m+2)}{m+k+1}\\ =&\frac{(2m)!(2k)!}{m!k!(m+k)!}\left[4-\frac{(2m+1)(2m+2)}{(m+1)(m+k+1)}\right]\end{aligned}$$

$$= 4 \cdot \frac{(2m)!(2k)!}{m!k!(m+k)!} - \frac{(2m+2)!(2k)!}{(m+1)!k!(m+k+1)!}$$

根据归纳假设,上面两项都是正整数,故

$$\frac{(2m)!(2k+2)!}{m!(k+1)!(m+k+1)!}$$

也是正整数,其中 m 是任意非负整数.

根据数学归纳原理,原命题成立.

1·166　证明:对每一个 n,数$\underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}}2\underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}}$是合数.

(第 13 届全俄数学奥林匹克,1987 年)

[证]

$$\underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}}2\underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}}$$

$$= \underbrace{11\cdots1}_{n+1\text{个}}\underbrace{00\cdots0}_{n\text{个}} + \underbrace{11\cdots1}_{n+1\text{个}}$$

$$= \underbrace{11\cdots1}_{n+1\text{个}}(10^n + 1).$$

对于 $n \geqslant 1$ 的自然数,上述两个因数均大于 1,因此所给的数是合数.

1·167　求出一切这样的三位数$\overline{abc}$,它的平方的最末三位数也是 abc.

(第 13 届全俄中学生数学竞赛,1987 年)

[解]　设满足要求的三位数为 A,则 $A^2 - A = A(A-1)$ 被 $1000 = 8 \cdot 125$ 整除,因为 A 与 $A-1$ 互素,所以只能是 125 整除 A 且 8 整除 $A-1$,或者 125 整除 $A-1$ 且 8 整除 A.容易验证满足题目要求的三位数只有 376 或 625.

1·168　证明:在形如$2^n + n^2 (n \in N)$ 的数中有无穷多个数是 100 的倍数.

(第 12 届全俄数学奥林匹克,1986 年)

[证]　设 $A_n = 2^n + n^2$.

当 n 为偶数时,即 $n = 2m, m \in N$ 时,

$$A_n = A_{2m} = 2^{2m} + (2m)^2 = 4(4^{m-1} + m^2)$$

能被 4 整除.设 $B_m = 4^{m-1} + m^2, (m \in N), m = 25k + l, k$ 为非负整数,$l = 0,1,2,\cdots,24$.则

$$B_m = B_{25k+l} = 4^{25k+l-1} + (25k+l)^2$$

$= (4^{25k} \cdot 4^{l-1} + l^2) + 25(25k^2 + 2kl)$

因为　$4^{10} = 1048576, 76 \times 76 = 5776,$

$76 \times 16 = 1216.$

所以，当 $l = 3, k = 2p, p \in N$ 时，$25 \mid 4^{25k} . 4^{l-1} + l^2$，即 $n = 2m = 100p + 6$ 时，$100 \mid A_n$.

于是命题得证.

1·169　确定所有的正整数三数组 (a, b, c)，使得 $a^2 = 2^b + c^4$ 且 a、b、c 中仅有一个是奇数.

（第 27 届荷兰数学竞赛）

[解]　由 $a^2 = 2^b + c^4$ 知 $2^b = (a - c^2)(a + c^2)$.

因为 2^b 是偶数，$a - c^2$ 和 $a + c^2$ 的奇偶性相同，所以，$a - c^2$ 和 $a + c^2$ 是偶数，不妨设

$$a - c^2 = 2^k, \quad ①$$

$$a + c^2 = 2^{k+m}. \quad ②$$

这里，k 和 m 均是正整数，由 ①，② 知，a，c 的奇偶性相同，如果 a，c 都是奇数，与题设条件不符，因此 a，c 都是偶数.

由 ② - ① 得，$2c^2 = 2^{m+k} - 2^k = 2^k(2^m - 1)$，

即　$c^2 = 2^{k-1}(2^m - 1)$，

因为上式左端是完全平方数，$2^m - 1$ 是奇数，所以 $2^m - 1$ 也必须是完全平方数，设

$$2^m - 1 = (2t - 1)^2, t \in N.$$

则　$2^{m-1} = 2t^2 - 2t + 1$

此式仅当 $m = 1$ 时成立，所以

$$c^2 = 2^{k-1}, c = 2^{\frac{k-1}{2}}.$$

C 是自然数，且是偶数，故 k 是大于 2 的奇数. 令 $\frac{k-1}{2} = n$，这里 n 为正整数，再由 ① 式

$$a = 2^k + c^2 = 2^{2n+1} + 2^{2n} = 3 \cdot 2^{2n},$$

所以　$2^b = (3 \cdot 2^{2n})^2 - 2^{4n}$

$= 9 \cdot 2^{4n} - 2^{4n} = 2^{4n+3}.$

即　$b = 4n + 3$，因此

$$(a, b, c) = (3 \cdot 2^{2n}, 4n + 3, 2^n)$$

其中 n 为正整数,且只有 b 为奇数.

1·170 证明:对每个自然数 n, $13\cdot(-50)^n+17\cdot40^n-30$ 总能被 1989 整除.

(第 15 届全俄中学生数学奥林匹克,1989 年)

[证] 记 $f(n)=13\cdot(-50)^n+17\cdot40^n-30$.

$g(n)=f(n+1)-f(n)$.则

$$g(n)=(-1)^{n+1}\cdot13\cdot50^n\cdot51+17\cdot40^n\cdot39$$
$$=3\times13\times17\times10^n[(-1)^{n+1}\cdot5^n+4^n]$$

因为 $f(1)=0$,且当 $n\geqslant2$ 时有 $f(n)=f(1)+g(1)+g(2)+\cdots+g(n-1)$,所以,只需证明当 $n\geqslant1$ 时, $g(n)$ 能被 1989 整除即可.

由 $g(n)$ 分解式推得, $g(n)$ 能被 $3\cdot13\cdot17$ 整除,而 $1989=9\cdot13\cdot17$.因此剩下的问题是,证明当 $n\geqslant1$ 时, $h(n)=(-1)^{n+1}\cdot5^n+4^n$ 能被 3 整除.重复上述方法,设 $p(n)=h(n+1)-h(n)=(-1)^{n+2}\cdot5^n\cdot6+4^n\cdot3$,由 $p(n)$ 能被 3 整除以及 $h(1)=9$ 能被 3 整除可得, $h(n)=h(1)+p(1)+p(2)+\cdots+p(n-1)$ 能被 3 整除.于是原命题得证.

1·171 设 $n\geqslant5$ 且为整数,将 n 分成 4 个正整数即 $n=n_1+n_2+n_3+n_4$ 且 (i,j,p,q) 为 $(1,2,3,4)$ 的一切排列,证明:当且仅当 $n_in_j\neq n_pn_q$ 时, n 为素数.

(新加坡数学竞赛,1989 年)

[证] 若 n 不为素数,则我们可设

$$n=(a+1)(b+1)=ab+a+b+1,$$

这里的 a 和 b 是正整数,这样给出了符合要求的 n 的一种分法,但 $a\cdot b=ab\cdot1$,矛盾.

相反,设 $n=n_1+n_2+n_3+n_4$ 且 $n_1n_2=n_3n_4$,设 $\frac{n_1}{n_4}=\frac{n_3}{n_2}=\frac{h}{k}$ (h,k 为互质的正整数),则 $n_1=hr,n_2=ks,n_3=hs,n_4=kr$,于是

$$n=hr+ks+hs+kr=(h+k)(r+s)$$

这样说明 n 不是素数.

1·172 有多少个正整数对 $x,y,x<y$,使得 $(x,y)=5!$ 且 $[x,$

$y] = 50!$成立?

(第29届加拿大数学奥林匹克,1997年)

[解] 设 $p_1, p_2, \cdots, p_{12}$ 表示按递增次序从7到47的12个素数.则我们记

$$5! = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot P_1^0 \cdot P_2^0 \cdots P_{12}^0$$

$$50! = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \cdot P_1^{\beta_1} \cdot P_1^{\beta_2} \cdots P_{12}^{\beta_{12}}$$

因为 $x \mid 50!$, $y \mid 50!$,所以 x, y 有以下形式

$$x = 2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \cdot 5^{n_3} \cdot P_1^{n_4} \cdot \cdots \cdot P_{12}^{n_{15}},$$

$$y = 2^{m_1} \cdot 3^{m_2} \cdot 5^{m_3} \cdot P_1^{m_4} \cdot \cdots \cdot P_{12}^{m_{15}}.$$

其中 $max(n_i, m_i)$ 等于50!的分解式中第 i 个素数的幂指数,$min(n_i, m_i)$ 等于5!的分解式中第 i 个素数的幂指数.

由于素数 $2, 3, 5, P_1, \cdots, P_{12}$ 的幂指数在5!中和在50!中是不同的,所以对 x 有 2^{15} 种选择.又由于符合条件 $x < y$ 的选择种数等于符合条件 $y < x$ 的选择种数,因此,符合题设条件的正整数对 x, y 共有

$$\frac{2^{15}}{2} = 2^{14}(种).$$

第6节 变换

1·173 设有 2^n 个球分成了许多堆.我们可以任意选甲、乙两堆来按照以下规则挪动:若甲堆的球数 p 不少于乙堆的球数 q,则从甲堆拿 q 个球放到乙堆里去,这样算是挪动一次.试证:可以经过有限次挪动把所有球合并成一堆.

(中国北京市数学竞赛,1963年)

[证] 用数学归纳法进行证明.

$n = 1$ 时,共有两个球.若只有一堆,则不必挪动;若分为两堆,每堆一个,则挪动一次就并成一堆了.

设 2^k 个球分成许多堆之后按规则能并成一堆.现在来证 2^{k+1} 个球分堆之后也能按照规则并成一堆.

一般地说,2^{k+1} 个球所分各堆的球数或是奇数或是偶数.可以肯定奇数个球的堆数必是偶数(否则总球数是奇数与题设不合).因此我们可以把它们(奇数个球的许多堆)两两配合,在每两堆之间挪动一次,

使得各堆的球数都是偶数.这时总堆数只能比原来的少,而不能比原来的多,而且每堆中都是偶数个球,现在把每堆中每两个小球"粘"在一起看作是一个大球,这样就把 2^{k+1} 个小球变成 2^k 个大球了,根据归纳假设,这 2^n 个大球总能按照规则并成一堆,并成一堆后再把每个大球拆成两个小球,就是 2^{n+1} 个球并成一堆了.

根据数学归纳原理,命题得证.

1・174　黑板上写着数 1 和 2, 现允许按如下规则写出新的数:如果黑板上已写有数 a 和 b,则可写上数 $ab+a+b$.试问能否按这样的法则得到数:

(1) 13121;

(2) 12131?

(第 22 届全苏数学奥林匹克,1988 年)

[解]　用 C 表示新写的数 $ab+a+b$.那么 $c+1=ab+a+b+1=(a+1)(b+1)$.就是说,如果不去考察黑板上已写的数,而去考察比所写数大 1 的数,那么每一个新写的数就等于两个已有数的积.因为我们是从数 2,3 开始的,那么在若干次乘积之后就得到形为 $2^n\cdot 3^m$ 的数,其中 n、m 为自然数,显然,那种形式的所有数都能得到.就是说,在原来的情形中只能得到形为 $2^n\cdot 3^m-1$ 的数,

因为数 13121 是这样的数,而 12131 不是.所以我们可以得到数 13121,但不可能得到 12131.

1・175　在一个 $n\times n$ 的方格表的每一格中都填有一个实数,且每一行、每一列数的和都等于 0.现允许在表中进行如下的运算:任取一行数,将其逐个加到某一列数上去(即该行的第一个数加到该列的第一个数上去,将第二个数加到第二个数上去,如此等等;对行中的数自左至右编号,对列中的数自上至下编号),并且从另一列数中逐个减去该行数.证明:可以经过有限次的这种运算,将表中的所有数都变为 0.

(第 22 届全苏数学奥林匹克,1988 年)

[证]　把表格的行自上而下编号、把列自左向右编号.用 $O_{j,k}^{i}$ 表示将第 i 行加到第 j 列以及从第 k 列减去第 i 行的运算.

当我们对该表格依次进行运算:

$O_{n,1}^{1},O_{n,2}^{2},\cdots,O_{n,n-1}^{n-1}$

之后,表格中对角线上的所有元素(除在第 n 行第 n 列上的一个元素

外）都等于 0，我们来考察运算序列

$O^i_{j,i}, O^i_{i,j}, O^i_{i,j}, O^i_{n,i}, O^i_{j,n}.$

不难验证，再对上面所得的表格进行这些运算后就得到新表格：位于第 i 行和第 j 列交点上的数等于 0，而不在第 n 行和第 n 列中的其余所有数都不变化.

依次对所有 $i = 1,2,\cdots,n-1, j = 1,2,\cdots,n-1$ 应用上述运算序列后，我们就得到这样一张表格，在其中异于 0 的数只可能在最后一行或最后一列. 又因为在任何行中及任何列中数之和等于 0（此性质在运算过程中保持不变），所以在最后一行和最后一列中的数也都是 0. 从而本题得证.

1·176　3 架自动机在卡片上打印自然数数对. 自动机按以下方式工作：第一架自动机读完卡片$(a;b)$后输出新的卡片$(a+1;b+1)$，第二架自动机读完卡片(a,b)后输出新卡片$\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2}\right)$（仅当 a,b 为偶数时它才工作），第三架自动机每次读两张卡片$(a;b)$和$(b;c)$，输出的新片是$(a;c)$. 此外，自动机能退回所有读过的卡片.

假设有一张初始卡片$(5;19)$，问：能否利用任何类型的自动机来得到卡片：

(1)$(1;50)$?

(2)$(1;100)$?

(3) 假设有初始卡片$(a;b)$，$a<b$，而我们想得到卡片$(1;n)$. 问：n 取何值时能做到这一点？

（第 12 届全苏数学奥林匹克，1978 年）

[解]　(1)　可以得到$(1;50)$. 方法如下：

$(5;19)\to(6;20)\to(3;10)\to\cdots\to(10;17)\to(3;17)\to$

$(4;18)\to(2;9)\to\cdots\to(9;16)\to(2;16)\to(1;8)\to\cdots\to(8;15)\to$

$(1;15)\to(8;22)\to(1;22)\to(8;29)\to(1;29)\to\cdots\to(1;50)$

(2)　不可能得到$(1;100)$.

因为在任何运算中，卡片上的数之差都能被 7 整除，但 $100-1=99$ 不能被 7 整除，所以不可能得到$(1;100)$.

(3)　设 d 为 $b-a$ 的最大的奇因数，那么仅当 $n=1+dk$（k 为某

个自然数)时,从卡片$(a;b)$可以得到卡片$(1;n)$.

事实上,这个条件的必要性是显然的(其证明与(2)的证明类似).现在只要证明,从$(a;b)$可以得到$(1;1+d)$.如果a和b的奇偶性相同,那么将完成以下运算:$(a;b)\to\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2}\right)$或者$\left(\frac{a+1}{2};\frac{b+1}{2}\right)$;它给出了其差缩小$\frac{1}{2}$的两个数,反复施行这种运算,可使其差缩小为$d$.接着再利用第一架自动机可得$(a;a+d)$,然后再进行以下一系列运算:

$$(a;a+d)\to(a+d;a+2d)\to(a;a+2d)$$
$$\to\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2}+d\right)\text{或者}\left(\frac{a+1}{2};\frac{a+1}{2}+d\right)$$

它给出了其差相等的两个数,然而当$a>1$时数变小了.重复这一系列运算,如同(1)的例子那样,能得到$(1;1+d)$.

1·177 在黑板上写着若干个0、1、2,可以擦去其中两个不相等的数字,并代之以一个与擦去的数字不相同的数字(例如,用2代替0和1,用0代替1和2,用1代替0和2).证明:如果经过若干步这样的运算后在黑板上还有一个数,那么这个数与擦去数字的先后次序无关.

(第9届全苏数学奥林匹克,1975年)

[证] 设在黑板上写着P个0,q个1,r个2.每一步之后所有三个数p、q和r都增加或减少1,因而p、q、r的奇偶性随着改变.当在黑板上只剩下一个数时,p、q和r中的一个变为1,另外两个变为0,所以,起初这些数中恰有一个数的奇偶性异于另外两个数的奇偶性.正是这个数所对应的数字仍在黑板上,它与擦去数字的先后次序无关.

1·178 求具有以下性质的一切三位数A:用A的数字的各种重排所得到的一切数的算术平均值仍等于A.

(第8届全苏数学奥林匹克,1974年)

[解] 设$\overline{abc}$为所求之数,则由题意可得

$$\overline{abc}+\overline{acb}+\overline{bac}+\overline{bca}+\overline{cab}+\overline{cba}=6\,\overline{abc},$$

即 $$222(a+b+c)=6(100a+10b+c),$$

化简得 $$7a=3b+4c.$$

$$7(a-b)=4(c-b).$$

由此,或者$a=b=c$;或者$a-b=4,c-b=7$(那么$0\leqslant b\leqslant$

2);或者 $b-a=4, b-c=7$(那么 $7 \leqslant b \leqslant 9$).

故满足条件的数共有 15 个,它们是

111,222,…,999,407,518,629,370,481,592.

1·179　在一个圆上写了若干个数.如果对于某 4 个依次相邻的数 a、b、c、d 有 $(a-d)(b-c)<0$,那么 b 和 c 就可以互换位置.证明:那样的运算只能进行有限次.

(第 5 届全苏数学奥林匹克,1971 年)

[证]　如果 $(a-d)(b-c)<0$,那么

$$ab+cd<ac+bd,$$

因此 $$ab+bc+cd<ac+cb+bd.$$

这就是说,b,c 互换位置后,相邻数的两两乘积之和 s 随着增大.但是和 s 只能取有限个不同的数值,因此,此类运算只能进行有限次.

1·180　在每张卡片上各写着从11111 到99999 的五位数,然后把这些卡片按任意顺序摆成一排,证明:所得到的 444445 位数不可能是 2 的幂.

(第 4 届全苏数学奥林匹克,1970 年)

[证]　我们证明所得到的任何一个 444445 位数都能被 11111 整除.因此它不可能是 2 的幂.

$$10^5=9\times 11111+1,$$

所以,10^5 在除以 11111 时有余数 1.

因为所得到的任何一个数 S 都可写成

$S=11111\times(10^5)^{k_1}+11112\cdot(10^5)^{k_2}+\cdots+99999\cdot(10^5)^{k_{88889}}$ 的形式,其中 $k_1, k_2, \cdots, k_{88889}$ 是 $0, 1, \cdots, 88888$ 的一个排列,所以 S 除以 11111 的余数与卡片上所有数的和除以 11111 的余数相等.

然而卡片上所有数的和等于

$$\frac{11111+99999}{2}\times 88889.$$

它能被 11111 整除,从而 S 能被 11111 整除,于是命题得证.

1·181　把一个十七位数的所有数字按相反次序写出而得到一个新数,再把这个数与原数相加.证明:所得和中至少有一个数字是偶数.

(第 4 届全苏数学奥林匹克,1970 年)

[证] 假设和中每一个数都是奇数，我们把两个数中的一个写在另一个下面(数位对齐)，并把它们相应的数位上的数字加起来，因为和的末位数字为奇数，所以把首位数字相加后也得到奇数和，因此在相加时，1不能由前1数位进到这一数位.这就是说，在第二个数位上的数字和小于10，因此在倒数第二个数位上数字和也小于10.

显然仅当第二个数位上的数字和等于9而第一个数位上的数字和大于10时才可能进1，但那时在和的第二数位上的数字将是0.此与"和的每一数位上都是奇数"矛盾，所以从第二个数位到第三个数位不能进1.

现在我们去掉已知数的最后两个数字以及开始的两个数字，并对所得的13位数作类似的推理.然后对9位数、最后对5位数作类似的推理，我们得到1不能从和的前一数位进到居中的数位，而因为在两个数居中的数位上的数字相同，因此和的居中数位上的数字是偶数.

此与我们所作的假设矛盾.故原命题成立.

1·182　对1至1000000000，求每一个数的各位数字之和；再对所得的10亿个数，求每一个数的各位数字之和，…，直到得到10亿个一位数为止.问：所得的数中1多还是2多？

(第4届全俄数学奥林匹克，1964年)

[解] 1比2多1个.

事实上，任何一个数与它的数字和在被9除时都有相同的余数，因此，在这个题中，1由那些被9除时余数为1的数：1，10，19，28，…，999999991，1000000000得到，而2由余数为2的数：2，11，20，29，…，999999992得到.因为余数为1的数比余数为2的数多1个.所以结果所得的1比2多1个.

1·183　给定任意一组n个整数$a_1,a_2,\cdots,a_n$，由它可得到新的一组：

$$\frac{a_1+a_2}{2},\frac{a_2+a_3}{2},\cdots,\frac{a_{n-1}+a_n}{2},\frac{a_1+a_n}{2};$$

由这一组按照同一规则又可得到新的一组……证明：如果所得数都是整数，则所有初始数都相等或者都隔位相等.

(第4届全俄数学奥林匹克，1964年)

[证] 如果n个初始数不全相等，那么n步之后这组数中的最大

数一定要减小，而最小数要增大.

由于每一步所得的最大数和最小数都是整数，因此经过有限步一定能得到一组相等的数$(a,a,\cdots,a)$.

假设由一组不全相等的数 z_1、$z_2,\cdots,z_n$ 首先得到一组相同的数

$$\frac{z_1+z_2}{2}=\frac{z_2+z_3}{2}=\cdots=\frac{z_{n-1}+z_n}{2}=\frac{z_n+z_1}{2},$$

那么数 z_i 隔一个就相等. 当 n 为奇数时，这是不可能的. 故 n 为偶数.

设 $z_{2i-1}=a,z_{2i}=b\left(1\leqslant i\leqslant\frac{n}{2}\right)$，如果数组 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 是由数组 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 直接得到的，于是，我们有

$$\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{y_3+y_4}{2}=\cdots=\frac{y_{n-1}+y_n}{2}=a \quad ①$$

$$\frac{y_2+y_3}{2}=\frac{y_4+y_5}{2}=\cdots=\frac{y_n+y_1}{2}=b \quad ②$$

由①得 $\quad y_1+y_2+\cdots+y_n=\frac{1}{2}^{na}$,

由②得 $\quad y_2+y_3+\cdots+y_n+y_1=\frac{1}{2}^{nb}$,

所以 $\quad a=b$.

此与 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 不全相等矛盾. 这就证明了数组 $a,b,a,b,\cdots,a,b$ 是初始数组，故本题结论成立.

1·184 (1) 已知一组正数(a,b,c,d)，按照以下规则可得到新的数组(ab,bc,cd,da). 每一个数乘以后一个数，第 4 个数乘以第一个数. 按照这个规则还可以得到第三组、第四组等等. 证明：在所得的这个数组序列中，除当 $a=b=c=d=1$ 外，不会再次出现(a,b,c,d).

(2) 给定任意一由 2^k 个 1 与 -1 组成的数组，按照以下规则可以得到新数组：每一个数乘以后一个数，而第 2^k 个数乘以第一个数，又可以按这个规则再得到新的数组，证明：最终能得到全由 1 构成的数组.

(第 1 届全俄数学奥林匹克，1961 年)

[证] (1) 假设四个正数(a,b,c,d)再次出现.

首先证明：在这种情形中，$abcd=1$.

设 $abcd=p$，那么第二组的四个正数的乘积等于 p^2，第三组的则是 p^4，第四组的是 p^8，… 显然，当 $p\neq1$ 时在乘积序列中将不会有两个

数相同,于是所得的四数组将不相同,因此 $p = 1$.

现在我们考察第二组四个正数:ab, bc, cd, da. 因为 $abcd = 1$,那么容易验证,第四个四数组是 $b^2c^2, c^2d^2, d^2a^2, a^2b^2$,于是第四组是由第二组的每个数的平方再重排得到的,用同样的方法也能由第四组得到第六组. 由第六组得到第八组,等等.

如果第二组中的四个数不都等于 1,那么其中最大者大于 1,于是第 $2n$ 组中最大者将随着 n 的增大而无限地增大,而这与它们循环重复相矛盾.

于是 $ab = bc = cd = da = 1$,由此容易得到 $a = b = c = d = 1$.

(2) 当 $n = 1$ 时,结论显然成立.

假设 $n = k$ 时结论成立,我们来证 $n = k + 1$ 时结论也成立.

我们把前三行写在下面

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots, x_{2^{k+1}}, \quad ①$$

$$x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, \cdots, x_{2^{k+1}}x_1, \quad ②$$

$$x_1x_3, x_2x_4, x_3x_5, \cdots, x_{2^{k+1}}x_2. \quad ③$$

从前三行 ①、②、③ 可以看出,如果我们把在号码为奇数的位置上的数与号码为偶数的位置上的数分别看作两行:$x_1, x_3, \cdots, x_{2^{k+1}}$ 与 $x_2, x_4, \cdots, x_{2^{k+1}}$. 那末对这两行分别按规则得到的两个新数组,恰好合成 ③. 按归纳假设步长为 2^k 的行按规划总能变成全由 1 构成的行,因此由步长为 2^{k+1} 的初始行也能得到全由 1 构成的行.

1·185 在黑板上写有自然数 $1, 2, 3, \cdots, n$,其中 $n \geqslant 3$,每一次允许擦去其中任何两个数字 p 与 q,而代之以 $p + q$ 和 $|p - q|$. 经过这样若干次改写之后,黑板上所有的数字全都变成了 k,试问,k 可能为哪些值?

(第 25 届全苏数学奥林匹克,1991 年)

[解] 设 s 是任何一个满足不等式 $2^s \geqslant n$ 的自然数.

显然,在每一步之后,黑板上都将写上非负整数. 如果两个非负整数的和与差都能被某个奇数 d 整除,那么这两个数本身也都可以被 d 整除,因此,如果数 k 能够被奇数 $d > 1$ 整除,那么一开始写在黑板上的数就都应当可以被 d 整除. 但这是不可能的,因为其中有数字 1. 因此,k 不能含有奇的质因数,亦即有 $k = 2^s$. 由于在每一步之后,黑板上的

数字中的最大值不会下降,故知 $k \geqslant n$.

下面我们来证明 k 可为任何不小于 n 的 2^s.

首先因为由数对 $(2^a, 2^a)$ 可得到 $(0, 2^{a+1})$,由 $(0, 2^c)$ 又可得到 $(2^c, 2^c)$,所以,如果在黑板上写有一组由 2 的方幂所组成的数,它们的指数都不超过 s_0,并且其中又有两个相等的小于 2^{s_0} 的数,那么经过几步之后,就可以使所有的数全都变为 2^{s_0},而且 s_0 可以取成任何满足不等式 $2^{s_0} \geqslant n$ 的自然数.

我们再证明:由数组 $1, 2, \cdots, n$ 出发,总是可以得到上述的全由 2 的方幂构成的数组.

事实上,$n = 3$ 时显然:由 1,2,3 可得 2,2,4.假设断言已对满足不等式 $3 \leqslant n \leqslant m$ 的所有 n 成立,要证断言对于 $n = m + 1$ 也成立.

如果 $m + 1 \leqslant 8$,那么可以直接验证.现设 $m + 1 = 2^l + b$,其中 $1 \leqslant b \leqslant 2^l$,$l \geqslant 3$.我们来对数 $p = 2^l + u$,$q = 2^l - u$,其中 $1 \leqslant u \leqslant b$(当 $b = 2^l$ 时,$1 \leqslant u \leqslant b - 1$)作题目所述的变换,可以得到如下 3 部分数所构成的数组:

(1) $1, 2, \cdots, 2^l - b - 1$(当 $b = 2^l$ 和 $b = 2^l - 1$ 时,这部分数不存在);

(2) $2, 4, \cdots, 2b$(这部分数由差值 $|p - q|$ 得出);

(3) $2^l, 2^{l+1}, \cdots, 2^{l+b}$(这部分数由和 $p + q$ 及数 2^l 得出).如果第一部分和第二部分的数都不少于 3 个($3 \leqslant b \leqslant 2^l - 4$),则可分别对它们使用归纳假设.如果只有其中一部分不少于 3 个数,那么可对该部分数使用归纳假设,而其余两部分数则均已为 2 的方幂.如果第一,二两部分的数都少于 3 个,那么由 $2^l - b - 1 \leqslant 2$ 和 $2b \leqslant 4$ 可得 $2^l \leqslant 5$,此与 $l \geqslant 3$ 矛盾,于是命题得证.

1·186　在练习本里写着若干数.如果这些数中的两个数或更多一些数的算术平均值不等于这些数中的任何数,那么就可以把这些平均值填写到已写好的那些数旁边.证明:从数 0、1 开始,用这样的填写法可以得到数:

(1) $\frac{1}{5}$;

(2)0 和 1 之间的任何有理数.

(第 13 届全苏数学奥林匹克,1979 年)

[解]　首先,我们可以得到0和1之间分母为2的正整数次幂的所有有理数.

事实上,从数轴上看,利用求算术平均数的方法可以得到任意两个已知点为端点的线段的中点.也就是说,从0和1可以得到$\frac{1}{2}$;又从0和$\frac{1}{2}$得$\frac{1}{4}$,从$\frac{1}{2}$和1得$\frac{3}{4}$;再从0和$\frac{1}{4}$得$\frac{1}{8}$,从$\frac{1}{4}$和$\frac{1}{2}$得$\frac{3}{8}$,从$\frac{1}{2}$和$\frac{3}{4}$得$\frac{5}{8}$,从$\frac{3}{4}$和1得$\frac{7}{8}$……依此类推,就可得到0和1之间分母为2的正整数次幂的所有有理数.

现在我们用上述结果来证明原来的命题.

(1) 因为

$$\frac{1}{5}=\frac{\frac{3}{4}+\frac{3}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\frac{3}{4^4}+\frac{1}{4^4}}{5},$$

所以,用这样的填写法可以得到$\frac{1}{5}$.

(2) 对于任意的自然数n,我们显然容易从0和1之间的分母为2的正整数次幂的分数中找出n个不同的分数$a_1,a_2,\cdots,a_n$,使得其和为1.因此,我们可以用这样的填写法得到$\frac{1}{n}$.

由于$1-a_i(i=1,2,\cdots,n)$仍是0和1之间分母为2的正整数次幂的分数,因此我们可以得到

$$\begin{aligned}&\frac{(1-a_1)+(1-a_2)+\cdots+(1-a_n)}{n}\\&=1-\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\\&=1-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}.\end{aligned}$$

如果我们能用0和1逐步填写出t,那么我们显然可用0和r逐步填写出rt.因为我们可以把用0和1填写出t的整个过程里涉及到的每一个数x改用rx来代替.

现在我们已经填写出分母为2的0和1之间的有理数.

假设我们可以填写出分母为 $n-1$ 的 0 和 1 之间的所有有理数 $\frac{k}{n-1}(k=1,2,\cdots\cdots,n-1)$.

于是,由上面的讨论及归纳假设可以知道,我们可以填写出

$$\frac{k}{n}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{k}{n-1}\qquad(k=1,2,\cdots\cdots,n-1).$$

根据数学归纳原理可知,我们可以填写出 0 和 1 之间的任何有理数.

1·187 在一种游戏中,"魔术师"请一个人随意想一个三位数 (abc)(其中 a,b,c 依次是这个数的各个数位上的 10 进制数字),并请此人选出 5 个数 $(acb),(bac),(bca),(cab)$ 和 (cba),求出这 5 个数的和 N,把和 N 告诉"魔术师",于是,"魔术师"就可以说出这个人所想的数 (abc).

现在设 $N=3194$,请你做"魔术师",求出数 (abc) 来.

(第 4 届美国数学邀请赛,1986 年)

[解] $(abc)+N$

$$=(abc)+(acb)+(bac)+(bca)+(cab)+(cba)$$

$$=222(a+b+c).$$

所以应该寻找一个 222 的倍数 $222k$,使它大于 N(因为 $(abc)\neq 0$),而小于 $N+1000$(因为 (abc) 是三位数),并且 $222k-N$ 的各位数字之和是 k,这样一来,$222k-N$ 就是所求的解 (abc).

因为 $N=3194$,而

$$14\times 222<3194<19\times 222,$$

于是 k 的可能是 15,16,17,18.

由于 $222\times 15-3194=136$ 的各位数字之和为 10,不等于 15,

$222\times 16-3194=358$ 各位数字之和为 16,

$222\times 17-3194=580$ 各位数字之和为 13 不等于 17,

$222\times 18-3194=802$ 各位数字之和为 10 不等于 18,

于是 $k=16$.

所求的 $(abc)=222\times 16-3194$

$$=358.$$

1·188 在黑板上写上数 1,2,3,…,1986,1987. 每一步确定从所写出的数中擦去某些数,而代替它们写上它们的和除以 7 的余数,若干

步之后,在黑板上剩下两个数,其中之一是 987. 剩下的第二个数是什么数?

(第 13 届全俄数学奥林匹克,1987 年)

[解] 我们注意到,每经过一次"擦数"和写"余数"后,所有还写在黑板上的数之和除以 7 的余数不变. 设最后余下的另一个数为 x,则 $x+987$ 与下面的和数

$$1+2+\cdots+1986+1987=1987\cdot 7\cdot 142$$

分别除以 7 的余数相等,且都等于 0,又 987 被 7 整除,因此 x 也被 7 整除,因为每次"擦数"后,总要填上一个"余数",所以最后剩下的数中至少有一个是"余数". 但 987 不是除以 7 后的余数,于是 x 必是除以 7 后的余数,因此 $0\leqslant x\leqslant 6$,从而 x 只能是 0.

1·189 给定无限不循环小数,证明可将其数字重新排列后而得到循环小数.

(第 13 届全俄数学奥林匹克,1987 年)

[解] 在给定的不循环小数中,每个数字或者出现有限次,或者出现无限多次. 取出所有出现有限次的数字以任意的顺序先排在前头,然后把出现无限多次的所有数字各取一个接着写下去,以后就按照同样的次序将这些数字无限重复地写下去,这样便得到无限循环小数了.

1·190 设 $x=a_1a_2\cdots a_n$ 是十进制 n 位数,这里 $a_1,a_2,\cdots,a_n(a_1\neq 0)$ 是不超过 9 的非负整数. 下面 n 个数是由 x 轮流置换得到的:

$$x_1=x=a_1a_2\cdots a_n,$$

$$x_2=a_na_1a_2\cdots a_{n-1},$$

$$x_3=a_{n-1}a_na_1a_2\cdots a_{n-2},$$

$$\cdots\cdots$$

$$x_n=a_2a_3\cdots a_na_1.$$

(例如 $n=5$, $x=37001$ 时, $x_1=37001$, $x_2=13700$, $x_3=01370(=1370)$, $x_4=00137(=137)$, $x_5=70013$).

求出最小数 n,使得 $x=a_1a_2\cdots a_n$ 经置换后所得的 n 个数都能被 1989 整除,并证明之,然后求出满足上述条件的最小的 x.

(爱尔兰数学奥林匹克,1989 年)

[解] 设 $x_1=x=a_1a_2\cdots a_n$

$$= a_1 10^{n-1} + a_2 10^{n-2} + \cdots + a_{n-1}10 + a_n,$$

则 $x_2 = a_n a_1 a_2 \cdots a_{n-1}$,

于是有 $10x_2 - x_1 = (10^n - 1)a_n$.

由 $1989 \mid x_2, 1989 \mid x_1, 1989 = 9 \times 13 \times 17$,

$a_n \in \{0,1,2,\cdots,9\}$,

可知 $17 \mid (10^n - 1), 13 \mid (10^n - 1)$.

由于 $10^2 \equiv 15, 10^3 \equiv 14, 10^4 \equiv 4, 10^5 \equiv 6, 10^6 \equiv 9, 10^7 \equiv 5, 10^8 \equiv 16, 10^9 \equiv 7, 10^{10} \equiv 2, 10^{11} \equiv 3, 10^{12} \equiv 13, 10^{13} \equiv 11, 10^{14} \equiv 8, 10^{15} \equiv 12, 10^{16} \equiv 1 \pmod{17}$

因此由 $17 \mid (10^n - 1)$ 可知 n 是 16 的倍数.

又由于 $10^2 \equiv 9, 10^3 \equiv 12, 10^4 \equiv 3, 10^5 \equiv 4, 10^6 \equiv 1 \pmod{13}$,
因此由 $13 \mid (10^n - 1)$ 可知 n 是 6 的倍数.
于是 n 是 48 的倍数. n 的最小值等于 48.

另外,只要 9 整除 x,就能整除 x 经置换后的任何一数,为求最小的数 x,必须 $a_1 = 1$,并且从 a_2 开始尽可能多地取 0.

因此 $x_n = a_2 a_3 \cdots a_n 1$,所以要使 x 最小,只需使 x_n 最小.

又因为 $1989 \mid x_n$,且 $9 \mid x_n$,所以最小的 x_n 为

$$x_n = 1989 \times 9 = 17901.$$

从而最小的 $x = 1\underbrace{00\cdots0}_{43个0}1790$.

1・191 在黑板上写下从 1 到1988 的所有自然数.对这些数依次反复施行运算 A 和 B:先是 A,后是 B,接着再是 A,然后再是 B,如此继续下去.运算 A 是从每个写在黑板上的数减去同一个自然数(对不同次的运算 A,减数可以不相同).运算 B 是抹去黑板上写着的两个数,然后写下它们的和数.运算 A 和 B 如此顺次施行,直至某次运算 B 后,黑板上只留下一个数,并且它是非负的,问这个数是多少?

(第 14 届全俄数学奥林匹克,1988 年)

[解] 每施行运算 A 和 B 各一次后,黑板上写着的数就少了一个.所以运算 A 和 B 各施行 1987 次后,黑板上就只留下一个数.

设自然数 d_k 是施行第 k 次运算 A 时的减数, $k = 1,2,\cdots,1987$.因经第 k 次的运算 A 后,写在黑板上的数之和少了 $(1989 - k)d_k$;而经过运算 B 后,这个和数是不变的.运算 A 和 B 各施行 1987 次后,黑板上写

的数是

$$\begin{aligned} x &= (1+2+\cdots+1988) - 1988d_1 - 1987d_2 - \cdots - 2d_{1987} \\ &= 1988(1-d_1) + 1987(1-d_2) + \cdots + (1989-k)(1-d_k) \\ &\quad + \cdots + 2(1-d_{1987}) + 1. \end{aligned}$$

对所有 $k = 1,2,\cdots,1987$,

$$(1989-k)(1-d_k) \leqslant 0.$$

若对某个 k,有 $d_k \geqslant 2$,则

$$(1989-k)(1-d_k) \leqslant -2$$

于是,就有

$$x \leqslant (1989-k)(1-d_k) + 1 \leqslant -1$$

这与题设矛盾.因此,对一切 $k = 1,2,\cdots,1987$.都有 $d_k = 1$,从而 $x = 1$.

即黑板上最后留下的数是 1.

1・192　科尼亚和别佳两人分 $2n+1$ 个核桃,$n \geqslant 2$,同时每一个人都想尽可能多得,假设有三种分法(每一种分法有三步).

第一步:别佳把所有核桃分成两份,每一份不少于两个核桃.

第二步:科尼亚再把每一份分成两份,每一份不少于 1 个核桃(第一步、第二步对于三种方法都一样).

第三步:在第一种方法中科尼亚取最多的那一份和最少的那一份;在第二种方法中科尼亚取两份中等的;在第三种方法中科尼亚或者取最多的与最少的两份,或者取两份中等的,但是按规则他要送给别佳一个核桃.

试确定:哪种方法对科尼亚最有利,哪种方法对他最不利?

(第 1 届全俄数学奥林匹克,1961 年)

[解]　对科尼亚最有利的方法是第一种,最不利的方法是第三种.

事实上,在别佳的第一步之后,无论什么样的核桃堆(各有 a 和 b 个核桃,$a<b$),科尼亚总能把其中的大堆分为两部分,各为 1 个和 $b-1$ 个核桃,它们也是最大的一份和最小的一份,即在第一种分法中得到 $b \geqslant n+1$ 个 核桃(别佳取 $a=n, b=n+1$ 后,他只能得到 $n+1$ 个).

在第二种方法中,别佳在第一步取 $a=2; b=2n-1$ 后,最好的结果是分成 $2=1+1, 2n-1=n-1+n$,科尼亚只得到 n 个核桃.

在第三种方法中,别佳的分法是 $a = n, b = n+1$ 时,这种分法不允许科尼亚得到多于 $n+1$ 个核桃(两个中等堆的个数之和以及最大堆、最小堆的个数之和始终正好是 n 及 $n+1$),但他还应该再交出一个核桃,所以科尼亚至多得 n 个核桃.

1·193　有一张填满了数的 $m \times n$ 表格,可以同时改变其某一列或者某一行中所有数的符号.证明多次重复上述运算能使原来的表格变成任何一列以及任何一行的所有数之和为非负数.

(第1届全俄数学奥林匹克,1961年)

[证]　因为在由已知表格通过改变行和列的符号所能得到的一切表格的种数是有限的,所以我们可以取到和 Σ 最大的那一种,并把我们所取的这种表格记作 T.

在表格 T 的每一行及每一列中所有数之和是非负的.事实上,如果表格 T 中的某一行(或某一列)中一切数之和是负数,那么改变这一行(列)的符号后,我们就得到一个这样的表格,它的一切数之和比 T 的 Σ 更大,这与表格 T 的取法矛盾.

1·194　a、b、p 为任意整数,证明:一定能找到互质的两个数 k, l,使 $ak + bl$ 能被 p 整除.

(第1届全俄数学奥林匹克,1961年)

[证]　设数 b 和 $p-a$ 的最大公约数等于 d,且 $b = kd$, $p - a = ld$,那么数 k 和 l 互质,此时

$$ak + bl = \frac{ab}{d} + \frac{(p-a)b}{d} = pk.$$

于是 $ak + bl$ 能被 p 整除.

1·195　1至1982的自然数按照某种次序一个接一个地排列着,计算机从左向右读依次相邻的两个数(第1个和第2个,第2个和第3个,等等),直到最后的两个数为止,而且如果在所读过的两个数中,如果较大的数在左边,则计算机改变它们的位置,接着计算机再从右向左同样读一遍,并且照上面的规则改变两个数的位置,读完之后得到了信息:在第100个位置上的数两次都未改变自己的位置.求出这个数.

(第16届全苏数学奥林匹克,1982年)

[解]　设前99个数中的最大的数为 a,后1882个数中最小的数为 b,第100个数为 c,若 $a > c$,则计算机从左向右读时,就会将 a 的位置

调到 c 的左边，数 c 就移动了位置，与题设矛盾，故 $a < c$. 从而前 99 个数都小于 c. 另一方面，若 $b < c$，则计算机从右向左读时，必然移动 c 的位置，故 $b > c$，从而后 1882 个数都大于 c，在 1 至 1982 中，只有数 100 能使 99 个数比它小，而 1882 个数比它大，故 $c = 100$.

1·196　有一张 4 行的表格，在第一行中写着任意的自然数，这些数之中可能有相同的数. 在第二行中这么填数：从左向右看第一行中的数，当看到 a 时，如果 a 已在第一行中出现 k 次，那么就在 a 的下面填上 k，类似地可由第二行写出第三行，由第三行写出第四行.

证明：第二行与第四行总能相同.

（第 15 届全苏数学奥林匹克，1981 年）

［证］　如果在表格的某一列中从上面数起的前 3 个数是 a、m 和 n，那么 1、2、…、$m-1$、m 中的每一个数在第二行中数 m 的左边至少出现 n 次，而大于 m 的任何数出现的次数小于 n. 因此在这一列的第四行一定填数 m. 于是命题得证.

1·197　把 1000 个数接连写成一行，然后在它下面按以下规则写第 2 行：把第一行的每个数 a 下面写一个表示 a 在第 1 行中出现次数的自然数. 用同样的方法可由第 2 行得到第 3 行：在第 2 行的每个数 b 下面写一个表示 b 在第 2 行中出现次数的自然数. 再由第 3 行如此得到第 4 行，等等

(1) 证明：某 1 行与它的下 1 行相同.

(2) 证明：第 11 行与第 12 行相同.

(3) 举出一个说明由第 1 行得到的第 10 行和第 11 行不相同的例子.

（第 10 届全苏数学奥林匹克，1976 年）

［证］ (1) 由题意可知：

① 在第 m 行($m \geqslant 2$) 的每一个数 a 下面写着一个不小于 a 的数；

② 每一个这样的数都不超过 1000.

如果每一行都和它的下一行不同，那么只能写出有限多行. 此与题意矛盾. 故必有一行和它的下一行相同.

(2) 因为每组有 a 个数的若干组数(每一组都在相等的数的下面)合并成由 b 个数组成的一组数，所以只要第 m 行($m \geqslant 2$) 中的数 a 严格小于在它下面的数 b，就有 $b \geqslant 2a$.

由归纳法得到,在这样的位置 $b \geqslant 2^{m-1}$.

但是仅当 $m \leqslant 10$ 时,$2^{m-1} \leqslant 1000$. 因此,第 11 行和第 12 行一定相同.

(3) 下面给出一个符合要求的例子:

第 1 行:

$0,1,\underbrace{2,2}_{2个},\underbrace{4,4,4,4}_{4个},\underbrace{8,8,\cdots,8}_{8个},\cdots,\underbrace{256,256,\cdots,256}_{256个},\underbrace{488,\cdots,488}_{488个}$

第 2 行:

$1,1,2,2,4,4,4,4,8,8,\cdots,8,\cdots,256,256,\cdots,256,488,\cdots,488$

第 3 行:

$2,2,2,2,4,4,4,4,8,8,\cdots,8,\cdots,256,256,\cdots,256,488,\cdots,$
488…………………

第 10 行:

$256,256,\cdots\cdots\cdots\cdots,256,488,\cdots,488$

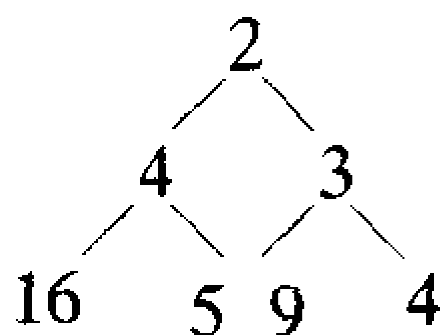
第 11 行:

$\underbrace{512,512,\cdots\cdots\cdots\cdots,512}_{512个},\underbrace{488,\cdots,488}_{488个}$

1・198 按以下规则作一个三角形的表格:在最上一行中写着自然数 a,往下在每一个数的左下方写 a^2,右下方写 $a+1$. 例如 $a=2$ 时,所得表格见下页图. 证明:在这个表格的每一行中所有数字都不相同.

(第 6 届全苏数学奥林匹克,1972 年)

[证] 假设在表格的某些行中有相同的数,设 n 是这些行中最上面的那一行的号码,而 p 和 q 是这行中相同的数.



……………………

因为在第 $n-1$ 行中没有相同的数,所以 p、q 是第 $n-1$ 行中的不同的数 r,s 经过不同的运算得来的,不妨设 $p=r^2$, $q=s+1$,于是,我们有 $s=r^2-1$.

如果由数 a 得到数 s 的过程包含乘方运算,则由 $s=r^2-1$ 可知,

$r-1$ 可能是在得到 s 过程中作平方运算的最大数,因此由数 a 到数 s 至少经过

$$r^2-1-(r-1)^2=2r-2$$

次加 1 的运算. 于是从数 a 得到 s 至少需 $2r-1$ 次运算. 但 r 与 s 在同一行里,且由 a 经过那么多次运算得到的任何数不小于 $a+2r-1>r$,这就导致矛盾. 因此,由 a 得到 s 的过程中没有进行乘方运算.

于是 q 是第 n 行中最右边、最小的那个数,这又与 $p=q$ 矛盾,故原命题成立.

1·199 十进制的自然数 k 有 n 个数字,把这个数四舍五入精确到十位:如果末位数字大于4,则用0取代末位数字,并在十位上增加1,再把所得到的数用类似的四舍五入的方法精确到百位,等等. 在第 $n-1$ 次四舍五入后得到了数 $\overline{k}$,证明:$\overline{k}<\dfrac{18k}{13}$.

(第 17 届全苏数学奥林匹克,1983 年)

[证] 如果 $k \geqslant a\,\underbrace{44\cdots4}_{n-2}5$($a \geqslant 1$ 是首位数字),那么 $\overline{k}=(a+1)10^{n-1}$,于是得

$$\frac{\overline{k}}{k} \leqslant \frac{(a+1)10^{n-1}}{a\,\underbrace{44\cdots4}_{n-2}5} < \frac{a+1}{a+\dfrac{4}{9}} \leqslant \frac{18}{13}$$

如果 $k \leqslant a\,\underbrace{44\cdots4}_{n-1}$,则 $\overline{k}=a\cdot 10^{n-1}$,于是得

$$\frac{\overline{k}}{k} \leqslant 1.$$

因此,在任何情况下,都有 $\overline{k}<\dfrac{18k}{13}$.

1·200 将数字 1234567891011……19941995 写在黑板上,构成整数 N_1,将 N_1 的位于偶数位的数字擦掉,剩下的数字构成整数 N_2,将 N_2 的位于奇数位的数字擦掉,剩下的数字构成整数 N_3,将 N_3 的位于偶数位的数字擦掉,剩下的数字构成整数 N_4. 此过程一直持续到黑板上只剩下一个数字为止. 试确定这个数字(注:从左往右数数计算位置,例如在 12345 中,1 在第 1 位,2 在第 2 位,依此类推).

(澳大利亚 11 年级数学竞赛,1995 年)

[解] 因为

$$9\times1+90\times2+900\times3+996\times4=6873,$$

所以整数 N_1 由 6873 个数字组成,将这些数字从左往右依次编号为 1, 2, 3, …, 6873. 我们考察编号的集合 $\{1,2,3,\cdots,6873\}$.

从 N_1 中擦掉位于偶数位的数字等价于从集合 $\{1,2,3,\cdots,6873\}$ 中去掉 $\{2,4,\cdots,6872\}$,剩下集合 $\{1,3,5,\cdots,6873\}$.

类似地,我们再从剩下集合 $\{1,3,5,\cdots,6873\}$ 中去掉 $\{1,5,9,\cdots,6873\}$ 而剩下集合 $\{3,7,11,\cdots,6871\}$.

接着,我们可依次得到集合:

$\{3,3+8=11,11+8=19,\cdots\}$,

$\{11,11+16=27,\cdots\}$,

$\{11,11+32=43,\cdots\}$,

$\{43,43+64=107,\cdots\}$,

$\{43,43+128=171,\cdots\}$,

$\{171,171+256=427,\cdots\}$,

$\{171,171+512=683,\cdots\}$,

$\{683,683+1024=1707,\cdots\}$,

$\{683,683+2048=2731,\cdots\}$,

$\{2731,2731+4096=6827\}$,

$\{2731\}$.

因此,所求数字应是 N_1 从左往右的第 2731 位数字.

因为 $9\times1+90\times2<2731<9\times1+90\times2+900\times3$,所以这个数字属于某个三位数.

又因为 $2731-9\times1-90\times2=2542$,

$$2542=3\times847+1,$$

所以,这个数字是第 848 个三位数 947 的首位数字 9.

故所求数字是 9.

1·201　在 2000 × 2000 方格表的每一个小方格内都写着一个 1 或 −1,现知表中所填的数的总和非负. 证明:可自表中找出 1000 行与 1000 列,使得填在它们相交之处的方格内的数的和数不小于 1000.

(第 21 届俄罗斯数学奥林匹克决赛,1995 年)

[解]　由于表中所填的数的总和非负,因此存在一行,这一行中 2000 个数的和非负,从而在这一行中至少存在 1000 个 1.

交换数表中的列，使该行的前 1000 个数都是 1. 将前 1000 列形成的 2000×1000 数表记作 A，后 1000 列形成的 2000×1000 数表记作 B. 再将 A 中和值最大的 1000 行记作 A_1，其余 1000 行记作 A_2.

如果 A_1 中所有数的总和不小于 1000，那么结论已成立；

如果 A_1 中所有数的总和小于 1000，那么 A_1 中和值最小的那一行的和值为负，从而 A_2 中的每一行的和值都为负. 注意到 1000 个 -1 或 1 的和必为偶数，因此 A_2 中每一行的和值不大于 -2，从而 A_2 中所有数的总和不大于 -2000，A 中所有数的总和小于 $1000-2000=-1000$，B 中所有数的总和大于 1000.

再以 B_1 记 B 中和值最大的 1000 行，以 B_2 记 B 中其余的 1000 行. 如果 B_2 中每一行的和值都不大于 0，那么 B_1 中所有数的总和大于 1000，从而命题在此时成立；如果 B_2 中有一行的和值大于 0，那么 B_1 中每一行的和值都大于 0，从而 B_1 中所有数的总和不小于 1000，此时命题仍成立.

综上所述，原命题得证.

1・202　今有三堆石块，甲每次从其中一堆中搬出一块放入另一堆，甲每搬动一次都可从乙处得到报酬，其钱数等于他将放入的堆中的石块数目与已搬出的堆中的石块数目之差. 如果该差数为负值，则甲应退还这一数目的钱给乙(如果甲无钱可退，可以暂欠). 今知某一时刻，所有石块都位于它们最初所在的堆中. 试求到这一时刻为止，甲所挣到的钱的最大可能数目.

(第 21 届俄罗斯数学奥林匹克决赛，1995 年)

[解]　甲所挣到的钱数为 0.

事实上，我们可以设想，最初在每一堆石块中，任两个石块之间恰有一条线段相连. 甲在搬动石块时，首先解开该石块与其他石块所连的线段，再用这些线段将该石块与新堆中的其他石块一一连接起来. 如果原有的线段不够，那么就向乙要；如果原有的线段数多了，那么就交还给乙.

显然，当原有的线段不够时，这表明原来石堆中所剩的石块数目少于他将放入的堆中的石块数目，此时他向乙要的线段数，等于他向乙退还的钱数(或暂欠乙的钱数)；当原有的线段多余时，这表明原来石堆中所剩的石块数目多于他将放入的堆中的石块数目，此时他交还给乙的

线段数，等于他向乙领取的报酬数.

当所有石块都位于它们最初所在的堆中时，各石块之间所连的线段数既没有增加也没有减少，因此此时甲既没有欠乙钱，也没有从乙那里得到报酬，甲挣的钱的总数为0.

1·203　设 n 是大于1的奇数.已给

$$x_0=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})=(1,0,\cdots,0,1).$$

设 $$x_i^{(k)}=\begin{cases}0,x_i^{(k-1)}=x_{i+1}^{(k-1)}\\1,x_i^{(k-1)}\neq x_{i+1}^{(k-1)}\end{cases}\text{时},\quad(i=1,2,\cdots n)$$

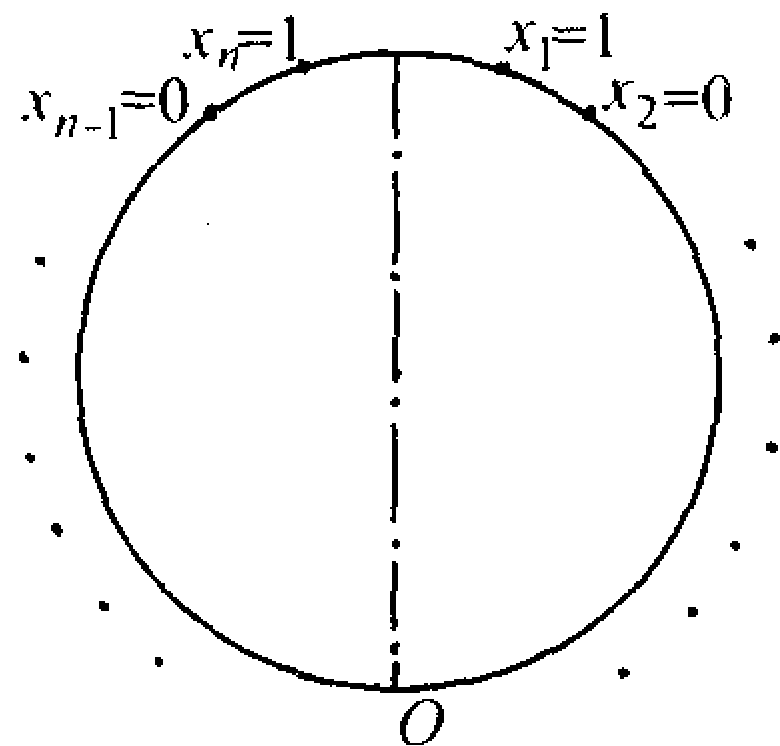
其中 $x_{n+1}^{(k-1)}=x_1^{(k-1)}$.

记 $x_k=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)}),k=1,2,\cdots,$

若正整数 m 满足 $x_m=x_0$，求证：m 是 n 的倍数.

（中国中学生数学冬令营，1995年）

［证］　把一个圆周分成 n 等份，把 x_1，$x_2,\cdots,x_n$ 依顺时针方向放置在这些分点上（如图）.过 x_1 与 x_n 的中点的该圆直径有这样的性质：分布在它两边的数关于它是对称的.有这种性质的直径称之为对称轴.显然，在初始状态时，对称轴是惟一的.就是图中所示的那条直径.



把相邻两点上的数 x_i 与 x_{i+1} 按模2做加法，加的结果放在这条圆弧的中点上，然后再把原先的 n 个数撤去.由这种做法可见，对新的数组而言，原来的那条对称轴仍是对称轴.再将新数组按逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{n}$，使得新的数组转到原来数组所在的位置上，此时，原来的那条对称轴也被按逆时针方向旋转了 $\frac{\pi}{n}$.

按照上面的做法，如果原数组是 $x_1^{(k-1)},x_2^{(k-1)},\cdots,x_n^{(k-1)}$，那么新数组就是 $x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)},k=1,2,\cdots$.因此，我们的变换要进行 m 次才能从 x_0 变到 x_m，对称轴旋转了 $\frac{m\pi}{n}$.如果 $x_m=x_0$，那么必有

$$\frac{m\pi}{n}=k\pi(k\in N),$$

故 $\qquad m = kn.$

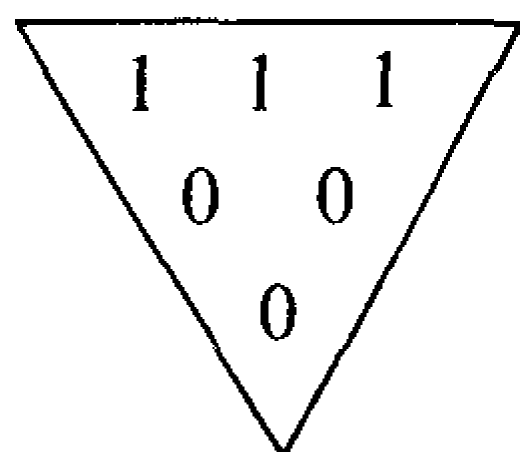
1·204 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是一个数列,对每个 $k,1\leqslant k\leqslant n,a_k\in\{0,1\}$.如果 a_k,a_{k+1} 两数相同,记 $b_k=0$;如果 a_k,a_{k+1} 两数不同,记 $b_k=1$,这样得到一个新数列 $b_1,b_2,\cdots,b_{n-1},b_k\in\{0,1\}$,这里 $k=1,2,\cdots,n-1$.重复上述运算,得到一个全由 0 及 1 两个数字组成的三角形数表,最后一行仅有一个数字.求这张数字组成的三角形数表中 1 的和的最大值.

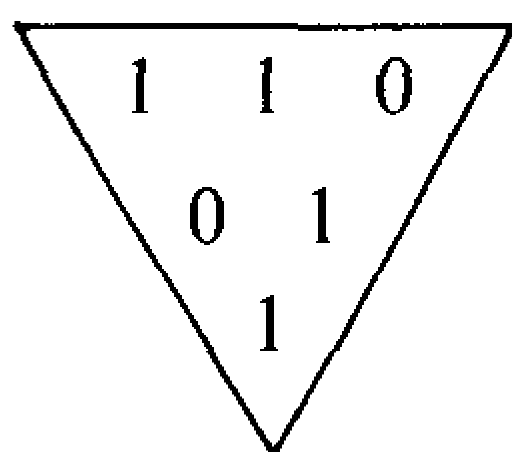
(罗马尼亚国家队选拔考试,1994 年)

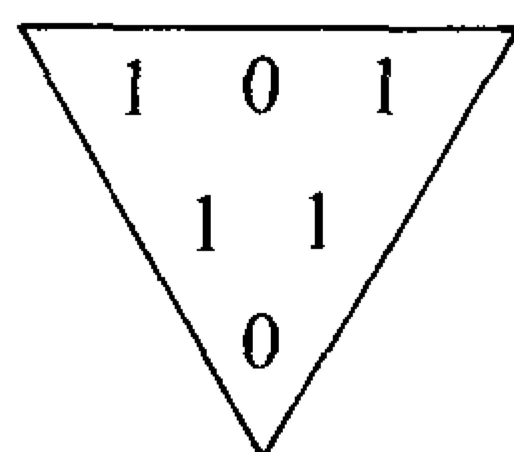
[**解**] 用 x_n 表示所求的最大值.

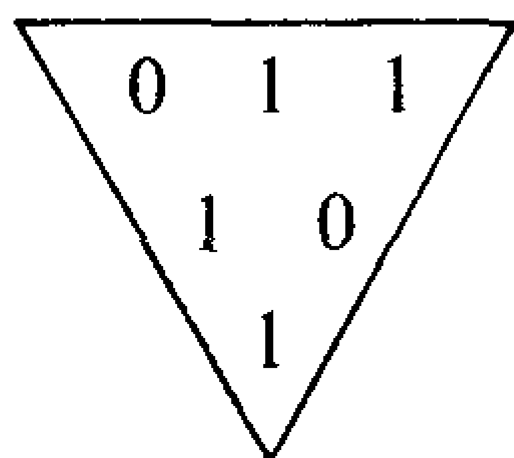
显然,$x_1=1,x_2=2$

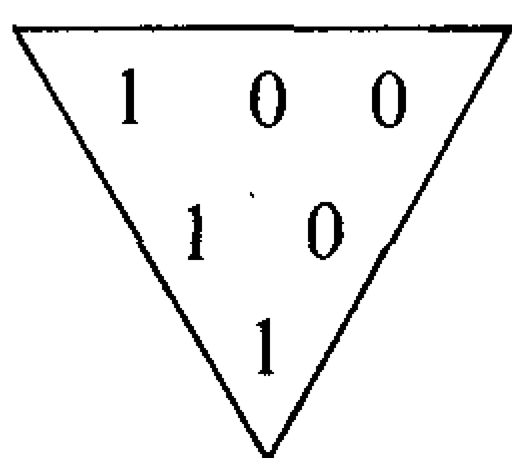
当 $n=3$ 时,数表第一行 a_1,a_2,a_3 一共只有 8 种可能性,因此一共只有 8 个不同的数表.它们是:

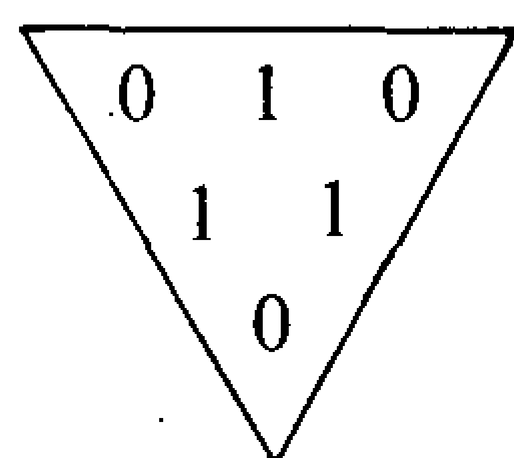


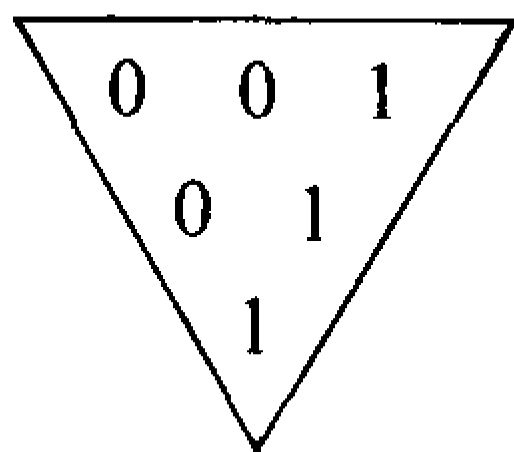


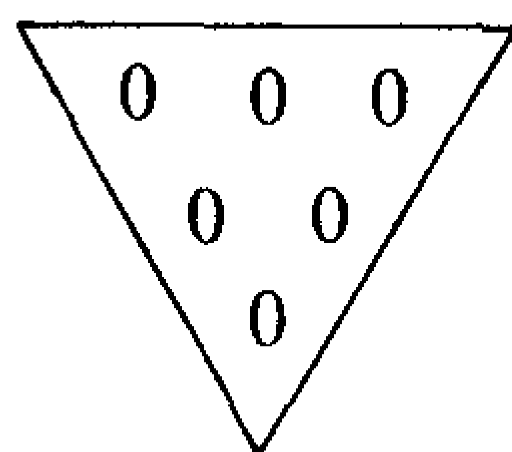












这些数表中 1 的和依次是 3,4,4,4,3,3,3,0.因此得

$$x_3 = 4.$$

现在寻找 x_n 与 x_{n+3} 的关系.

设某个 $n+3$ 行的三角形数表的前三行为

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & a_{n+3} \\ & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n & b_{n+1} & b_{n+2} \\ & & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_n & c_{n+1} \end{matrix}$$

将上述 $3n+6$ 个数分成 $n+2$ 个三元组:

$\{a_i, b_i, c_i\}(i = 1,2,\cdots,n+1)$; $\{a_{n+2}, b_{n+2}, a_{n+3}\}$.

如果3元数组 $\{a_k, b_k, c_k\}$ 中,至少有一个零,就称它为有零3元组.如果3元数组 $\{a_k, b_k, c_k\}$ 全为1,其中 $k \leqslant n$,那么 $a_{k+1} = 0, b_{k+1} = 0$,从而两个数组 $\{a_k, b_k, c_k\}$ 和 $\{a_{k+1}, b_{k+1}, c_{k+1}\}$ 平均每个数组至少有一个零,称这两个数组为平均有零3元数组.如果 $\{a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}\}$ 全为1,那么 $a_{n+2} = 0, b_{n+2} = 0$,从而 $\{a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}\}$ 与 $\{a_{n+2}, b_{n+2}, a_{n+3}\}$ 是两个平均有零3元数组.如果 $\{a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}\}$ 是有零3元数组,那么 $\{a_{n+2}, b_{n+2}, c_{n+3}\}$ 必为有零3元数组.因此,从第1个3元数组 $\{a_1, b_1, c_1\}$ 开始,逐个考虑零的个数,从上面的分析可以知道,上述前三行的 $3n+6$ 个数中至少有 $n+2$ 个零,从而至多有 $2n+4$ 个1,故得

$$x_{n+3} \leqslant x_n + (2n+4) \quad (n \in N). \tag{①}$$

在上面的不等式中,依次令 $n = 3(k-1), 3(k-2), \cdots, 6, 3$,分别得

$$x_{3k} \leqslant x_{3(k-1)} + 6(k-1) + 4,$$

$$x_{3(k-1)} \leqslant x_{3(k-2)} + 6(k-2) + 4,$$

……

$$x_9 \leqslant x_6 + 6 \cdot 2 + 4,$$

$$x_6 \leqslant x_3 + 6 \cdot 1 + 4.$$

将所得到的这 $k-1$ 个不等式相加,并注意 $x_3 = 4$,得

$$x_{3k} \leqslant 6[1 + 2 + \cdots + (k-2) + (k-1)] + 4k$$

$$= k(3k+1). \tag{②}$$

在①式中,依次令 $n = 3k-2, 3k-5, \cdots, 4, 1$,分别得

$$x_{3k+1} \leqslant x_{3k-2} + 6k$$

$$x_{3k-2} \leqslant x_{3k-5} + 6(k-1)$$

……

$$x_7 \leqslant x_4 + 6 \cdot 2$$
$$x_4 \leqslant x_1 + 6$$

将所得到的这 k 个不等式相加,并注意 $x_1 = 1$,得

$$x_{3k+1} \leqslant 6(1 + 2 + \cdots + k) + 1$$
$$= 3k(k+1) + 1. \quad ③$$

在 ① 式中,依次令 $n = 3k - 1, 3k - 4, \cdots, 5, 2$,分别得

$$x_{3k+2} \leqslant x_{3k-1} + 6k + 2,$$
$$x_{3k-1} \leqslant x_{3k-4} + 6(k-1) + 2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$x_8 \leqslant x_5 + 6 \cdot 2 + 2,$$
$$x_5 \leqslant x_2 + 6 \cdot 1 + 2.$$

将所得到的这 k 个不等式相加,并注意 $x_2 = 2$,得

$$x_{3k+2} \leqslant 6(1 + 2 + \cdots + k) + 2(k+1)$$
$$= 3k(k+1) + 2(k+1)$$
$$= (k+1)(3k+2). \quad ④$$

将 ②、③、④ 三式合并写为一个式子,得

$$x_n \leqslant \left[\frac{n(n+1)+1}{3}\right], n \in N, \quad ⑤$$

这里 $\left[\frac{n(n+1)+1}{3}\right]$ 表示不超过 $\frac{n(n+1)+1}{3}$ 的最大整数(显然,⑤ 式在 $n = 1,2,3$ 时也成立).

下面的一个例子说明 ⑤ 式右端的数字是可以达到的.

```
1 1 0 1 1 0 1 1 0
 0 1 1 0 1 1 0 1
  1 0 1 1 0 1 1
   1 1 0 1 1 0
    0 1 1 0 1
     1 0 1 1
      1 1 0
       0 1
        1
```

我们倒过来看这个作为例子的数表.倒过来数,每三行作为一组.

设第 k 组是倒数第 $3k-2$ 行,倒数第 $3k-1$ 行和倒数第 $3k$ 行,那么,在倒数第 $3k-2$ 行上,依次反复地写"1,0,1";在倒数第 $3k-1$ 行上,依次反复地写"0,1,1";在倒数第 $3k$ 行上,依次反复地写"1,1,0",直到写够每行上应该写的数的个数为止.

当 $n=3k$ 时,这张数表上 1 的个数是

$$(1+1+2)+(3+3+4)+(5+5+6)+\cdots+[(2k-1)+(2k+1)+2k]$$
$$=2k^2+k(k+1)=(3k+1)k.$$

当 $n=3k+1$ 时,即在上述 $n=3k$ 的数表上填第一行(即倒数第 n 行),这一行是反复写"1,0,1"得来的,因此这一行中 1 的个数等于 $2k+1$,从而 $n=3k+1$ 时的数表上 1 的个数等于

$$(3k+1)k+2k+1=3k(k+1)+1.$$

当 $n=3k+2$ 时,数表第一行是反复写"0,1,1"得来的,因此第一行上 1 的个数等于 $2k+1$,整个数表上 1 的个数等于

$$[3k(k+1)+1]+(2k+1)=(k+1)(3k+2).$$

综上所述,我们给出了使

$$x_n=\left[\frac{n(n+1)+1}{3}\right] \quad n\in N$$

的数表的例子.因此所求的最大值

$$x_n=\left[\frac{n(n+1)+1}{3}\right],n\in N$$

1·205 从任何一个三位数 n 开始,我们得到一个新数 $f(n)$,它是 n 的三个数字,三个的两两乘积,以及三个数字乘积的累加.

(1) 当 $n=625$ 时,求 $\frac{n}{f(n)}$(取整数值).

(2) 求所有 3 位数 n,使得 $\frac{n}{f(n)}=1$.

(英国数学奥林匹克,1994 年)

[解] 设

$$n=\overline{abc}=100a+10b+c,$$

这里 $a,b,c\in\{0,1,2,\cdots,9\}$,且 $a\geqslant 1$.由题设,

$$f(n)=a+b+c+ab+bc+ca+abc.$$

(1) 当 $n=625$ 时,

$$f(625) = 6+2+5+6\times2+2\times5+5\times6+6\times2\times5 = 125,$$

$$\frac{625}{f(625)} = 5.$$

(2) 由题设，

$$n = f(n),$$

即

$$100a + 10b + c = a + b + c + ab + bc + ca + abc,$$

解出 c，得

$$c = \frac{99a + 9b - ab}{a + b + ab} \qquad ①$$

由 $c \leqslant 9$ 得

$$99a + 9b - ab \leqslant 9(a + b + ab),$$

化简上式，有

$$90a \leqslant 10ab$$

由于 $a \geqslant 1$，因此

$$9 \leqslant b,$$

即得

$$b = 9.$$

代入 ①，得

$$c = \frac{90a + 81}{10a + 9} = 9.$$

从而

$$n = \overline{a99}$$

其中 $a \in \{1,2,\cdots,9\}$.

容易验证，当 $n = \overline{a99}, a \in \{1,2,\cdots,9\}$ 时，等式

$$\frac{\overline{a99}}{f(\overline{a99})} = 1$$

都成立.

所以满足题目要求的 3 位数 n 共有 9 个：199，299，399，499，599，699，799，899，999.

第二章 集合

第1节 性质

2·1 集 S 中有运算 $+$，对 S 中所有元素 a,b,c 有 $(a+c)+(b+c)=a+b$；并且 S 中有元素 a，有 $a+e=a, a+a=e$，定义 $a*b=a+(e+b)$. 证明：对 S 中所有元素 a,b,c，有

$$(a*b)*c=a*(b*c).$$

（加拿大国家集训队训练题）

[证]
$$(a*b)*c=(a*b)+(e+c)=[a+(e+b)]+(e+c).$$
$$a*(b*c)=a+[e+(b*c)]=a+[e+(b+(e+c))].$$

由于 $e+(b+a)=(a+a)+(b+a)=a+b$，故

$$\begin{aligned}&a+[e+(b+(e+c))]=a+[(e+c)+b]\\&=[a+(e+b)]+\{[(e+c)+b]+(e+b)\}\\&=[a+(e+b)]+[(e+c)+e]\\&=[a+(e+b)]+(e+c),\end{aligned}$$

即 $(a*b)*c=a*(b*c)$.

2·2 S 为一集，定义有加法、减法、乘法运算，满足以下公理：

(1) 若 x、y 属于 S，则 $x+y, xy$ 属于 S.

(2) 对所有 $x,y\in S, x+y=y+x, xy=yx$.

(3) 对所有 $x,y,z\in S$,

$$x+(y+z)=(x+y)+z, x(yz)=(xy)z.$$

(4) 对所有 $x,y,z\in S$,

$$x(y+z)=xy+xz.$$

(5) 存在一个元素 O 满足

$$0+x=x+0=x.$$

并且对 S 中每个 x,存在一个惟一的元素,记为 $-x$,满足

$$x+(-x)=0.$$

(6) 对 S 中所有 x,y,

$$x-y=x+(-y).$$

(7) 对 S 中所有 x,

$$x^3-x=x+x+x=0.$$

在 S 中定义关系 $\leqslant$,满足条件:当且仅当

$$x^2y-xy^2-xy+x^2=0$$

时,$x\leqslant y$. 证明:

(a) 对 S 中所有 x,$x\leqslant x$.

(b) 若 $x\leqslant y$,$y\leqslant x$,则 $x=y$.

(c) 若 $x\leqslant y$,$y\leqslant z$,则 $x\leqslant z$.

(加拿大国家集训队训练题)

[解] (a) 显然.

(b) 因为 $x+x+x=0$,所以 $-x=x+x$,

$$x(-y)=x(y+y)=xy+xy=-xy. \quad ①$$

$$x\cdot 0=x(x+(-x))=x^2+x(-x)=x^2-x^2=0. \quad ②$$

因而 $(-x-y)+(x+y)=-x+(x+y)-y=y-y=0$,

所以 $$-(x+y)=-x-y. \quad ③$$

若 $x\leqslant y$,则

$$x^2y-xy^2-xy+x^2=0, \quad ④$$

将 ④ 乘 xy 得(利用 ② 及 $x^3=x$)

$$xy^2-x^2y-x^2y^2+xy=0, \quad ⑤$$

同样由 $y\leqslant x$ 得

$$yx^2-y^2x-x^2y^2+xy=0, \quad ⑥$$

由 ⑤、⑥ 得

$$xy^2 - x^2y = x^2y - xy^2, \quad ⑦$$

即 $\quad xy^2 + xy^2 = x^2y + x^2y.$

因为 $\quad x + x = -x$,所以 $-xy^2 = -x^2y$,

即 $\quad x^2y = xy^2, \quad ⑧$

代入④,得 $xy = x^2. \quad ⑨$

同理有 $\quad xy = y^2, \quad ⑩$

于是 $\quad x = x^3 = x \cdot x^2 = x \cdot xy = x^2y = xy^2 = y^3 = y.$

(c)由 $x \leqslant y$ 得④,

④·y 得 $\quad x^2y^2 - xy^2 + x^2y - xy = 0, \quad ⑪$

④·x 得 $\quad -x^2y^2 + xy - x^2y + x = 0, \quad ⑫$

⑪+⑫得

$$x = xy^2, \quad ⑬$$

代入④得 $\quad x^2y - x - xy + x^2 = 0,$

即 $\quad (x^2 - x)y = -(x^2 - x). \quad ⑭$

同样由 $y \leqslant z$ 得

$$y = yz^2, \quad ⑮$$

和 $\quad y^2z - yz^2 - yz + y^2 = 0. \quad ⑯$

⑯两边同乘以 $x^2 - x$,并利用⑭得

$$-(x^2 - x)yz + (x^2 - x)z^2 + (x^2 - x)z - (x^2 - x)y = 0. \quad ⑰$$

再利用⑭得

$$(x^2 - x)z + (x^2 - x)z^2 + (x^2 - x)z + (x^2 - x) = 0, \quad ⑱$$

即 $\quad (x^2 - x)z^2 + (x^2 - x) = (x^2 - x)z. \quad ⑲$

由⑬、⑮得 $\quad x = xy \cdot yz^2 = (xy^2)z^2 = xz^2, \quad ⑳$

于是由⑲、⑳得

$$(x^2 - x)z = (x^2 - xz^2) + (x^2 - xz^2)$$
$$= -x^2 + xz^2, \quad ㉑$$

即 $\quad x^2z - xz^2 - xz + x^2 = 0, \quad ㉒$

即得 $\quad x \leqslant z.$

2·3　设 $E = \{1,2,3,\cdots,200\}$,$G = \{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{100}\} \subset E$,且 G 具有下列两条性质:

(1)对任何 $1 \leqslant i < j \leqslant 100$,恒有 $a_i + a_j \neq 201$;

(2) $\sum_{i=1}^{100} a_i = 10080$.

试证明,G 中的奇数的个数是4的倍数,且 G 中所有数字的平方和为一个定数.

(中国高中数学联赛,1990年)

[证] 由已知可得

$$\sum_{k=1}^{200} k^2 = \sum_{i=1}^{100} a_i^2 + \sum_{i=1}^{100}(201 - a_i)^2$$
$$= 2\sum_{i=1}^{100} a_i^2 - 402\sum_{i=1}^{100} a_i + 201^2 \times 100.$$

由(2)及上式得 $\sum_{i=1}^{100} a_i^2$ 为常数.

设 G 中有 x 个奇数,则由上式可得

$$4 \equiv 2x - 0 + 4 \pmod 8,$$

故 $x \equiv 0 \pmod 4$.

2·4 对于$\{1,2,3,\cdots,n\}$和它的每个非空子集,我们定义"交替和"如下:把子集中的数按从大到小的顺序排列,然后从最大的数开始交替地加减各数(例如$\{1,2,4,6,9\}$的交替和是$9-6+4-2+1=6$,而$\{5\}$的交替和就是5).对于 $n=7$,求所有这些交替和的总和.

(第1届美国数学邀请赛,1983年)

[解] 显然,集合$\{1,2,3,4,5,6,7\}$的非空子集共有$2^7-1=127$个,而每个元素在子集中均出现$2^6=64$次.

按照题目要求,1,2,3,4,5,6在子集中的排列各有32次在奇数位,32次在偶数位,因此子集中这些数的交替和为0,而7也出现64次,且均取正值,所以所有子集的交替的总和为

$$7 \times 64 = 448.$$

2·5 设 n 是一个大于3的整数,我们从集合$\{2,3,\cdots,n\}$中选出三个相异的数,将这三个数,用加或乘连接成算式,并可用括号区分加法与乘法的运算次序,但在每一个算式中选出的三个数恰好各出现一次,考虑用这种方式所得到的所有算式.

(1) 如果选出的三个数都大于$\frac{n}{2}$,试证这样的三个数所得到的所有算式的值都不相等.

(2) 设 p 为质数且 $p \leqslant \sqrt{n}$，若选出的三个数中最小的是 p，而由这三个数所得到的所有算式的值并不完全相异. 试证这样的三个数之选法总数恰等于 $p-1$ 的正因数之个数.

（第 3 届亚太地区数学奥林匹克，1991 年）

［解］ 设 a,b,c 为取出的三相异数，可令 $a<b<c$，其所可能结合成的算式共有八种：

(1) $abc, c(a+b), b(c+a), a(b+c), a+bc, b+ca, c+ab, a+b+c$.

除了 $a(b+c)$ 可能与 $a+bc$ 相等外，其余两两不等.

若 $a(b+c)=a+bc$，则

$$(b-a)(c-a)=a(a-1).$$

因此 $c-a \geqslant a$，故当 $a>\frac{n}{2}$ 时，这八个算式两两不等.

(2) 注意 $c-a \leqslant a(a-1)$.

因 $a=p \leqslant \sqrt{n}$，其选法数恰为 $p(p-1)$，正因数个数之半即为 $(p-1)$ 的正因数的个数（此地用到 p 为质数）.

2・6 S 为 m 个无序正整数对 (a,b) $(1 \leqslant a<b \leqslant n)$ 所成的集. 证明至少有 $4m \cdot \dfrac{m-\frac{n^2}{4}}{3n}$ 个无序三元数组 (a,b,c)，使得 (a,b)，(b,c)，(c,a) 都属于 S.

（第 1 届亚太地区数学奥林匹克，1989 年）

［证］ 考虑 n 个点 $1,2,\cdots,n$. 如果 $(i,j) \in S$，则在 i 与 j 之间连一条线. 我们来求这个图中的三角形的个数.

设 $(i,j) \in S$，并且自 i 引出的线有 d_i 条，则以 (i,j) 为边的三角形至少有 d_i+d_j-n 个. 由于每个三角形有三条边，所以 S 中至少有

$$\frac{1}{3}\sum_{(i,j)\in S}(d_i+d_j-n), \qquad ①$$

个三角形.

$$\sum_{(i,j)\in S}1=m, \qquad \sum_{(i,j)\in S}n=nm. \qquad ②$$

对于每个固定的 i，恰有 d_i 个 j 使 $(i,j) \in S$，所以在 ① 中的 d_i 出现了 d_i 次. 注意 (i,j) 既可作为自 i 引出的边，又可作为自 j 引出的边，

被计算了 2 次. 因此

$$\sum_{(i,j)\in S}(d_i+d_j)=\sum_{i=1}^{n}d_i^2,$$

由柯西不等式,

$$\sum_{i=1}^{n}d_i^2\geqslant\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}d_i\right)^2=\frac{1}{n}(2m)^2=\frac{4m^2}{n}.$$

由 ①,② 及上式得

$$T\geqslant\frac{1}{3}\left(\frac{4m^2}{n}-nm\right)=4m\cdot\frac{m-\dfrac{n^2}{4}}{3n}.$$

2·7 已知一对互素的正整数 $p>q$,求所有的实数 c,d,使得集合 $A=\left\{\left[\dfrac{np}{q}\right];n\in N\right\}$ 和 $B=\{[cn+d];n\in N\}$ 满足 $A\cap B=\varphi$, $A\cup B=N$,这里 N 为正整数集.

(捷克(和斯洛伐克) 数学奥林匹克,1989 年)

[解] 设 c 和 d 是满足条件的一对实数,对任意正整数 m,考察集合 $S_m=\{1,2,\cdots,mp\}$. 显然 $mp\in A$, $mp-1\in B$,并且 S_m 中含有 mq 个 A 中的元素,从而有 $m(p-q)$ 个是 B 的元素,所以

$$[cm(p-q)+d]=mp-1,$$

即

$$mp-1\leqslant cm(p-q)+d<mp,$$

$$\frac{p}{p-q}-\frac{1}{m(p-q)}\leqslant c+\frac{d}{m(p-q)}<\frac{p}{p-q}.$$

于上式中令 $m\to+\infty$ 取极限,即得 $c=\dfrac{p}{pq}$.

由此可得

$$B=\left\{\left[\frac{p}{p-q}n+d\right];n\in N\right\}$$
$$=\left\{n+\left[\frac{q}{p-q}n+d\right];n\in N\right\}. \qquad ①$$

而由

$$mp-1=[cm(p-q)+d]$$
$$=[mp+d]=mp+[d],$$

又可得到 $-1\leqslant d<0$. 我们改写

$$A=\left\{\left[\frac{np}{q}\right];n\in N\right\}$$

$$= \left\{ n + \left[\frac{p-q}{q} n \right]; n \in N \right\};. \quad ②$$

因为$(p,q)=1$,故$(p-q,q)=1$,从而存在正整数λ,μ,使得$1 \leqslant \lambda < p-q, 1 \leqslant \mu \leqslant q$,且

$$\lambda q - \mu(p-q) = 1 \quad ③$$

于是

$$b_\lambda = \lambda + \left[\frac{\lambda q}{p-q} + d \right]$$

$$= \lambda + \mu + \left[\frac{1}{p-q} + d \right] \in B,$$

$$a_\mu = \mu + \left[\frac{\mu(p-q)}{q} \right]$$

$$= \mu + \lambda - 1 + \left[\frac{q-1}{q} \right]$$

$$= \mu + \lambda - 1 \in A$$

注意到$-1 \leqslant d < 0$,且$b_\lambda \neq a_\mu$,使得

$$-\frac{1}{p-q} \leqslant d < 0.$$

上面得到实数对c,d所应满足的必要条件:

$$c = \frac{q}{p-q}, -\frac{1}{p-q} \leqslant d < 0.$$

下面证明这也是充分条件,令

$$A_1 = \{a_1, a_2, \cdots, a_q\},$$

$$B_1 = \{b_1, b_2, \cdots, b_{p-q}\}.$$

我们先来证明:$A_1 \cap B_1 = \varphi, A_1 \cup B_1 = S_1$,

事实上,因为$A_1 \subset S_1, B_1 \subset S_1, A_1, B_1, S_1$的元素数分别为$q$,$p-q,p$.故又只需证明$A_1 \cap B_1 = \varphi$.

因为$a_q = p, b_{p-q} = p-1$.而A、B中的其他元素都比它们小,故不会在另一集中有相同元素,而对于$A_1/\{a_q\}$中的任一元素$j + \left[\frac{p-q}{q} j \right], 1 \leqslant j \leqslant q-1, j(p-q)/q$都不是整数;对于$B_1/\{b_{p-q}\}$中的任一元素$b_i, 1 \leqslant i \leqslant p-q-1$,都有

$$b_i = i + \left[\frac{q}{p-q} i + d \right] = i + \left[\frac{q}{p-q} i \right].$$

若有正整数$i,j, 1 \leqslant i < p-q, 1 \leqslant j < q$,使

$$j+\left[\frac{p-q}{q}j\right]=a_j=b_i=i+\left[\frac{q}{p-q}i\right],$$

记$(p-q)j/q=m+\alpha, qi/(p-q)=k+\beta$,其中$0<\alpha<1, 0\leqslant\beta<1$,于是有

$$\begin{aligned}&j+(p-q)j/q>j+[(p-q)j/q]\\&=i+\left[\frac{qi}{p-q}\right]=i+k\\&=k+(p-q)(k+\beta)/q\\&\geqslant k+(p-q)k/q.\end{aligned}$$

从而　$j>k$,这样一来,

$$\begin{aligned}&j+[(p-q)j/q]\\&>k+[(p-q)(k+\beta)/q]\\&=i+[qi/(p-q)].\end{aligned}$$

矛盾.故$A_1\cap B_1=\varphi$且$A_1\cup B_1=S_1$.易知

$$A=\bigcup_{k=0}^{\infty}\{A_1+kp\},$$

$$B=\bigcup_{k=0}^{\infty}\{B_1+kp\}$$,且$A\cap B=\varphi, A\cup B=N$,故命题得证.

2·8　集$A=\{z\mid z^{18}=1\}, B=\{w\mid w^{48}=1\}$都是1的复单位根的集合,$C=\{zw\mid z\in A, w\in B\}$也是1的复单位根的集合,问集合$C$中含有多少个元素?

(第8届美国数学邀请赛,1990年)

[解]　集A的元素为

$$z=\cos\frac{2k\pi}{18}+i\sin\frac{2k\pi}{18}.$$

集B的元素为

$$w=\cos\frac{2t\pi}{48}+i\sin\frac{2t\pi}{48}.$$

$$\begin{aligned}zw&=\cos\left(\frac{2k\pi}{18}+\frac{2t\pi}{48}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{18}+\frac{2t\pi}{48}\right)\\&=\cos\frac{2(8k+3t)}{144}\pi+i\sin\frac{2(8k+3t)}{144}\pi\end{aligned}$$

因为8和3互质,则存在整数k和t,使

$$8k+3t=1.$$

进而，存在整数 k,t 使

$$8k+3t=m$$

取 $m=0,1,2,\cdots,143$，则得到 zw 的 144 个不同的值.

于是，集合

$$C=\{zw\mid z\in A,w\in B\}$$

含有 144 个元素.

2·9　假设项链 A 有 14 个珠；B 有 19 个珠. 证明：对于每一个奇数 $n\geqslant 1$，能够把数列

$$\{n,n+1,n+2,\cdots,n+32\}$$

中的数给每个珠标上，使得每个数恰好用上一次且相邻的珠子标的数互素.

注　这里一个项链可以看成一些珠围成的一个圆，其中每个珠与另外两个珠相邻.

（第 19 届美国数学奥林匹克，1990 年）

[证]　取一整数 m 作为待定参数，$1\leqslant m\leqslant 5$.

设想用连续的自然数 $n+m,n+m+1,\cdots,n+m+13$ 这 14 个数给项链 A 的珠子标数，因为一对相邻的整数总是互素的，所以，只要保证 $n+m$ 和 $n+m+13$ 互素，即

$$(n+m,n+m+13)=1 \quad ①$$

我们的标法就合理.

再设想，用 $n+m+14$ 到 $n+32(m+14\leqslant 32)$ 及 n 到 $n+m-1$ 为项链 B 的珠子标号，同理，只要保证

$$(n,n+32)=1 \quad ②$$

和

$$(n+m-1,n+m+14)=1 \quad ③$$

我们的标法就合理.

由于 $(a,b)=(a,b-a)$，因此①、②、③等价于

$$(n+m,13)=1 \quad ④$$

$$(n,32)=1 \quad ⑤$$

$$(n+m-1,15)=1 \quad ⑥$$

由于 n 是奇数，⑤式自然成立.

⑥式等价于

$$m\not\equiv 1-n \pmod 3 \quad ⑦$$

$$m \not\equiv 1-n \pmod{5} \quad ⑧$$

④式等价于

$$m \not\equiv -n \pmod{13} \quad ⑨$$

因为在 m 的可能的个数$\{1,2,3,4,5\}$中，至多2个满足 $m\equiv 1-n \pmod{3}$，恰有一个满足 $m\equiv 1-n \pmod{5}$，至多有1个满足 $m\equiv -n \pmod{13}$.

因此，至少剩下

$$5-(2+1+1)=1$$

个 m 的值满足要求.

2·10 (1) 对什么样的自然数 $n>2$，有一个由 n 个相继自然数组成的集合，使得集合中最大一个数是其余 $n-1$ 个数的最小公倍数的约数？

(2) 对什么样的 $n>2$，恰有一个集合具有上述性质？

(第22届国际数学奥林匹克，1981年)

[解] (1) 首先，我们指出 $n\neq 3$. 否则，设$\{r,r+1,r+2\}$具有题中所要求的性质：$(r+2)\mid r(r+1)$. 因$(r+1,r+2)=1$，故有$(r+2)\mid r$，矛盾.

下面分 n 为奇偶数来分别讨论 $n\geqslant 4$ 的情形.

(i) 若 $n=2k$，因 $n-1$ 为奇数，故 n 个数的集合$\{n-1,n,n+1,\cdots,2(n-1)\}$即满足要求.

(ii) 若 $n=2k+1$，则 $n-2$ 为奇数，故 n 个数的集合$\{n-3,n-2,n-1,\cdots,2(n-2)\}$即满足要求.

由(i)和(ii)可知，当 $n\geqslant 4$ 时，总有一个由 n 个相继自然数组成的集合满足要求.

(2) 我们先来证明：当 $n\geqslant 5$ 时，满足要求的 n 个相继自然数的集合至少有两个.

(i) 当 n 为不小于6的偶数时，除了(i)中已给出的一个集合之外，集合$\{n-5,n-4,\cdots,2(n-3)\}$也满足要求.

(ii) 当 $n\geqslant 9$ 为奇数时，除了(1)中已给出的一个集合之外，集合$\{n-7,n-6,\cdots,2(n-4)\}$也满足要求.

(iii) 当 $n=5$ 时，$\{2,3,4,5,6\}$，$\{8,9,10,11,12\}$都满足要求；当 $n=7$ 时，$\{4,5,6,7,8,9,10\}$和$\{6,7,8,9,10,11,12\}$都满足要求.

最后我们证明：当 $n=4$ 时，只有惟一的集合 $\{3,4,5,6\}$ 满足要求.

设 $\{k,k+1,k+2,k+3\}$ 满足要求，即 $k+3$ 整除 $k,k+1,k+2$ 的最小公倍数. 因为 $(k+2,k+3)=1$，所以又有 $k+3$ 整除 $k,k+1$ 的最小公倍数. 又因 $(k,k+1)=1$，所以 $(k+3)\mid k(k+1)$.

若 $k+3$ 为奇数，则 $k+1$ 和 $k+3$ 是两个相继的奇数，故 $(k+1,k+3)=1$. 所以 $(k+3)\mid k(k+1)$ 可得 $(k+3)\mid k$，矛盾.

若 $k+3$ 为偶数，记 $k+3=2m$，于是有

$$2m\mid 2(m-1)(2m-3).$$

这意味着 $m\mid 2m-3$，从而 $m\mid 3$. 由于 $m\neq 1$，故只能是 $m=3$，这就证明了 $\{3,4,5,6\}$ 是满足要求的惟一集合.

2·11　设 M 是由 1985 个不同的正整数组成的集合，其中每个元素的素因子都不大于 26. 求证：从 M 中至少可以找到一个由四个不同元素组成的子集，使得这四个数的乘积等于某个正整数的四次方.

（第 26 届国际数学奥林匹克，1985 年）

［证］　因为不超过 26 的素数只有 9 个：2,3,5,7,11,13,17,19,23，所以对任何 $\alpha\in M$，必可写成 $\alpha=2^{\alpha_1}\cdot 3^{\alpha_2}\cdot\cdots\cdot 23^{2\alpha}$. 显然，$\alpha\in M$ 被有序数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_9)$ 惟一确定且 M 中的 1985 个数对应于 1985 个不同的数组.

数组中的 α_i 为非负整数，当然可能是奇数也可能是偶数，但从奇偶数角度看来，这些数组中至多有 $2^9=512$ 个不同的数组，使其中任何两个数组中都至少有一对相应数奇偶性不同. 换句话说，如果存在 513 个数组，必可从中选出两个数组 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_9)$ 和 $(\alpha'_1,\alpha'_2,\cdots,\alpha'_9)$，使得

$$a_i+a'_i=2\beta_i,(i=1,2,\cdots,9) \qquad ①$$

其中 β_i 为非负整数. 因而从 M 中的 1985 个数所对应的 1985 个数组中，可以选出 513 对数组，其中每对数组都满足关系式 ①，并由关系式 ① 给出对应的数组 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_9)$. 再由抽屉原理，这 513 个数组中必存在 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_9)$ 和 $(\beta'_1,\beta'_2,\cdots,\beta'_9)$，使得

$$\beta_i+\beta'_i=2\gamma_i,(i=1,2,\cdots,9).$$

其中 γ_i 为非负整数. 于是，$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_9)$ 和 $(\beta'_1,\beta'_2,\cdots,\beta'_9)$ 所对应的 4 个数的相应数组满足

$$\alpha_i + \alpha'_i + \alpha''_i + \alpha'''_i = 2\beta_i + 2\beta'_i = 4\gamma_i, (i = 1,2,\cdots,9)$$

这意味着这 4 个数的乘积是某正整数的 4 次方.

2·12　设 d 是异于 2,5,13 的任一正整数,求证集合 $\{2,5,13,d\}$ 中可以找到两个不同元素 a,b,使得 $ab-1$ 不是完全平方数.

(第 27 届国际数学奥林匹克,1986 年)

[证]　显然,$2\cdot5-1,2\cdot13-1,5\cdot13-1$ 都是完全平方数,故只能在 $2d-1,5d-1,13d-1$ 三个数中来寻找.

设三个数都是完全平方数,即 $2d-1=x^2,5d-1=y^2,13d-1=z^2$,其中 x,y,z 都是正整数.

由 $2d-1=x^2$ 知 x 为奇数.设 $x=2n-1$,于是 $2d-1=(2n-1)^2$,即 $d=2n^2-2n+1$,这说明 d 为奇数.

由 $5d-1=y^2$ 和 $13d-1=z^2$ 知 y 和 z 都是偶数.设 $y=2p$,$z=2q$,于是 $2d=q^2-p^2=(q+p)(q-p)$.由于 $2d$ 为偶数,故 p 和 q 具有相同的奇偶性,从而 $p+q$ 与 $q-p$ 同为偶数.即 $2d$ 为 4 的倍数,所以 d 为偶数,矛盾.

因此 $2d-1,5d-1,13d-1$ 中至少有一个不是完全平方数.

2·13　设 $S=\{1,2,\cdots,n\}$,A 为至少含有两项的、公差为正的等差数列,其项都在 S 中,且添加 S 的其他元素于 A 均不能构成与 A 有相同公差的等差数列,求这种 A 的个数(这里只有两项的数列也看作等差数列).

(中国高中数学联赛,1991 年)

[解]　设 A 的公差为 d,则 $1\leqslant d\leqslant n-1$.

分两种情况讨论:

(1) 设 n 为偶数,则

当 $1\leqslant d\leqslant \frac{n}{2}$ 时,公差为 d 的 A 有 d 个;

当 $\frac{n}{2}+1\leqslant d\leqslant n-1$ 时,公差为 d 的 A 有 $n-d$ 个.故当 n 为偶数时,这种 A 共有

$$\left(1+2+\cdots\frac{n-1}{2}\right)+\left\{1+2+\cdots+\left[n-\left(\frac{n}{2}+1\right)\right]\right\}=\frac{n^2}{4}(\text{个}).$$

(2) 设 n 为奇数,则

当$1\leqslant d\leqslant\frac{n-1}{2}$时，公差为$d$的A有$d$个；

当$\frac{n+1}{2}\leqslant d\leqslant n-1$时，公差为$d$的A有$n-d$个. 故当$n$为奇数时，这种$A$共有

$$\left(1+2+\cdots+\frac{n-1}{2}\right)+\left(1+2+\cdots+\frac{n-1}{2}\right)=\frac{n^2-1}{4}(\text{个})$$

两情况可统一为：这种A有$\left[\frac{n^2}{4}\right]$.

2·14 Z是非空的正整数集合，满足下列条件：

(1) 若$x\in Z$，则$4x\in Z$；

(2) 若$x\in Z$，则$[\sqrt{x}]\in Z$（$[a]$表示不超过a的最大整数）.

求证：Z是全体正整数的集合.

（日本数学奥林匹克代表队选拔试题，1990年）

[证] (i) 先证$1\in Z$.

由于$Z\neq\varphi$，因此存在正整数$a_1\in Z$. 若$a_1=1$，则已满足(i)，现设$a_1\geqslant 2$.

令$f(x)=[\sqrt{x}]$，则$a_1>\sqrt{a_1}\geqslant[a_1]=f(a_1)$，

若又有$f(x_1)\geqslant 2$，则$f(a_1)>f(f(a_1))$，

依此类推，必存在n，使得

$$\underbrace{f(\cdots f}_{n\text{个}}(a_1))=1$$

所以 $1\in Z$.

(ii) 证$4^n\in Z$.

由$1\in Z$，连续用条件(1)，$4\cdot 1\in Z, 4\cdot 4\in Z,\cdots,4^n\in Z(n=0,1,2,\cdots)$.

(iii) 考虑$k\in Z$的条件.

设k，l为正整数，则

$$k^2\leqslant x<l^2\Rightarrow k\leqslant\sqrt{x}<l,$$

所以 $k\leqslant[\sqrt{x}]\leqslant\sqrt{x}<l$,

即 $k^2\leqslant x<l^2\Rightarrow k\leqslant f(x)<l$, ①

所以 $k^{2^m} \leqslant x < l^{2^m} \Rightarrow k \leqslant \underbrace{f(f\cdots f}_{m\text{次}}(x)\cdots)) < l$ ②

特别地，在②中若 $l = k + 1$，则由

$$k \leqslant \underbrace{f(f(\cdots f}_{m\text{个}}(x)\cdots)) < k + 1$$

得 $$\underbrace{f(f(\cdots f}_{m\text{个}}(x)\cdots)) = k.$$

这就是说，若存在非负整数 m, n，使得

$$k^{2^m} \leqslant 4^n < (k+1)^{2^m} \quad ③$$

则 $k \in Z$.

(iv) 现证所有的正整数 $k \in Z$.

先证对任意的正整数 k，当 m 充分大时，总存在整数 n，满足

$$2^m \log_4 k \leqslant n < 2^m \log_4 (k+1) \quad ④$$

为此，我们令 $\varepsilon = \log_4(k+1) - \log_4 k (>0)$，它是依 k 而定的常数，区间 $I = [2^m \log_4 k, 2^m \log_4(k+1)]$ 长度为 $2^m \varepsilon$. 因此，当 $m \geqslant 2\log_4 \dfrac{1}{\varepsilon}$ 时，区间 I 的长度就大于 1，于是在 I 中至少存在一个整数 n. 于是④式成立.

因为④式与③式等价，所以我们有 $k \in Z$.

2・15 (1) 用小计算器验证，对每个整数 $k = 0,1,2,3,4,5,6,7$，集合 $\{1,5,10,24,28,42,47,51\}$ 中各数的 k 次幂的和等于集 $\{2,3,12,21,31,40,49,50\}$ 中各数的 k 次幂的和.

(2) 设 n 为正整数，是否可以找出两个无公共元素的集 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，$\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$，使第一个集合中各数的 k 次幂的和等于第二个集合中各数的 k 次幂的和，其中 $k = 0,1,2,\cdots,n$.

(加拿大国家集训队训练题)

[解] (1) 略.

(2) 若 $a_1^k + a_2^k + \cdots + a_n^k = b_1^k + b_2^k + \cdots + b_n^k$，$1 \leqslant k \leqslant n$，则由牛顿关于幂和的公式可知 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的初等对称多项式

$$\sigma_1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

$$\sigma_2 = a_1 a_2 + a_1 a_3 + \cdots + a_{n-1} a_n,$$

……

$$\sigma_n = a_1a_2\cdots a_n.$$

与 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 的初等对称多项式完全相同,因而 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 与 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 都是多项式

$$x^n - \sigma_1x^{n-1} + \sigma_2x^{n-2} + \cdots + (-1)^n\sigma_n$$

的 n 个根,从而

$$\{b_1,b_2,\cdots,b_n\} = \{a_1,a_2,\cdots,a_n\}.$$

因此,本题的答案是否定的.

2·16 设 n 是一个给定的大于 2 的自然数,而 V_n 是一个形如 $1+kn$ 的数集(其中 $k=1,2,\cdots$).一个数 $m\in V_n$,如果不存在两个数 $p,q\in V_n$,使得 $pq=m$,则称 m 为 V_n 中的不可约数.试证明存在一个数 $r\in V_n$,这个数可用不只一种方式表示成数集 V_n 中的几个不可约数的乘积.

(第 19 届国际数学奥林匹克,1977 年)

[证] $V_n=\{1+n,1+2n,\cdots,1+kn,\cdots\}$,其中 $n>2,k=1,2,\cdots$.

因为 $n>2$,所以显然有 $n-1\notin V_n,2n-1\notin V_n$;并且 $n-1$ 与 $2n-1$ 均不可能分解成 n 个 V_n 中的数的乘积.而

$$(n-1)(2n-1) = 1+(2n-3)n\in V_n,$$

$$(n-1)^2 = 1+(n-2)n\in V_n,$$

$$(2n-1)^2 = 1+4(n-1)n\in V_n,$$

易知,$(n-1)^2,(2n-1)^2$ 都是 V_n 中的不可约数,并且当 $n\neq5$ 时,$(n-1)(2n-1)$ 也是 V_n 中不可约数,而 $n=5$ 时,

$$(n-1)(2n-1) = (n+1)^2.$$

设 $r=(n-1)^2(2n-1)^2$,则因

$$(n-1)^2(2n-1)^2 = 1+[n(2n-3)^2+2(2n-3)]n,$$

可知 $r\in V_n$.

并且,当 $n\neq5$ 时,r 可有如下两种方式表示为 V_n 中不可约数的乘积:

$$r = (n-1)^2(2n-1)^2,$$

$$r = [(n-1)(2n-1)][(n-1)(2n-1)].$$

当 $n=5$ 时,$r=(n-1)^2(2n-1)^2$,

$$r=(n+1)^4.$$

由此可见,存在着一个数 $r\in V_n$,它可以用不止一种方式表示为 V_n 中几个不可约数的乘积.

2・17　对任何非空数集 S,令 $\sigma(S)$ 和 $\pi(S)$ 分别表示 S 中所有元素的和与乘积.求证:

$$\sum_S \frac{\sigma(S)}{\pi(S)}=(n^2+2n)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)(n+1).$$

其中"$\sum\limits_S$"表示对$\{1,2,\cdots,n\}$的所有非空子集求和.

(第 20 届美国数学奥林匹克,1991 年)

[证]　因为 $\sigma(S)=\sum\limits_{K\in S}K$,所以

$$\sum_S \frac{\sigma(s)}{\pi(s)}=\sum_S\sum_{k\in S}\frac{k}{\pi(s)}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{S\in k}\frac{k}{\pi(s)},$$

其中"$\sum\limits_{S\ni k}$"表示关于含有 k 的一切子集 S 求和对于固定的 $k=1,2,3,\cdots,n$,则

$$\begin{aligned}\sum_{S\ni k}\frac{K}{\pi(S)}&=\sum_{S\ni K}\frac{1}{\pi(S\setminus\{k\})}\\&=\prod_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}\left(1+\frac{1}{i}\right)\\&=\left(\frac{k+1}{k}\right)^{-1}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{i+1}{i}\right)\\&=\frac{k}{k+1}(n+1).\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}\sum_S\frac{\sigma(S)}{\pi(S)}&=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}(n+1)\\&=(n+1)\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)\\&=(n+1)n-(n+1)\left(\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)\\&=n^2+2n-(n+1)\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

2·18　一个数集的和是指它的所有元素之和.令 S 是一些不超过 15 的正整数组成的集合,S 的任意两个不相交的子集合的和不相等,并且在所有具有上述性质的集合中,S 的和最大,求集合 S 的和.

(第 4 届美国数学邀请赛,1986 年)

[解]　我们首先证明 S 至多有 5 个元素.

事实上,若 S 至少有 6 个元素,则其中元素个数不超过 4 的非空子集合至少要有

$$C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 = 56(\text{个})$$

这些子集合的和不大于 54(即 $15 + 14 + 13 + 12 = 54$),由抽屉原则,56 个不超过 54 的正整数至少有两个数相等,即至少有两个子集合的和相等,若这两个子集不相交,则与题设"S 的任意两个不相交的子集合的和不相等"矛盾,若这两个子集合相交,则去掉公共元素之后同样出现矛盾.

所以,S 至多有 5 个元素.

下面来构造这个 5 元集合,使其元素尽可能地大(因而数集的和尽可能地大).

S 含 15,14,13 之后,不能含有 12,否则出现 $15 + 12 = 14 + 13$;

S 可含 11,但不能含有 10 与 9,否则出现 $15 + 10 = 14 + 11$,$15 + 9 = 13 + 11$;

最后一个元素取 8,则

$$S = \{15,14,13,11,8\}$$

$$15 + 14 + 13 + 11 + 8 = 61$$

于是,所求最大的和为 61.

2·19　任意给定 $h = 2^r$(r 是非负整数).求满足以下条件的所有自然数 K:对每个这样的 K,存在奇自然数 $m > 1$ 和自然数 n,使得

$$K \mid m^h - 1, m \mid n^{\frac{m^h-1}{k}} + 1.$$

(中国国家队选拔赛,1998 年)

[解]　对于 $h = 2^r$,约定将满足题目条件的所有的 K 的集合记为 $K(h)$,我们来证明:

$$K(h) = \{2^{r+s}t \mid S, t \in N, 2 \nmid t\}.$$

将用到以下事实:

$$m \equiv 1(\bmod 4) \Rightarrow 2^r \parallel \frac{m^{2^r}-1}{m-1}.$$

这个事实是显然的,因为

$$\frac{m^{2^r}-1}{m-1}=(m^{2^{r-1}}+1)(m^{2^{r-2}}+1)\cdots(m^2+1)(m+1).$$

(i) 先证:若 $S \geqslant 2, 2 \nmid t$,则 $K=2^{r+s}t \in K(h)$.

事实上,存在 $m=2^s t+1, n=m-1$,使得我们有

$$2^r \parallel \frac{m^{2^r}-1}{m-1},$$

$$\frac{m^h-1}{K}=\frac{m^{2^r}-1}{2^{r+s}t}=\frac{m^{2^r}-1}{2^r(m-1)}$$

是奇自然数.

所以,$K \mid m^h-1$.

又 $n^{\frac{m^h-1}{K}}=(m-1)^{\frac{m^h-1}{K}} \equiv -1(\bmod m)$,

所以,$m \mid n^{\frac{m^h-1}{K}}+1$.

(ii) 再证:对于 $2 \nmid t, K=2^{r+1}t \in K(h)$.

事实上,存在 $m=4t^2+1, n=2t$,使得我们有

$$\frac{m^h-1}{K}=\frac{m^{2^r}-1}{2^r(m-1)} \cdot 2t,$$

$$n^{\frac{m^h-1}{K}}=(n^2)^{\frac{m^{2^r}-1}{2^r(m-1)} \cdot t} \equiv -1(\bmod m).$$

(iii) 用反证法论证:对于 $0 \leqslant q \leqslant r, 2 \nmid t$,

$2^q t \in K(h)$.

若对 $K=2^q t$,有 m、n 满足题中所述的要求,显然有 $(m,n)=1$. 在 m 的所有素因数中取以下表示中指数 a 最小的一个素数 p:

$$p=2^a b+1, 2 \times b.$$

易见 $\quad 2^a \mid m-1$.

一方面,由 $p \mid n^{\frac{m^h-1}{K}}+1$,我们有

$$\left(n^{\frac{m^h-1}{2^q \cdot t}}\right)^b \equiv -1(\bmod p).$$

另一方面,因为 $2^a \mid m-1, 2^{q+a} \mid m^h-1$,

所以,有

$$\left(n^{\frac{m^h-1}{2^q \cdot t}}\right)^b = \left(n^{\frac{m^h-1}{2^{q+a} \cdot t}}\right)^{2^a \cdot b} \equiv \left(n^{\frac{m^h-1}{2^{q+a}t}}\right)^{p-1}$$

$$\equiv 1 (\bmod p)$$

矛盾.

结论:对于 $h=2^r, K(h)=\{2^{r+s}t \mid s, t \in N, 2 \nmid t\}$.

2·20　设 $R_1, R_2, \cdots$ 是由下列规则定义的正整数有限序列族:

$R(1)=(1)$;

如果 $R_{n-1}=(x_1, \cdots, x_s)$,那么

$R_n=(1,2,\cdots,x_1,1,2,\cdots,x_2,\cdots,1,2,\cdots,x_s,n)$

例如:$R_2=(1,2), R_3=(1,1,2,3), R_4=(1,1,1,2,1,2,3,4)$.

证明如果 $n>1$,则 R_n 中左起第 k 项等于 1 当且仅当 R_n 中右起第 k 项与 1 不同.

(第 38 届国际数学奥林匹克预选题,1997 年)

[证]　对于序列 $w=(x_1,\cdots,x_m)$ 定义它的"展开式"

$\overline{w}=(1,2,\cdots,x_1,1,2,\cdots,x_2,\cdots,1,2,\cdots,x_m)$.

对于任意两个序列 $u=(x_1,\cdots,x_m)$ 和 $v=(y_1,\cdots,y_k)$ 定义它们的并列

$uv=(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_k)$.

于是,序列族 $R_1, R_2, \cdots$ 满足递归公式:

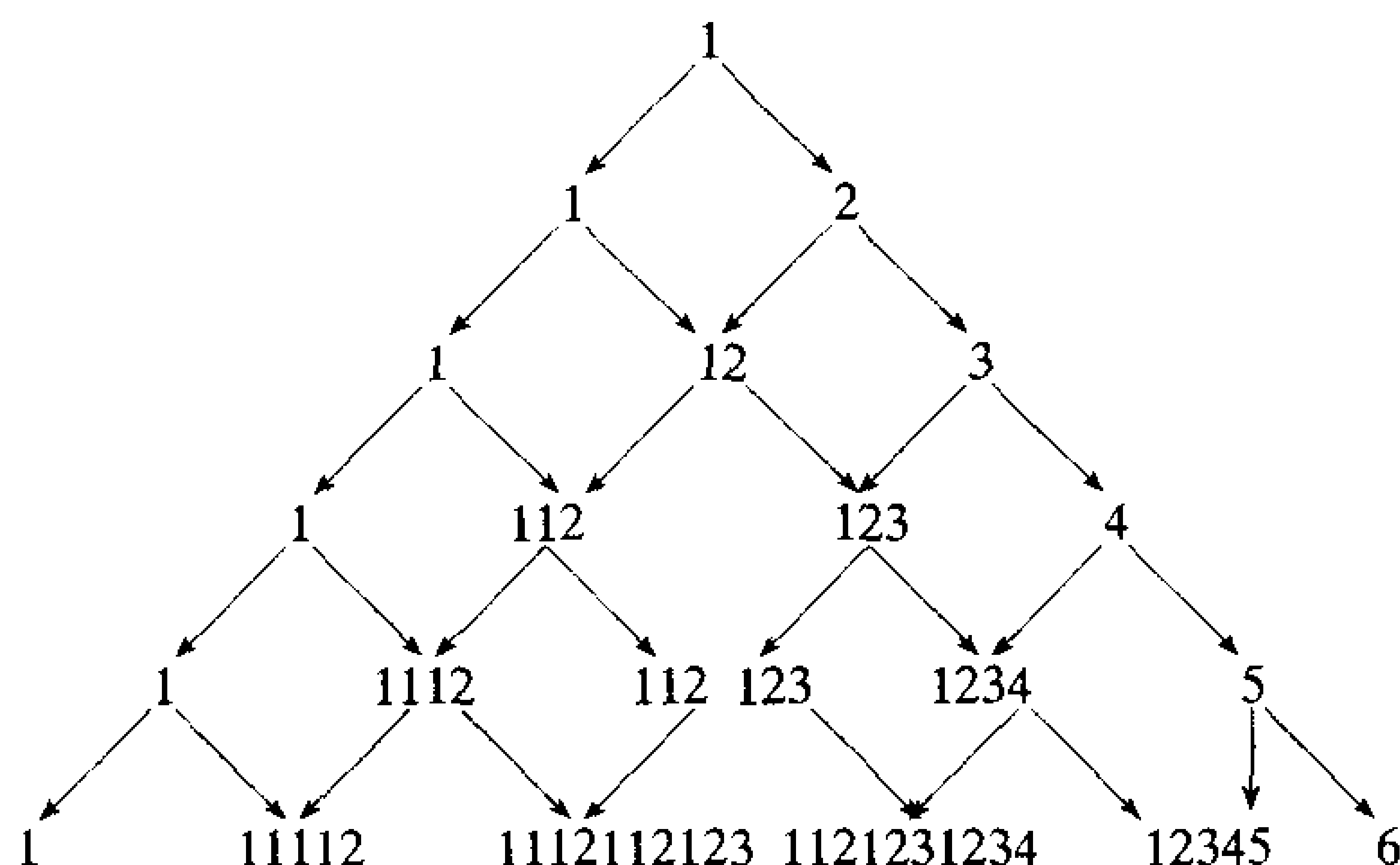
$R_n=\overline{R}_{n-1}(n)$.

"展开式"和并列的运算,具有下列十分重要的性质:对任意序列 u 和 v,有

$\overline{uv}=\overline{u}\,\overline{v}$.

下面我们先给出一个类似于杨辉三角形的序列表,我们暂且将这个表叫做"假杨辉三角形"(图在下页):

下表"假杨辉三角形" 构造过程如下:第一行为一个 1;第 n 行从左到右,第一个序列是 1,最后一个序列是 n,中间的任何一个序列都是在第 $n-1$ 行上与它最近的两个序列的并列.



可以证明,在用这种方法构造的"假杨辉三角形"中,所有指向左下方的箭头表示序列到这个序列的展开式.也就是说,如果表中有

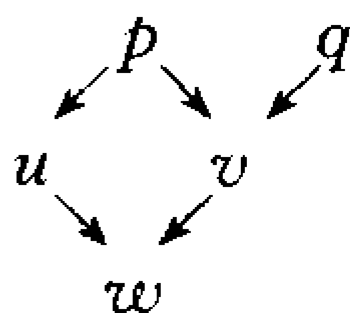
$$\begin{array}{cc} & v \\ \swarrow & \\ w & \end{array}$$

那么 $w = \overline{v}$.

事实上,对于"假杨辉三角形"中的前两行,上述结论显然成立.

当 v 是第 n 行的第一个序列或最后一个序列时,上述结论显然也成立.

假设 v 所在行数 $< n$ 时,上述结论成立.当 v 处在第 n 行,但不在这一行最左端或最右端时,设在"假杨辉三角形"中,v 的附近有下列情况:



于是,我们有

$$w = uv = \overline{p}\,\overline{q} = \overline{pq} = \overline{v}.$$

由数学归纳法原理知,上述结论对表中任一序列 v 都成立.

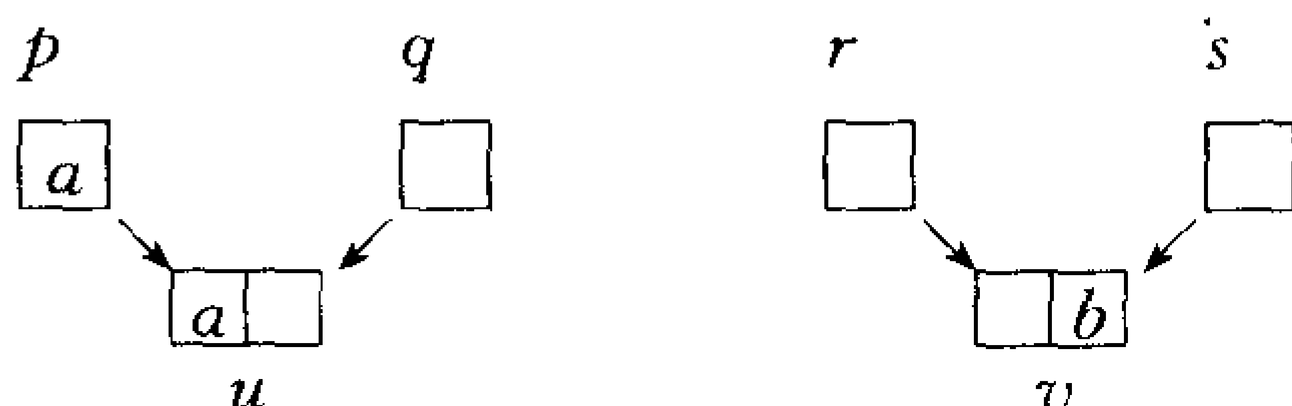
由证得的这个结论可知,"假杨辉三角形"中的第 n 行从第 $n-1$ 行得到的规则与在序列族 $R_1, R_2, \cdots$ 中 R_n 从 R_{n-1} 得到的递归法则完全一致,因此"假杨辉三角形"第 n 行所有序列的并列恰是 R_n.

我们把序列 $(x_1, x_2, \cdots, x_s)$ 的长度定义为该序列中数的个数 S.显然,在"假杨辉三角形"中,如果序列在第 $n+1$ 行第 $m+1$ 个位置,那

么这个序列的长度为 $C_n^m(0\leqslant m\leqslant n)$.

因为 $C_n^m = C_n^{n-m}$,所以这个三角形的每一行中左右两边序列的长度是对称的.

设 R_n 的左起第k个数和右起第k个数分别是a和b.由上述对称性可知,若a属于"假杨辉三角形"第n行的左起第m个序列u,则b一定属于同一行的右起第$n-m$个序列v.我们知道,u和v具有相等的序列长度,而且如果a占据u中左起第l个位置,那么b必占据v中右起第l个位置.设u由p和q并列得到,v由r和s并列得到:



由于对称性,a和b或者分别来自p和s,或者分别来自q和r,且在这两种情形中,显然a和b在R_{n-1}中也占据对称的位置.

下面证明本题的主要结论.

显然,对$n=2$,结论成立.

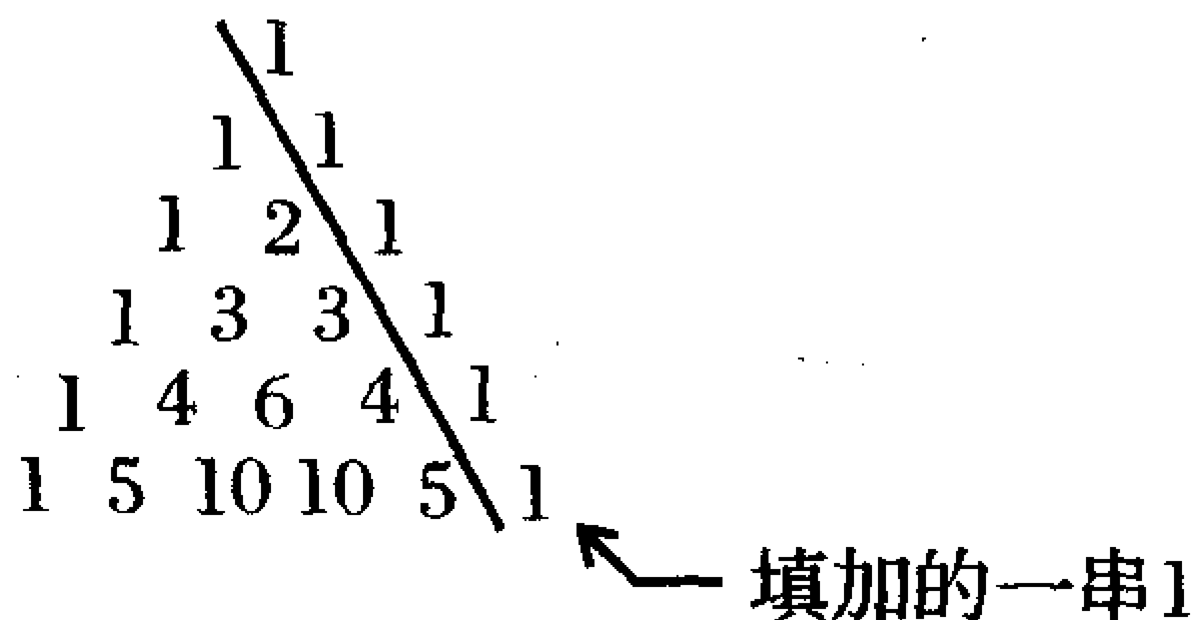
假定直到序列R_{n-1},结论成立.

考虑R_n,并选择占据左右对称位置的同一对数.如果这对数是R_n中的第一个和最后一个数,那么结论显然成立.否则,R_n中的这对数可在R_{n-1}的一对对称位置上找到.由归纳假设可知,此时结论仍成立.

根据数学归纳法原理,本题结论对于任意自然数$n>1$都成立.

注 在题设条件下,还可以求R_n中所有数的和.

事实上,我们把"假杨辉三角形"中的每个序列都用序列中各数的和代替,并在这个三角形的右上方填加一串1(如下图):



这样,恰得到一个真正的杨辉三角形.因此R_n中所有数的和等于(1+

$1)^n-1$,即 2^n-1.

2·21 考虑实数 x 在3进制下的表达式. K 是$[0,1]$内所有这样的数 x 的集合,并且 x 的每位数字是0或2.如果

$$S=\{x+y \mid x,y\in K\},$$

求证:

$$S=\{z \mid 0\leqslant z\leqslant 2\}=[0,2].$$

(韩国数学奥林匹克,1993年)

[证] 在 K 内 x 和 y 的每位数字是0或2,因此,$\frac{x}{2}$ 和 $\frac{y}{2}$ 的每位数字是0或1,从而 $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}$ 的每位数字在3进制下是0,1或2,并且由

$$x\in[0,1],y\in[0,1]$$

可知

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\in[0,1].$$

反过来,对于$[0,1]$上的任何一个数,它在3进制下的每位数字是0,1或2,显然可以写成两个在3进制下每位数字是0或1的数的和.也就是说,都可以写成 $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}$,$x,y\in K$ 的形式.

因此,我们有

$$\left\{\frac{x}{2}+\frac{y}{2} \mid x,y\in K\right\}=[0,1],$$

故得

$$S=\{x+y \mid x,y\in K\}=[0,2].$$

第2节　子集

2·22 集 $S=\{1,2,\cdots,1990\}$.如果 S 的某个31元子集的元素和被5整除,则称为是 S 的好子集.求 S 的好子集的个数.

(第31届国际数学奥林匹克预选题,1990年)

[解] 对 $k=0,1,2,3,4$ 定义

$F_k=\{A:A\subseteq S,|A|=31,A$ 的元素和 $\equiv k \pmod 5\}$,其中 $|A|$ 表示集合 A 中元素的个数.由于 $31\equiv 1 \pmod 5$,若 $\{x_1,x_2,\cdots,x_{31}\}$ 在

F_0 中,则$\{x_1+k,x_2+k,\cdots,x_{31}+k\}$在 F_k 中(这里 x_i+k 大于 1990 时,则用 $x_i+k-1990$ 代替). 显然,这是 F_0 到 F_k 的一一对应. 因此

$$|F_0|=|F_1|=|F_2|=|F_3|=|F_4|.$$

而 F_0,F_1,F_2,F_3,F_4 无公共元素,

$$\sum_{k=0}^{4}|F_k|=C_{1990}^{31},$$

所以

$$|F_0|=\frac{1}{5}C_{1990}^{31}.$$

2·23 给出一个集合,由十个互不相同的十进制的两位正整数组成. 证明这个集合必有两个无公共元素的子集,两子集各数之和相等.

(第 14 届国际数学奥林匹克,1972 年)

[证] 给出的集合 M 的子集一共 $2^{10}=1024$ 个. 除去空集 φ 和集 M 本身(因为 φ 和 M 不能满足题目的要求),尚有非空真子集 $1024-2=1022$ 个.

在这 1022 个非空真子集中,元素之和均不大于 $9\times 99=891$,即这些非空真子集的元素的和所可能的值不多于 891,所以,在这 1022 个子集中,至少有两个子集,例如 $M_1\subset M$, $M_2\subset M$,它们含有的元素不全相同,但其元素之和相等.

再令 $N_1=M_1-(M_1\cap M_2)$, $N_2=M_2-(M_1\cap M_2)$. 则得到 M 的两个不相交的非空子集 N_1 和 N_2,它们中各元素的和相等.

2·24 任何一组 m 个非负数的几何平均数是它们的积的 m 次方根.

(1) 对于那些正整数 n,有几个不同正整数的有限集合 S_n,使得 S_n 的任何子集的几何平均数都是整数?

(2) 有没有不同正整数的无限集合 S,能使 S 的任何有限子集的几何平均数都是整数?

(第 13 届美国数学奥林匹克,1984 年)

[解] (1)m 个非负数的积的 m 次方根是整数的一个充分条件是:

已知的 m 个数都是非负整数的幂,并且幂指数是 m 的正整数倍.

由于 n 个不同正整数的集合 S_n 的任意非空子集可以含有 1 个或 2 个,…,或 n 个元素,因此,只要这些元素是正整数的幂,并且幂指数是 $1,2,\cdots,n$ 的公倍数,例如 $n!$,这时任何子集的几何平均数就是整数.

因为总有 n 个不同的正整数的$n!$次幂,所以对于每一个正整数 n,都有满足条件的 n 个不同正整数为元素的有限集合 S_n.

(2) 这样的无限集合 S 不存在.

事实上,如果有不同正整数的无限集合 S,它的任何有限子集的几何平均数都是整数.

我们把质数 p 在正整数a 的标准分解式中的指数k,记作

$$e(p,a)=k.$$

设 a,b 是S 中的两个不同的元素.

因为 $a\neq b$,所以至少有一个质数 p,使得

$$e(p,a)\neq e(p,b).$$

依假设,对任意正整数 m,S 有 m 元子集$\{a,n_1,n_2,\cdots,n_{m-1}\}$ 和$\{b,n_1,n_2,\cdots,n_{m-1}\}$,它们的几何平均数是整数,此时,质数 p 在子集里各数中的指数的和应该是m 的倍数,即

$$e(p,a)+e(p,n_1)+\cdots+e(p,n_{m-1})$$

和
$$e(p,b)+e(p,n_1)+\cdots+e(p,n_{m-1})$$

都应该是 m 的倍数,从而它们的差即

$$e(p,a)-e(p,b)$$

也是m 的倍数,由于m 是任意的,所以只有零才是任意正整数的倍数,即

$$e(p,a)-e(p,b)=0,$$

或
$$e(p,a)=e(p,b).$$

这与 $e(p,a)\neq e(p,b)$ 相矛盾.

所以这样的无限集合 S 不存在.

2·25 找出具有下列性质的一切正整数n:使集合$\{n,n+1,n+2,n+3,n+4,n+5\}$ 可以分成两个不相交的非空子集合,并且一个子集中所有元素的积与另一个子集中所有元素的积相等.

(第 12 届国际数学奥林匹克,1970 年)

[解] 假定存在自然数 n 满足所指出的性质,即:集合$\{n,n+1,n+2,n+3,n+4,n+5\}$ 能够分成两个非空的不相交的子集,其中一

个子集的所有元素之积等于另一个子集的所有元素之积.那么这个积中所有因数 p,都能整除 $n,n+1,n+2,n+3,n+4,n+5$ 这六个连续自然数中的至少两个数.因此,这样的质因数 p 只能是2,3和5.

显然,5不可能出现在中间4个数中,所以,数 $n+1,n+2,n+3,n+4$ 仅有质因数2和3,而在这四个连续数中恰好有两个连续奇数,这两个连续奇数不可能有质因子2,只可能有3,所以这两个连续奇数必须是3的整数次幂.另一方面,差 $3^k-3^m(k>m\geqslant 1$ 或 $m>k\geqslant 1)$ 不可能等于2(或 -2).从而两个3的整数次幂不可能是两个连续奇数.

以上矛盾说明,满足题设条件的正整数 n 不存在.

2・26 试将集合 $\{1,2,\cdots,1989\}$ 分为117个互不相交的子集 A_i $(i=1,2,\cdots,117\}$,使得

(i) 每个 A_i 都含有17个元素;

(ii) 所有 A_i 中各元素之和都相同.

(第30届国际数学奥林匹克,1989年)

[解] 因为 $1989=117\times 17$,故可将 $\{1,2,\cdots,1989\}$ 顺次分成17段,每段含117个数.现在我们把每段117个数适当地分别放入 A_1,$A_2,\cdots,A_{117}$ 中以使条件(ii)被满足.

从第四段数开始,将偶数段的数从小到大依次放入 $A_1,A_2,\cdots$,A_{117} 中,将奇数段的数从大到小依次放入这117个集中.易见,所有集中的14个数字之和都相等.于是问题归结为如何将前三段数 $\{1,2,\cdots,351\}$ 放入每个集中三个且使三数之和都相同.

把这些数中3的倍数抽出来从大到小排好:$\{351,348,345,\cdots,3\}$,共117个数,其余的234个数按从小到大排列并分成两段,每段117个数,即 $\{1,2,4,5,7,\cdots,175\}$ 和 $\{176,178,179,\cdots,350\}$,将这三组数顺次放入 $A_1,A_2,\cdots,A_{117}$ 之中便满足要求.事实上,若将第二组数与第三组数中次序相同的数相加,则其和为 $\{177,180,183,186,\cdots,525\}$.由此可见,放入 $A_i(i=1,2,\cdots,117\}$ 的三数之和均为528.

2・27 设集合 $S_n=\{1,2,\cdots,n\}$,若 X 是 S_n 的子集,把 X 中的所有数的和称为 X 的"容量"(规定空集的容量为0).若 X 的容量为奇(偶)数,则称 X 为 S_n 的奇(偶)子集.

(1) 求证:S_n 的奇子集与偶子集个数相等.

(2) 求证:当 $n\geqslant 3$ 时,S_n 的所有奇子集的容量之和与所有偶子

集的容量之和相等.

(3) 当 $n \geqslant 3$ 时,求 S_n 的所有奇子集的容量之和.

(中国高中数学联赛,1992 年)

[**解**] 用数学归纳法证.

(1) 记 S_n 的奇子集和偶子集的个数分别为 a_n 和 b_n.

当 $n=1$ 时, S_1 仅有奇子集 $\{1\}$ 和偶子集 ϕ, 故 $a_1=b_1=1$.

设 $n=k$ 时,结论成立,即 $a_k=b_k$,要证明 $a_{k+1}=b_{k+1}$.

S_{n+1} 的所有子集可以分成两类:一类包含 $k+1$,一类不包含 $k+1$. 考虑不包含 $k+1$ 的子集,根据归纳假设,不包含 $k+1$ 的子集中,奇子集和偶子集分别有 a_k 个.今将 $k+1$ 加入原来不包含 $k+1$ 的子集中,即得到所有含 $k+1$ 的子集,显然,若 $k+1$ 是偶数,原来的奇子集仍变成奇子集,原来的偶子集仍变成偶子集.若 $k+1$ 是奇数,原来的奇子集变成偶子集,偶子集变成奇子集.因此,不管 $k+1$ 是奇数还是偶数,包含 $k+1$ 的子集中,奇子集和偶子集也都为 a_k 个.故 S_{n+1} 中,奇子集和偶子集的个数都是 $2a_k$,所以 $a_{k+1}=b_{k+1}$.

根据归纳原理知,对所有的 n, $a_n=b_n$.

(2) 记 S_n 的奇子集和偶子集的容量和为 A_n 和 B_n.

当 $n=3$ 时, S_3 有 4 个奇子集: $\{1\},\{3\},\{1,2\},\{2,3\}$. 有 4 个偶子集: $\phi,\{2\},\{1,3\},\{1,2,3\}$,直接计算得 $A_3=B_3=12$.

设 $n=k(k\geqslant 3)$ 时,有 $A_k=B_k$,现在我们来证明 $A_{k+1}=B_{k+1}$.

将 $k+1$ 加入不含 $k+1$ 的子集中,即得所有含 $k+1$ 的子集.根据归纳假定:

当 $k+1$ 为偶数时:

$$A_{k+1}=A_k+(A_k+(k+1)ak)=2A_k+(k+1)ak,$$

$$B_{k+1}=B_k+(B_k+(k+1)b_k)=2B_k+(k+1)b_k.$$

当 $k+1$ 为奇数时:

$$A_{k+1}=A_k+(B_k+(k+1)b_k)=A_k+B_k+(k+1)b_k,$$

$$B_{k+1}=B_k+(A_k+(k+1)ak)=A_k+B_k+(k+1)ak.$$

因为 $A_k=B_k$, $a_k=b_k$,所以总有 $A_{k+1}=B_{k+1}$.

根据归纳原理,对所有 $n\geqslant 3$, $A_n=B_n$.

(3) S_n 的任一子集 A,令其补集为 B,则 A 与 B 的容量之和即为

S_n 的容量,即 $1+2+\cdots+n=n(n+1)/2$,因此,S_n 的所有子集容量之和为

$$2^{n-1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=2^{n-2}n(n+1),$$

注意到 $A_n=B_n$,即知

$$A_n=2^{n-2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=2^{n-3}\cdot n(n+1)\qquad(n\geqslant 3).$$

2·28　设 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_r\}$ 是整数的一个集合,其中 $r>1$. 对于 S 的非空子集 A,定义 $p(A)$ 为 A 中的一切整数的乘积. 设 $m(S)$ 表示 $p(A)$ 的算术平均数,这里 A 是 S 的一切非空子集.

若 $m(S)=13$,且有一正整数 a_{r+1} 使得 $m(S\cup\{a_{r+1}\})=49$,试确定 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 及 a_{r+1} 的值.

(第 20 届加拿大数学奥林匹克,1988 年)

[解]　设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\ n\in N$,则 A 的所有非空子集的每一子集元素之积的和为

$$\begin{aligned}&a_1+a_2+\cdots+a_n+(a_1a_2+\cdots+a_1a_n+\cdots+a_{n-1}a_n)+\\&(a_1a_2a_3+\cdots+a_{n-1}a_na_1)+\cdots+a_1a_2\cdots a_n\\=&(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)-1\end{aligned}$$

而 A 的所有非空子集的个数为 2^n-1,因此

$$m(A)=\frac{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)-1}{2^n-1},$$

即　$(1+a_1)\cdots(1+a_n)-1=m(A)(2^n-1)$,

由此可得

$$\begin{aligned}&(2^{r+1}-1)m(S\cup\{a_{r+1}\})+1\\=&(1+a_1)\cdots(1+a_r)(1+a_{r+1})\\=&[m(S)(2^r-1)+1](1+a_{r+1}).\end{aligned}$$

因为 $m(S)=13,m(S\cup\{a_{r+1}\})=49$,

所以　$49(2^{r+1}-1)+1$

$=[13(2^r-1)+1](1+a_{r+1})$,

从而得

$$2^r=\frac{12(a_{r+1}-3)}{13a_{r+1}-85}.\qquad ①$$

注意到上式的右边是 a_{r+1} 的函数，它在 $\left(-\infty,\frac{85}{13}\right)$ 和

代数卷

$\left(\frac{85}{13},+\infty\right)$ 上都是减函数，并且当 $a_{r+1}=1$ 时，① 式的左边等于 $\frac{24}{72}=\frac{1}{3}$.

所以当 $a_{r+1}=1,2,3,4,5,6$ 时，① 式右边是小于 1 的数.

但当 $a_{r+1}\geqslant 8$ 时，① 式右边除去 $a_{r+1}=49$ 外，不是整数($a_{r+1}=49$ 时，$2^r=1$，所以 $r=0$，与 $r>1$ 矛盾.)，所以 $a_{r+1}=7$，于是由 ① 式得

$$2^r=\frac{12\times 4}{91-85}=8,$$

故 $\qquad r\neq 3.$

并且

$$\begin{aligned}&(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\\&=(2^3-1)m(S)+1\\&=7\times 13+1,\end{aligned}$$

于是我们有

$$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)=92=2\times 2\times 23.$$

由此可得惟一的正整数解是：

$$1+a_1=2,\ 1+a_2=2,\ 1+a_3=23.$$

即 $\qquad a_1=1,a_2=1,a_3=22.$

除此之外还有 13 组整数解，这可由 92 关于整数的不同分解得到. 它们分别是：

(0,0,91),(−2,−2,91),(−2,0,−93),(0,1,45),(−2,−3,45),(−2,1,−47),(0,−3,−47),(0,3,22,),(−2,−5,22),(−2,3,−24),(0,−5,−24),(−3,−3,22),(−3,1,−24).

2·29 令 $T=\{9^k\mid k$ 为整数,$0\leqslant k\leqslant 4000\}$，已知 9^{4000} 有 3817 位数字，它的最左边的数字是 9，问 T 中有多少个元素以 9 为最左边的数字？

（第 8 届美国数学邀请赛，1990 年）

[解] 首先证明一个引理：若 9^t 的最左边数字是 9，则 9^{t-1} 的最左边数字必是 1.

事实上，若 9^{t-1} 的最左边数字是 2,3,4,5,6,7,8，显然 $9^{t-1}\times 9=9^t$

的最左边数字不可能是 9.

若 9^{t-1} 的最左边数字是 9 时,则

$$9^{t-1} \leqslant \overline{999\cdots},$$

$$9^t = 9^{t-1} \times 9 \leqslant \overline{899\cdots}$$

从而 9^t 的最左边的数字也不可能是 9,故引理成立.

另一方面,若 9^{t-1} 的最左边数字是 2,3,4,5,6,7,8,9 时,把 9^{t-1} 再乘以 9,最左边会出现进位,即 9^t 比 9^{t-1} 增加位数.

而 9^{t-1} 的最左边数字是 1,9^t 的最左边数字为 9 时,从 9^{t-1} 到 9^t 没有增加位数.这就是说,从 9^{t-1} 到 9^t 时,若 9^t 最左边数字是 9,就没有增加位数.

因为 10^{4000} 有 4001 位,9^{4000} 有 3817 位,所以在连续求 9 的幂时,有

$$4001 - 3817 = 184$$

次没有进位.

因此,9^k 有 184 个元素以 9 为最左边的数字.

2·30 S 为 n 个正实数组成的集,对 S 的每个非空子集 A,令 $f(A)$ 为 A 的所有元素的和.证明集 $\{f(A): A \subseteq S, A \neq \phi\}$ 可以分拆为 n 个子集,每个子集中最大数与最小数的比小于 2.

(第 11 届全苏数学奥林匹克,1977 年)

[证] 设 S 中元素为 $(0<)u_1 < u_2 < \cdots < u_n$.

令. $S_1 = \{f(A): A = \{u_1\}\}$,

$$S_k = \{f(A): u_1 + u_2 + \cdots + u_{k-1} < f(A) \leqslant u_1 + u_2 + \cdots + u_k\},$$

$(k = 2, \cdots, n.)$

因为 $u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ 是 $f(A)$ 的最大值,所以每一个 $f(A)$ 的值属于某个 S_k.

在 S_1 中最大数与最小数相等(等于 u_1),故其比为 $1(<2)$.当 $k \geqslant 2$ 时,若 $u_k \leqslant u_1 + u_2 + \cdots + u_{k-1}$,则 S_k 中最大数与最小数之比小于

$$\frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_k}{u_1 + u_2 + \cdots + u_{k-1}} \leqslant 2.$$

若 $u_k > u_1 + u_2 + \cdots + u_{k-1}$,则 $u_k \in S_k$,又因为满足 $f(A) > u_1 + u_2 + \cdots + u_{k-1}$ 的集 A 必含有某个 $u_i, i \geqslant k$.所以 u_k 是 S_k 中最小元素,S_k 中最大数与最小数的比

$$\frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_k}{u_k} < 2.$$

总之,对于任意的正整数 $k \leqslant n$, S_k 中最大数与最小数之比都小于 2,所以 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 是符合要求的分拆.

2·31 用 $\sigma(S)$ 表示非空整数集 S 中所有元素的和. 设 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_{11}\}$ 是正整数集,且 $a_1 < a_2 < \cdots < a_{11}$. 若对每个正整数 $n \leqslant 1500$,存在 A 的子集 S,使得 $\sigma(S) = n$. 试求满足上述要求的 a_{10} 的最小值.

(第 21 届美国数学奥林匹克,1992 年)

[解] 令 $S_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k (1 \leqslant k \leqslant 11)$. 由题设知,存在下标 m,使 $S_{m-1} < 1500 \leqslant S_m$. 于是,对于 $2 \leqslant k \leqslant m$,有 $a_k \leqslant S_{k-1} + 1$. 这是由于若 $a_k > S_{k-1} + 1$,而 $a_1 + \cdots + a_{k-1} = S_{k-1}$. 这样,就不存在 $S \subset A$,使 $\sigma(S) = S_{k-1} + 1$. 所以

$$S_k = S_{k-1} + a_k \leqslant 2S_{k-1} + 1, \quad ①$$

由题设知 $S_1 = a_1 = 1$,于是,由 ① 用归纳法可推得

$$S_k \leqslant 2^k - 1 (1 \leqslant k \leqslant m), \quad ②$$

由 $1500 \leqslant S_m \leqslant 2^m - 1$,得 $m = 11$.

再由 ① 得

$$\frac{S_{k+1} - 1}{2} \leqslant S_k \leqslant 2^k - 1 \quad (k = 1, 2, \cdots, 10).$$

由于 S_k 是自然数,因此

$$\left\lceil \frac{S_{k+1} - 1}{2} \right\rceil \leqslant S_k \leqslant 2^k - 1,$$

这里 $\lceil x \rceil$ 表示大于或等于 x 的最小整数. 特别地,有

$$S_{10} \geqslant \left\lceil \frac{S_{11} - 1}{2} \right\rceil \geqslant \left\lceil \frac{1500 - 1}{2} \right\rceil = 750,$$

又 $S_8 \leqslant 2^8 - 1 = 255$,于是

$$2a_{10} > a_9 + a_{10} = S_{10} - S_8 \geqslant 495.$$

所以,$a_{10} \geqslant 248$.

另一方面,我们可以根据以上的一些不等式,构造一个符合要求的集合 A,并且 $a_{10} = 248$. 具体地,取

$$A = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 247, 248, 750\}.$$

由于 $255 = 2^7 + 2^6 + \cdots + 2 + 2^0$,
于是,利用二进制表示可见,当 $n \leqslant 255$ 时,可找到 $S \subset \{1,2,4,\cdots,128\}$,使 $\sigma(S) = n$.从而,当 $n \leqslant 255 + 247 = 502$ 时,存在 $S \subset \{1,2,4,\cdots,128,247\}$,使 $\sigma(S) = n$;当 $n \leqslant 502 + 248 = 750$ 时,存在 $S \subset \{1,2,\cdots,128,247,248\}$,使 $\sigma(S) = n$;当 $n \leqslant 750 + 750 = 1500$ 时,存在 $S \subset A$,使 $\sigma(S) = n$.

2·32 记 Q 为有理数集合,Q 的非空子集 S 具有以下性质:

(1) $0 \notin S$.

(2) 若 $s_1 \in S, s_2 \in S$,则 $s_1/s_2 \in S$;

(3) 存在一非零有理数 q,$q \notin S$ 且每一个不在 S 中的非零有理数都可写成 qs 的形式,其中 $s \in S$.

证明:若 $x \in S$,则存在 $y, z \in S$,使 $x = y + z$.

(第 4 届爱尔兰数学奥林匹克,1991 年)

[证] 假设 $s \in S$,令 $s_1 = s_2 = S$,则 $s_1/s_2 = 1 \in S$.

令 $s_1 = 1, s_2 = s$,则 $1/s \in S$.

若 $t \in S$,令 $s_1 = t, s_2 = 1/s$,则

$s_1 s_2 = t/(1/s) = st \in S$(这样 s 就是乘法意义下的解).

假设 u 是一个非零有理数,若 $u \notin S$,则 $u = qs$,其中 $s \in S$,于是我们有 $u^2 = q^2 s^2$.

若 $q^2 \notin S$,则可设 $q^2 = qt(t \in S)$,则

$q = t \in S$,矛盾.

所以 $q^2 \in S, u^2 \in S$.

假如 $x \in S$,则由 $(3/5)^2, (4/5)^2$ 为平方数可知,

$x(3/5)^2 \in S, x(4/5)^2 \in S$.

但 $x = x(3/5)^2 + x(4/5)^2$.

故命题得证.

2·33 求正整数 k,使得集合 $X = \{1990, 1990+1, \cdots, 1990+k\}$ 能被分拆为两个互不相交的子集 A 与 B,A 中元素的和等于 B 中元素的和.

(第 31 届国际数学奥林匹克预选题,1990 年)

[解] 我们证明当且仅当:

(1) $k \equiv 3 \pmod 4$,或

(2) $k \equiv 0 \pmod 4$ 且 $k \geqslant 92$ 时,X 可分为满足要求的子集 A, B.

首先我们确定 k 应满足的条件.

X 中元素之和

$$1990(k+1)+\frac{k(k+1)}{2}$$

应当是偶数,因此 $4 \mid k(k+1)$.

$$k \equiv 0 \pmod 4,$$

或 $$k \equiv 3 \pmod 4.$$

若 $k \equiv 0 \pmod 4$,则 $|X| = k+1$ 为奇数,不妨设 $k = 2m$,m 为偶数,而

$$|A| \geqslant m+1,\ |B| \leqslant m,$$

这时 A 中元素和

$$\begin{aligned} a &\geqslant 1990+(1990+1)+\cdots+(1990+m) \\ &= 1990(m+1)+\frac{m(m+1)}{2}, \end{aligned}$$

B 中元素和

$$\begin{aligned} b &\leqslant (1990+m+1)+\cdots+(1990+2m) \\ &= 1990m+m^2+\frac{m(m+1)}{2}. \end{aligned}$$

因此 $$m^2 \geqslant 1990.$$

因为 m 是偶数,所以

$$m \geqslant 46, k \geqslant 92.$$

下面我们证明,条件也是充分的.

情况 1:$k \equiv 3 \pmod 4$.

这时 X 的元素数目是 4 的倍数,由于每 4 个连续整数的集可以分为两个不相交的子集,具有相同的和,所以 X 具有同样的情况.

情况 2:$k \equiv 0 \pmod 4$,$k \geqslant 92$.

在 $k = 92$ 时,令

$$A_1 = \{1990, 1991, 1992, \cdots, 1990+46\},$$

$$B_1 = \{1990+47, 1990+48, \cdots, 1990+92\},$$

则后者元素和多$(47-1)\times 46 - 1990 = 126$,将 A_1 中的 1990 与 B_1 中

的 1990 + 63 对调，则对调后的两个集合即为所求(即元素和相等).

在 $k > 92$ 时，由情况 1，

$$\{1990+93, 1990+94, \cdots, 1990+k\}$$

(它的元素个数为 4 的倍数)可以分为两个不相交的子集，具有相同和，所以结合上面对 $k = 92$ 的讨论，X 具有同样的性质.

2·34　设 n, m, k 都是自然数，且 $m \geqslant n$. 证明：如果

$$1+2+\cdots+n = mk,$$

则可将数 $1, 2, \cdots, n$ 分成 k 组，使每一组数的和都等于 m.

(第 22 届全苏数学奥林匹克，1988 年)

[证]　当 $n = 1$ 时，结论显然成立.

假设对一切小于 n 的参数结论成立，我们来考察集合 $S_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ 的情形.

如果 $m = n$，那么 $\frac{1}{2}(n+1) = k$ 为整数，于是可按如下方式分组：

$$\{n\}, \{1, n-1\}, \{2, n-2\}, \cdots, \left\{\frac{1}{2}(n-1), \frac{1}{2}(n+1)\right\}.$$

如果 $m = n+1$，那么 n 为偶数，则分组方式具有形式：

$$\{1, n\}, \{2, n-1\}, \cdots, \left\{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1\right\}.$$

对其余情形再分三种情况讨论：

情况 1：$n+1 < m < 2n$，m 为奇数. 我们先从 S_n 中分出 $S_{m-n-1} = \{1, 2, \cdots, m-n-1\}$；再将其余 $2n-m+1$ 个数两两配对，使各对之和皆为 m：$\{m-n, n\}, \{m-n+1, n-1\}, \cdots, \left\{\frac{1}{2}(m-1), \frac{1}{2}(m+1)\right\}$.

由于 S_{m-n-1} 中的数字之和为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(m-n-1)(m-n)\\ =& \frac{1}{2}[m^2 - m(2n+1)] + \frac{1}{2}n(n+1)\\ =& m\left[\frac{1}{2}(m-2n-1)+k\right],\end{aligned}$$

知该和数可被 m 整除，且因 $m \geqslant m-n-1$，于是由归纳假设知，可将 S_{m-n-1} 中的数字分组，使得各组数字之和皆为 m.

情况 2：$n+1<m<2n$，m 为偶数，这时，我们仍然先从 S_n 中分出 S_{m-n-1} 来；并先将其余数字两两配对，使各对数字之和为 m：$\{m-n,n\}$，$\{m-n+1,n-1\}$，…，$\left\{\frac{m}{2}-1,\frac{m}{2}+1\right\}$，这时还剩下一个数字 $\frac{m}{2}$，S_{m-n-1} 中的数字之和可以表示成 $\frac{m}{2}(m-2n-1+2k)$ 的形式，它可被 $\frac{m}{2}$ 整除，又由 $m<2n$ 得 $m\leqslant 2n-2$，$\frac{m}{2}\geqslant m-n-1$. 于是由归纳假设知，可将 S_{m-n-1} 中的数字分为 $m-2n-1+2k$ 组，使每组之和皆为 $\frac{m}{2}$. 由于 $m-2n-1+2k$ 是一个奇数，所以当将刚才剩下的单独一个数 $\frac{m}{2}$ 作为一组补入其中后，即可将这些和为 $\frac{m}{2}$ 的组两两合并，使得各组之和都成为 m.

情况 3：$m\geqslant 2n$. 此时 $k=\frac{n(n+1)}{2m}\leqslant\frac{1}{4}(n+1)$，所以 $n-2k\geqslant 2k-1>0$. 我们从 S_n 中分出 S_{n-2k}，后者中的数字之和为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(n-2k)(n-2k+1)\\=&\frac{1}{2}n(n+1)-k(2n+1)+2k^2.\end{aligned}$$

它可被 k 整除，且所得之商不小于 $n-2k$. 这是因为

$$\frac{(n-2k)(n-2k+1)}{2(n-2k)}=\frac{1}{2}(n-2k+1)\geqslant k.$$

于是由归纳假设知可将 S_{n-2k} 中的数字分为 k 组，使各组之和相等，再将剩下的 $2k$ 个数字两两配对，使各对数字之和相等：$\{n-2k+1,n\}$，$\{n-2k+2,n-1\}$，…. 然后再将这 k 对数字分别并入前面所分出的 k 组数字，即可得到合乎需要的 k 组数字.

2 · 35　集合 $\{00,01,\cdots,98,99\}$ 的子集 X 满足：在任一无穷的数字序列中均有两相邻数字构成 X 的元素，X 最少应含多少个元素？

（第 52 届莫斯科数学奥林匹克，1989 年）

［解］　对于任意 $i,j\in\{0,1,\cdots,9\}$，X 应当包含 ij 或 ji 之一（否则序列 $ijijij\cdots$ 不满足要求），这种无序的 (i,j) 对共有 $10+C_{10}^2=55$ 个，

故 $|X|\geqslant 55$.

另一方面,如果 $X=\{ij \mid 0\leqslant i\leqslant j\leqslant 9\}$,则 $X=55$,且对任一无穷序列,设 i 为它所含的最小数字,j 为 i 的后一项,则 $ij\in X$.

因此 X 最少含 55 个元素.

2·36　S 是$\{1,2,\cdots,1989\}$ 的一个子集,而且 S 中任意两个数的差不能是 4 或 7,那么 S 中最多可以有多少个元素?

(第 7 届美国数学邀请赛,1989 年)

[解]　首先证明:集合$\{1,2,\cdots,1989\}$ 中任意 11 个连续整数中最多有 5 个能是 S 的元素.

事实上,设 $T=\{1,2,\cdots,11\}$. 我们考察 T 的子集$\{1,5\}$,$\{2,9\}$,$\{3,7\}$,$\{4,11\}$,$\{6,10\}$,$\{8\}$,显然,它们中的每个子集至多有一个元素属于 S.

若 T 中有 6 个元素属于 S,则有

$8\in S\Rightarrow 1\notin S\Rightarrow 5\in S\Rightarrow 9\notin S\Rightarrow 2\in S\Rightarrow 6\notin S\Rightarrow 10\in S\Rightarrow 3\notin S\Rightarrow 7\in S\Rightarrow 11\notin S\Rightarrow 4\in S\Rightarrow 8\notin S$.

从而出现矛盾.

所以 T 中至多有 5 个元素属于 S.

有 5 个元素的 T 的子集是存在的,比如:

$T'=\{1,3,4,6,9\}$,

设 $A=\{k+1,k+2,\cdots,k+11\}$ 是$\{1,2,\cdots,1989\}$ 的子集,那么仿照上面的证明可知,A 中最多有 5 个元素属于 S.

因为　$S'=\{k+11n \mid k\in T',n\in I,k+11n\leqslant 1989.\}$

并且　$1989=180\times 11+9$.

所以 S 中最多有　$181\times 5=905$ 个元素.

2·37　给定集合

$S=\{z_1,z_2,\cdots,z_{1993}\}$,

其中 $z_1,z_2,\cdots,z_{1993}$ 都是非零复数(可看作平面上的非零向量). 求证可以把 S 中的元素分成若干组,使得

(i) S 中的每个元素属于且仅属于其中一组;

(ii) 每组中的任一复数与该组中所有复数之和的夹角不超过 $90°$;

(iii) 将任意两组中的所有复数分别求和,所得的两个和数之间的

夹角大于 90°.

(第 8 届中国中学生数学冬令营,1993 年)

[解] 考虑集合 S 的所有子集并计算每个子集中所有元素的和的模,则这样得到的模数只有有限多个,故其中必有最大数. 将模取最大值的子集之一记为 A. 如果 $S\setminus A\neq\phi$,再将 $S\setminus A$ 的所有子集能使其元素之和的模达到最大的一个子集取为 B. 如果 $S\setminus(A\cup B)\neq\phi$,则令 $C=S\setminus(A\cup B)$. 我们指出,这样选取的至多三个子集便满足题中要求.

将 A,B,C 中所有元素之和分别记为 a,b,c.

(1) 对任意 $z\in A$,如果 z 与 a 的夹角为钝角,则 $-z$ 与 a 夹锐角. 于是有 $|a+(-z)|>|a|$,即子集 $A\setminus\{z\}$ 中所有元素之和的模大于 A 中所有元素之和 a 的模,此与 $|a|$ 的最大性矛盾. 这就证明了 A 中任一元素与 a 的夹角都不超过 90°. 同理 B 中任一元素 b 的夹角也不超过 90°.

(2) 对任意 $\zeta\in S\setminus A$, 与 a 的夹角都是钝角, 否则又导致 $|a+\zeta|>|a|$,矛盾. 由此可见,B 中所有元素均与 a 夹钝角,从而其和 b 与 a 夹钝角. 同理,C 中的任一元素 η 与 a,b 的夹角都是钝角,从而,c 与 a,c 与 b 都夹钝角,即(iii) 成立.

(3) 若存在 $\xi\in C$,使 ξ 与 c 夹钝角,则由(2)知,a,b,c,ξ 四数两两之间都夹钝角,此不可能. 所以,C 中任一元素与 c 的夹角都不超过 90°.

2·38 设集合 $A=\{1,2,3,\cdots,366\}$. 如果 A 的一个二元子集 $B=\{a,b\}$ 满足 $17\mid(a+b)$,则称 B 具有性质 P.

(1) 求 A 的具有性质 P 的所有二元子集的个数;

(2) 求 A 的两两不相交且具有性质 P 的所有二元子集的个数.

(中国河北省高中数学竞赛,1994 年)

[解] (1) $17\mid(a+b)$ 当且仅当 $a+b\equiv0\pmod{17}$,

即 $a\equiv k\pmod{17}$ 且 $b\equiv17-k\pmod{17}$

$k=0,1,2,\cdots,16$.

将 $1,2,\cdots,366$ 按被 17 除的余数分成 17 类:[0],[1],…,[16]. 因为 $366=17\times21+9$,所以[0]类中含 21 个数,[1],[2],…,[9]类中各含 22 个数,[10],[11],…,[16]中各含 21 个数.

$17 \mid (a+b)$ 当且仅当 $a,b \in [0]$ 或 $a \in [k], b \in [17-k], k = 1,2,\cdots,16$.

当 $a,b \in [0]$ 时，具有性质 P 的子集个数为 $C_{21}^2 = 210$.

当 $a \in [k], b \in [17-k]$，固定 $k \in \{1,2,\cdots,7\}$ 时，具有性质 P 的子集个数为 $C_{22}^1 \cdot C_{21}^1 = 462$.

当 $a \in [8], b \in [9]$ 时，具有性质 P 的子集个数为 $C_{22}^1 \cdot C_{22}^1 = 484$.

所以 A 的具有性质 P 的所有二元子集个数为

$$210 + 462 \times 7 + 484 = 3928.$$

(2) 为使二元子集两两不相交，可取

$a \in [0], b \in [0]$ 的 10 个子集 $\{a,b\}$；

$a \in [k], b \in [17-k]$，固定 $k \in \{1,2,\cdots,7\}$ 的 21 个子集 $\{a,b\}$；

$a \in [8], b \in [9]$ 的 22 个子集 $\{a,b\}$.

所以 A 的具有性质 P 两两不相交的二元子集共有

$$10 + 21 \times 7 + 22 = 179(\text{个}).$$

2·39　设自然数 $n > 6$. 给定 n 元素合 X，任取 X 的 m 个互不相同的 5 元子集 $A_1, A_2, \cdots, A_m$. 求证：只要

$$m > \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(4n-15)}{600}$$

就必定有 $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_6}$ $(1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_6 \leqslant m)$，

使得

$$\left| \bigcup_{k=1}^{6} A_{i_k} \right| = 6.$$

（中国国家队选拔赛，1997 年）

[证]　用反证法.

对于满足题中不等式的自然数 m，假设存在 X 的 m 个互不相同的 5 元子集，其中任意 6 个的并集都不是 6 元集合. 约定将这 m 个集合组成的类记为 $\mathscr{A}$. 并记

$$\mathscr{B} = \{B \mid B \subset X, |B| = 4 \text{ 且存在 } A \in \mathscr{A}, \text{使 } B \subset A\}$$

对于 $B \in \mathscr{B}$，考察 X 的子集

$$\{x \in X \setminus B \mid B \cup \{x\} \in \mathscr{A}\}$$

约定将这个子集的元素个数记为 $\alpha(B)$.

对于任意给定的一个 $A \in \mathscr{A}$，考察含于 A 中的 4 元子集 B（对于每

个 A 恰有 5 个这样的 4 元子集 B). 由反证假设,每个 $x \in X \setminus A$ 至多与 4 个 $B \subset A$ 组成一个属于 $\mathscr{A}$ 类的 5 元子集. 另外, $A \setminus B$ 显然与 B 组成属于 $\mathscr{A}$ 类的 5 元子集(即 A),因此

$$\sum_{\substack{B \subset A \\ |B|=4}} \alpha(B) \leqslant 4(n-5)+5$$

对一切 $A \in \mathscr{A}$,将如上不等式求和. 因为每个 $B \in \mathscr{B}$ 都被重复记数 $\alpha(B)$ 次,所以

$$\sum_{A \in \mathscr{A}} \sum_{\substack{B \subset A \\ |B|=4}} \alpha(B) = \sum_{B \in \mathscr{B}} (\alpha(B))^2.$$

另一方面,每个 $A \in \mathscr{A}$ 对 5 个含于其中的 $B \in \mathscr{B}$ 的 $\alpha(B)$ 各贡献 1,因此

$$\sum_{B \in \mathscr{B}} \alpha(B) = 5m,$$

于是,我们得到

$$\begin{aligned}(4n-15)m &\geqslant \sum_{A \in \mathscr{A}} \sum_{\substack{B \subset A \\ |B|=4}} \alpha(B) \\ &= \sum_{B \in \mathscr{B}} (\alpha(B))^2 \\ &\geqslant \frac{1}{C_n^4}\Big(\sum_{B \in \mathscr{B}} \alpha(B)\Big)^2 \\ &= \frac{1}{C_n^4} \cdot (5m)^2,\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} m &\leqslant \frac{4n-15}{25} \cdot C_n^4 \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(4n-15)}{600}\end{aligned}$$

与假设矛盾. 故原命题得证.

2·40　把 1 到 10^6 的所有自然数分成互斥的两类. 一类是完全平方数与完全立方数的和,其余的数为另一类. 问哪一类的数较多?证明你的结论.

(第 22 届俄罗斯数学奥林匹克决赛,1996 年)

[解]　题中所说的另一类的数较多.

事实上,设 $n = k^2 + m^3$,其中 $k, m, n \in N$,且 $n \leqslant 10^6$,则 $k \leqslant$

$10^3, m \leqslant 10^2$.因此,由完全平方数与完全立方数的和组成的这一类中,数的个数不超过 $10^3 \cdot 10^2 = 10^5$ 个,而由其余的数组成的另一类中,数的个数不少于

$$10^6 - 10^5 = 9 \times 10^5$$

个.显而易见,另一类的数较多.

2·41　已知集合$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.求该集合具有下列性质的子集个数:每个子集至少含有 2 个元素,且每个子集中任意两个元素的差的绝对值大于 1.

(中国上海市高中数学竞赛,1996 年)

[解]　设 a_n 是集合$\{1,2,\cdots,n\}$的具有题设性质的子集个数.

集合$\{1,2,\cdots,n,n+1,n+2\}$的具有题设性质的子集可分为两类:第一类子集包含元素 $n+2$,这样的子集有 a_n+n 个(即每个$\{1,2,\cdots,n\}$的这种子集与$\{n+2\}$的并集,以及$\{1,n+2\},\{2,n+2\},\cdots,\{n,n+2\}$.);第二类子集不包含 $n+2$,这样的子集有 a_{n+1} 个.

于是,我们有

$$a_{n+2} = a_n + a_{n+1} + n.$$

显然,$a_3 = 1, a_4 = 3$(即$\{1,3\},\{2,4\},\{1,4\}$).

因此　$a_5 = 7, a_6 = 14, a_7 = 26, a_8 = 46, a_9 = 79, a_{10} = 133$.

本题所求子集个数为 133.

2·42　N 是所有正整数组成的集合,对于 N 的一个子集 $S, n \in N$,定义

$$S \oplus \{n\} = \{s + n \mid s \in S\}.$$

另外定义子集合 S_k 如下:

$$S_1 = \{1\}, S_k = \{S_{k-1} \oplus \{k\}\} \cup \{2k-1\}, k = 2,3,4\cdots.$$

(1) 求 $N - \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$.

(2) 求所有 $k \in N$,使得 $1994 \in S_k$.

(韩国数学奥林匹克,1994 年)

[解]　(1) 由于

$$C_{k+1}^2 + (k+1) = \frac{1}{2}k(k+1) + (k+1)$$
$$= \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$$

$$= C_{k+2}^2,$$

$$C_{k+2}^2 - C_k^2 = \frac{1}{2}(k+1)(k+2) - \frac{1}{2}k(k-1) = 2k+1$$

由题设,有

$$S_1 = \{1\},$$

$$S_2 = \{S_1 \oplus \{2\}\} \cup \{3\} = \{3\} = \{C_3^2\},$$

$$S_3 = \{S_2 \oplus \{3\}\} \cup \{5\} = \{6,5\} = \{C_4^2, C_4^2 - C_2^2\},$$

设对某个正整数 k,

$$S_k = \{C_{k+1}^2, C_{k+1}^2 - C_2^2, C_{k+1}^2 - C_3^2, \cdots, C_{k+1}^2 - C_{k-1}^2\},$$

则由题设,有

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \{S_k \oplus \{k+1\}\} \cup \{2k-1\} \\ &= \{C_{k+1}^2 + k + 1, C_{k+1}^2 - C_2^2 + k + 1, C_{k+1}^2 - C_3^2 + k + 1, \\ &\quad \cdots, C_{k+1}^2 - C_{k-1}^2 + (k+1), 2k+1\} \\ &= \{C_{k+2}^2, C_{k+2}^2 - C_2^2, C_{k+2}^2 - C_3^2, \cdots, C_{k+2}^2 - C_{k-1}^2, C_{k+2}^2 - \\ &\quad C_k^2\} \end{aligned}$$

因此,对于任意正整数 k,都有

$$S_k = \{C_{k+1}^2, C_{k+1}^2 - C_2^2, C_{k+1}^2 - C_3^2, \cdots, C_{k+1}^2 - C_{k-1}^2\} \qquad ①$$

对于 $j = 1,2,3,\cdots,k-1$,有

$$C_{k+1}^2 - C_j^2 = \frac{1}{2}k(k+1) - \frac{1}{2}j(j-1)$$

$$\frac{1}{2}(k+j)(k-j+1) \in S_k.$$

其中 $C_1^2 = 0$,且 $k+j$ 与 $k-j+1$ 奇偶性不同,因而上式两端都不可能写成 $2^m(m \in N)$ 的形式.反之,如果一个正整数 n 不能写成 $2^m(m \in N)$ 的形式,那么 n 一定有奇质因子,从而存在一奇一偶的两个正整数 p,q,使得 $p > q \geqslant 2$,且

$$2n = pq. \qquad ②$$

令

$$k + j = p, k - j + 1 = q$$

于是

$$k = \frac{1}{2}(p+q-1), j = \frac{1}{2}(p-q+1) \qquad ③$$

由于 p,q 一奇一偶，且 $p \geqslant q+1$，因此 k,j 都是正整数，且

$$k-j=q-1 \geqslant 1, 1 \leqslant j \leqslant k-1.$$

从而 ② 式可表示为

$$\begin{aligned} n &= \frac{1}{2}(k+j)(k-j+1) \\ &= C_{k+2}^2 - C_j^2 \in S_k. \end{aligned}$$

其中 $C_1^2=0$.

所以

$$N - \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k = \{2^m \mid m \in N\}.$$

(2) 因为 $n=1994$，所以

$$2n = 4 \cdot 997,$$

注意 997 是一个质数，可见 ② 式 $2n=pq$ 中的

$$p=997, q=4$$

由 ③ 得

$$k=500, j=497$$

故得

$$1994 \in S_{500}$$

即所求的 k 只有一个：$k=500$.

2·43 设 p 是一个奇质数. 考虑集合 $\{1,2,\cdots,2p\}$ 的满足以下两条件的子集 A：

(1) A 恰有 p 个元素；

(2) A 中所有元素之和可被 p 整除.

试求所有这样的子集 A 的个数.

（第 36 届国际数学奥林匹克，1995 年）

[解] 记 $U=\{1,2,\cdots,p\}$，

$V=\{p+1,\cdots,2p\}$，

$W=\{1,2,\cdots\cdots,2p\}$.

若 S,T 是 W 的两个 p 元子集，并且它们与 U,V 都不相同，又满足下面的两个条件：

(i) $S \cap V = T \cap V$；

(ii) 只要适当编号，$S \cap U$ 的元素 $S_1,S_2,\cdots,S_m$ 和 $T \cap U$ 的元

素 $t_1,t_2,\cdots,t_m$,对适当的 $k\in\{0,1,\cdots,p-1\}$ 满足同余式

$$S_i-t_i\equiv k(\bmod p)\quad i=1,2,\cdots,m.$$

那么我们就约定两个子集 S 和 T 归入同一类.

对于同一类的不同子集 S 和 T,显然有 $K\neq 0$,因而

$$\sum_{i=1}^{p}S_i-\sum_{i=1}^{p}t_i\equiv mk\not\equiv 0(\bmod p).$$

对于同一类中的不同子集,它们各自元素的和模 p 的余数不相同,因此每一类恰含 p 个子集,其中只有一个子集适合条件(2).

综上所述,在 $W=\{1,2,\cdots,2p\}$ 的 C_{2p}^{p} 个 p 元子集当中,除 U 和 V 外,每 p 个子集分成一类,每类恰有 1 个子集满足条件(2).因此,集合 W 的适合条件(1) 和(2) 的子集的总数为

$$\frac{1}{p}(C_{2p}^{p}-2)+2.$$

2·44 $c\geqslant 1$ 是一个固定的正整数.对于集合$\{1,2,\cdots,n\}$ 的每个非空子集 A,从集合$\{1,2,\cdots,c\}$ 内指定一个正整数 $\omega(A)$,满足

$$\omega(A\cap B)=\min(\omega(A),\omega(B)),$$

这里 A,B 是$\{1,2,\cdots,n\}$ 的任意两个交集非空的子集.如果有 $a(n)$ 种这样的指定方法.计算

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a(n)}.$$

(第 45 届波兰数学奥林匹克,1994 年)

[解] 当 $c=1$ 时,显然 $a(n)=1$,从而有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a(n)}=1.$$

下面考虑 $c\geqslant 2$ 的情况.

集合$\{1,2,\cdots,n\}$ 共有 2^n-1 个非空子集,这 2^n-1 个非空子集的集合是函数 $\omega(A)$ 的定义域.

令 $b_k=\{1,2,\cdots,k-1,k+1,\cdots,n\}$

$$=\{1,2,\cdots,n\}-\{k\},(k=1,2,\cdots,n)$$

记 $D=\{1,2,\cdots,n\}$.

下面先证明:若 $\omega(b_1),\omega(b_2),\cdots,\omega(b_n),\omega(D)$ 这 $n+1$ 个值已经取定,则对于 D 的任何一个非空子集 A,$\omega(A)$ 是确定的.

用数学归纳法.

由已知条件可知,当 A 是 D 的 $n-1$ 元子集时,$\omega(A)$ 是确定的.

设当 A 是D的$n-k$元子集时,$\omega(A)$是确定的,那么当A是D的$n-k-1$元子集时,取D中不属于A的一个元素m,则$B=A\cup\{m\}$是D的$n-k$元子集,由归纳假设$\omega(B)$是确定的.则由

$$A=B\cap b_m$$

可得

$$\omega(A)=\min\{\omega(B),\omega(b_m)\}.$$

因此$\omega(A)$也是确定的.

由数学归纳法原理,函数ω完全由$n+1$个值$\omega(b_1),\omega(b_2),\cdots,\omega(b_n),\omega(D)$所确定.

注意到这$n+1$个值中的每一个值的取法至多有C种,因此,函数ω的选法种数

$$a(n)\leqslant C^{n+1}.$$

另一方面,对于n个值$\omega(b_1),\omega(b_2),\cdots,\omega(b_n)$的$C^n$种选法中的任何一种选法,都可取

$$\omega(D)=\max\{\omega(b_1),\omega(b_2),\cdots,\omega(b_n)\}$$

满足题设条件,从而得到函数ω的一种取法.因此,函数ω的选法种数

$$C^n\leqslant a(n).$$

于是,我们有

$$C^n\leqslant a(n)\leqslant C^{n+1},$$

开n次方,得

$$C\leqslant\sqrt[n]{a(n)}\leqslant C^{1+\frac{1}{n}}$$

取极限

$$C\leqslant\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a(n)}\leqslant\lim_{n\to\infty}C^{1+\frac{1}{n}},$$

即得 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a(n)}=C.$$

显然,$C=1$时上式也成立.

2・45 一个单调增加的整数数列,如果它的第一项是个奇数,第二项为偶数,第三项为奇数,第四项为偶数,…,依此类推,则称它为交错数列.空集也当作一个交错数列.用$A(n)$表示交错数列的数目,它们中的整数全部取自集合$\{1,2,\cdots,n\}$.显然$A(1)=2,A(2)=3$.求$A(20)$,并证明你的结论.

(英国数学奥林匹克,1994年)

[解] $n=1$ 时,ϕ 和 $\{1\}$ 是两个交错数列,所以 $A(1)=2$.

$n=2$ 时,$\phi,\{1\},\{1,2\}$ 是三个交错数列,所以 $A(2)=3$.

如果 $\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_m\}$ 是取自集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的非空交错数列,那么当 $a_1=1$ 时,

$$\{a_2-1,a_3-1,\cdots,a_m-1\}$$

是取自集合 $\{1,2,\cdots,n-1\}$ 的交错数列.并且当 $a_1=1$ 时,取自集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的非空交错数列 $\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_m\}$ 与取自集合 $\{1,2,\cdots,n-1\}$ 的交错数列 $\{a_2-1,a_3-1,\cdots,a_m-1\}$ 一一对应,所以当 $a_1=1$ 时,取自集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的非空交错数列 $\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$ 有 $A(n-1)$ 个.

当 $a_1\geqslant 3$ 时,

$$\{a_1-2,a_2-2,\cdots,a_m-2\}$$

是取自集合 $\{1,2,\cdots,n-2\}$ 的非空交错数列.并且当 $a_1\geqslant 3$ 时.取自集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的非空交错数列 $\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$ 与取自集合 $\{1,2,\cdots,n-2\}$ 的非空交错数列 $\{a_1-2,a_2-2,\cdots,a_m-2\}$ 一一对应.所以,当 $a_1\geqslant 3$ 时,取自集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的非空交错数列 $\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$ 有 $A(n-2)-1$ 个.

由以上讨论可知,取自集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的交错数列的个数

$$A(n)=A(n-1)+(A(n-2)-1)+1,$$

即

$$A(n)=A(n-1)+A(n-2).$$

用上面这个等式,计算得

$$A(1)=2,A(2)=3,A(3)=A(1)+A(2)=5,$$

同理可得

$A(4)=8$, $A(5)=13$, $A(6)=21$, $A(7)=34$,
$A(8)=55$, $A(9)=89$, $A(10)=144$, $A(11)=233$,
$A(12)=377$, $A(13)=610$, $A(14)=987$, $A(15)=1597$,
$A(16)=2584$, $A(17)=4181$, $A(18)=6765$, $A(19)=10946$,
$A(20)=17711$.

第3节 最小

2·46 在1,2,3…,1989之间填上"+"、"-"号,求和式可以得到

的最小非负数是多少?

（第 15 届全俄数学奥林匹克,1989 年）

[解] 除 995 外,可将 1,2,3,…,1989 所有数分为 994 对:(1,1989),(2,1988),…,(994,996).由于每对数中两个数的奇偶性相同,因此在每一对数前无论怎样放置"+"、"−"号,运算结果都是偶数;而 995 为奇数,所以数 1,2,3,…,1989 前无论如何放置"+"、"−"号,其和式的值总是奇数.于是,所求的最小非负数不小于 1.

另一方面,数 1 可以用下列方式得到:

$1 = 1 + (2 - 3 - 4 + 5) + (6 - 7 - 8 + 9) + \cdots + (1986 - 1987 - 1988 + 1989)$.

因此,和式可以得到的最小非负数是 1.

2·47　如果 $a < b < c < d < e$ 是连续的正整数,$b + c + d$ 是完全平方数,$a + b + c + d + e$ 是完全立方数,那么 c 的最小值是多少?

（第 7 届美国数学邀请赛,1989 年）

[解] 由于 a,b,c,d,e 是连续的正整数,因此

$$b + c + d = 3c,$$

$$a + b + c + d + e = 5c.$$

根据题设,我们可设

$$3c = m^2 \quad (m \in N), \qquad ①$$

$$5c = n^3 \quad (n \in N), \qquad ②$$

由 ① 得 m 是3的倍数,从而 c 也是3的倍数.再由 ② 得 n 是3的倍数,从而 c 是 $3^3 = 27$ 的倍数.又由 ② 得 n 是 5 的倍数,从而 c 是 25 的倍数.故 c 是 25×27 的倍数,从而 $c \geqslant 25 \times 27$.

另一方面,$c = 25 \times 27$ 时,能使 ①,② 成立,从而满足题设条件.因此 c 的最小值是 $25 \times 27 = 675$.

2·48　n 是满足下列条件的正整数中最小的数:

(1)n 是 75 的倍数;

(2)n 恰有 75 个正整数因子(包括 1 及本身).试求$\frac{n}{75}$.

（第 8 届美国数学邀请赛,1990 年）

[解] 因为 $75 = 5 \times 5 \times 3$,n 恰有 75 个因子,又 n 是 75 的倍数,所以

$$n = 75k = 3 \times 5^2 k \geqslant 2^4 \times 3^4 \times 5^2.$$

由 n 的最小性可知$\frac{n}{75} = k = 2^4 \times 3^3 = 432.$

2·49　求具有下列性质的最小自然数 n：

(1) n 的个位数是 6；

(2) 如果将 n 的个位数字 6 移到其余各位数字之前，所得的新数是 n 的 4 倍.

（第 4 届国际数学奥林匹克，1962 年）

[解]　设所求的自然数为

$$n = 10x + 6,$$

其中 x 为自然数.

又设 n 的位数为 m，由题意有

$$6 \cdot 10^{m-1} + x = 4(10x + 6),$$

即 $$13x = 2 \cdot 10^{m-1} - 8,$$

$$2 \cdot 10^{m-1} = 13x + 8,$$

于是我们可以用数 200…0 除以 13，直到出现第一个余数是 8 为止. 这样，就得到最小的自然数

$$x = 15384.$$

所以所求的最小自然数为 153846.

2·50　N 是整数，它的 b 进制表示是 777，求最小的正整数 b，使得 N 是整数的四次方.

（第 9 届加拿大数学奥林匹克，1977 年）

[解]　我们要求最小的 b，使得

$$7b^2 + 7b + 7 = x^4 \quad ①$$

对 x 有整数解. 因为 7 是素数，所以 7 整除 x，于是 $x = 7k$，代入 ① 并化简，得

$$b^2 + b + 1 = 7^3 k^4.$$

设 $k = 1$，那么上式化为

$$b^2 + b + 1 = 7^3,$$

即 $$(b - 18)(b + 19) = 0,$$

所以 $$b = 18.$$

因为最小的 b 出现在 k 最小的时候，所以最小的 b 为 18.

2·51　从数 1,2,3,4,…,1982 的集合中删去一些数，使得在剩下的数中任何一个数都不等于其他两个数的乘积. 问最少需要删去多少个数才能做到这一点?如何做到这一点?

（第 16 届全苏数学奥林匹克,1982 年）

[解]　如果画去 43 个数:2、3、…、44,那么在剩下的数中,任意一数都不等于另外两数的乘积.

如果画去的数少于 43 个,那么至少有一个 3 数组($k,89-k,k(89-k)$)由未被画去的数组成,其中 $2\leqslant k\leqslant 43,46\leqslant 89-k\leqslant 87,k(89-k)\leqslant\left(\frac{89}{2}\right)^2=1980.25$.

2·52　某正整数的平方,其末三位是非零的相同数字,求具有该性质的最小正整数.

（日本数学奥林匹克代表队选拔试题,1990 年）

[解]　设 $p=10a\pm b(a,b\in Z,1\leqslant b\leqslant 5)$,则

$$p^2\equiv 10\cdot(\pm 2ab)+b^2(\bmod 100).$$

可以验证,当 $b=1,3,4,5$ 时,p^2 的十位数字与个位数字的奇偶性相反;仅当 $b=2$ 时,p^2 的末两位数字奇偶性相同. 因此所求的 P 必须形如 $10a\pm 2$,而 $p=12,p^2=144$,末两位数字为 4.

依次计算 $12^2,18^2,22^2,28^2,32^2,38^2$,便知末三位数字非零且相同的最小正整数为 38.

2·53　设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是非负实数,定义 M 为一切乘积 $a_ia_j(i<j)$ 的和,即

$$M=a_1(a_2+a_3+\cdots+a_n)+a_2(a_3+a_4+\cdots+a_n)+\cdots+a_{n-1}a_n,$$

证明数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 至少有一个的平方不超过 $\frac{2M}{n(n-1)}$.

（第 4 届加拿大数学奥林匹克,1972 年）

[证]　设 a 是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中最小的,那么 $a_ia_j\geqslant a^2$.

于是我们有 $M=\sum\limits_{i<j}a_ia_j\geqslant C_n^2a^2$,

故

$$a^2\leqslant\frac{M}{C_n^2}=\frac{2M}{n(n-1)}.$$

2·54　把 1,000,000 的每一个真因数取以 10 为底的对数,把这

些对数加起来得到和 S,求离 S 最近的整数.

(第 4 届美国数学邀请赛,1986 年)

[解] 由于 $1,000,000 = 2^6 \cdot 5^6$ 共有 $(6+1)(6+1) = 49$ 个因数.

除去 1000 之外,剩下的 48 个因数组成 24 对,每一对因数的乘积为 10^6,所以,每一对因数的对数的和等于 6,从而 1,000,000 的全部因数的对数的和为

$$24 \times 6 + 3 = 147.$$

这里包括一对非真因数 $1, 10^6$,因此,全部真因数的和为

$$147 - 6 = 141,$$

即 $$S = 141.$$

2·55 在十进制中,求这样的最小自然数:它的平方数以 19 开始,而以 89 结尾.

(第 15 届全俄数学奥林匹克,1989 年)

[解] 所求的数的末位数字只能是 3 或 7. 我们写出末位数字是 3 和 7 的所有两位数的平方,其中以 89 结尾的只有 $17^2, 33^2, 67^2, 83^2$,为使所求自然数 x 的开始两个数字是 19,必须成立不等式

$19 \leqslant x^2 \cdot 10^{-N} < 20$,其中 N 是自然数. 当 $N = 2k$ 及 $N = 2k + 1$ 时,分别得不等式

$$19 \leqslant x^2 \cdot 10^{-2k} < 20 \text{ 和 } 190 \leqslant x^2 \cdot 10^{-2k} < 200,$$

开平方后,在第一种情况下得不等式

$$4.3588989\cdots \leqslant x \cdot 10^{-k} < 4.4721359\cdots;$$

而在第二种情况下,有

$$13.784048\cdots \leqslant x \cdot 10^{-k} < 14.142135\cdots.$$

不难看出,由于 k 的变化,将有无穷多种可能性. 我们考察 $k = 1$ 和 $k = 2$.

如果 $4.358 \leqslant x \cdot 10^{-1} < 4.472$,则 $x = 44$;

如果 $4.358 \leqslant x \cdot 10^{-2} < 4.472$,则 $436 \leqslant x \leqslant 447$;

如果 $13.784\cdots \leqslant x \cdot 10^{-1} < 14.142\cdots$,则 $138 \leqslant x \leqslant 141$;

如果 $13.784\cdots \leqslant x \cdot 10^{-2} < 14.142\cdots$,则 $1379 \leqslant x \leqslant 1414$.

当 $k = 3$ 时,类似地考察两种可能性,依此类推. 在我们得到的 x 值中,末两位数是 17,33,67,83 的最小数是 1383($1383^2 = 1912689$).

故所求的数是 1383.

2·56　求这样的最小自然数，当它的末位数移到首位时就会扩大5倍.

（第13届全俄数学奥林匹克，1987年）

［解］　设$\overline{a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n}$为所要求的数，由题设有

$$\overline{a_na_1a_2\cdots a_{n-1}} = 5\cdot\overline{a_1a_2\cdots a_n},$$

由此

$$a_n\cdot 10^{n-1} + \overline{a_1a_2\cdots a_{n-1}} = 5(\overline{a_1a_2\cdots a_{n-1}}\cdot 10 + a_n),$$

$$a_n\cdot(10^{n-1} - 5) = 49\cdot\overline{a_1a_2\cdots a_{n-1}},$$

$$a_n\cdot\underbrace{99\cdots9}_{n-2个9}5 = 49\cdot\overline{a_1a_2\cdots a_{n-1}}. \qquad ①$$

由①式可知等式左边被49整除，因为a_n是数字，它不能被49整除，所以$\underbrace{99\cdots9}_{n-2个9}5$必被7整除，这样的最小数是99995，即$n = 6$，要求的数至少是6位数，这时①式变为

$$a_6\cdot 99995 = 49\cdot\overline{a_1a_2a_3a_4a_5},$$

$$a_6\cdot 14285 = 7\cdot\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}.$$

14285不能被7整除，故$a_6 = 7$.即要求的数是142857.

2·57　一位古怪的数学家，有一个梯子共n级，他在梯子上爬上爬下，每次升a级或降b级.这里a,b是固定的正整数.

如果他能从地面开始，爬到梯子的最顶上一级然后又回到地面.

求n的最小值（用a,b表示）并加以证明.

（第31届国际数学奥林匹克预选题，1990年）

［解］　最小值是$a + b - (a,b)$，这里(a,b)表示a,b的最大公约数.

由于数学家每次所到的级数都是(a,b)的倍数，我们可以略去其他的级，也就是将(a,b)作为第一级，并且用$\frac{a}{(a,b)},\frac{b}{(a,b)}$来代替$a,b$.所以只需讨论$(a,b) = 1$的情况.

(1)$n = a + b - 1$.

这时由于$(a,b) = 1$，则$a,2a,3a,(b-1)a,ba \pmod b$不同余，它们组成$(\bmod b)$的完全剩余类.

如果数学家在第r级，而$r + a > n$，那么必有$r > b$.这位数学家可以先降若干次，直至级数$< b$，再升a级.总之，这位数学家可以依次

走到每个 $ja(1\leqslant j\leqslant b)(\bmod b)$ 的同余类至少一次. 特别地,他可以走到第 s 级,这里

$$s\equiv ha\equiv b-1(\bmod b),$$

h 是1与 b 之间的整数,进而他可以走到第 $b-1$ 级(由 s 降若干次即可)及第 $n=a+b-1$ 级,即到达梯顶,他还可以继续走到第 t 级,这里

$$t\equiv ba\equiv 0(\bmod b),$$

由 t 再降若干次,即回到地面.

(2) $n<a+b-1$.

这时如果数学家能够到达梯顶然后回到地面,那么在这过程中,$a,2a,\cdots,ba(\bmod b)$ 的同余类至少各经过一次,即 $(\bmod b)$ 的每个同余类都必须走到,但他走到 $b-1$ 的同余类 $lb-1$ 时,他只能降 b 级,不能升 a 级(因为 $a+lb-1\geqslant a+b-1>n$). 从而他永远被禁锢在这剩余类中,不能继续走到其余的剩余类(特别是 ba 那一类),矛盾!

综上所述,在 $(a,b)=1$ 时,最小值为 $n=a+b-1$.

2·58 设 n 是正奇数,p 是 n 的真因子,试求最小的正整数 m(用二进制表示),使得

$$(1+2^p+2^{n-p})m\equiv 1(\bmod 2^n).$$

(第31届国际数学奥林匹克预选题,1990年)

[解] 设 $\frac{n}{p}=a$,则 a 为大于1的奇数.

在二进制中,m 至多是 n 位数(如果位数超过 n,则将超过部分砍去,剩下部分所成的仍满足题中同余式),由 a 段组成,每一段含 p 个数字.

另一方面,我们可以看出,同余式

$$(1+2^p+2^{n-p})m\equiv 1(\bmod 2^n)$$

的左边相当于二进制中的竖式加法(第一行为 m,第二行为 2^pm,第三行为 $2^{n-p}m$). 显然,m 的最后一段必须为 $00\cdots01$,从而逐步推出第二段为 $11\cdots1$,第三段为 $00\cdots0$,第四段为 $11\cdots1$,第 $a-1$ 段为 $11\cdots1$.

最后,第 a 段也为 $11\cdots11$.

所以

$$m=\overbrace{\underbrace{11\cdots1}_{p\text{个数字}}\ \underbrace{11\cdots1}_{p\text{个数字}}\ \underbrace{00\cdots0}_{p\text{个数字}}\ \underbrace{11\cdots1}_{p\text{个数字}}\cdots\ \underbrace{11\cdots1}_{p\text{个数字}}\ \underbrace{00\cdots01}_{p\text{个数字}}}^{n\text{段}}$$

2·59　试求出最小的正整数 n,使它的立方的末三位数字是888.

(第6届美国数学邀请赛,1988年)

[解]　由于 n^3 以8结尾,因此 n 一定以2结尾.我们设　$n=10k+2$　$(k\in N)$.于是

$$n^3=(10k+2)^3$$
$$=1000k^3+600k^2+120k+8.$$

显然,n^3 的十位数字与 $120k$ 的十位数字相同,因此 $2k$ 的个位数字等于8,k 的个位数字是4或9.我们可以假设

$$k=5m+4\quad(m\text{ 为非负整数}).$$

于是

$$n^3=(10k+2)^3=[10(5m+4)+2]^3$$
$$=125000m^3+315000m^2+264600m+74088,$$

显然,n^3 的百位数字与 $264600m$ 的百位数字相同,因此 $6m$ 的个位数字等于8,m 的个位数字等于3或8.最小的 $m=3$,从而最小的 $k=19$,最小的 $n=192$.

2·60　数 1978^n 与 1978^m 的最后三位数相等,试求出正整数 m 和 n,这里 $n>m\geqslant 1$,使 $m+n$ 取最小值.

(第20届国际数学奥林匹克,1978年)

[解]　因为 1978^n 与 1978^m 的最后三位数相同,所以 $1978^n-1978^m=1978^m(1978^{n-m}-1)$ 是 $1000=2^3\times 5^3$ 的倍数.

而 $1978^{n-m}-1$ 是奇数,它没有因子2,所以 1978^m 需能被 2^3 整除.1978中只有一个2的因子,因此 $m\geqslant 3$.

由于 1978^m 没有5的因子,因此 $1978^{n-m}-1$ 需能被 5^3 整除,1978^t 的尾数是8,4,2,6,8,4,2,6,…循环,只有 $n-m=4k$ 时,$1978^{n-m}-1$ 才可能被 5^3 整除.

因为 $1978^{4k}=(2000-22)^{4k}$,所以只要 $22^{4k}-1$ 被 5^3 整除.而

$$22^{4k}=484^{2k}=(500-16)^{2k},\text{又 }16^{2k}=(250+6)^k,$$

因此只要 6^k-1 被 5^3 整除.

$$6^k-1=(6-1)(6^{k-1}+6^{k-2}+\cdots+6+1).$$

因此 $6^{k-1}+6^{k-2}+\cdots+6+1$ 要被25整除.它的每一项被5除都余1,共有 k 项,故 k 应是5的倍数,即 $k=5p$.

$$6^k-1=6^{5p}-1=7776^p-1$$
$$=(7776-1)(7776^{p-1}+7776^{p-2}+\cdots+7776+1).$$

7775是25的倍数,7776被5除余1,要使$7776^{p-1}+7776^{p-2}+\cdots+7776+1$被5整除,$P$最小值是5,$n-m=4k=20p$,所以$n-m$最小值是100.

为了使$n+m$最小,取$m=3$,得$n=103$.

2·61 (1)n个互相独立的数x_1、x_2、…、x_n分别取值1、0或-1,求这n个数的两两乘积之和的最小值.

(2)求绝对值不超过1的n个数的两两乘积之和的最小值.

(第5届全俄数学奥林匹克,1965年)

[解] (1)$x_1,x_2,\cdots,x_n$的一切可能的两两乘积之和S可记为

$$S=\frac{1}{2}((x_1+x_2+\cdots+x_n)^2-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2).$$

由此可得 $S\geqslant-\frac{n}{2}$.

如果n为偶数,我们可以取一半的x_k等于1,另一半等于-1,则得到

$$S=-\frac{n}{2}.$$

如果n为奇数,考虑到S是整数,那么我们就有

$$S\geqslant-\frac{n-1}{2}.$$

此时我们可以取$\frac{n+1}{2}$个x_k等于1和$\frac{n-1}{2}$个x_k等于-1,则得到

$$S=-\frac{n-1}{2}.$$

(2)可以归结为(1):每一个x_k可以依次替换成1或-1,使一切可能的两两乘积之和不增加(替换法则:如果其余数的和非负,则x_k改为-1;如果其余数的和为负,则x_k为1).因此这里有(1)中同样的答案.

2·62 今有1990堆石块,各由1,2,…,1990块石块堆成,每一轮允许从中任意挑出若干堆,并从这些堆中扔掉相同数目的石块,试问:最少需要多少轮,就可以扔掉全部石块?

(第24届全苏数学奥林匹克,1990年)

[解]　每一轮之后,我们把那些具有相同数目石块的堆视为一组,空了的堆也视为一组.假定在某个时刻共有 n 组,并且在下一轮时,又从某些堆中各扔掉相同数目的石块,而这些堆原属于 k 个不同的组,则在扔后它们仍分属于 k 个不同的组,此因不同组的堆在扔后所剩石块数目仍不相同,其余的堆则至少分属 $n-k$ 个不同的组,因此,总的组数不会少于 $\max\{k,n-k\}$.

这就是说,在每一轮之后,组数至多减少到原来的一半,所以,本题石块组数下降的速度不会快于如下标准数列:

995,498,249,125,63,32,16,8,4,2,1,亦即需要经过 11 轮.

另一方面,确实存在通过 11 轮即可抛尽所有石块的方法:第一轮,先自块数不少于 995 的各堆中各扔出 995 块,于是,各堆中的石块数目只剩下如下各种情况:

995,994,…,3,2,1,0.

第二轮,再自块数不少于 498 的各堆中各扔出 498 块,于是各堆中的石块数目只剩下如下各情况:

497,496,…,3,2,1,0.

如此下去,一般地,令 n 依次取遍标准数列中各项,每次从块数不少于 $\frac{n}{2}$ 块数各堆中扔出 $\left[\frac{n+1}{n}\right]$块,使剩下的各堆中的石块数目只有如下各种情况:

$n-1,n-2,\cdots,1,0.$

于是只需 11 轮即可扔尽所有的石块.

2·63　在$1^2,2^2,3^2,\cdots,1989^2$ 之间填加"+","-"号,可能得到的和式的最小非负数是多少?

(第 15 届全俄数学奥林匹克,1989 年)

[解]　因为 $1^2,2^2,3^2,\cdots,1989^2$ 中共有 995 个奇数,所以无论如何填加"+","-"号,所得表达式结果总是奇数,从而所求的最小非负值不小于 1.

由于 4 个连续的自然数的平方:$k^2,(k+1)^2,(k+2)^2,(k+3)^2$ 可按下面的方法填加"+","-"号得到数 4:$k2-(k+1)^2-(k+2)^2+(k+3)^2=4$, 因此,由 8 个连续自然数的平方通过填加"+","-"号可得和 0 或 8.

将$22^2,23^2,\cdots,1989^2$每8个连续的自然数的平方为一组，并且填加"+","-"号，使得每个8数组之总和为0，然后由$6^2,7^2,\cdots,21^2$这16个数得和16.由$1^2,2^2,3^2,4^2,5^2$得和-15：$-1^2+2^2-3^2+4^2-5^2=-15$.这样，由这1989个平方数得和1.所以1为所求的最小非负值.

2·64 求最小的自然数x，使得在十进制记数中，数x^3的前面三个数字与最后四个数字都是1.

（第15届全俄数学奥林匹克，1989年）

[解] 显然，数x^3最后四个数字只跟x的后四个数字有关.

因为数x^3末位数字是1，所以数x的末位数字只能是1.

将数01,11,21,…,91立方可知只有$71^3=357911$.因此，数x的末两位数字是71.

将071,171,271,…,971立方可知，只有数$471^3=104487111$.因此，x的末三位数字是471.

将数0471,1471,…,9471立方，可知只有数8471^3最后是1111，于是数x的最后四个数字是8471.

设n是x^3中在111与1111之间的数字的个数，有三种可能情况.

(1)$n=3k,k\geqslant 0$，则

$$111\times 10^{3k+4}<x^3=11\underbrace{1\cdots1}_{3k\text{个数字}}111<112\times 10^{3k+4}$$

由此得

$$10.353988\times 10^{k+1}\approx\sqrt[3]{1110}\cdot 10^{k+1}<x<\sqrt[3]{1120}\cdot 10^{k+1}\approx 10.384988\times 10^{k+1}.$$

当$k=0$时，容易看出所求的数x不存在.如果$k\geqslant 1$，那么所求数x以103开始，即$x=103\cdots 8471$.其中最小的数为1038471.不难验证，这个数满足条件的要求.

(2)$n=3k+1,k\geqslant 0$，则

$$111\times 10^{3k+5}<x^3=11\underbrace{1\cdots1}_{3k+1\text{个数字}}111<112\times 10^{3k+5}.$$

因此

$$22.306991\times 10^{k+1}\approx\sqrt[3]{11100}\times 10^{k+1}<x<\sqrt[3]{11200}\times 10^{k+1}\approx 22.373779\times 10^{k+1}.$$

当$k=0$时，所求的数x不存在.当$k\geqslant 1$时，所求的数具有$x=$

223…8471 的形式,并且在删节点的位置上至少有一个数码,但任何这种形式的数,显然超过已经求得的(七位数)1038471. 于是这些数中任何一个都不是我们要求的.

(3)$n = 3k + 2, k \geqslant 0$,这种情况类似于情况(2)进行讨论,同样得到大于 1038471 的数. 因此,所求的数是 1038471.

2·65 玛丽在美国中学数学测验中的得分在 80 分以上,她把分数告诉了约翰,约翰能正确地推算出玛丽解答对几道题. 如果玛丽的得分少一些,但还在 80 分以上,约翰就无法推算了. 问玛丽得了多少分?

注 这次测验有 30 个选择题,计分的公式是 $S = 30 + 4c - \omega$,其中 S 为分数,C 是答对题数,ω 是答错题数,允许不答.

(第 2 届美国数学邀请赛,1984 年)

[解] 已知 $S = 30 + 4C - \omega > 80$.

我们的问题是要找到最小的这样的 S,与它对应的 C 是惟一的.

首先注意到,当 C 增加 1,ω 增加 4 时,S 的值不变,但要满足

$$(c + 1) + (\omega + 4) \leqslant 30,$$

即

$$c + \omega \leqslant 25.$$

因此当 $c + \omega \leqslant 25$ 时,对同一个 S,c 的值不能惟一确定,所以只能有

$$c + \omega \geqslant 26,$$

此时才有可能使 c 惟一确定.

其次,还应有 $\omega \leqslant 3$,

否则,若 $\omega \geqslant 4$,可使 ω 减 4,C 减 1,仍能使 S 不变(因为从 $S > 80$,$\omega \geqslant 4$ 可得 $c \geqslant 13$,这也是可能的).

于是,为使 S 尽可能地小,应在

$$\begin{cases} c + \omega \geqslant 26 \\ \omega \leqslant 3 \end{cases}$$

的范围内,尽量减少 C,尽量增大 ω.

为此,ω 取 3,c 取 23,此时

$$S = 30 + 4 \times 23 - 3 = 119,$$

即玛丽得了 119 分.

2·66 在每张卡片上各写一个数:+1 或 −1. 可以指着 3 张卡片提问题:这三张卡片上的数的乘积等于多少(但不告诉卡片上写的什么

数)?当卡片共有(1)30张;(2)31张;(3)32张时,最少提多少个问题才能知道所有卡片上的数的乘积?(4)在一个圆圈上写着50个数:+1或者-1,如果提一个问题能知道3个接连摆着的数的乘积.问:必须至少提多少个问题才能知道所有50个数的乘积?

(第8届全苏数学奥林匹克,1974年)

[**解**] (1)把30个数分成10个3数组提10个问题,打听每组中3个数的乘积就可以知道所有数的乘积.另一方面,因为每一个数应该在一个3数组中,所以至少要提10个问题.

(2)把$a_1a_2a_3$、$a_1a_4a_5$和$a_1a_6a_7$连乘后,求出前7个数的乘积,再把其余24个数像(1)中那样分成3数组,共提出11个问题就可以知道所有数的乘积.显然在这种情形中提较少的问题是不行的.

(3)把$a_1a_2a_3$、$a_1a_2a_4$和$a_1a_2a_5$连乘后,求出前5个数的乘积,把其余的数分成3数组,共提12个问题就可知道所有数的乘积.

另一方面,因为任何数应该在某3数组中,显然至少要提11个问题.如果提11个问题,那么必有一个数恰好在两个3数组中(如果多于3数组,则存在一个数,它不在任何一个3数组中).这个数的平方在所有11个3数组的乘积中,所以用11个问题我们不能确定所有数的乘积.

(4)用50个问题能打听出$a_1a_2a_3,a_2a_3a_4,a_3a_4a_5,\cdots,a_{50}a_1a_2$的乘积,把它们连乘后,我们得到50个数乘积的立方,它就等于这50个数的乘积.

如果少于50个问题,不妨设我们不知道$a_1a_2a_3$的乘积,那么存在两组数,在其中一组中,取$a_1=a_3=a_6=a_9=\cdots=a_{48}=1$,其余数都等于-1;另一组全由1组成.第一组中所有三个数的乘积,除了$a_1a_2a_3$外都等于1;在第二组中所有乘积都等于1.于是,这两组数除$a_1a_2a_3$外其余三个相连的数的乘积都相同,但所有数的乘积不同,这说明,少提一个问题就不能确定所有数的乘积,因此至少要提50个问题.

2·67 有1000张号码分别为000、001、…、999的票和100个号码为00、01、…、99的小匣子,如果小匣子的号码能由一张票的号码删去其中的一个数字得到,那么这张票可以放到这个小匣子中去,证明:

(1)可以把所有票分放到50个小匣子中去.

(2) 不可能把所有的票分放到少于 40 个的小匣子中去.

(3) 不可能把所有票分放到少于 50 个的小匣子中去.

(4) 假设票的号码是 4 位数(从 0000 到 9999). 如果小匣子的号码能由票的号码删去两个数字得到,那么这张票就可放到这个小匣子中去. 证明能把所有 4 位数字的票分放到 34 个小匣子中去.

(5) 对于 k 位数($k = 4,5,6,\cdots$) 最少需要多少个小匣子?

(第 11 届全苏数学奥林匹克,1977 年)

[证] (1) 我们把 10 个数字 0,1,2,…,9 分成两组各 5 个数字,其中从 0 到 4 为一组,从 5 到 9 为另一组. 因为三位数的号码中必有两个数字取自同一组,所以只需利用取自同一组的数字为号码的那一部分匣子,就可将所有票都放进去,而这部分匣子恰有 50 个,因此可以把所有票分放到 50 个小匣子中去.

(2) 首先 10 个匣子 00,11,…,99 需用来分放至少具有两个相同数字的票.

另一方面,具有三个不同数字的票共有 $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ 张,而放入每一个号码为 $\overline{pq}$($p \neq q$) 的匣子中的票至多有 $3 \cdot 8 = 24$ 张(即号码为 $\overline{zpq}$, $\overline{pzq}$, $\overline{pqz}$ 的票,其中 z 为异于 p、q 的任何数字),因此至少需要另外 30 个匣子来分放具有三个不同数字的票.

(3) 设被占用的且号码以任何同一数字为首位数字的匣子最少个数为 x($x \geqslant 1$). 不妨设数字为 9 的匣子最少,且号码为: $\overline{99}, \overline{98}, \cdots, \overline{9y}$, 其中 $y = 10 - x$. 那么任何号码为 $\overline{9pq}$ 的票($p < y, q < y$) 没有放在匣子 $\overline{9p}$ 和 $\overline{9q}$ 中,从而匣子 $\overline{pq}$ 被占用,于是至少 y^2 个匣子被占用,其号码的两位数字都从 0 到 $y - 1$;同时号码的首位数字为从 y 到 9 的匣子至少 x^2 个(因为对于从 y 到 9 的这 x 个数字中的每一个数字都至少有 x 个匣子),即总共至少占用

$$y^2 + x^2 = (10 - x)^2 + x^2 \geqslant 50 \text{ 个匣子}.$$

(4) 我们把 10 个数字 0,1,2,…,9 分成三组,第一组为 {0,1,2},第二组为 {3,4,5},第三组为 {6,7,8,9}. 因为任何一个四位数的四个数字中必有两个数字取自同一组,所以只需利用取自同一组的数字为号码的那一部分匣子,就可把所有四位数字的票都放进去. 而这部分匣子恰有

$$3 \times 3 + 3 \times 3 + 4 \times 4 = 34 \text{ 个}.$$

因此可以把所有票分放到 34 个匣子中去.

(5) 设分放所有 k 位数字的票需要 $M(k,10)$ 个小匣子,如果

$$10=(k-1)\cdot q+r, 0\leqslant r<k-1,$$

那么我们将 10 个数字 0,1,2,…,9 分成 $k-1$ 组,在这 $k-1$ 组中恰有 r 组,每组数字个数为 $q+1$;另外 $(k-1)-r$ 组,每组数字个数为 q,因为任何一个 k 位数的 k 个数字中,必有两个数字取自同一组,所以只需利用取自同一组的数字为号码的那一部分匣子,就可把所有 k 位数字的票都放进去,而这部分匣子恰有

$$\begin{aligned}&r\cdot(q+1)^2+(k-1-r)\cdot q^2\\=&(k-1)q^2+r(2q+1)\end{aligned}$$

个,因此可以把所有 k 位数字的票放进

$$(k-1)q^2+r(2q+1)$$

个匣子中去. 于是,我们得

$$M(k,10)\leqslant(k-1)q^2+r(2q+1). \qquad ①$$

另一方面,我们用 $F(k-1,S)$ 表示数 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{k-1}^2$ 中最小的数,其中 $x_1,x_2,\cdots,x_{k-1}$ 是自然数,并且 $x_1+x_2+\cdots+x_{k-1}=S$.

如果 $S=(k-1)q+r, 0\leqslant r<k-1$,

那么 $F(k-1,S)=(k-1)q^2+r(2q+1)$.

假设分放号码为 k 位"数",且"数字"取自集合 $\{0,1,2,\cdots,S-1\}$ 的票至少需要 $M(k,s)$ 个盒子,现在我们来证明

$$M(k,s)\geqslant F(k-1,s). \qquad ②$$

仿(3)可证,当 $k=3$, S 为任意正整数时,② 式成立. 设 $k=k'$ 时,② 式成立,于是,当 $k=k'+1$ 时,我们设被占用的且号码以任何同一数字为首位数字的匣子最少个数为 $x(x\geqslant1)$. 由对称性,不妨设首位"数字"为 $S'=S-1$ 的匣子最少,且号码为 $\overline{s's'}$, $\overline{s's'}-1,\cdots,\overline{s's'}-x+1$. 这样,号码的首位数字为 s' 到 $s'-x+1$ 的被占用的匣子至少是 x^2 个. 于是我们有

$$\begin{aligned}M(k'+1,s)&\geqslant\min_{x=1,2,\cdots,s}(M(k',s-x)+x^2)\\&\geqslant\min_{x=1,2,\cdots,s}(F(k'-1,s-x)+x^2)\\&=F(k',s)\end{aligned}$$

根据数学归纳原理,② 式得证. 于是

$$M(k,10) \geqslant (k-1)q^2 + r(2q+1). \quad ③$$

由 ①,③ 得

$$M(k,10) = (k-1)q^2 + r(2q+1).$$

因此,我们得下表

k	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$M(k,10)$	50	34	26	20	18	16	14	12	10

并且当 $k \geqslant 11$ 时,$M(k,10) \equiv 10$.

2·68　设 $A = (a_{ij})(i,j = 1,2,\cdots,n)$ 是以非负整数为元素的正方矩阵,又设对于任何一个 $a_{ij} = 0$,其第 i 行与第 j 列诸元素的和不小于 n.求证:这正方矩阵的所有元素之和不小于 $\frac{1}{2}n^2$.

(第 13 届国际数学奥林匹克,1971 年)

[证]　用 p 记所有行元素和与列元素和中的最小值,若 $p \geqslant \frac{n}{2}$,则 A 中所有元素的和

$$S \geqslant np \geqslant \frac{1}{2}n^2.$$

若 $p < \frac{n}{2}$,不失一般性,假设第一行的和为 p,且第一行恰有最左面的 q 个元素异于零,则 $q \leqslant p < \frac{n}{2}$(其后的 $n-q$ 个元素为0).此时,由于

$$a_{1,q+k} = 0(k = 1,2,\cdots,n-q),$$

所以

$$a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} + a_{1,q+k} + \cdots + a_{n,q+k} \geqslant n,$$

$$a_{1,q+k} + a_{2,q+k} + \cdots + a_{n,q+k} \geqslant n - p.$$

由此,第 $q+1$ 到第 n 列的所有元素之和至少是$(n-q)\cdot(n-p)$,而左面 q 列所有元素之和至少是$p \cdot q$,故 A 中所有元素之和

$$S \geqslant (n-p)(n-q) + pq$$

$$= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}(n-2p)(n-2q),$$

又由 $q \leqslant p < \frac{n}{2}$,得 $n-2p > 0, n-2q > 0$,于是得

$$S > \frac{n^2}{2}$$

代数卷

故在任何情况下，原命题都成立.

2·69　对每个整数 $n \geqslant 2$，试确定满足条件：$a_0, a_1, \cdots, a_n$ 是非负数，并且

$$a_0 = 1, a_i \leqslant a_{i+1} + a_{i+2}, i = 0, 1, \cdots, n-2$$

时，和 $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ 的最小值.

（第 38 届国际数学奥林匹克预选题，1997 年）

[解]　先考虑特殊情况：$a_0 = 1$，且 $a_i = a_{i+1} + a_{i+2}, i = 0, 1, \cdots, n-2$.

此时，我们记 $u = a_{n-1}, v = a_n$，则

$$a_k = F_{n-k}u + F_{n-k-1}v, k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

其中 $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{i+2} = F_i + F_{i+1}$，即 F_i 是第 i 个斐波那契数，并且和值

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n = (F_{n+2} - 1)u + F_{n+1}v.$$

因为

$$1 = a_0 = F_n u + F_{n-1} v,$$

并且容易验证

$$\frac{F_{n+2} - 1}{F_n} \leqslant \frac{F_{n+1}}{F_{n-1}},$$

所以令 $v = 0, u = \frac{1}{F_n}$ 时和值达到最小值 $\frac{F_{n+2} - 1}{F_n}$，

记　$$M_n = \frac{F_{n+2} - 1}{F_n}.$$

下面我们接着证明：M_n 就是所求的最小值.

显然，对每个 $n \geqslant 2$，和值

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqslant a_0 + a_1 + a_2 \geqslant 2a_0 = 2.$$

因为　$M_2 = \frac{F_4 - 1}{F_2} = 2, M_3 = \frac{F_5 - 1}{F_3} = 2$，所以 $n = 2$ 时，M_2 是最小值；$n = 3$ 时，M_3 是最小值.

今固定一整数 $n \geqslant 4$. 并假设对每个 $k, 2 \leqslant k \leqslant n-1$，只要非负数列 $c_0, c_1, \cdots, c_k$ 符合条件 $c_0 = 1, c_i \leqslant c_{i+1} + c_{i+2}, i = 0, 1, \cdots, k-2$，就

有和式　$c_0 + c_1 + \cdots + c_k \geqslant M_k$.

现考察满足题设条件的非负数列 $a_0, a_1, \cdots, a_n$.

如果 $a_1, a_2 > 0$,和 $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ 可表示成以下两种形式:

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n = 1 + a_1\left(1 + \frac{a_2}{a_1} + \cdots + \frac{a_n}{a_1}\right)$$

$$= 1 + a_1 + a_2\left(1 + \frac{a_3}{a_2} + \cdots + \frac{a_n}{a_2}\right).$$

两个括号内的和满足归纳假设条件($k = n - 1, k = n - 2$),所以有

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n \geqslant 1 + a_1 M_{n-1}, \quad ①$$

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n \geqslant 1 + a_1 + a_2 M_{n-2}. \quad ②$$

显然,当 $a_1 = 0$ 或 $a_2 = 0$ 时,① 和 ② 也成立.

由 $a_2 \geqslant 1 - a_1$,将 ② 化为

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n \geqslant 1 + M_{n-2} + a_1(1 - M_{n-2}), \quad ③$$

记　$f(x) = 1 + M_{n-1}x$,

$g(x) = (1 + M_{n-2}) + (1 - M_{n-2})x$,

再由 ① 和 ③ 可得

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n \geqslant \max\{f(a_1), g(a_1)\}, \quad ④$$

因为 f 递增,g 增减,它们的图形交于惟一的点$(\tilde{x}, \tilde{y})$,并且

$$\max\{f(x), g(x)\} \geqslant \tilde{y}, \text{对每个实数 } x. \quad ⑤$$

由 ④ 和 ⑤ 得

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n \geqslant \tilde{y}, \quad ⑥$$

另一方面,当 $x = \frac{F_{n-1}}{F_n}$ 时,容易验证得

$$f(x) = g(x) = \frac{F_{n+2} - 1}{F_n} = M_n.$$

因此

$$\tilde{y} = M_n.$$

由 ⑥ 得

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n \geqslant M_n.$$

综上所述,对每个 $n \geqslant 2$,和 $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ 的最小值是 M_n.

2・70　对于固定的 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,求满足以下两条件的最小正数

a:

(i) $\dfrac{\sqrt{a}}{\cos\theta}+\dfrac{\sqrt{a}}{\sin\theta}>1$;

(ii) 存在 $x\in\left[1-\dfrac{\sqrt{a}}{\sin\theta},\dfrac{\sqrt{a}}{\cos\theta}\right]$,使得

$\left[(1-x)\sin\theta-\sqrt{a-x^2\cos^2\theta}\right]^2+\left[x\cos\theta-\sqrt{a-(1-x)^2\sin^2\theta}\right]^2\leqslant a$

(中国国家队选拔赛,1998年)

[解] 由(i)得

$$\sqrt{a}>\frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta} \qquad ①$$

不妨设 $$\frac{a}{\sin^2\theta}+\frac{a}{\cos^2\theta}\leqslant 1. \qquad ②$$

(ii) 等价于:存在 $x\in\left[1-\dfrac{\sqrt{a}}{\sin\theta},\dfrac{\sqrt{a}}{\cos\theta}\right]$,满足

$$2(1-x)\sin\theta\sqrt{a-x^2\cos^2\theta}+2x\cos\theta\sqrt{a-(1-x)^2\sin^2\theta}\geqslant a,$$

即

$$2\sin\theta\cos\theta\left[(1-x)\sqrt{\frac{a}{\cos^2\theta}-x^2}+x\sqrt{\frac{a}{\sin^2\theta}-(1-x)^2}\right]\geqslant a. \qquad ③$$

先证一个引理:设 $o<p<1,o<q<1,p+q>1,p^2+q^2\leqslant 1$,$f(x)=(1-x)\sqrt{p^2-x^2}+x\sqrt{q^2-(1-x)^2}(1-q\leqslant x\leqslant p)$.则当 $\sqrt{p^2-x^2}=\sqrt{q^2-(1-x)^2}$ 时,即 $x=\dfrac{p^2-q^2+1}{2}\in[1-q,p]$ 时,$f(x)$ 达到最大值.

引理的证明:

由于 $1-q\leqslant x\leqslant p$,因此可令

$$x=p\sin\alpha,1-x=q\sin\beta,0<\alpha<\frac{\pi}{2},0<\beta<\frac{\pi}{2},\alpha+\beta<\pi.$$

于是,有

$$\begin{aligned}f(x)&=pq(\sin\beta\cos\alpha+\sin\alpha\cos\beta)\\&=pq\sin(\alpha+\beta),\end{aligned}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$= \frac{\sqrt{p^2 - x^2}\sqrt{q^2 - (1-x)^2} - x(1-x)}{pq}$$

由于

$$\begin{aligned} & 2\left[\sqrt{p^2 - x^2}\sqrt{q^2 - (1-x)^2} - x(1-x)\right] \\ = & -\left(\sqrt{p^2 - x^2} - \sqrt{q^2 - (1-x)^2}\right)^2 + p^2 + q^2 - x^2 - (1 - \\ & x)^2 - 2x(1-x) \\ = & \ p^2 + q^2 - 1 - \left(\sqrt{p^2 - x^2} - \sqrt{q^2 - (1-x)^2}\right)^2 \leqslant 0, \end{aligned}$$

从而，$\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha + \beta < \pi$.

同时，当且仅当 $\sqrt{p^2 - x^2} = \sqrt{q^2 - (1-x)^2}$ 时，即 $x = \frac{1}{2}(p^2 - q^2 + 1) \in [1-q, p]$ 时，$\cos(\alpha + \beta)$ 达到最大值 $\frac{p^2 + q^2 - 1}{2pq} \leqslant 0$.

因为在 $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 上正弦函数单调递减，所以，$f(x) = pq\sin(\alpha + \beta)$ 也当且仅当 $x = \frac{1}{2}(p^2 - q^2 + 1)$ 时达到最大值.

由引理可知，式③左端当且仅当

$$\sqrt{\frac{a}{\cos^2\theta} - x^2} = \sqrt{\frac{a}{\sin^2\theta} - (1-x)^2}, \text{即}$$

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{\cos^2\theta} - \frac{a}{\sin^2\theta} + 1\right) \in \left[1 - \frac{\sqrt{a}}{\sin\theta}, \frac{\sqrt{a}}{\cos\theta}\right] \text{时，达到最大}$$

值

$$2\sin\theta\cos\theta\sqrt{\frac{a}{\cos^2\theta} - \frac{1}{4}\left(\frac{a}{\cos^2\theta} - \frac{a}{\sin^2\theta} + 1\right)^2},$$

即

$$\sin\theta\cos\theta\sqrt{\frac{4a}{\cos^2\theta} - \left(\frac{a}{\cos^2\theta} - \frac{a}{\sin^2\theta} + 1\right)^2}.$$

由③得知，所求的最小的 a 是满足下式且满足①的最小的 a：

$$\sqrt{\frac{4a}{\cos^2\theta} - \left(\frac{a}{\cos^2\theta} - \frac{a}{\sin^2\theta} + 1\right)^2} \geqslant \frac{a}{\cos\theta\sin\theta},$$

即

$$a^2\left(\frac{1}{\cos^4\theta} + \frac{1}{\sin^4\theta} - \frac{1}{\sin^2\theta\cos^2\theta}\right) - 2\left(\frac{1}{\cos^2\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\right)a + 1 \leqslant 0 \quad ④$$

因为 $$\frac{1}{\cos^4\theta}+\frac{1}{\sin^4\theta}-\frac{1}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

$$=\frac{1-3\sin^2\theta\cos^2\theta}{\sin^4\theta\cos^4\theta}>0,$$

④ 的左端的根为

$$\frac{\sin^4\theta\cos^4\theta}{1-3\sin^2\theta\cos^2\theta}\left[\frac{1}{\cos^2\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\pm\right.$$

$$\left.\sqrt{\left(\frac{1}{\cos^2\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\right)^2-\frac{1}{\cos^4\theta}-\frac{1}{\sin^4\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta\cos^2\theta}}\right]$$

$$=\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{1\mp\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta},$$

所以,由 ④ 可得

$$\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{1+\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta}\leqslant a\leqslant\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{1-\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta}.$$

由于 $$\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{(\sin\theta+\cos\theta)^2}<\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{1+\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta},$$

因此,当

$$a=\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{1+\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta}$$ 时,满足 ①,故所求的

$$a=\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{1+\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta}.$$

2·71 设 $M=\{2,3,4,\cdots,1000\}$.求最小自然数 n,使得 M 的任何 n 元子集中都存在 3 个互不相交的 4 元子集 S,T,U,满足下列条件:

(1) 对于 S 中任何两个元素,大数都是小数的倍数,对于 T 和 U 也有同样的性质;

(2) 对任何 $s\in S$ 和 $t\in T$,都有 $(s,t)=1$;

(3) 对任何 $s\in S$ 和 $u\in U$,都有 $(s,u)>1$.

(中国国家队选拔赛,1996 年)

[**解**] 注意到 $999=37\times27$,我们令

$$\begin{cases}A=\{3,5,\cdots,37\}\\B=M-A\end{cases}$$

显然 $|A|=18$, $|B|=981$.

下面证明 M 的子集 B 不能同时满足条件(1) ~ (3).

用反证法.

若 B 存在 3 个互不相交的四元子集 S,T,U.

设 $S=\{s_1,s_2,s_3,s_4\}$, $s_1<s_2<s_3<s_4$;

$T=\{t_1,t_2,t_3,t_4\}$, $t_1<t_2<t_3<t_4$.

因此$(s_4,t_4)=1$,所以 s_4 和 t_4 中至少有一个为奇数.不妨设 s_4 是奇数,于是 s_1,s_2,s_3 都是奇数,从而有

$$s_4 \geqslant 3s_3 \geqslant 9s_2 \geqslant 27s_1 \geqslant 27\times 39 > 1000,$$

矛盾.

这表明所求的最小自然数 $n \geqslant 982$.

另一方面,令

$$\begin{cases} S_1=\{3,9,27,81,243,729\} \\ T_1=\{2,4,8,16,32,64\} \\ U_1=\{6,12,24,48,96,192\}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_2=\{5,15,45,135,405\} \\ T_2=\{41,82,164,328,656\} \\ U_2=\{10,20,40,80,160\}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_3=\{7,21,63,189,567\} \\ T_3=\{43,86,172,344,688\} \\ U_3=\{14,28,56,112,224\}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_4=\{11,33,99,297,891\} \\ T_4=\{47,94,188,376,752\} \\ U_4=\{22,44,88,176,352\}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_5=\{13,39,117,351\} \\ T_5=\{53,106,212,424\} \\ U_5=\{26,52,104,208\}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_6=\{17,51,153,459\} \\ T_6=\{59,118,236,472\} \\ U_6=\{34,68,136,272\}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_7 = \{19,57,171,513\} \\ T_7 = \{61,122,244,488\} \\ U_7 = \{38,76,152,304\}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_8 = \{23,69,207,621\} \\ T_8 = \{67,134,268,536\} \\ U_8 = \{46,92,184,368\}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_9 = \{25,75,225,675\} \\ T_9 = \{71,142,284,568\} \\ U_9 = \{50,100,200,400\}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_{10} = \{29,87,261,783\} \\ T_{10} = \{73,146,292,584\} \\ U_{10} = \{58,116,232,464\}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_{11} = \{31,93,279,837\} \\ T_{11} = \{79,158,316,632\} \\ U_{11} = \{62,124,248,496\}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_{12} = \{35,105,315,945\} \\ T_{12} = \{83,166,332,664\} \\ U_{12} = \{70,140,280,560\}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_{13} = \{37,111,333,999\} \\ T_{13} = \{89,178,356,712\} \\ U_{13} = \{74,148,296,592\}. \end{cases}$$

将 S_i，T_i，U_i 中序号相同的3个数组成一个三元数组，共可得到57个三元数组.对于 M 的任一982元子集 B，只有 M 中的17个数不在 B 中，故至少有上述57个三元数组中的40个含在 B 中.这40个三元数组分属于上述13组中，由抽屉原理知，至少有4个三元数组属于上述13组的同一组中.将这4个三元数组写成 3×4 数表，3行数分别为 S，T，U，即满足题中要求.

综上所述，可知所求的最小自然数 $n = 982$.

2・72　设 $S = \{1,2,\cdots,50\}$.求最小自然数 K，使 S 的任一 K 元

子集中都存在两个不同的数 a 和 b，满足 $(a+b) \mid ab$.

（中国中学生数学冬令营，1996 年）

［解］ 设有 $a,b \in S$ 满足条件 $(a+b) \mid ab$. 记 $c=(a,b)$，于是 $a=ca_1, b=cb_1$，其中 $a_1,b_1 \in N$ 且有 $(a_1,b_1)=1, a_1 \neq b_1$，不妨设 $a_1 > b_1$.

由于 $$a+b=c(a_1+b_1),$$ $$ab=c^2a_1b_1,$$

因此 $$(a_1+b_1) \mid ca_1b_1.$$

又由于 $$(a_1+b_1,a_1)=1,$$ $$(a_1+b_1,b_1)=1,$$

因此 $$(a_1+b_1) \mid c.$$

因此 $a,b \in S$，所以 $a+b \leqslant 99$，即 $c(a_1+b_1) \leqslant 99$，所以 $3 \leqslant a_1+b_1 \leqslant 9$.

由此可知，S 中满足条件 $(a+b) \mid ab$ 的不同数对 (a,b) 共有 23 对，现列举如下：

$a_1+b_1=3$ 时，c 是 3 的倍数，属于这一类的 (a,b) 有

(6,3)，(12,6)，(18,9)，(24,12)，(30,15)，(36,18)，(42,21)，(48,24)；

$a_1+b_1=4$ 时，有

(12,4)，(24,8)，(36,12)，(48,16)；

$a_1+b_1=5$ 时，有

(20,5)，(40,10)，(15,10)，(30,20)，(45,30)；

$a_1+b_1=6$ 时，有

(30,6)；

$a_1+b_1=7$ 时，有

(42,7)，(35,14)，(28,21)；

$a_1+b_1=8$ 时，有

(40,24)；

$a_1+b_1=9$ 时，有

(45,36).

令 $M=\{6,12,15,18,20,21,24,35,40,42,45,48\}$. 则上述23个数

对中的每一个数对都至少包含 M 中的 1 个元素.令

$$T = S - M,$$

则 T 中任何两数都不能成为满足要求的数对(a,b).因为 $|M| = 12$, $|T| = 50 - 12 = 38$,所以所求最小自然数 $K \geqslant 39$.

另一方面,下列 12 个满足题中要求的数对互不相交,它们是:

(6,3),(12,4),(20,5),(42,7),(24,8),(18,9),(40,10),

(35,14),(30,15),(48,16),(28,21),(45,36)

对于 S 中任一 39 元子集 R,它只比 S 少 11 个元素,而这 11 个元素至多属于上述 12 个数对中的 11 个,因此必有 12 对中的 1 对属于 R.

综上所述,所求的最小自然数 $K = 39$.

2·73　设正整数 a,b 使 $15a+16b$ 和 $16a-15b$ 都是正整数的平方.求这两个平方数中较小的数能够取到的最小值.

（第 37 届国际数学奥林匹克,1996 年）

[解]　设正整数 a,b 使得 $15a+16b$ 和 $16a-15b$ 都是正整数的平方.则可令

$$\begin{cases} 15a+16b = r^2 \\ 16a-15b = s^2 \end{cases}$$

其中 $r,s \in N$.

于是　$15r^2 + 16s^2 = 15^2 \cdot a + 16^2 \cdot a$,

即　$15r^2 + 16s^2 = 481a$.

又有　$16r^2 - 15s^2 = 16^2 b + 15^2 b$,

即　$16r^2 - 15s^2 = 481b$.

因此,$15r^2+16s^2$,$16r^2-15s^2$ 都是 481 的倍数.

由于 $481 = 13 \times 37$,因此 $15r^2+16s^2$,$16r^2-15s^2$ 都是 13 和 37 的倍数.下面来证明:r 和 s 也都是 13 和 37 的倍数.

如果 r 和 s 中有一个不是 13 的倍数,那么由于 $15r^2+16s^2$ 是 13 的倍数,因而 r 和 s 中的另一个也不是 13 的倍数.

由于 $16r^2 - 15s^2$ 是 13 的倍数,因此

$$16r^2 \equiv 15s^2 \pmod{13},$$

$$16r^2 \cdot s^{10} \equiv 15s^{12} \pmod{13},$$

根据费马小定理,由$(s,13)=1$可知

$$s^{12} \equiv 1 \pmod{13}.$$

所以有 $16r^2 \cdot s^{10} \equiv 15 \equiv 2 \pmod{13}$.

即 $(4rs^5)^2 \equiv 2 \pmod{13}$ ①

上式左端的 $4rs^5$ 与 13 互素,因此

$$((4rs^5)^2)^6 \equiv 1 \pmod{13}$$

由 ① 得 $2^6 \equiv 1 \pmod{13}$

$$12 \equiv 1 \pmod{13},矛盾.$$

故 r 和 s 都是 13 的倍数.

如果 r 和 s 中有一个不是 37 的倍数,那么另一个也不是 37 的倍数.

因为 $15r^2+16s^2$,$16r^2-15s^2$ 都是 37 的倍数,所以 r^2-31s^2 是 37 的倍数,从而有

$$r^2 \equiv 31s^2 \pmod{37}$$

$$r^2 \cdot s^{34} \equiv 31 \cdot s^{36} \equiv 31 \pmod{37}$$

两边取 18 次方,得

$$(rs^{17})^{36} \equiv 31^{18} \pmod{37}$$

$$1 \equiv (-6)^{18} \equiv ((-6)^2)^9 \equiv (-1)^9 \equiv -1 \pmod{37},$$

矛盾.

故 r 和 s 也都是 37 的倍数. 从而 r 和 s 都是 481 的倍数,r^2 和 s^2 都是 481^2 的倍数.

另一方面,令 $a=481\times 31$,$b=481$,则有

$15a+16b=481\times(15\times 31+16)=481^2$,

$16a-15b=481\times(16\times 31-15)=481^2$.

综上所述,这两个平方数中较小的数能够取到的最小值是 481^2.

2·74 令 S 是 n 个不同实数的集合,A_s 是由 S 中所有互不相同的两元素的平均值所组成的集合. 对给定 $n\geqslant 2$,A_s 最少可能有多少个元素?

(第 53 届美国普特南数学竞赛,1993 年)

[解] 设 $S=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,且

$$x_1<x_2<\cdots<x_n.$$

则

$$\frac{x_1+x_2}{2}<\frac{x_1+x_3}{2}<\cdots<\frac{x_1+x_n}{2}<\frac{x_2+x_n}{2}<\frac{x_3+x_n}{2}<\cdots<$$

$\frac{x_{n-1}+x_n}{2}$,因此 A_s 中至少有 $2n-3$ 个元素.

另一方面,若取 $S=\{2,4,6,\cdots,2n\}$,则 $A_s=\{3,4,5,\cdots,2n-1\}$ 只有 $2n-3$ 个元素.

综上所述,A_s 的元素个数的最小值为 $2n-3$.

2·75 11 个集合 $M_1,M_2,\cdots,M_{11}$.每个集合有 5 个元素,并且任意两个集合的交非空.求具有同一公共元素的集合数目的最大值的最小可能值.

(罗马尼亚国家队选拔考试,1994 年)

[**解**] 用 $n(x)$ 表示含有元素 x 的集合的数目.用 T 表示所有 11 个集合 $M_1,M_2,\cdots,M_{11}$ 内全部元素组成的集合,即

$$T=\bigcup_{i=1}^{11}M_i.$$

由题设可知,

$$\sum_{x\in T}n(x)=5\cdot 11=55. \qquad ①$$

$C_{n(x)}^2$ 是以 $n(x)$ 个集合中任选两个集合组成集合对的对数,也是从 11 个集合中任选两个含有元素 x 的集合组成集合对的对数(如果 $n(x)=1$,规定 $C_{n(x)}^2=0$).由于任意两个集合 $M_i,M_j(1\leqslant i<j\leqslant 11)$ 的交非空,因此,M_i 与 M_j 至少有一个公共元素 $x\in T$.换句话说,任何一对集合 $(M_i,M_j)(1\leqslant i<j\leqslant 11)$ 至少有一个公共元素 $x\in T$. (M_i,M_j) 是 $n(x)$ 个含 x 的集合中一对集合.所以有

$$\sum_{x\in T}C_{n(x)}^2\geqslant C_{11}^2=55,$$

即

$$\frac{1}{2}\sum_{x\in T}n(x)(n(x)-1)\geqslant 55.$$

记 $n=\max\{n(x)\mid x\in T\}$,则由上式可得

$$\frac{1}{2}(n-1)\sum_{x\in T}n(x)\geqslant 55$$

再利用 ① 可得

$$\frac{1}{2}(n-1)\geqslant 1,$$

从而

$$n\geqslant 3.$$

如果 $n=3$,那么,对任意的 $x\in T$,都有 $n(x)\leqslant 3$.下面证明:不存在

$x \in T$,使得 $n(x) \leqslant 2$.

用反证法.如果存在某个 $x \in T$,使得 $n(x) \leqslant 2$.那么至少有 $11 - 2 = 9$ 个集合不含 x.不妨设 $M_3, M_4, \cdots, M_{11}$ 都不含 x,M_1 含 x.由于 $M_3, M_4, \cdots, M_{11}$ 中的每一个与 M_1 至少有一个公共元素,而这个公共元素又不是 x,因此一定是 M_1 的其他 4 个元素之一.这 4 个元素属于 $M_3, M_4, \cdots, M_{11}$ 这 9 个集合,那么必有一个元素 y 属于 $M_3, M_4, \cdots, M_{11}$ 这 9 个集合中的三个集合,加上 $y \in M$,我们有 $n(y) \geqslant 4$.这与 $n = 3$ 矛盾.

因此,当 $n = 3$ 时,对任意的 $x \in T$,都有 $n(x) = 3$.于是,我们有

$$3 \cdot |T| = 11 \cdot 5$$

$$|T| = \frac{55}{3}$$

矛盾.

由此可得 $n \geqslant 4$.

当 $n = 4$ 时,我们可以给出符合题目条件的一个例子如下:

$M_1 = M_2 = \{1,2,3,4,5\}$,

$M_3 = \{1,6,7,8,9\}$,

$M_4 = \{1,10,11,12,13\}$,

$M_5 = \{2,6,9,10,14\}$,

$M_6 = \{3,7,11,14,15\}$,

$M_7 = \{4,8,9,12,15\}$,

$M_8 = \{5,9,13,14,15\}$,

$M_9 = \{4,5,6,11,14\}$,

$M_{10} = \{2,7,11,12,13\}$,

$M_{11} = \{3,6,8,10,13\}$.

2·76 设 $S = \{1,2,3,4\}$,n 项的数列:$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 有下列性质,对于 S 的任何一个非空子集 B(B 的元素个数记为 $|B|$),在该数列中有相邻的 $|B|$ 项恰好组成集合 B,求 n 的最小值.

(中国上海市高中数学竞赛,1997 年)

[解] n 的最小值为 8.

首先证明 s 中的每个数在数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中至少出现 2 次.

事实上,若 s 中的某个数在这个数列中只出现一次,由于含这个数的二元子集共有 3 个,但在数列中含这个数的相邻两项至多只有两种取法,因此不可能 3 个含这个数的二元子集都在数列相邻两项中出现.矛盾.

由此可得,$n \geqslant 8$.

另一方面,数列 3,1,2,3,4,1,2,4 满足题设条件,且只有 8 项.所以,n 的最小值为 8.

2·77　在100×25 的长方形表格中每一格填入一个非负实数,第 i 行第 j 列中填入的数为 $x_{ij}(i=1,2,\cdots,100;j=1,2,\cdots,25)$(如表 1).然而将表 1 每列中的数按由大到小的次序从上到下重新排列为 $x'_{1,j} \geqslant x'_{2j} \geqslant \cdots \geqslant x'_{100j}(j=1,2,\cdots,25)$

$x_{1,1}$	$x_{1,2}$	$\cdots$	$x_{1,25}$
$x_{2,1}$	$x_{2,2}$	$\cdots$	$x_{2,25}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$x_{100,1}$	$x_{100,2}$	$\cdots$	$x_{100,25}$

表 1

$x'_{1,1}$	$x'_{1,2}$	$\cdots$	$x'_{1,25}$
$x'_{2,1}$	$x'_{2,2}$	$\cdots$	$x'_{2,25}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$x'_{100,1}$	$x'_{100,2}$	$\cdots$	$x'_{100,25}$

表 2

(如表 2)求最小的自然数 k,使得只要表 1 中填入的数满足 $\sum_{j=1}^{25} x_{ij} \leqslant 1$,$(i=1,2,\cdots,100)$,则当 $i \geqslant k$ 时,在表 2 中就能保证

$$\sum_{j=1}^{25} x'_{ij} \leqslant 1$$

成立.

(中国高中数学联赛,1997 年)

[解]　k 的最小值为 97.

事实上,如果我们取

$$x_{ij}=\begin{cases}0,4,(j-1)+1\leqslant i\leqslant 4j\\ \frac{1}{24}.\ 其余的\ i\end{cases}\qquad (j=1,2,\cdots,25)$$

那么,我们有

$$\sum_{j=1}^{25}x_{ij}=0+24\times\frac{1}{24}=1\qquad (i=1,2,\cdots,100)$$

满足题设条件.重排后有

$$x_{ij}'=\begin{cases}\frac{1}{24},1\leqslant i\leqslant 96,\\ 0,\quad 97\leqslant i\leqslant 100.\end{cases}\qquad (j=1,2,\cdots,25)$$

这时

$$\sum_{j=1}^{25}x_{ij}'=25\times\frac{1}{24}>1,\qquad (1\leqslant i\leqslant 96).$$

故 k 的最小值 $\geqslant 97$.

另一方面,因为表2的后三行一共只有75个数,在表1中有100行,所以表1中至少有一行,它的所有元素都在表2的前97行.不妨设表1的第 r 行的所有数

$$x_{r,1},x_{r,2},\cdots,x_{r,25}$$

都在表2的前97行中出现.于是,当 $i\geqslant 97$ 时,我们有

$$x_{ij}'\leqslant x_{rj},\qquad (j=1,2,\cdots,25)$$

$$\sum_{j=1}^{25}x_{ij}'\leqslant\sum_{j=1}^{25}x_{rj}\leqslant 1.$$

综上所述,可知所求的 k 的最小值为97.

2・78　21人参加一次考试,试卷共有15道是非题.已知每两人答对的题中至少有一道是相同的.问答对人数最多的题最少有多少人答对?请说明理由.

(中国国家队选拔赛,1995年)

[解]　设第 i 题有 a_i 个人的答案正确,于是恰有

$$b_i=c_{a_i}^2$$

个两人组答对该题($i=1,2,\cdots,15$).

以下我们着重考察和数 $\sum_{i=1}^{15}b_i$.

记 $a = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_{15}\}$，则有

$$15C_a^2 \geqslant \sum_{i=1}^{15} b_i \geqslant C_{21}^2,$$

$$a(a-1) \geqslant \frac{420}{15} = 28,$$

$$a \geqslant 6.$$

如果 $a = 6$，即每题最多只有 6 个人答对. 此时如果有某一个人只答对了三道题，那么由于 $a = 6$，即他答对的三道题中的每一题，至多还有另外5个人答对，所以他最多与另外15个人有共同答对的题目，此与题设条件矛盾. 这说明，此时，每人至少答对 4 道题.

因为 $\quad 21 \times 5 > 6 \times 15,$

所以不可能每人都至少答对 5 道题，从而至少有 1 人恰答对 1 道题，将该人编号为1. 由题设条件，该人与其他20人中的每一个都有共同答对的题目，所以该人答对的 4 道题中的每一题都有另外 5 人也答对了. 于是，分别答对这 4 道题的人的编号构成了 4 个集合：

$$S_1 = \{1,2,3,4,5,6\},$$

$$S_2 = \{1,7,8,9,10,11\},$$

$$S_3 = \{1,12,13,14,15,16\},$$

$$S_4 = \{1,17,18,19,20,21\}.$$

显然，$S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 = \{1,2,\cdots,21\}$，

$S_i \cap S_j = \{1\}, 1 \leqslant i < j \leqslant 4.$

另一方面，如果在15道题中，至多11道题各有6个人答对，那么就有

$$210 = C_{21}^2 \leqslant \sum_{i=1}^{15} b_i \leqslant 11 \cdot C_6^2 + 4 \cdot C_5^2 = 205,$$

矛盾. 因此，在15道题中，至少12道题各有6个人答对. 除去编号为1的人答对的4道题以外，至少还有8道题各有6个人答对. 考察答对这8道题中某一道题的6个人，他们之中或者有 3 人以上属于同一个 S_j，或者两人属于同一个 S_j，并有另两人属于同一个 S_k，$j \neq k, 1 \leqslant j \leqslant 4, 1 \leqslant k \leqslant 4$. 总之，在计算 $\sum\limits_{i=1}^{15} b_i$ 时，这 8 道题中的每一道题都至少产生两次重复计数. 因此

$$210 = C_{21}^2 \leqslant \sum_{i=1}^{15} b_i - 8 \times 2 \leqslant 15C_6^2 - 16 = 209,$$

矛盾.

这说明 $a \neq 6$,从而有 $a \geqslant 7$.

下面构造的例子说明,$a = 7$ 是可能实现的.

记考试人员的编号为 1 ~ 21,并记

$P_i = \{2i-1, 2i\}, i = 1,2,\cdots,6;$

$P_7 = \{13,14,15\},$

$P_8 = \{16,17,18\},$

$P_9 = \{19,20,21\}.$

若出现下表所示的考试结果,则 $a = 7$.

题号	答对该题的人员的集合
1	$P_1 \cup P_2 \cup P_3$
2	$P_4 \cup P_5 \cup P_6$
3	$P_1 \cup P_4 \cup P_7$
4	$P_2 \cup P_5 \cup P_8$
5	$P_3 \cup P_6 \cup P_9$
6	$P_1 \cup P_5 \cup P_9$
7	$P_2 \cup P_6 \cup P_7$
8	$P_3 \cup P_4 \cup P_8$
9	$P_1 \cup P_6 \cup P_8$
10	$P_2 \cup P_4 \cup P_9$
11	$P_3 \cup P_5 \cup P_7$
12	$P_7 \cup P_8$
13	$P_8 \cup P_9$
14	$P_7 \cup P_9$
15	$\varnothing$(空集)

第4节　最大

2·79　在一个游戏中这样计分，回答一个容易的问题得 3 分，回答一个较难的问题得 7 分，在不能作为选手总分数的整数集合中，求最大值.

（美国 Mathcounts 数学竞赛试题，1988 年）

［解］　设不能作为总分数的自然数集合为 S. 在前 12 个自然数中，只有 1,2,4,5,8,11 属于 S.

因为　$7 = 2\times3+1, 3\times5 = 7\times2+1$，所以当若干 3,7 的和 $n \geqslant 12$ 时，可用一个 7 换两个 3，或者用 5 个 3 换 2 个 7，使组成的和数增加 1，因此大于 12 的自然数都不属于 S. 所以

$$S = \{1,2,4,5,8,11\}.$$

所求的最大值是 11.

2·80　求最大的正整数 n，使得 n^3+100 能被 $n+10$ 整除.

（第 4 届美国数学邀请赛，1986 年）

［解］　我们设法把 n^3+100 变形，使之出现 $n+10$，为此

$$\begin{aligned}&n^3+100\\=\ &n^3+1000-900\\=\ &(n+10)(n^2-10n+100)-900,\end{aligned}$$

如果 $n+10$ 整除 n^3+100，则 $n+10$ 能整除 900，为使 n 最大，可令

$$n+10=900,$$

所以　　$$n=890.$$

2·81　以下 7 个数的和恰好是 19：

$a_1 = 2.56$，$a_2 = 2.61$，$a_3 = 2.65$，$a_4 = 2.71$，$a_5 = 2.79$，$a_6 = 2.82$，$a_7 = 2.86$.

欲用整数 A_i 来作 a_i 的近似值（$1 \leqslant i \leqslant 7$），使得 A_i 的和仍为 19，而误差 $|A_i - a_i|$ 的最大值 M 尽可能小. 那么，对于这最小的 M，$100M$ 是多少？

（第 3 届美国数学邀请赛，1985 年）

［解］　由于 $2 < a_i < 3$（$1 \leqslant i \leqslant 7$），因此整数 A_i 应取 2 或 3，因为只有这样才能使 $M < 1$，不然的话，就有 $M > 1$.

要使　$A_1 + A_2 + \cdots + A_7 = 19$,那么 $A_1, A_2, \cdots, A_7$ 中恰有五个 3,两个 2.

要使 M 尽可能小,应把最小的两个数 a_1 和 a_2 的近似值取成 $A_1 = A_2 = 2$,而其他的取成 $A_3 = A_4 = A_5 = A_6 = A_7 = 3$.此时

$M = a_2 - A_2 = 2.61 - 2 = 0.61$,

$100M = 61$.

2·82　求使 $4^{27} + 4^{1000} + 4^x$ 是完全平方的最大整数 x.

（第 6 届全苏数学奥林匹克,1972 年）

［解］　因为

$$4^{27} + 4^{1000} + 4^x = 2^{54}(1 + 2 \cdot 2^{1945} + 2^{2x-54})$$

所以,当 $2x - 54 = 2 \cdot 1945$,即当 $x = 1972$ 时,$4^{27} + 4^{1000} + 4^x$ 是一个完全平方.

另一个方面,当 $x > 1972$ 时,由于

$$2^{2(x-27)} < 1 + 2 \cdot 2^{1945} + 2^{2 \cdot (x-27)} < (2^{x-27} + 1)^2,$$

因此 $1 + 2 \cdot 2^{1945} + 2^{2x-54}$ 介于两个连续自然数的平方之间,从而它不是完全平方,给定的式子 $4^{27} + 4^{1000} + 4^x$ 也不是完全平方.

故所求的最大整数 x 为 1972.

2·83　若干个正整数的和为1976,求这些正整数的积的最大值.

（第 18 届国际数学奥林匹克,1976 年）

［解］　设这些数为 $a_1, \cdots, a_n$,

则　　$a_1 + \cdots + a_n = 1976$.

不妨设 $a_i < 4(1 \leqslant i \leqslant n)$,这是因为当 $a_i \geqslant 4$ 时 $a_i \leqslant 2(a_i - 2)$,故把 a_i 换成 2 和 $a_i - 2$ 两个数不会使积减小.

再注意 $2 \times 2 \times 2 < 3 \times 3$,所以只需考虑 $2^a \cdot 3^b$,其中 $a = 0, 1, 2$,且 $2a + 3b = 1976$.

由此得　$a = 1, b = 658$,

故所求的最大值为 2×3^{658}.

2·84　对任一正整数 q_0,考虑由

$$q_i = (q_{i-1} - 1)^3 + 3 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

定义的序列 $q_1, q_2, \cdots, q_n$.若每个 $q_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 都是质数的幂,求 n 的最大的可能值.

（匈牙利数学奥林匹克,1990 年）

[解] 由于

$$m^3 - m = m(m-1)(m+1) \equiv 0 (\mathrm{mod} 3),$$

所以

$$q_i = (q_{i-1} - 1)^3 + 3 \equiv (q_{i-1} - 1)^3 \equiv q_{i-1} - 1 (\mathrm{mod} 3).$$

因而 q_1, q_2, q_3 中必有一个被3整除,它应当为3的幂.但在 $3 \mid ((q-1)^3+3)$ 时,$3 \mid (q-1)^3$.从而 $3 \mid (q-1)$, $3^3 \mid (q-1)^3$, $(q-1)^3 + 3$ 只能被3整除,不能被 3^2 整除.于是只有在 $q_i = 1$ 时,$(q_i - 1)^3 + 3$ 才是3的幂.这时必须 $i = 0$,但 $q_0 = 1$ 推出

$$q_1 = 3,\ q_2 = 11,\ q_3 = 1003 = 17 \times 59,$$

所以 n 的最大值为2.

2·85 已知 a,b,c,d,e 是满足

$$a + b + c + d + e = 8,$$
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 16$$

的实数,试确定 e 的最大值.

(第7届美国数学奥林匹克,1978年)

[解] 用柯西-施瓦兹不等式.

由于

$$\begin{aligned}(a+b+c+d)^2 &= (a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1 + d \cdot 1)^2 \\ &\leqslant (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2) \\ &= 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2),\end{aligned}$$

又因为 $a + b + c + d = 8 - e$,

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 16 - e^2,$$

所以 $(8-e)^2 \leqslant 4(16 - e^2)$,

即 $64 - 16e + e^2 \leqslant 64 - 4e^2$ 或 $5e^2 - 16e \leqslant 0$,

得 $0 \leqslant e \leqslant \dfrac{16}{5}$.

即 e 的最大值是 $\dfrac{16}{5}$.

2·86 求最大的完全平方数,并且已知这样的完全平方数在减去它的最后两位数字后仍然是一个完全平方数(假设所减的数字不全为0).

(第4届全俄数学奥林匹克,1964年)

[解]　设 n^2 满足此题要求,那么

$$n^2 = 100a^2 + b,\text{其中 } 0 < b < 100.$$

由此得　$n > 10a$,

所以　$n \geqslant 10a + 1$,

于是　$b = n^2 - 100a^2 \geqslant 20a + 1$,

$20a + 1 < 100$,

$a \leqslant 4$.

当 $a = 4$ 时,如果 $n > 41$,那么 $n^2 - 40^2 \geqslant 42^2 - 40^2 > 100$,此与 $b < 100$ 矛盾.

如果 $n = 10a + 1 = 41$,那么 $41^2 = 1681$ 显然满足条件.

故所求的最大的完全平方数为 1681.

2・87　设 $4^{27} + 4^{500} + 4^n$ 是平方数(整数的平方),求整数 n 的最大值.

(日本数学奥林匹克代表队选拔试题,1990 年)

[解]　分解因式得

$$4^{27} + 4^{500} + 4^n$$
$$= 4^{27}(4^{n-27} + 4^{473} + 1), \quad ①$$
$$4^{n-27} + 4^{473} + 1 = (2^{n-27})^2 + 2 \cdot 2^{945} + 1. \quad ②$$

当 $n - 27 = 945$ 时,即 $n = 972$ 时,② 式是平方数,从而 ① 式是平方数.

当 $n > 972$ 时,

$$(2^{n-27} + 1)^2$$
$$= (2^{n-27})^2 + 2 \cdot 2^{n-27} + 1$$
$$> (2^{n-27})^2 + 2 \cdot 2^{945} + 1$$
$$> (2^{n-27})^2.$$

因此,这时 ② 式不是平方数,从而 ① 式不是平方数.

故所求的 n 的最大值为 972.

2・88　使用0,1,2,3,…,9 中每个数字一次,求可能组成的最大的 12 的倍数.

(美国 Mathcounts 数学竞赛试题,1988 年)

[解]　12 的倍数能同时被 3 和 4 整除,因为 $9+8+7+6+5+4+3+2+1=45$,能被 3 整除,所以要使组成的数是 12 的倍数只需它的

最后两位数字能被 4 整除. 由于大的数字放在前面能组成较大的数, 因此本题的答案是 9876543120.

代数卷

2·89　设 s 是一张由正整数组成的表(表中可以有相同的数), 其中有 68 这个数, s 中的各数的算术平均值是 56, 但是如果把 68 去掉, 剩下的各数的算术平均值就降为 55, 问可能在 s 中出现的最大数是多少?

(第 2 届美国数学邀请赛, 1984 年)

[解]　设 n 为 s 中正整数的个数, 它的 n 个数为 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$, 68, 由题设有

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + 68}{n} = 56 \quad ①$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1} = 55 \quad ②$$

由 ①, ② 得　$56n - 68 = 55(n-1)$

所以　$n = 13.$

则　$a_1 + a_2 + \cdots + a_{12} = 55 \times 12 = 660.$

为使 $a_1, a_2, \cdots, a_{12}$ 中出现一个最大的正整数, 就应使其他 11 个数尽可能地小, 因此在这 12 个数中取 11 个 1, 则另一个数

$$660 - 11 = 649$$

就是 s 中可能出现的最大数.

2·90　求证: 对于每一个大于 1 的整数 k, 必存在一个小于 k^4 的倍数, 在十进制中, 它最多含有 4 个不同的数字(每个数字可以重复使用).

(第 31 届国际数学奥林匹克预选题, 1990 年)

[证]　设 n 满足　$2^{n-1} \leqslant k < 2^n$.

$A_n = \{$非负整数: 在十进制中由 0 与 1 组成, 且 0, 1 的个数之和至多 n 个$\}$.

显然,　$|A_n| = 2^n$,

$$\max A_n = \frac{1}{9}(10^n - 1).$$

因为　$2^n > k$,

所以, 在 A_n 中有两个不同的元素 x, y 除以 k 时余数相同, 从而 k 整除 $p = |x - y|$. 显然, p 的数字 $\in \{0, 1, 8, 9\}$.

因为 $n \leqslant 1+\log_2 k$,所以有

$$\begin{aligned} p &\leqslant \frac{1}{9}(10^n-1)<\frac{10}{9}\times 10^{\log_2 k} \\ &= \frac{10}{9}k^{\log_2 10}<\frac{16}{10}k^{\log_2 10}=2^{4-\log_2 10}\times k^{\log_2 10} \\ &\leqslant k^{4-\log_2 10}\cdot k^{\log_2 10}=k^4. \end{aligned}$$

于是命题得证.

2·91 我们注意到$6!=8\cdot 9\cdot 10$. 试求能使 $n!$表示成 $n-3$个连续自然数之积的最大的正整数 n.

(第 8 届美国数学邀请赛,1990 年)

[解] 因为 $n!=n(n-1)\cdots 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$

$$=24\cdot n\cdot(n-1)\cdots 5.$$

当 $n=23$ 时,$24\cdot n\cdot(n-1)\cdots 5$ 是 $n-3$ 个连续自然数之积.

下面证明 $n=23$ 是符合条件的最大正整数 n.

若 $n>23$,则由

$$\begin{aligned} n! &= k\cdot n\cdot(n-1)\cdots(n-t) \\ &= n\cdot(n-1)\cdots(n-t)k, \end{aligned}$$

可知,$k>n$,从而 $k\geqslant 25$.

因此,k 至少是 5 个最小的连续自然数之积,$n!$只能表示成少于 $n-3$ 个连续自然数之积,与题设不符.

所以,所求最大正整数 n 为 23.

2·92 最大的不能写成两个奇合数之和的偶数是几?

(第 2 届美国数学邀请赛,1984 年)

[解] 我们先证明:对于不小于 40 的偶数,一定可以表示成两个奇合数之和的形式.

设 k 是不小于 40 的偶数.

如果 k 的个位数字是 2(即 42,52,62,…),

则 $k=27+5n(n=3,5,7,\cdots)$;

如果 k 的个位数字是4(即44,54,64,…),则 $k=9+5n(n=7,9,11,\cdots)$;

如果 k 的个位数字是6(即46,56,66,…),则 $k=21+5n(n=5,7,9,\cdots)$;

如果 k 的个位数字是8(即48,58,68,…),则 $k=33+5n(n=3,5,7,\cdots)$;

如果 k 的个位数字是0(即40,50,60,…),则 $k=35+5n(n=1,3,5,\cdots)$.

于是不能写成两个奇合数之和的偶数一定小于40.

下面验证38是满足题目要求的偶数.

由于 $38=1+37=3+35=5+33=7+31=9+29=11+27=13+25=15+23=17+21=19+19$,所以38不能表示成两个奇合数之和,从而38是满足题目要求的偶数.

2·93 m 个互不相同的正偶数与 n 个互不相同的正奇数的总和为1987,对于所有这样的 m 与 n,$3m+4n$ 的最大值是多少?请证明你的结论.

(第2届中国中学生数学冬令营,1987年)

[证] 设 $a_1+a_2+\cdots+a_m+b_1+b_2+\cdots b_n=1987$.其中 $a_i(1\leqslant i\leqslant m)$ 是互不相同的正偶数,$b_j(1\leqslant j\leqslant n)$ 是互不相同的正奇数.

显然,n 一定是奇数,且

$$a_1+a_2+\cdots+a_m\geqslant 2+4+\cdots+2m=m(m+1),$$

$$b_1+b_2+\cdots+b_n\geqslant 1+3+\cdots+(2n-1)=n^2.$$

所以

$$m^2+m+n^2\leqslant 1987,\text{其中 } n \text{ 为奇数}.$$

此式等价于

$$\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+n^2\leqslant 1987+\frac{1}{4}.$$

由柯西-施瓦兹不等式

$$3\left(m+\frac{1}{2}\right)+4n\leqslant\sqrt{3^2+4^2}\sqrt{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+n^2}$$

$$\leqslant 5\sqrt{1987+\frac{1}{4}},$$

$$3m+4n\leqslant 5\sqrt{1987+\frac{1}{4}}-\frac{3}{2}.$$

由 $3m+4n$ 是整数,所以

$$3m+4n \leqslant \left[5\sqrt{1987+\frac{1}{4}}-\frac{3}{2}\right],$$

即 $\qquad 3m+4n \leqslant 221.$

易证,方程 $3m+4n=221$ 的整数解的一般形式是

$$\begin{cases} m=71-4k \\ n=2+3k \end{cases} \quad (k\text{ 是整数}), \qquad ①$$

因为 n 是奇数,所以①式中的 k 必须是奇数,设 $k=2t+1$, t 是整数,

则 $$\begin{cases} m=67-8t \\ n=5+6t \end{cases} \quad (t\text{ 是整数}), \qquad ②$$

因为 $m^2, n^2 \leqslant 1987$,所以

$$m, n \leqslant [\sqrt{1987}] = 44.$$

代入②式得出

$$3 \leqslant t \leqslant 6.$$

用 $t=3,4,5,6$ 分别代入②式可知,(m,n) 只能是(43,23),(35,29),(27,35)及(19,41)四组值.

不难验证(43,23),(35,29),(19,41)三组值不满足关系式

$$m(m+1)+n^2 \leqslant 1987.$$

对于(27,35),由于

$$27(27+1)+35^2 = 1981 < 1987$$

所以适当选取27个正偶数和35个正奇数的值,就可使这些数的和恰为1987.

例如,由

$$2+4+\cdots+54+1+3+\cdots+67+69=1981,$$

则 $$2+4+\cdots+54+1+3+\cdots+67+75=1987.$$

综上讨论,$3m+4n$ 的最大值是221,而且只能在 $m=27, n=35$ 时才能达到最大值.

2·94 求所有自然数 n,使得

$$\min_{k\in N}\left(k^2+\left[\frac{n}{k^2}\right]\right)=1991,$$

其中 $\left[\frac{n}{k^2}\right]$ 表示不超过 $\frac{n}{k^2}$ 的最大整数,N 是自然数集.

(第6届中国中学生数学冬令营,1991年)

[解] 题中的条件$\min\limits_{k\in N}\left(k^2+\left[\dfrac{n}{k^2}\right]\right)=1991$等价于如下两条：

(1) 对于任何 $k\in N$,都有 $k^2+\dfrac{n}{k^2}\geqslant 1991$;

(2) 存在 $k_0\in N$,使得 $k_0^2+\dfrac{n}{k_0^2}<1992$.

而条件(1) 和(2) 又分别等价于

(1′) 对任何 $k\in N$,都有 $k^4-1991k^2+n\geqslant 0$;

(2′) 存在 $k_0\in N$,使得 $k_0^4-1992k_0^2+n<0$.

我们先来解(1′) 中的不等式,这时有

$$\left(k^2-\frac{1991}{2}\right)^2+n-\frac{1991^2}{4}\geqslant 0, \qquad ①$$

因为最靠近$\dfrac{1991}{2}=995.5$的完全平方数是$32^2=1024$,

故由 ① 式有

$$\left(1024-\frac{1991}{2}\right)^2+n-\frac{1991^2}{4}\geqslant 0,$$

解得 $n\geqslant 1024\times 967=990208$.

条件(2′) 又等价于

$$\min_{k\in N}\{(k^2-996)^2+n-996^2\}<0, \qquad ②$$

因为$(k^2-996)^2$的最小值为28^2,故由 ② 式得

$$n<996^2-28^2=1024\times 968=991232.$$

综上可知,满足题目要求的 n 的范围是 $990208\leqslant n\leqslant 991231$.

2·95 某州颁布由6个数字组成的车牌证号(由0～9的数字组成),该州规定任何两个牌号至少有两处的数字不同(因此证号027592和020592不能都被使用).试决定车牌证号最多有多少个,给出证明.

(第19届美国数学奥林匹克,1990年)

[证] 先用归纳法证明,由数字0～9组成的 n 位车牌证号(任意两个号至少有两处数字不同)最多可以有 10^{n-1} 个.

事实上,当 $n=1$ 时,只能有 $1=10^{1-1}$ 个牌号,设 $n=k$ 时命题成立,当 $n=k+1$ 时,考虑以 $i(i=0,1,2,\cdots,9)$ 为首位数字的 $k+1$ 位车牌证号,由归纳假设知,最多可以有 10^{k-1} 个,所以共有

$$10 \times 10^{k-1} = 10^k$$

个 $k+1$ 位车牌证号.即当 $n = k+1$ 时命题也成立.

故当 $n = 6$ 时满足该州规定的车牌证号最多个数是 10^5.

2·96 设 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 是一个不减的正整数序列,对于 $m \geqslant 1$,定义

$$b_m = \min\{n \mid a_n \geqslant m\},$$

即 b_m 是使 $a_n \geqslant m$ 的 n 的最小值.

若 $a_{19} = 85$,试求 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{19} + b_1 + b_2 + \cdots + b_{85}$ 的最大值.

(第 14 届美国数学奥林匹克,1985 年)

[解] 一般地,设 $a_q = p$,我们证明

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_q + b_1 + b_2 + \cdots + b_p = p(q+1)$$

对于本题,当 $q = 19, p = 85$ 时,

$$p(q+1) = 85(19+1) = 1700.$$

(i) 若 $a_1 = a_2 = \cdots = a_q = p$,则由定义

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_p = 1$$

于是有

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_q + b_1 + b_2 + \cdots + b_p = pq + p = p(q+1).$$

(ii) 若 $a_i < p (1 \leqslant i < q)$.

令 t 为使 $a_t < p$ 的最大下标,且令 $a_t = u$.

若 a_t 增加 1,则 $b_j (j \neq u+1)$ 保持不变,而 b_{u+1} 减少 1,所以题中的总和不变.

我们重复这样的过程,直到

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_q = p.$$

由(1)可得

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_q + b_1 + b_2 + \cdots + b_p = p(q+1).$$

2·97 设 a、b、c 为两两互质的正整数,证明:$2abc - ab - bc - ca$ 是不能表示为 $xbc + yca + zab$ 形式的最大整数(其中 x, y, z 是非负数).

(第 24 届国际数学奥林匹克,1983 年)

[证] 如果

$$2abc - bc - ca - ab = xbc + yca + zab,$$
其中 $x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0$,则有
$$2abc = bc(x+1) + ca(y+1) + ab(z+1).$$
因而 $a \mid (x+1)bc$、又$(a, bc) = 1$,故有 $a \mid (x+1)$. 于是 $a \leqslant x+1$

同理有 $b \leqslant y+1,\ c \leqslant z+1$,从而有
$$\begin{aligned} 3abc &= bca + cab + abc \\ &\leqslant bc(x+1) + ca(y+1) + ab(z+1) \\ &= 2abc, \text{矛盾}. \end{aligned}$$
因此 $2abc - bc - ca - ab$ 不能表示成 $xbc + yca + zab$ 的形式.

其次,为证凡是大于 $2abc - bc - ca - ab$ 的数 n 都能表示成 $xbc + yca + zab$ 的形式,我们来证明一个下面要用到的简单结果:

设 a, b 都是正整数且$(a, b) = 1$,则凡是大于 $ab - a - b$ 的数必能表示为 $ax + by(x \geqslant 0, y \geqslant 0)$ 的形式.

因为$(a, b) = 1$,故每个整数 m 都可表示成
$$m = ua + vb, u, v \in Z.$$
显然,这样的表达式不惟一,但所有表达式都可写成
$$m = (n - kb)a + (v + ka)b, k \in Z.$$
选取 k_0,使 $0 \leqslant u - k_0 b < b$,并令 $u_0 = u - k_0 b, v_0 = v + k_0 a$,则有
$$m = u_0 a + v_0 b,\ 0 \leqslant u_0 < b,\ v_0 \in Z.$$
显然,只要 $v_0 \geqslant 0, m$ 即表示成了所要求的形式.

对于大于 $ab - a - b$ 的正整数 m,这时有
$$(b-1)a + v_0 b \geqslant u_0 a + v_0 b = m > ab - a - b.$$
由此即得 $v_0 b > -b,\ v_0 > -1$,即 $v_0 \geqslant 0$. 这就证明了上述命题.

最后我们利用上述命题来证明当 $n > 2abc - bc - ca - ab$ 时,必能表示为 $xbc + yca + zab(x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0)$ 的形式,
由于
$$\begin{aligned} n &> 2abc - bc - ca - ab \\ &= (abc - ab - ca + a) + (abc - a - bc) \\ &= a(b-1)(c-1) + (abc - a - bc) \\ &\geqslant abc - a - bc. \end{aligned}$$
且$(a, bc) = 1$,故 n 可写成 $n = aw + xbc$ 的形式且使 $x \leqslant a - 1$. 于是
$$aw = n - bcx \geqslant n - bc(a-1) > abc - ab - ca,$$

即 $w > bc - b - c$.因为$(b,c) = 1$,故又有 $w = cy + bz(y \geqslant 0, z \geqslant 0)$ 的形式.从而得到

$$\begin{aligned} n &= aw + bcx \\ &= bcx + cay + abz. \end{aligned}$$

2·98 在公比大于1的等比数列中,最多有几项是在100和1000之间的整数?

(第4届加拿大数学奥林匹克,1972年)

[解] 公比为$\frac{3}{2}$的等比数列

128,192,288,432,648,972.共有6项是在100和1000之间的整数.现在我们来证明最多有6项是在100和1000之间的整数.

设等比数列$\{ar^{n-1}\}$满足$100 \leqslant a < ar < ar^2 < \cdots < ar^{n-1} \leqslant 1000$,其中$n$项全是整数,并且$r > 1$,显然,$r$必须是有理数,设$r = p/q$, $p > q \geqslant 1$, $(p,q) = 1$(即p、q的最大公约数为1).因为$ar^{n-1} = a\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}$是整数,所以$q^{n-1}$整除$a$,我们取$p = q + 1$,于是数列

$$100 \leqslant a < a\left(\frac{q+1}{q}\right) < \cdots < a\left(\frac{q+1}{q}\right)^{n-1} \leqslant 1000$$

有n项全是在所求范围内的整数.

如果$q \geqslant 3$,那么

$$1000 \geqslant a\left(\frac{q+1}{q}\right)^{n-1} \geqslant (q+1)^{n-1} \geqslant 4^{n-1},$$

这时有 $n \leqslant 5$.

如果$q = 1$,那么

$$1000 \geqslant a\left(\frac{q+1}{q}\right)^{n-1} = a \cdot 2^{n-1} \geqslant 100 \cdot 2^{n-1},$$

这时有 $n \leqslant 4$.

如果$q = 2$,那么

$$1000 \geqslant a\left(\frac{q+1}{q}\right)^{n-1} = a \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \geqslant 100 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1},$$

即 $n \leqslant 6$.

因此,最多有6项.

2·99 如果一个自然数是质数,并且任意重排它的数字后所得

的数仍是质数,那么这个自然数叫做绝对质数.证明在绝对质数中,不能含有多于三个不同的数字.

(第 18 届全苏数学奥林匹克,1984 年)

[证] 如果绝对质数的位数小于 4,那么命题显然成立.

如果绝对质数的位数不小于 4,那么只能有数字 1,3,7,9 出现在绝对质数中.

设绝对质数 A 含有 1,3,7,9 四个数字,于是将 A 的数字重新排列可得到一个新的绝对质数 $B = a \times 10^4 + 1379$.

令 $M = a \times 10^4$,那么数 $M + 1379$, $M + 3179$, $M + 9137$, $M + 7913$, $M + 1397$, $M + 3197$ 或 $M + 7139$ 都是绝对素数.

另一方面,1379,3179,9137,7913,1397,3197,7139 被 7 除的余数分别为 0,1,2,3,4,5,6.

因此在 $M+1379$, $M+3179$, $M+9137$, $M+7913$, $M+1397$, $M + 3197$, $M + 7139$ 中必有一数能被 7 整除,矛盾.故绝对质数不可能含有多于三个不同的数字.

2·100 我们知道 $12^2 = 144$ 的末尾两数均为 4,$38^2 = 1444$ 的末尾有三个数均为 4,对于个位数不为零的自然数,它的平方数的末尾相同数的个数最多为多少个?

(爱尔兰数学奥林匹克,1989 年)

[解] 我们知道 $n^2 \equiv 0,4,9,6,5$ 或 $1 \pmod{10}$,又 $(10a + b)^2 \equiv 20ab + b^2 \pmod{100}$,并且 $20ab \equiv 0,20,40,60$,或 $80 \pmod{100}$.

(1) 如果 $b = 5$,则 $b^2 = 25$,$20ab \equiv 0 \pmod{100}$,故没有一个自然数的平方的尾数为 55;

(2) 如果 $b = 3$ 或 7,则 $20ab + b^2 \equiv 9,29,49,69$ 或 $89 \pmod{100}$,故没有一个自然数的平方的尾数为 99.

(3) 如果 $b = 4$ 或 6,则 $20ab + b^2 \equiv 16,36,56,76$ 或 $96 \pmod{100}$,故没有一个自然数的平方的尾数为 66.

(4) 如果 $b = 1$ 或 9,则 $20ab + b^2 \equiv 1,21,41,61$ 或 $81 \pmod{100}$,故没有一个自然数的平方的尾数为 11.

综上所述,一个个位数不为零的自然数的平方数重复的尾数只能是 4.

假设 x^2 的尾数至少有 4 个 4,则由

$$10000 \equiv 0 \pmod{16},$$

可知 $x^2 \equiv 4(10^3 + 10^2 + 10 + 1) \equiv 12 \pmod{16}$.

但 $n^2 \equiv 0,1,4$ 或 $9 \pmod{16}$,

所以没有一个个位数不为零的自然数,其平方数的相同尾数4能超过3个.

从而 $38^2 = 1444$ 就是个位数不为零的自然数的平方数尾数重复最多的数.

2·101 对于每个正整数 n,以 $S(n)$ 表示满足如下条件的最大正整数:对于每个正整数 $k \leqslant S(n)$,n^2 都可以表示成 k 个正整数的平方之和.

(1) 证明:对于每个正整数 $n \geqslant 4$,都有 $S(n) \leqslant n^2 - 14$;

(2) 试找出一个正整数 n,使得 $S(n) = n^2 - 14$;

(3) 证明:存在无限多个正整数 n,使得 $S(n) = n^2 - 14$.

(第33届国际数学奥林匹克,1992年)

[证] (1) 假设命题不成立,即对某个 $n \geqslant 4$,有 $S(n) > n^2 - 14$,则存在 $k = n^2 - 13$ 个正整数 $a_1, a_2, \cdots, a_k$,使得

$$n^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2.$$

于是就有

$$\sum_{i=1}^{k}(a_j^2 - 1) = 13.$$

因为 a_i 为正整数,所以由上式可知,必有

$$0 \leqslant a_i^2 - 1 \leqslant 13,$$

从而 $a_i^2 - 1 \in \{0,3,8\}$.设在 $a_1^2 - 1,\ a_2^2 - 1,\ \cdots,\ a_k^2 - 1$ 中有 a 个0,b 个3和 c 个8,于是就有

$$3b + 8c = 13.$$

上式表明,c 只能为0或1,但在这两种情况下,上式都不存在非负整数 b,可见上述的假设不成立,所以对一切正整数 $n \geqslant 4$,都有

$$S(n) \leqslant n^2 - 14.$$

(2) 我们来证明,对 $n = 13$ 可以成立等式 $S(n) = n^2 - 14$.为此,先来证明两个引理.

引理1 对任何正整数 t,都可将 2^{2t} 表示成 $3t - 2$ 个正整数的平

方之和,其中,t 为满足条件 $1 \leqslant t \leqslant \frac{1}{3}(2^{2l}+2)$ 的任一正整数.

用归纳法 $l=1$ 时,断言显然成立.

假设 $l=m$ 时,断言已经成立;则当 $l=m+1$ 时,由于

$$2^{2(m+1)}=4\cdot 2^{2m}=2^{2m}+2^{2m}+2^{2m}+2^{2m},$$

所以由归纳假设知,对任何满足条件 $1 \leqslant t_i \leqslant \frac{1}{3}(2^{2m}+2)$ 的正整数 $t_i(i=1,2,3,4)$,都可以将 $2^{2(m+1)}$ 表示成

$$3(t_1+t_2+t_3+t_4)-8$$

个正整数的平方之和.让 t_1,t_2,t_3,t_4 遍历它们的取值范围,即知,可将 $3^{2(m+1)}$ 表示成 $3t-2$ 个正整数的平方之和,这里,t 是任一满足条件

$$2 \leqslant t \leqslant \frac{1}{3}[2^{2(m+1)}+2]$$

的正整数,又当 $t=1$ 时,显然可以表示,所以引理中的断言对 $l=m+1$ 也成立.

引理 2　对任何正整数 $n \geqslant 3$,都可将 n^2 表示成 k 个正整数的平方之和,这里,k 是任何一个满足条件 $4k \geqslant n^2, k \leqslant n^2-14$ 的正整数.

事实上,当 $k \equiv n^2 \pmod 3$ 时,可将 n^2 表示成 $\frac{1}{3}(n^2-k)$ 个 2^2 和 $\frac{1}{3}(4k-n^2)$ 个 1 之和;当 $k \equiv n^2-1 \pmod 3$ 时,可将 n^2 表示成 2 个 3^2,$\frac{1}{3}(n^2-k-1)-5$ 个 2^2 和 $\frac{1}{3}(4k-n^2+1)+3$ 个 1 的和;当 $k \equiv n^2-2 \pmod 3$ 时,可将 n^2 表示成 1 个 3^2,$\frac{1}{3}(n^2-k-2)-2$ 个 2^2 和 $\frac{1}{3}(4k-n^2+2)+1$ 个 1 之和.知引理 2 的断言成立.

下面来证明 $S(13)=13^2-14=155$.即要证明,对任何正整数 $k \leqslant 155$,都可将 $13^2=169$ 表示成 k 个正整数的平方之和.

(i) 当 $43 \leqslant k \leqslant 13^2-14$ 时,由于 $4k \geqslant 172 > 13^2$,故由引理 2 可知,可将 13^2 表示成 k 个正整数的平方和.

(ii) 当 $k=1$、2 时,由 $13^2=5^2+12^2$ 可知断言成立.

(iii) 当 $3 \leqslant k \leqslant 42$ 时,我们来分 3 种情况考虑:

若 $k \equiv 1 \pmod 3$，则由于

$$13^2 = 5^2 + 4^2 + 8^2 + 8^2,$$

故只要分别对两个 8^2 应用引理 1，即可知断言成立.

若 $k \equiv 2 \pmod 3$，则由于

$$13^2 = 3^2 + 4^2 + 4^2 + 8^2 + 8^2,$$

故只要分别对两个 4^2 和两个 8^2 应用引理 1，即可知断言成立.

若 $k \equiv 0 \pmod 3$，且 $k \leqslant 33$ 时，可由

$$13^2 = 3^2 + 4^2 + 12^2 = 3^2 + 4^2 + 3^3 \cdot 16$$

及引理 1，知断言成立，又当 $36 \leqslant k \leqslant 42$ 时，则由

$$13^2 = 3^2 + 4^2 + 6^2 + 3 \times (2^2 + 2 \cdot 4^2)$$

及引理 1，知断言成立.

综合上述各种情况，即知对一切正整数 $k \leqslant 155$，都可将 $13^2 = 169$ 表示成 k 个正整数的平方之和.

(3) 我们来证明，如果 $S(n) = n^2 - 14$，则有 $S(2n) = (2n)^2 - 14$，其中 $n \geqslant 13$.

首先，因为对于任何正整数 $1 \leqslant k \leqslant n^2 - 14$，都存在 k 个正整数 $a_1, a_2, \cdots, a_k$，使得

$$n^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2,$$

所以也就有

$$(2n)^2 = (2a_1)^2 + (2a_2)^2 + \cdots + (2a_k)^2,$$

可见对于这样的 k，$(2n)^2$ 都可以表示成 k 个正整数的平方之和.

其次，由于

$$(2n)^2 = n^2 + n^2 + n^2 + n^2,$$

故只要对 4 个 n^2 运用条件 $S(n) = n^2 - 14$，即知对任何正整数 $4 \leqslant k \leqslant 4(n^2 - 14)$，都可以将 $(2n)^2$ 表示成 k 个正整数的平方之和.

最后，对于任何正整数 $4(n^2 - 14) \leqslant k \leqslant 4n^2 - 14$，则因当 $n \geqslant 13$ 时，有

$$4k \geqslant 16(n^2 - 14) = 4n^2 + 2(6n^2 - 112) > (2n)^2,$$

故由引理 2 即知，对于这样的 k，都可以将 $(2n)^2$ 表示成 k 个正整数的平方之和.

综合上述，即知对于 $n \geqslant 13$，只要有 $S(n) = n^2 - 14$，则必有 $S(2n) = (2n)^2 - 14$，又因(2)中已证 $S(13) = 13^2 - 14$，所以存在无限

多个正整数 n,使得成立

$$S(n)=n^2-14.$$

2・102 实数 u,v 适合关系式

$$(u+u^2+u^3+\cdots+u^8)+10u^9=(v+v^2+v^3+\cdots+v^{10})+10v^{11}=8.$$

试确定 u 和 v 哪个较大?并证明你的结论.

(第 18 届美国数学奥林匹克,1989 年)

[**解**] 由给定关系式可知

$$u<1,v<1.$$

由 $(u+u^2+u^3+\cdots+u^8)+10u^9=8$ 得

$$\frac{u^9-u}{u-1}+10u^9=8.$$

去分母,并化简得

$$10u^{10}-9u^9-9u+8=0, \quad ①$$

类似地可得

$$10v^{12}-9v^{11}-9v+8=0, \quad ②$$

由 ① 和 ② 易知 $u>0,v>0$.因而

$$0<u<1,0<v<1.$$

令

$$f(x)=(x+x^2+x^3+\cdots+x^8)+10x^9-8$$

$$g(x)=(x+x^2+x^3+\cdots+x^{10})+10x^{11}-8.$$

显然,当 $x\geqslant0$ 时,$f(x)$ 和 $g(x)$ 都是严格递增函数.由于

$$f(0)=-8<0,f(1)=10>0,$$

$$g(0)=-8<0,g(1)=12>0,$$

因此 u,v 分别是方程 $f(x)=0$ 和 $g(x)=0$ 在区间$(0,1)$上的惟一的根.

由 ① 式可知,u 是

$$f_1(x)=(10x-9)(x^9-1)+x-1=0$$

在$(0,1)$上的根.由于 $f_1(0)=8>0$ 且 $f_1\left(\frac{9}{10}\right)=-\frac{1}{10}<0$,因此

$$0<u<\frac{9}{10}.$$

又 $g(u) = (u + u^2 + u^3 + \cdots + u^{10}) + 10u^{11} - 8$

$$= f(u) - 9u^9 + u^{10} + 10u^{11}$$

$$= u^9(10u^2 + u - 9)$$

$$< u^9\left(\frac{81}{10} + \frac{9}{10} - 9\right)$$

$$= 0.$$

即 $g(u) < 0, g(1) > 0$. 因此 v 在区间 $(u,1)$ 上,从而有 $u < v$.

2·103 用94块大小尺寸均为 $4 \times 10 \times 19$ 的砖一块放在一块的上面堆积成一个94块砖高的塔,其中每块砖可以随意摆放为塔提供4或10或19的高度.若94块砖全部用上,可摆放多少种不同高度的塔(高度单位为英寸)?

(第12届美国数学邀请赛,1994年)

[解] 因为

$$10 \times 5 = 19 \times 2 + 4 \times 3,$$

也就是说,5块砖中的每一块都为塔提供高度10,共为塔提供高度50,而5块砖中的每一块都不为塔提供高度10,也能为塔提供高度50.所以,我们不妨设94块砖中,为塔提供高度10的砖块数不大于4.

设有 x 块砖各提供高度19, y 块砖各提供高度 $10(0 \leqslant y \leqslant 4)$,则有 $94 - x - y$ 块砖各提供高度4.这样,塔高为

$$4(94 - x - y) + 19x + 10y = 376 + 15x + 6y.$$

由 $x + y \leqslant 94$,得 $0 \leqslant x \leqslant 94 - y$

当 $y = 0$ 时, x 有95种取法;

当 $y = 1$ 时, x 有94种取法;

当 $y = 2$ 时, x 有93种取法;

当 $y = 3$ 时, x 有92种取法;

当 $y = 4$ 时, x 有91种取法.

因此,塔最多有

$$95 + 94 + 93 + 92 + 91 = 465(\text{种})$$

不同的高度.

下面来证明这465种高度两两不同.

若有序对 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 所给的塔的高度一样,则有

$$376 + 15x_1 + 6y_1 = 376 + 15x_2 + 6y_2,$$

即 $$6(y_1-y_2)=15(x_2-x_1),$$
$$2(y_1-y_2)=5(x_2-x_1).$$

可见 y_1-y_2 是5的倍数.但 $|y_1-y_2|\leqslant 4$,因此 $y_1-y_2=0$,即 $y_1=y_2$,从而有 $x_1=x_2$.

这说明,不同的有序对一定对应不同的高度,从而这465种高度两两不同.

综上所述,总共可摆放465种不同高度的塔.

2·104 设 $n\geqslant 2,x_1,x_2,\cdots,x_n$ 均为实数,且
$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}=1.$$
对于每一个固定的 $k(k\in N,1\leqslant k\leqslant n)$,求 $|x_k|$ 的最大值.

(中国中学生数学冬令营,1998年)

[解] 记 $s=\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}$,则
$$s=\left(x_1+\frac{1}{2}x_2\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2+\sum_{i=2}^{n-1}x_ix_{i+1}+\sum_{i=3}^{n}x_i^2$$
$$=\left(x_1+\frac{1}{2}x_2\right)^2+\left(\sqrt{\frac{3}{4}}x_2+\frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{3}{4}}}x_3\right)^2+\left(1-\frac{1}{4\cdot\frac{3}{4}}\right)x_3^2$$
$$+\sum_{i=3}^{n-1}x_ix_{i+1}+\sum_{i=4}^{n}x_i^2$$
记 $a_1=1,a_2=\dfrac{3}{4},a_i=1-\dfrac{1}{4a_{i-1}}(i=2,3,\cdots,n)$

用归纳法易得
$$a_i=\frac{i+1}{2i},i=1,2,\cdots,n$$
因此
$$1-a_i=1-\frac{i+1}{2i}=\frac{i-1}{2i},$$
$$s=(\sqrt{a_1}x_1+\sqrt{1-a_2}x_2)^2+(\sqrt{a_2}x_2+\sqrt{1-a_3}x_3)^2+\cdots+(\sqrt{a_{n-1}}x_{n-1}+\sqrt{1-a_n}x_n)^2+a_nx_n^2$$
由于 $s=1$,因此

$$a_n x_n^2 \leqslant 1,$$

$$|x_n| \leqslant \sqrt{\frac{2n}{n+1}}.$$

易知 $$\max|x_n| = \sqrt{\frac{2n}{n+1}}.$$

同理

$$\max|x_1| = \sqrt{\frac{2n}{n+1}}.$$

当 $1 < k < n$ 时,

$$s = (\sqrt{a_1}x_1 + \sqrt{1-a_2}x_2)^2 + \cdots + (\sqrt{a_{k-1}}x_{k-1} + \sqrt{1-a_k}x_k)^2 + (\sqrt{a_1}x_n + \sqrt{1-a_2}x_{n-1})^2 + \cdots + (\sqrt{a_{n-k}}x_{k+1} + \sqrt{1-a_{n-k+1}}x_k)^2 + [1-(1-a_k)-(1-a_{n-k+1})]x_k^2,$$

其中

$$\begin{aligned}
&1-(1-a_k)-(1-a_{n-k+1}) \\
&= a_k + a_{n-k+1} - 1 \\
&= \frac{k+1}{2k} + \frac{n-k+2}{2(n-k+1)} - 1 \\
&= \frac{n+1}{2k(n-k+1)},
\end{aligned}$$

所以 $$|x_k| \leqslant \sqrt{\frac{2k(n-k+1)}{n+1}},$$

易知

$$\max|x_k| = \sqrt{\frac{2k(n-k+1)}{n+1}}.$$

2·105　设 k, m, n 是整数,并满足 $1 < n \leqslant m-1 \leqslant k$.试求集合 $\{1,2,\cdots,k\}$ 的子集 s 的最大阶,使得在 s 中,任何 n 个不同元素之和都不等于 m.

(第 37 届国际数学奥林匹克预选题,1996 年)

[解]　当 $m < \frac{n(n+1)}{2}$ 时,$\{1,2,\cdots,k\}$ 中任意 n 个不同元素之和都不小于 $1+2+\cdots+n$,即不小于 $\frac{n(n+1)}{2}$,从而都不等于 m.因此,此时 s 的最大阶为 k.

当 $m \geqslant \frac{n(n+1)}{2}$ 时,设 l 是满足

$$(l+1)+(l+2)+\cdots+(l+n)>m$$

的最小自然数.则集合$\{l+1,l+2,\cdots,k\}$中任何 n 个不同元素之和都大于 m.又由

$$nl+\frac{n(n+1)}{2}>m$$

得
$$l>\frac{m}{n}-\frac{n+1}{2},$$

$$l=\left[\frac{m}{n}-\frac{n+1}{2}\right]+1=\left[\frac{m}{n}-\frac{n-1}{2}\right]$$

于是此时 s 的最大阶 $\geqslant k-l=k-\left[\frac{m}{n}-\frac{n-1}{2}\right]$.

下面证明:当 $m \geqslant \frac{n(n+1)}{2}$ 时,对任何 $s \subseteq \{1,2,\cdots,k\}$,若 $|s|>k-l$,则存在 s 中 n 个不同的数,它们的和等于 m.

用反证法.

假设存在 $s \subseteq \{1,2,\cdots,k\}$, $|s|>k-l$, s 中任何 n 个不同元素之和都不等于 m.设

$$X=\{A \mid A \subset \{1,2,\cdots k\},\ |A|=n, \sum_{i \in A} i=m\},$$

$$X_j=\{A \mid A \subset \{1,2,\cdots k\},\ |A|=n, j \in A, \sum_{i \in A} i=m\}.$$

设 $t=k-|s|$,则 $t<l$.设

$$\{1,2,\cdots,k\} \setminus s=\{x_1,x_2,\cdots,x_t\}.$$

于是,我们有

$$X_{x_1} \cup X_{x_2} \cup \cdots \cup X_{x_t}=X,$$

$$|X_{x_1} \cup X_{x_2} \cup \cdots \cup X_{x_t}|=|X|. \quad ①$$

接下来证明:

$$|X_{x_1} \cup X_{x_2} \cup \cdots \cup X_{x_t}| \leqslant |X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_t| \quad ②$$

不妨设 $x_1<x_2<\cdots<x_t$.

若$\{x_1,x_2,\cdots,x_t\}=\{1,2,\cdots,t\}$,则②式显然成立.

若$\{x_1,x_2,\cdots,x_t\} \neq \{1,2,\cdots,t\}$.设 b 为不在$\{x_1,x_2,\cdots,x_t\}$中的最小自然数,则

$$|X_{x_1}\cup X_{x_2}\cup\cdots\cup X_{x_t}|\leqslant|X_{x_1}\cup X_{x_2}\cup\cdots\cup X_{x_{t-1}}\cup X_6|\ ③$$

事实上,

③$\Leftrightarrow |X_{x_t}\setminus(X_{x_1}\cup X_{x_2}\cup\cdots\cup X_{x_{t-1}})|\leqslant|X_b\setminus(X_{x_1}\cup X_{x_2}\cup\cdots\cup X_{x_{t-1}})|$

记

$$y_1=X_{x_t}\setminus(X_{x_1}\cup X_{x_2}\cup\cdots\cup X_{x_{t-1}}),$$
$$y_2=X_b\setminus(X_{x_1}\cup X_{x_2}\cup\cdots\cup X_{x_{t-1}}).$$

任取 $A\in y_1$,设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,$a_1,<a_2<\cdots<a_n$.则 $x_t\in A$, $x_1,x_2,\cdots,x_{t-1}\overline{\in}A$.

若 $b\in A$,则 $A\in y_2$

若 $b\overline{\in}A$,$x_t=a_n$.则因为小于 b 的自然数都属于 $\{x_1,x_2,\cdots,x_t\}$,而 $a_1\overline{\in}\{x_1,x_2,\cdots,x_t\}$

故 $b\leqslant a_1$,但 $b\in A$,故 $b<a_1$.于是

$\{a_1,a_2,\cdots,a_{n-2},b,a_{n-1}+a_n-b\}\in y_2$.

若 $b\overline{\in}A$,$x_t=a_r$,$1\leqslant r\leqslant n-1$.则 $b<a_1$,

$\{a_1,\cdots,a_{r-1},a_{r+1},\cdots,a_{n-1},b,a_n+a_r-b\}\in y_2$.

这样,就建立了一个从 y_1 到 y_2 的映射.容易看出,它是单射.所以

$$|y_1|\leqslant|y_2|.$$

故③式成立.

若 $\{x_1,x_2,\cdots,x_{t-1},b\}=\{1,2,\cdots,t\}$,则②式已经成立.若 $\{x_1,x_2,\cdots,x_{t-1},b\}\neq\{1,2,\cdots,t\}$,则可重复上面的过程,至多经过七步后可得到集合 $\{1,2,\cdots,t\}$,于是②式成立.

再结合①式,有

$$|X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_t|\geqslant|X|.$$

但 $X_i\subseteq X$,$i=1,2,\cdots,t$,故

$$X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_t\subseteq X,$$

于是,我们有

$$X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_t=X.$$

上式表明,集合 $\{t+1,t+2,\cdots,k\}$ 中不存在 n 个不同的数,它们的和为 m.

另一方面,注意到 $t<l$,$k\geqslant m-1$,我们有

$$m-(n-1)t-\frac{n(n-1)}{2}\leqslant m-1\leqslant k,$$

又由于

$$\begin{aligned}m-\frac{n(n-1)}{2}&=n\left(\frac{m}{n}-\frac{n-1}{2}\right)\\&\geqslant n\left[\frac{m}{n}-\frac{n-1}{2}\right]\\&=nl\\&>nt+n-1\\&=(n-1)t+t+n-1,\end{aligned}$$

因此可知

$$m-(n-1)t-\frac{n(n-1)}{2}>t+n-1,$$

从而 $t+1,t+2,\cdots,t+n-1,m-(n-1)t-\frac{n(n-1)}{2}$ 是集合 $\{t+1,t+2,\cdots,k\}$ 中的不同的 n 个数,且

$$(t+1)+(t+2)+\cdots+(t+n-1)+\left[m-(n-1)t-\frac{n(n-1)}{2}\right]$$
$$=m,$$

矛盾.

故当 $m\geqslant\frac{n(n+1)}{2}$ 时,集合 S 的最大阶为 $k-\left[\frac{m}{n}-\frac{n-1}{2}\right]$.

综上所述,我们有

$$S\text{ 的最大阶}=\begin{cases}k,\text{当 } m<\frac{n(n+1)}{2}\text{ 时},\\ k-\left[\frac{m}{n}-\frac{n-1}{2}\right],\text{当 } m\geqslant\frac{n(n+1)}{2}\text{ 时}.\end{cases}$$

2·106　对平面中每个非零向量有限集 U,定义 $l(U)$ 为 U 中所有向量的和向量的长度.已知平面中一个非零向量有限集 V,如果对 V 的每个非空子集 A, $l(B)$ 大于或等于 $l(A)$,则 V 的子集 B 被说成是最大的.

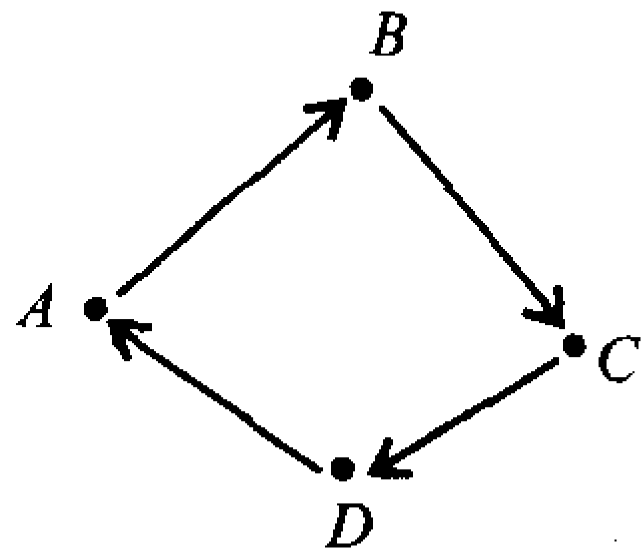
(a) 构造 4 和 5 个向量的集合,分别有 8 和 10 个最大子集;

(b) 证明:对任何由 $n\geqslant1$ 个向量组成的集合 V,最大子集的数目

小于或等于 $2n$.

（第 38 届国际数学奥林匹克预选题,1997 年）

[**解**] (a) 对于 $n=4$, 考虑四边形 $ABCD$,其中 $AB=BC=CA=DB, AD=DC$(如图所示).取向量$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DA}$.



令 $V=\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DA}\}$

则 V 有 8 个最大子集,它们分别是:$\{\overrightarrow{AB}\}$,

$\{\overrightarrow{BC}\}$,$\{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DA}\}$,$\{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{BC}\}$,$\{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{AB}\}$,$\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\}$,$\{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DA},\overrightarrow{AB}\}$,

$\{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DA},\overrightarrow{BC}\}$.

对于 $n=5$,考虑正五边形 $ABCDE$,令

$$V=\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DE},\overrightarrow{EA}\}$$

则 V 有 10 个最大子集,它们分别是:

$\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\}$,$\{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD}\}$,$\{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DE}\}$,$\{\overrightarrow{DE},\overrightarrow{EA}\}$,$\{\overrightarrow{EA},\overrightarrow{AB}\}$,

$\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD}\}$,$\{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DE}\}$,$\{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DE},\overrightarrow{EA}\}$,$\{\overrightarrow{DE},\overrightarrow{EA},\overrightarrow{AB}\}$,

$\{\overrightarrow{EA},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\}$.

(b) 显然,如果两个非零向量 u 和 v 的夹角是锐角或直角,那么

$$|u+v|>\max(|u|,|v|),$$

其中 $|w|$ 表示 w 的长度.

选择一定点 O,从 O 出发画出集合 V 中的所有向量.设$\{u_1,u_2,\cdots,u_k\}$是 V 的最大子集,且

$$u=u_1+u_2+\cdots+u_k.$$

过 O 作与向量u 垂直的直线l,我们来证明:$u_1,u_2,\cdots,u_k$ 都在l 的同一侧.

事实上,l 上不可能有 V 中的向量.因为在 l 上如果有 V 中的向量 w,那么就有

$$|u\pm w|=|u_1+u_2+\cdots+u_k\pm w|>|u|,$$

此与$\{u_1,u_2,\cdots,u_k\}$ 作为 V 的最大子集的定义矛盾.

直线 l 将平面分成两部分.设 H 为u 所在的那一部分(半平面).位

于 H 上的 V 的所有向量都属于最大子集 $\{u_1,u_2,\cdots,u_k\}$，因为它们都与 u 构成锐角，如果不属于该子集，那么包括它们就会增加 u 的长度. 不位于 H 上的 V 的所有向量都不属于最大子集 $\{u_1,u_2,\cdots,u_k\}$，因为它们都与 u 构成钝角，如果属于该子集，那么从该子集中去掉它们，就会增加 u 的长度.

因此，最大子集一定是过 O 点的直线 l 某一侧的全部向量所组成.

显然，由这样的方式确定的子集最多 $2n$ 个，所以，由 n 个向量组成的集合 V 的最大子集的数目小于或等于 $2n$.

2·107　设自然数 $n\geqslant 5$，n 个不同的自然数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 有下列性质：对集合

$$S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$$

的任何两个不同的非空子集 A 和 B，A 中所有数的和与 B 中所有数的和都不会相等. 在上述条件下，求

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$$

的最大值.

（中国上海市高中数学竞赛，1994 年）

［**解**］　不妨设 $a_1<a_2<\cdots<a_n$.

先证明对任意自然数 $k\leqslant n$，都有

$$\sum_{i=1}^{k}a_k\geqslant 2^k-1. \quad ①$$

用反证法.

若 $\sum\limits_{i=1}^{k}a_k<2^k-1$，则 $\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$ 的每个非空子集的元素和不超过 2^k-2. 但 $\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$ 有 2^k-1 个非空子集，根据抽屉原则，必有两个非空子集的元素和相等，这与题设矛盾. 故所证结论 ① 成立.

接着证明：

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\leqslant 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=2-\frac{1}{2^{n-1}} \quad ②$$

事实上，

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$$

$$= \frac{a_1 - 1}{a_1} + \frac{a_2 - 2}{2a_2} + \cdots + \frac{a_n - 2^{n-1}}{2^{n-1}a_n},$$

令 $C_i = \dfrac{1}{2^{i-1}a_i}, d_i = a_i - 2^{i-1}, D_k = \sum_{i=1}^{k} d_i.$

显然 $C_1 > C_2 > \cdots > C_n, D_k = \sum_{i=1}^{k} a_i - (1 + 2 + \cdots + 2^{k-1})$

$$= \sum_{i=1}^{k} a_i - (2^k - 1) \geqslant 0,$$

于是我们有

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} - \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i d_i$$

$$= C_1 D_1 + C_2(D_2 - D_1) + \cdots + C_n(D_n - D_{n-1})$$

$$= (C_1 - C_2)D_1 + (C_2 - C_3)D_2 + \cdots + (C_{n-1} - C_n)D_{n-1} + C_n D_n$$

$$\geqslant 0,$$

故 ② 式得证.

注意到,当 $S = \{1, 2, 2^2, \cdots, 2^{n-1}\}$ 时,题设条件成立.此时有

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

因此所求的最大值是 $2 - \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

2·108　某班共有 30 名学生,每一名学生在班内都有同样多的朋友.试问:比自己的大多数朋友的成绩都要好的学生最多可能有多少名(假定对该班任意两个学生的成绩,都可以比出谁好谁差)?

(第 20 届俄罗斯数学奥林匹克决赛,1994 年)

[解]　答案:25 名.

事实上,将比自己的大多数班内朋友的成绩都要好的学生称为"好学生".设该班共有 x 名好学生,每个学生在班内都有 k 个朋友.

显然,班上成绩最好的学生在 k 个"朋友对"中都是成绩好的;又由已知,其余每个"好学生"至少在 $\left[\dfrac{k}{2}\right] + 1 \geqslant \dfrac{k+1}{2}$ 个"朋友对"中都是

成绩好的.因此,“好学生”们至少在

$$k+(x-1)\cdot\frac{k+1}{2}$$

个“朋友对”中是成绩好的.但班内所有“朋友对”的总数为$\frac{30k}{2}=15k$,所以

$$k+(x-1)\frac{k+1}{2}\leqslant 15k,$$

$$x\leqslant 28\cdot\frac{k}{k+1}+1. \qquad ①$$

注意到比班内最差的“好学生”成绩还差的学生至多$30-x$个,因此

$$\frac{k+1}{2}\leqslant 30-x,$$

$$k\leqslant 59-2x. \qquad ②$$

由①和②可得

$$x\leqslant 28\cdot\frac{59-2x}{60-2x}+1$$

即 $$x^2-59x+856\geqslant 0 \qquad ③$$

注意到$x\leqslant 30$,于是可知满足③式的最大整数$x=25$.即“好学生”的总数不超过25.

另一方面,可将全班学生按成绩从好到差编为1至30号,并将1至30号列成一个6×5的数表(如图).如果班内两个学生是朋友当且仅当他们的号码在表中属于以下三种情况之一:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30

(1) 处于相邻的行不同的列中;

(2) 处于同一列且其中一位在该列最下端;

(3) 同在最上面一行.

这时,班内每人各有9个朋友.而1至25号中的每个人都比他的5个朋友的成绩好.此时,“好学生”的总数为25人.

综上所述,比自己的大多数朋友的成绩都要好的学生最多是25名.

2·109 设 $S=\{A=(a_1,\cdots,a_8)\mid a_i=0$ 或 $1,i=1,2,\cdots,8\}$. 对于 S 中的两个元素 $A=(a_1,\cdots,a_8)$ 和 $B=(b_1,\cdots,b_8)$,记

$$d(A,B)=\sum_{i=1}^{8}|a_i-b_i|,$$

并称其为 A 和 B 之间的距离.问 S 中最多能取出多少元素,它们之中任何两个的距离 $\geqslant 5$?

(中国国家队选拔赛,1995 年)

[解] S' 是 S 的子集,并且 S' 中的任何两个元素之间的距离 $\geqslant 5$.设 $A=(a_1,\cdots,a_8)$ 和 $B=(b_1,\cdots,b_8)$ 是 S' 中的两个元素,记

$$\omega(A)=\sum_{i=1}^{8}a_i,\omega(B)=\sum_{i=1}^{8}b_i.$$

显然 $\omega(A),\omega(B)$ 分别表示 A,B 中的 1 的个数.

如果 $\omega(A)+\omega(B)\geqslant 12$,

那么 A 和 B 中至少有 4 个 1 的位置相同,从而

$$d(A,B)\leqslant 8-4=4,$$

与 S' 的定义矛盾.因此必有

$$\omega(A)+\omega(B)\leqslant 11.$$

从上式可知,在集合 S' 的元素中,最多只有一个元素里的 1 的个数 $\geqslant 6$.

不妨设 $(0,0,0,0,0,0,0,0)\in S'$.(因为可以将 S' 内的每一个元素的第 i 个分量同时由 1 变 0 或由 0 变 1,不改变 S' 的性质)

这样,S' 中的其他元素中 1 的个数都 $\geqslant 5$.如果 S' 中有两个 1 的个数等于 5 的元素,那么由 $5+5-8=2$ 可知,这两个元素至少有两个相同的分量位置上都是 1.又因为这两个元素的距离 $\geqslant 5$,所以这两个元素至多有两个相同的分量位置上都是 1.综上所述,S' 中任意两个 1 的个数等于 5 的元素恰在两个相同的分量位置上都是 1.因此,S' 中至多有两个 1 的个数等于 5 的元素.

由上面的讨论可知,S' 中至多有 4 个元素.其中一个为全为零的元素,一个是 1 的个数 $\geqslant 6$ 的元素,2 个是 1 的个数 $=5$ 的元素.

另一方面,S' 可以由以下 4 个元素构成:

$(0,0,0,0,0,0,0,0)$,

$(1,1,1,0,0,1,1,1)$,

(1,1,1,1,1,0,0,0),

(0,0,0,1,1,1,1,1).

故在 S 中最多能取出 4 个元素,它们之中任何两个的距离 $\geqslant 5$.

2·110 设正实数的数列 $x_0,x_1,\cdots,x_{1995}$ 满足以下两个条件:

(1) $x_0=x_{1995}$;

(2) $x_{i-1}+\dfrac{2}{x_{i-1}}=2x_i+\dfrac{1}{x_i}, i=1,2,\cdots,1995.$

求所有满足上述条件的数列中,x_0 的最大值.

(第 36 届国际数学奥林匹克,1995 年)

[**解**] 由条件(2)可知

$$x_i^2-\left(\frac{x_{i-1}}{2}+\frac{1}{x_{i-1}}\right)x_i+\frac{1}{2}=0,$$

$$\left(x_i-\frac{x_{i-1}}{2}\right)\left(x_i-\frac{1}{x_{i-1}}\right)=0,$$

$$x_i=\frac{x_{i-1}}{2} \text{ 或 } x_i=\frac{1}{x_{i-1}}.$$

把 x_{i-1} 变为 $x_i=\dfrac{x_{i-1}}{2}$ 的变换称为第一类变换,把 x_{i-1} 变为 $x_i=\dfrac{1}{x_{i-1}}$ 的变换称为第二类变换.如果从 x_0 开始,共历经 $k-t$ 次第一类变换和 t 次第二类变换得到 x_k.注意到,如果两个第一类变换之间相隔奇数次第二类变换,那么这两个第一类变换的作用彼此抵消了.因此

$$x_k=2^s x_0{}^{(-1)^t}$$

其中 $S\equiv k-t \pmod 2$.

当 $k=1995$ 时,如果 t 是偶数,则

$$\begin{cases} x_0=x_{1995}=2^s\cdot x_0, \\ S\equiv 1995 \pmod 2). \end{cases}$$

即 $\begin{cases} 2^s=1, \\ S \text{ 是奇数}. \end{cases}$

这显然是不可能的.所以 t 是奇数.从而有

$$x_0=2^s\cdot\frac{1}{x_0},$$

$$x_0=2^{\frac{s}{2}}.$$

因为 S 是偶数,所以

$S \leqslant |s| \leqslant 1994$,

$x_0 \leqslant 2^{997}$.

另一方面,我们有数列 $x_0, x_1, \cdots, x_{1995}$,其中 $x_0 = 2^{997}, x_i = \frac{x_{i-1}}{2}(i = 1,2,\cdots,1994)$

$$x_{1995} = \frac{1}{x_{1994}} = \frac{1}{\frac{2^{997}}{2^{1994}}} = 2^{997} = x_0.$$

综上所述,x_0 的最大值为 2^{997}.

2·111 n 是一个正整数,A 是集合$\{1,2,\cdots,n\}$的子集的一个集合,使得 A 内无元素包含 A 的其他元素,求 A 的全部元素的个数的最大值.

(保加利亚数学奥林匹克,1994 年)

[解] 考虑 n 个元素 $1,2,\cdots,n$ 的全排列.显然,这个全排列的种数是 $n!$个.

设 A 中有 f_k 个 k 元子集作为元素,这里 $f_k(k = 1,2,\cdots,n)$ 是非负整数.用 $|A|$ 表示 A 的元素个数,则

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} f_k$$

当 $f_k > 0$ 时,对于 f_k 个 k 元子集中的任何一个子集$\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$,在 $1,2,\cdots,n$ 的全排列中,取出前 k 个元素恰组成子集$\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$的全排列,共有 $k!(n-k)!$个.

由于 A 中任意两个元素互不包含,因此对于 A 内的所有元素,用上述方法取出的全排列必然两两不同.于是,我们有

$$\sum_{k=1}^{n} f_k \cdot k!(n-k)! \leqslant n!.$$

注意到,若正整数 n 固定,则当 $k = \left[\frac{n}{2}\right]$时,$C_n^k$ 达到最大值,我们有

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} f_k \leqslant C_n^{[\frac{n}{2}]} \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k}{C_n^k}$$

$$= C_n^{[\frac{n}{2}]} \cdot \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} f_k \cdot k!(n-k)!$$

$\leqslant C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$.

当 A 取 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中全部 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 元子集组成的集合时，恰达到 $|A|=C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$.

综上所述，A 的元素个数的最大值为 $C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$（其中 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 表示不超过 $\frac{n}{2}$ 的最大整数）.

第三章　等式

第1节　求值

3·1　试化简：

$$\log_a\left[\left(\frac{m^4n^{-4}}{m^{-1}n}\right)^{-3}\div\left(\frac{m^{-2}n^2}{mn^{-1}}\right)^5\right]$$

这里 m、n 和 a 都是正数，$a\neq 1$.

（中国北京市数学竞赛，1964年）

［解］

$$\log_a\left[\left(\frac{m^4n^{-4}}{m^{-1}n}\right)^{-3}\div\left(\frac{m^{-2}n^2}{mn^{-1}}\right)^5\right]$$
$$=\log_a[(m^5n^{-5})^{-3}\div(m^{-3}n^3)^5]$$
$$=\log_a(m^{-15}n^{15}\div m^{-15}n^{15})$$
$$=\log_a 1$$
$$=0.$$

3·2　求 $1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+\cdots+(n-1)(n-1)!+n\cdot n!$ 的和，这里 $n!=n(n-1)(n-2)\cdots2\cdot1$.

（第1届加拿大数学奥林匹克，1969年）

［解］　因为 $k\cdot k!=(k+1)!-k!\quad k=1,2,3,\cdots$

所以

$$1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+\cdots+(n-1)(n-1)!+n\cdot n!$$
$$=(2!-1!)+(3!-2!)+\cdots+[n!-(n-1)!]+[(n+1)!-n!]$$

$= (n+1)! - 1.$

3·3 化简分式 $\dfrac{x^8+x^6+x^4+x^2+1}{x^4+x^3+x^2+x+1}$,并计算它在 $x=-0.02$ 时分式的值.

（基辅数学奥林匹克,1936 年）

[解] 原式 $= \dfrac{x^{10}-1}{x^2-1} \div \dfrac{x^5-1}{x-1}$

$$= \frac{x^5+1}{x+1}$$

$$= x^4 - x^3 + x^2 - x + 1.$$

当 $x=-0.02$ 时,

$$原式 = \frac{312499999}{306250000}.$$

3·4 化简分式 $\dfrac{x^8+x^6y^2+x^4y^4+x^2y^6+y^8}{x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4}$,并计算 $x=0.01, y=0.02$ 时分式的值.

（基辅数学奥林匹克,1936 年）

[解] 原式 $= \dfrac{x^{10}-y^{10}}{x^2-y^2} \div \dfrac{x^5-y^5}{x-y}$

$$= \frac{x^5+y^5}{x+y}$$

$$= x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4.$$

当 $x=0.01, y=0.02$ 时,

$$原式 = \frac{(0.01)^5+(0.02)^5}{0.01+0.02}$$

$$= \frac{11}{100^4}$$

$$= 11 \times 10^{-8}.$$

3·5 化简分式 $\dfrac{a+a^2+a^3+\cdots+a^m}{a^{-1}+a^{-2}+a^{-3}+\cdots+a^{-m}}$.

（基辅数学奥林匹克,1953 年）

[解] 原式 $= \dfrac{a^m \cdot a(1+a+a^2+\cdots+a^{m-1})}{a^m(a^{-1}+a^{-2}+a^{-3}+\cdots+a^{-m})}$

$$= \frac{a^{m+1}(1 + a + a^2 + \cdots + a^{m-1})}{a^{m-1} + a^{m-2} + \cdots + a^2 + a + 1}$$
$$= a^{m+1}.$$

3·6　计算：$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k \frac{1}{k+1}$.

（第 6 届朝鲜数学奥林匹克，1992 年）

[解]　用二项式展开

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k \frac{1}{k+1}$$
$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{n!}{(n-k)!(k+1)!}$$
$$= \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1} \frac{n!}{(n+1-k)!k!}$$
$$= -\frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1} \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!k!}$$
$$= \frac{-1}{n+1} \cdot \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1} C_{n+1}^k$$
$$= \frac{-1}{n+1} \left\{ \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k C_{n+1}^k - 1 \right\}$$
$$= \frac{1}{n+1}.$$

3·7　若$0 < x < 1$，化简：

$$\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} + \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2} + x - 1}\right) \times \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} - \frac{1}{x}\right).$$

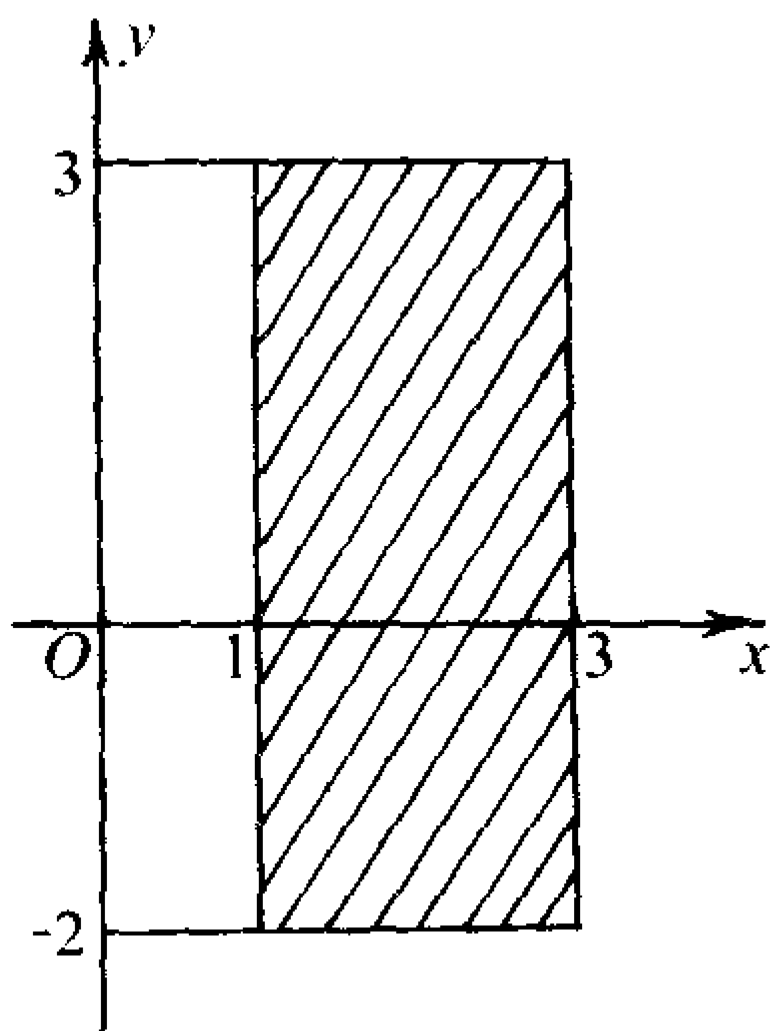
（中国北京市数学竞赛，1957 年）

[解]　原式$= \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{x}$

$$= \frac{(\sqrt{1+x})^2 - (\sqrt{1-x})^2}{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})^2} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{x}$$
$$= \frac{2x}{2 - 2\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{x}$$
$$= -1.$$

3·8 (1) 化简：$|a|-2a+|-a|$；

(2) 求出图中画线部分点的坐标范围(包括阴影边界)，用不等式表示出来.



(中国上海市数学竞赛，1960 年)

[解] (1) 当 $a\geqslant 0$ 时，

$|a|-2a+|-a|=a-2a+a=0$，

当 $a<0$ 时，

$|a|-2a+|-a|=-a-2a-a$

$=-4a$.

(2) $\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 3,\\-2\leqslant y\leqslant 3.\end{cases}$

3·9 已知数 α 和 β 满足如下二等式：

$\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha=1,\beta^3-3\beta^2+5\beta=5$，试求 $\alpha+\beta$.

(第 25 届全苏数学奥林匹克，1991 年)

[解] 设 $f(x)=x^3-3x^2+5x$

$=(x-1)^3+2(x-1)+3.$

则已知二等式的左端分别为 $f(\alpha)$ 和 $f(\beta)$，令

$$g(y)=y^3+2y,$$

则 $g(\alpha-1)=f(\alpha)-3=-2,$

且 $g(\beta-1)=f(\beta)-3=2.$

又由于 $g(y)$ 是奇函数，又是增函数，因此我们有

$$\alpha-1=-(\beta-1).$$

亦即 $\alpha+\beta=2.$

3·10 求使 $(n-1)!$ 不能被 n^2 整除的一切奇自然数 n.

(第 4 届全俄数学奥林匹克，1964 年)

[解] 如果 n 能表示为 $n=ab$，其中 $a\geqslant 3,b\geqslant 3,a\neq b$，那么 a、$2a$ 及 b、$2b$ 是乘积 $1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(n-1)$ 的因子，所以 $(n-1)!$ 能被 $a^2b^2=n^2$ 整除.

如果 $n=a^2,a\geqslant 3$，那么 $a^2-1\geqslant 4a$ 时，$a,2a,3a$ 和 $4a$ 是乘积 $(a^2-1)!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots(a^2-1)$ 中的因子，因此 $(a^2-1)!$ 能被 $a^4=n^2$ 整除(当 $a\geqslant 5$ 时，不等式 $a^2-4a-1\geqslant 0$ 成立).

因 $n=1$ 显然不满足本题要求,所以只剩两种可能:n 为素数以及 $n=9$.

容易验证,在这两种情况下,$(n-1)!$都不能被 n^2 整除.因此本题的解为 n 是素数或9.

3·11　化简:$\dfrac{1-x-x^2+x^3}{1-2|x|+x^2}$.

（中国上海市数学竞赛,1960年）

[解]　分子 $=(1-x)-x^2(1-x)=(1-x)^2(1+x)$.

$$分母=\begin{cases}1-2x+x^2=(1-x)^2, & (当\ x\geqslant 0\ 时)\\ 1+2x+x^2=(1+x)^2. & (当\ x<0\ 时)\end{cases}$$

$$故\quad 原式=\begin{cases}\dfrac{(1-x)^2(1+x)}{(1-x)^2}=1+x(当\ x\geqslant 0\ 时)\\ \dfrac{(1-x)^2(1+x)}{(1+x)^2}=\dfrac{(1-x)^2}{1+x}.(当\ x<0\ 时)\end{cases}$$

3·12　试求和:

$$S=m!+\frac{(m+1)!}{1!}+\frac{(m+2)!}{2!}+\cdots+\frac{(m+n)!}{n!}.$$

（中国北京市数学竞赛,1962年）

[解]　$$S=m!+\frac{(m+1)!}{1!}+\frac{(m+2)!}{2!}+\cdots+\frac{(m+n)!}{n!}$$

$$=m!\left[1+\frac{m+1}{1!}+\frac{(m+2)(m+1)}{2!}+\cdots+\frac{(m+n)(m+n-1)\cdots(m+2)(m+1)}{n!}\right]$$

$$=m!(C_m^0+C_{m+1}^1+C_{m+2}^2+\cdots+C_{m+n}^n),$$

利用组合恒等式　$C_s^{r-1}+C_s^r=C_{s+1}^r$,

即　$C_s^r=C_{s+1}^r-C_s^{r-1}$.

于是有　$C_m^0=C_{m+1}^0$,

$C_{m+1}^1=C_{m+2}^1-C_{m+1}^0$,

$C_{m+2}^2=C_{m+3}^2-C_{m+2}^1$,

……

$C_{m+n}^n=C_{m+n+1}^n-C_{m+n}^{n-1}$,

将各式相加即得

$$C_{m0}^{0}+C_{m+1}^{1}+C_{m+2}^{2}+\cdots+C_{m+n}^{n}=C_{m+n+1}^{n},$$

故 $$S=m!C_{m+n+1}^{n}=\frac{(m+n+1)!}{(m+1)\cdot n!}.$$

3·13 试证:如果 x,y,z 是不同的整数,而 n 是非负的整数,则

$$\frac{x^n}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^n}{(y-x)(y-z)}+\frac{z^n}{(z-x)(z-y)}$$ 是整数.

(匈牙利数学奥林匹克,1964 年)

[证] 将原式通分后变成

$$\frac{x^n(y-z)+y^n(z-x)+z^n(x-y)}{(x-y)(x-z)(y-z)} \quad ①$$

当 $n=0,1$ 时,① 式的分子为 0.

当 $n\geqslant 2$ 时,① 式的分子可以变成

$$\begin{aligned}&(x^n-z^n)(y-z)+(y^n-z^n)(z-x)\\ &=(x-z)(y-z)(x^{n-1}+x^{n-2}z+\cdots+xz^{n-2}+z^{n-1}-y^{n-1}\\ &\quad -y^{n-2}z-\cdots-yz^{n-2}-z^{n-1})\\ &=(x-y)(x-z)(y-z)[(x^{n-2}+x^{n-3}y+\cdots+y^{n-2})+z\\ &\quad (x^{n-3}+\cdots+y^{n-3})+\cdots+z^{n-2}].\end{aligned}$$

因为 x,y,z 是整数,所以上式方括弧中的数是整数,从而 ① 式的分子能被分母整除,且所得商仍为整系数多项式,故命题得证.

3·14 如果 $x+\frac{1}{x}=a$,a 是已知数,求:$x^{13}+\frac{1}{x^{13}}$.

(波兰数学奥林匹克,1954 年)

[解] 因为

$$\left(x^m+\frac{1}{x^m}\right)\left(x^n+\frac{1}{x_n}\right)=\left(x^{m+n}+\frac{1}{x^{m+n}}\right)+\left(x^{m-n}+\frac{1}{x^{m-n}}\right),$$

所以

$$x^{m+n}+\frac{1}{x^{m+n}}=\left(x^m+\frac{1}{x^m}\right)\left(x^n+\frac{1}{x_n}\right)-\left(x^{m-n}+\frac{1}{x^{m-n}}\right). \quad ①$$

特别地,当 $n=1$ 时,① 式变为

$$x^{m+1}+\frac{1}{x^{m+1}}=\left(x^m+\frac{1}{x^m}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^{m-1}+\frac{1}{x^{m-1}}\right). \quad ②$$

当 $n=m$ 时,① 式变为

$$x^{2m}+\frac{1}{x^{2m}}=\left(x^m+\frac{1}{x^m}\right)^2-2. \quad ③$$

由 ③ 式可得

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=a^2-2.$$

$$x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2=(a^2-2)^2-2=a^4-4a^2+2.$$

由 ② 式可得

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)=(a^2-2)a-a$$
$$=a^3-3a.$$

所以,

$$\begin{aligned}&x^6+\frac{1}{x^6}\\=&\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)^2-2\\=&(a^3-3a)^2-2\\=&a^6-6a^4+9a^2-2.\end{aligned}$$

由 ① 式可得

$$\begin{aligned}x^7+\frac{1}{x^7}&=\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)\\&=(a^4-4a^2+2)(a^3-3a)-a\\&=a^7-7a^5+14a^3-7a.\end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned}x^{13}+\frac{1}{x^{13}}&=\left(x^7+\frac{1}{x^7}\right)\left(x^6+\frac{1}{x^6}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)\\&=(a^7-7a^5+14a^3-7a)(a^6-6a^4+9a^2-2)-a\\&=a^{13}-13a^{11}+65a^9-156a^7+182a^5-91a^3+13a.\end{aligned}$$

3·15 化简: $\dfrac{\csc\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}-\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$.

(中国上海市数学竞赛,1962 年)

[解] 原式 $=\dfrac{\csc\alpha}{|\csc\alpha|}-\dfrac{\cos\alpha}{|\cos\alpha|}$

第三章 等式

$$=\begin{cases}0, \text{当 } 2k\pi<\alpha<\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi \text{ 时;} \\ 2, \text{当}\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi<\alpha<(2k+1)\pi \text{ 时;} \\ 0, \text{当}(2k+1)\pi<\alpha<\left(2k+\frac{3}{2}\right)\pi \text{ 时;} \\ -2, \text{当}\left(2k+\frac{3}{2}\right)\pi<\alpha<(2k+2)\pi \text{ 时.}\end{cases}$$

（其中　$k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$）

3·16　求值　（1）$\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{4\pi}{n}+\cdots+\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}$；

（2）$\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{4\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}$.

（中国上海市数学竞赛，1960 年）

[解]　记 $i=\sqrt{-1}$，

由棣美弗定理有：

$$\left(\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{4\pi}{n}\right)+\cdots+\cos\frac{2(n-1)\pi}{n})$$

$$+i\left(\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{4\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)$$

$$=\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)+\left(\cos\frac{4\pi}{n}+i\sin\frac{4\pi}{n}\right)+\cdots$$

$$+\left(\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)$$

$$=\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)+\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^2+\cdots$$

$$+\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)-\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^n}{1-\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)}$$

$$=\frac{\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)-(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)}{1-\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)}=-1.$$

所以 $\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{4\pi}{n}+\cdots+\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}=-1,$

$$\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{4\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}=0.$$

3・17 (1) 化简 $\frac{1-a^2}{(1+ax)^2-(a+x)^2}$;

(2) 当 $x=0.44$ 时,求值 $\sqrt{1-x-x^2+x^3}$.

(中国上海市数学竞赛,1960 年)

[解] (1) 原式 $=\frac{(1+a)(1-a)}{(1+ax+a+x)(1+ax-a-x)}$

$$=\frac{(1+a)(1-a)}{(1+a)(1+x)(1-a)(1-x)}$$

$$=\frac{1}{(1+x)(1-x)}.$$

(2) $\sqrt{1-x-x^2+x^3}=\sqrt{(1-x)-x^2(1-x)}$

$=\sqrt{(1-x)(1-x^2)}=\sqrt{(1-x)^2(1+x)}$

$=|1-x|\sqrt{1+x}=|1-0.44|\sqrt{1+0.44}$

$=0.56\times 1.2$

$=0.672.$

3・18 当 x 为何值时,$\sqrt{\lg\sqrt{\lg\sqrt{\lg\sqrt{\lg\sqrt{\lg\sqrt{\lg x}}}}}}$ 才有意义.

(中国上海市数学竞赛,1957 年)

[解] $\because$ $\lg\sqrt{\lg\sqrt{\lg\sqrt{\lg\sqrt{\lg\sqrt{\lg x}}}}}\geqslant 0,$

$\therefore$ $\sqrt{\lg\sqrt{\lg\sqrt{\lg\sqrt{\lg\sqrt{\lg x}}}}}\geqslant 1;$

$\lg\sqrt{\lg\sqrt{\lg\sqrt{\lg\sqrt{\lg x}}}}\geqslant 1,$

$\therefore$ $\sqrt{\lg\sqrt{\lg\sqrt{\lg\sqrt{\lg x}}}}\geqslant 10;$

$$\lg\sqrt{\lg\sqrt{\lg\sqrt{\lg x}}}\geqslant 10^2,$$

$$\therefore\quad \sqrt{\lg\sqrt{\lg\sqrt{\lg x}}}\geqslant 10^{10^2};$$

$$\lg\sqrt{\lg\sqrt{\lg x}}\geqslant 10^{2\cdot 10^2},$$

$$\therefore\quad \sqrt{\lg\sqrt{\lg x}}\geqslant 10^{10^{2\cdot 10^2}};$$

$$\lg\sqrt{\lg x}\geqslant 10^{2\cdot 10^{2\cdot 10^2}},$$

$$\therefore\quad \sqrt{\lg x}\geqslant 10^{10^{2\cdot 10^{2\cdot 10^2}}};$$

$$\lg x\geqslant 10^{2\cdot 10^{2\cdot 10^{2\cdot 10^2}}},$$

$$\therefore\quad x\geqslant 10^{10^{2\cdot 10^{2\cdot 10^{2\cdot 10^2}}}}.$$

3・19　设
$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots+\cfrac{1}{1}}}}=\frac{m}{n},$$
其中 m 和 n 是互质的自然数,而等式左边含有 1988 条分数线,试计算 m^2+mn-n^2 的值.

(第 14 届全俄数学奥林匹克,1988 年)

[解]　设上述含有 k 条分数线的繁分数的值为 $\frac{m_k}{n_k}$(m_k、n_k 为互质的自然数),则

$$\frac{m_{k+1}}{n_{k+1}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{m_k}{n_k}}=\frac{n_k}{m_k+n_k}.$$

注意到
$$\frac{m_1}{n_1}=\frac{1}{1},m_1=1,n_1=1;$$

$$\frac{m_2}{n_2}=\frac{n_1}{m_1+n_1}=\frac{1}{2},\quad m_2=1,n_2=2;$$

$$\frac{m_3}{n_3}=\frac{n_2}{m_2+n_2}=\frac{2}{1+2}=\frac{2}{3},$$

$m_3=2, n_3=3;$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

所以 $\frac{m_k}{n_k}=\frac{n_{k-1}}{m_{k-1}+n_{k-1}}=\frac{F_k}{F_{k+1}}$,

其中 F_k 是斐波那契数列的第 k 项,即 $F_1=1$, $F_2=1$, $F_{k+2}=F_{k+1}+F_k$ $(k=1,2,\cdots)$

于是

$$\begin{aligned}
&m^2+mn-n^2\\
=&F_{1988}^2+F_{1988}F_{1989}-F_{1989}^2\\
=&F_{1988}^2+F_{1988}(F_{1988}+F_{1987})-F_{1987}^2\\
&-2F_{1988}F_{1987}-F_{1988}^2\\
=&-[F_{1987}^2+F_{1987}F_{1988}-F_{1988}^2]\\
=&F_{1986}^2+F_{1986}F_{1987}-F_{1987}^2\\
=&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
=&F_2^2+F_2F_3-F_3^2\\
=&1^2+1\times 2-2^2\\
=&-1.
\end{aligned}$$

3·20　设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.试对任意正整数 n,计算和 $\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]$.

（第 10 届国际数学奥林匹克,1968 年）

[解]　首先证明:对一切实数 x,有等式

$$\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]-[x] \quad ①$$

事实上,设 $x=[x]+\alpha$,则 $0\leqslant\alpha<1$,

于是 $\left[x+\frac{1}{2}\right]=\left[[x]+\alpha+\frac{1}{2}\right]$

$$=[x]+\left[\alpha+\frac{1}{2}\right],$$

$$\begin{aligned}
[2x]-[x]&=[2[x]+2\alpha]-[[x]+\alpha]\\
&=[x]+[2\alpha]-[\alpha]
\end{aligned}$$

从而 ① 式等价于

$$\left[\alpha+\frac{1}{2}\right]=[2\alpha]-[\alpha] \quad ②$$

其中　$0 \leqslant \alpha < 1$.

当　$0 \leqslant \alpha < \frac{1}{2}$ 时，此式左右两端均为0，而当 $\frac{1}{2} \leqslant \alpha < 1$ 时，此式左右两端均为1.因此②式成立，从而①式也成立.

由①式可知

$$\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] = \left[\frac{n}{2^{k+1}} + \frac{1}{2}\right]$$

$$= \left[2 \cdot \frac{n}{2^{k+1}}\right] - \left[\frac{n}{2^{k+1}}\right]$$

$$= \left[\frac{n}{2^k}\right] - \left[\frac{n}{2^{k+1}}\right]$$

于是　$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]$$

$$= \left([n] - \left[\frac{n}{2}\right]\right) + \left(\left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{2^2}\right]\right) + \left(\left[\frac{n}{2^2}\right] - \left[\frac{n}{2^3}\right]\right) + \cdots$$

因为对固定的自然数 n，当 k 适当大之后，就有 $n < 2^k$，$\left[\frac{n}{2^k}\right] = 0$，所以上式为

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] = [n] = n.$$

3・21　x 取什么实数值时，等式

(a) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}} = \sqrt{2}$，

(b) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}} = 1$，

(c) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}} = 2$.

都成立(这里平方根取非负数)?

(第1届国际数学奥林匹克，1959年)

[解]　构造辅助函数

$$f(x) = \sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}},$$

则 $f(x)$ 的定义域为 $\left\{x \mid x \geqslant \frac{1}{2}\right\}$.

注意到　$(\sqrt{2x-1}+1)^2 = 2(x+\sqrt{2x-1})$

及　$(\sqrt{2x-1}-1)^2 = 2(x-\sqrt{2x-1})$，

所以有 $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2x-1}+1)$

及 $\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}|\sqrt{2x-1}-1|$,

于是函数 $f(x)$ 为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2x-1}+1+|\sqrt{2x-1}-1|)$$

又因为当 $\sqrt{2x-1}-1>0$,即 $x>1$ 时,

$$|\sqrt{2x-1}-1|=\sqrt{2x-1}-1$$

当 $\sqrt{2x-1}-1\leqslant 0$ 时,即 $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$ 时,

$$|\sqrt{2x-1}-1|=1-\sqrt{2x-1}$$

下面分两种情况讨论 $f(x)$,

(1) 当 $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$ 时,

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2x-1}+1+1-\sqrt{2x-1})$$
$$=\sqrt{2}$$

(2) 当 $x>1$ 时,

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2x-1}+1+\sqrt{2x-1}-1)$$
$$=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2x-1}>\sqrt{2}.$$

对于方程(a),由(1),它的解为

$$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1.$$

对于方程(b),由(1)(2),在定义域内

$$f(x)\geqslant\sqrt{2}.$$

从而(b) $f(x)=1$ 无解.

对于方程(c),我们解方程

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2x-1}=2$$

$$x=\frac{3}{2}>1.$$

所以它的解为 $x=\frac{3}{2}$.

3・22 令 $p(x)$ 是十进制数 x 各位数字之积，试求出所有的能使 $p(x)=x^2-10x-22$ 成立的正数 x.

（第10届国际数学奥林匹克，1968年）

[解] 设 x 为 n 位数，则

$$p(x)\leqslant 9^n,\quad x^2\geqslant 10^{n-1}\cdot x.$$

若 $n>2$，则

$$\begin{aligned}p(x)=x^2-10x-22&\geqslant x(10^{n-1}-10)-22\\&\geqslant 10^{n-1}\cdot 90-22=9\cdot 10^n-22\\&>9^n,\text{矛盾}.\end{aligned}$$

$\therefore\ n\leqslant 2.$

若 $n=1$，则

$$x^2-10x-22=x(x-10)-22<0,$$

$\therefore\ n=2.$

设 $x=10a+b$，则

$$\begin{aligned}ab&=(10a+b)^2-10(10a+b)-22\\&=(10a+b)(10a+b-10)-22,\end{aligned}$$

若 $a>1$，则

$$\begin{aligned}ab&>(10a+b)(10+b)-22\\&>10ab+100a-22\\&>10ab,\text{矛盾}.\end{aligned}$$

$\therefore\ a=1,b=(10+b)\cdot b-22$，得 $b=2$.

故本题所求的正数 x 为12.

3・23 已知数 $1,2,2^2,\cdots,2^{n-1}$ 对于它们的任一排列 $\sigma=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，定义 $S_1(\sigma)=x_1,S_2(\sigma)=x_1+x_2,S_3(\sigma)=x_1+x_2+x_3,\cdots,S_n(\sigma)=x_1+x_2+\cdots+x_n$，并令 $Q(\sigma)=S_1(\sigma)\cdot S_2(\sigma)\cdots S_n(\sigma)$，试求 $\sum\frac{1}{Q(\sigma)}$（和式取遍所有的排列）.

（第21届加拿大数学奥林匹克，1989年）

[解] 我们证明更一般的结论：

对任意 n 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，按题述方法所求的和 $\sum\frac{1}{Q(\sigma)}=$

$$S(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}.$$

对 n 进行归纳.

当 $n=1$ 时,$S(a_1)=\sum\frac{1}{Q(\sigma)}=\frac{1}{a_1}$,因此 $n=1$ 时结论成立.

假设 $n=k$ 时,结论成立.我们来证明 $n=k+1$ 时结论成立.

事实上,$k+1$ 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_k,a_{k+1}$ 的$(k+1)!$个排列可分为 $k+1$ 类,每类中的 $k!$个排列以同一元素 a_i 为末数.这种排列的 $Q(\sigma)$ 最后一个因子为 $S_{k+1}(\sigma)=a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}$.前 k 个因子恰是由另外 k 个元素的所有可能排列所给出.

由归纳假设,这 $k!$个排列的 $\frac{1}{Q(\sigma)}$ 之和为

$$\frac{a_i}{a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}S_{k+1}(\sigma)}$$

对 i 求和即得

$$\begin{aligned}\sum\frac{1}{Q(\sigma)}&=S(a_1,a_2,\cdots,a_{k+1})\\&=\frac{1}{a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}S_{k+1}(\sigma)}\cdot\sum_{i=1}^{k+1}a_i\\&=\frac{1}{a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}}.\end{aligned}$$

根据数学归纳原理,要证的一般结论成立.

于是本题的结果为

$$\sum\frac{1}{Q(\sigma)}=\frac{1}{1\cdot2\cdot2^2\cdots2^{n-1}}=2^{-\frac{n(n-1)}{2}}.$$

3·24　求数字 a,b,c,使对任何自然数 n 有等式

$$\overline{\underbrace{aa\cdots a}_{n个}\underbrace{bb\cdots b}_{n个}}+1=(\overline{\underbrace{cc\cdots c}_{n个}}+1)^2.$$

(波兰数学奥林匹克,1976 年)

[解]　设 $p_n=\underbrace{11\cdots1}_{n个}$,则 $p_n=\frac{10^n-1}{9}$,或者 $10^n=9p_n+1$.数 $\overline{\underbrace{aa\cdots a}_{n个}\underbrace{bb\cdots b}_{n个}}$ 及$(\overline{\underbrace{cc\cdots c}_{n个}}+1)^2$ 可以用 p_n 表示为:

$$\overline{\underbrace{aa\cdots a}_{n\text{个}}\underbrace{bb\cdots b}_{n\text{个}}} = \overline{\underbrace{aa\cdots a}_{n\text{个}}}\cdot 10^n + \overline{\underbrace{bb\cdots b}_{n\text{个}}}$$

$$= ap_n\cdot 10^n + bp_n = ap_n(9p_n + 1) + bp_n,$$

$$(\overline{\underbrace{cc\cdots c}_{n\text{个}}} + 1)^2 = (cp_n + 1)^2 = c^2p_n^2 + 2cp_n + 1.$$

因此题设条件中的等式可写成

$$9\cdot ap_n^2 + (a+b)p_n + 1 = c^2p_n^2 + 2cp_n + 1,$$

或者 $$9ap_n + (a+b) = c^2p_n + 2c. \qquad ①$$

① 式对任意的 n 均成立.据多项式恒等的充要条件得知

$$9a = c^2, a + b = 2c. \qquad ②$$

由 $9a = c^2$ 知 $3|c$,所以 c 可取 0,3,6,9,从而求出对应的 a,b 值,得到方程组 ② 的下列解:

$a = 0, b = 0, c = 0$;

$a = 1, b = 5, c = 3$;

$a = 4, b = 8, c = 6$;

$a = 9, b = 9, c = 9$.

3·25 对每个正整数 n,令

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n},$$

$$T_n = S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_n,$$

$$U_n = \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{3}T_2 + \frac{1}{4}T_3 + \cdots + \frac{1}{n+1}T_n.$$

试求整数 $0 < a,b,c,d < 1000000$,使

$$T_{1988} = aS_{1989} - b,$$

$$U_{1988} = cS_{1989} - d.$$

并证明你的结果.

(第 18 届美国数学奥林匹克,1989 年)

[解] 由已知

$$T_n = S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_n$$

$$= 1 + \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$$

$$= n + \frac{1}{2}(n-1) + \frac{1}{3}(n-2) + \cdots + \frac{1}{n}[n-(n-1)]$$
$$= n\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right) - \left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(1-\frac{1}{n}\right)\right]$$
$$= nS_n - [(n-1)-(S_n-1)]$$
$$= (n+1)S_n - n$$
$$= (n+1)S_{n+1} - (n+1)$$

$\therefore\quad T_n = (n+1)S_n - n = (n+1)S_{n+1} - (n+1).$

令 $n = 1988$,则得

$$T_{1988} = 1989S_{1989} - 1989.$$

因此,$a = 1989, b = 1989$.

又 $U_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1}T_i = \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i}T_{i-1}$

$$= \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i}(iS_i - i) = \sum_{i=2}^{n+1}(S_i - 1)$$
$$= \sum_{i=1}^{n+1}(S_i - 1) = T_{n+1} - (n+1)$$
$$= (n+2)S_{n+1} - (n+1) - (n+1)$$
$$= (n+2)S_{n+1} - 2(n+1),$$

$\therefore\quad U_n = (n+2)S_{n+1} - 2(n+1).$

令 $n = 1988$,得

$$U_{1988} = 1990S_{1989} - 3978,$$

因此,$c = 1990, d = 3978$.

3·26 若实数 a,b,x,y 满足 $ax+by=3, ax^2+by^2=7, ax^3+by^3=16, ax^4+by^4=42$,求 ax^5+by^5 的值.

(第 8 届美国数学邀请赛,1990 年)

[解] 由 $ax^2+by^2=7$

得 $(ax^2+by^2)(x+y) = 7(x+y)$,

$ax^3+by^3+xy(ax+by) = 7(x+y)$,

所以 $16+3xy = 7(x+y)$ ①

由 $ax^3+by^3=16$ 得 $(ax^3+by^3)(x+y)=16(x+y)$,

$$ax^4+by^4+xy(ax^2+by^2)=16(x+y),$$

所以 $42+7xy=16(x+y)$ ②

①×7－②×3得 $x+y=-14$,所以 $xy=-38$.

由 $ax^4+by^4=42$ 得 $(ax^4+by^4)(x+y)=42(x+y)$,

$$ax^5+by^5+xy(ax^3+by^3)=42(x+y),$$

因此

$$ax^5+by^5=42\times(-14)-(-38)\times16=20.$$

3·27 当自然数 $n\geqslant2$ 为最小时,求整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,使下列等式 $a_1+a_2+\cdots+a_n=a_1\cdot a_2\cdot\cdots a_n=1990$ 得以成立.

(第16届全俄数学奥林匹克,1990年)

[解] 先证明 n 的最小值为5.数1990只能被2而不能被4整除,所以在 $a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n$ 中只有一个偶数,于是在和 $a_1+a_2+\cdots+a_n=1990$ 中,一定有偶数个奇加数,这就说明 n 为奇数.

若 $a_1+a_2+a_3=a_1a_2a_3=1990$,不妨设 $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3$,于是 $a_1\geqslant\frac{1990}{3}$,故 a_1 为1990或995.

如果 $a_1=1990$,则 $|a_2|=|a_3|=1$ 且 a_2 与 a_3 应为同号,显然 $a_1+a_2+a_3\neq1990$.

如果 $a_1=995$,则 $|a_2|\leqslant2$, $|a_3|\leqslant2$,故 $a_1+a_2+a_3<1990$,这就说明了 n 不能为3.

令 $a_1=1990,a_2=a_3=1,a_4=a_5=-1$,则有

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=a_1a_2a_3a_4a_5=1990.$$

因此 n 的最小值是5.所求的整数为$\{1990,1,1,-1,-1\}$.

3·28 试把 $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^kC_n^k}{k^3+9k^2+26k+24}$ 写成 $\frac{p(n)}{q(n)}$ 的形式,此处的 $p(n)$ 和 $q(n)$ 是两个整系数多项式.

(第29届加拿大数学奥林匹克,1997年)

[解] 分解因式得

$$k^3+9k^2+26k+24=(k+2)(k+3)(k+4).$$

记

$$S(n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\cdot C_n^k}{k^3+9k^2+26k+24},$$

则

$$S(n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\cdot n!}{k!(n-k)!(k+2)(k+3)(k+4)}$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{(-1)^k(n+4)!}{(k+4)!(n-k)!}\right]\cdot\left[\frac{k+1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}\right]$$

令 $T(n)=(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\cdot S(n).$

则 $T(n)=\sum_{k=0}^{n}[(-1)^kC_{n+4}^{k+4}\cdot(k+1)]$

当 $n\geqslant 1$ 时,因为$(1-1)^n=0$,所以

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^iC_n^i=0. \quad ①$$

并且 $$\sum_{i=0}^{n}(-1)^iC_n^i\cdot i=\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\cdot\frac{n!\cdot i}{i!(n-i)!}$$
$$=\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}$$
$$=n\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!}$$
$$=n\sum_{i=1}^{n}(-1)^iC_{n-1}^{i-1}$$
$$=-n\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\cdot C_{n-1}^{i-1}$$

令 $j=i-1$,则由上式及 ① 得,当 $n\geqslant 2$ 时

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^iC_n^i\cdot i=(-n)\cdot\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^jC_{n-1}^j=0, \quad ②$$

因此

$$T(n)=\sum_{k=0}^{n}[(-1)^kC_{n+4}^{k+4}(k+1)]$$
$$=\sum_{k=0}^{n}[(-1)^{k+4}C_{n+4}^{k+4}(k+1)]$$

$$= \sum_{k=-4}^{n}(-1)^{k+4}C_{n+4}^{k+4}(k+1) - [-3+2(n+4) - C_{n+4}^{2}]$$

以 $j = k+4$ 代入上式,

$$T(n) = \sum_{j=0}^{n+4}(-1)^{j}C_{n+4}^{j}(j-3) - \left[2n+5-\frac{(n+4)(n+3)}{2}\right]$$

$$= \sum_{j=0}^{n+4}(-1)^{j}C_{n+4}^{j}j - 3\sum_{j=0}^{n+4}(-1)^{j}C_{n+4}^{j} + \frac{1}{2}(n^2+3n+2)$$

由 ① 和 ② 知,上式右端前两项都为 0,所以

$$T(n) = \frac{1}{2}(n^2+3n+2)$$

$$= \frac{1}{2}(n+1)(n+2),$$

$$S(n) = \frac{T(n)}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$$

$$= \frac{1}{2(n+3)(n+4)},$$

即 $$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k}C_{n}^{k}}{k^3+9k^2+26k+24} = \frac{1}{2(n+3)(n+4)}.$$

3·29　自然数 $n \geqslant 3$. 平面上给定一条直线 l,在 l 上依次有 n 个互不相同的点 $p_1, p_2, \cdots, p_n$. 记点 p_1 到其余 $n-1$ 个点的距离的乘积为 $d_i(i=1,2,\cdots,n)$. 平面上还有一点 Q 不在 l 上,点 Q 到点 p_i 的距离记为 $C_i(i=1,2,\cdots,n)$. 求以下和式的值:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}\frac{C_i^2}{d_i}.$$

(中国国家队选拔赛,1998 年)

[解]　不妨设这 n 个点在实轴上,有坐标 $p_i(x_i, 0)(i=1,2,\cdots,n)$, $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, Q 点有坐标 (α, β). 于是

$$(-1)^{n-i}d_i = (x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n),$$

$$C_i^2 = (\alpha - x_i)^2 + \beta^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha x_i + x_i^2,$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha^2+\beta^2-2\alpha x_i+x_i^2}{(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} \quad ①$$

令

$$T_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^k}{(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)} \quad ②$$

其中 $k = 0,1,2$.

设部分分式

$$\frac{x^k}{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{x - x_i}, \quad ③$$

这里 $K < n, A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为常数.

用 $x - x_j$ 乘式 ③ 两端,再令 $x = x_j$,可得

$$\frac{x_j^k}{(x_j - x_1)\cdots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\cdots(x_j - x_n)} = A_j (j = 1,2,\cdots,n) \quad ④$$

代入 ②,得 $T_k = \sum_{j=1}^{n} A_j$.

用 x 乘式 ③ 两端,得

$$\frac{x^{k+1}}{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i x}{x - x_i}.$$

令 $x \to +\infty$,则

上式左端 $\longrightarrow \begin{cases} 1, & k+1 = n \text{ 时}, \\ 0, & k+1 < n \text{ 时}, \end{cases}$

上式右端 $\longrightarrow \sum_{i=1}^{n} A_i$.

所以,$\sum_{i=1}^{n} A_i = \begin{cases} 0, & k < n-1 \text{ 时}, \\ 1, & k = n-1 \text{ 时}. \end{cases}$

代入 ④,得

$$T_0 = T_1 = 0, T_2 = \begin{cases} 1, & n = 3 \text{ 时}, \\ 0, & n > 3 \text{ 时}. \end{cases}$$

代入 ①,得

$$S_n = (\alpha^2 + \beta^2) T_0 - 2\alpha T_1 + T_2 = T_2 = \begin{cases} 1, n = 3 \text{ 时}, \\ 0, n > 3 \text{ 时}. \end{cases}$$

3・30 (1) 设 n 是一个大于 3 的素数. 求 $\left(1 + 2\cos\frac{2\pi}{n}\right)$

$\left(1+2\cos\frac{4\pi}{n}\right)\left(1+2\cos\frac{6\pi}{n}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1+2\cos\frac{2n\pi}{n}\right)$的值；

(2) 设 n 是大于 3 的自然数，求

$\left(1+2\cos\frac{\pi}{n}\right)\left(1+2\cos\frac{2\pi}{n}\right)\left(1+2\cos\frac{3\pi}{n}\right)\cdot\cdots\cdot$

$\left(1+2\cos\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$的值.

(中国上海市高中数学竞赛，1994 年)

[解] (1) 记 $w=e^{\frac{2\pi i}{n}}$. 显然 $w^n=1, w^{-\frac{n}{2}}=-1, w^k+w^{-k}=2\cos\frac{2k\pi}{n}$. 于是，我们有

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+2\cos\frac{2k\pi}{n}\right)=\prod_{k=1}^{n}(1+w^k+w^{-k})$$

$$=\prod_{k=1}^{n}w^{-k}(w^k+w^{2k}+1)$$

$$=w^{-\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1-w^{3k}}{1-w^k}\cdot(w^n+w^{2n}+1)$$

$$=(-1)^{n+1}\cdot 3\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1-w^{3k}}{1-w^k}$$

因为 n 是大于 3 的素数，所以 $(-1)^{n+1}=1$，并且

$$3\times 1, 3\times 2, \cdots, 3(n-1) \qquad (\bmod n)$$

取遍所有的 n 的剩余类，从而有

$$\prod_{k=1}^{n-1}(1-w^{3k})=\prod_{k=1}^{n-1}(1-w^k).$$

因此

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+2\cos\frac{2k\pi}{n}\right)=3.$$

(2) 由于 $z^{2n}-1=0$ 的 $2n$ 个根是 ± 1 和 $z_k=e^{\pm\frac{k\pi i}{n}}(k=1,2,\cdots,n-1)$，因此

$$z^{2n}-1=(z^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}(z-e^{\frac{k\pi i}{n}})(z-e^{-\frac{k\pi i}{n}})$$

$$=(z^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(z^2+1-2z\cos\frac{k\pi}{n}\right)$$

取 $z = e^{\frac{2\pi i}{3}}$,则 $z^2 + 1 = -z$,于是我们有

$$z^{2n} - 1 = (z^2 - 1)(-z)^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 + 2\cos\frac{k\pi}{n}\right),$$

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 + 2\cos\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{z^{2n} - 1}{(z^2 - 1)(-z)^{n-1}}$$

当 $n = 3k$ 时,$z^{2n} = z^{6k} = (e^{\frac{2\pi i}{3}})^{6k} = 1$,因而此时

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 + 2\cos\frac{k\pi}{n}\right) = 0.$$

当 $n = 3k + 1$ 时,$z^{2n} = z^{6k+2} = z^2$,因而此时

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 + 2\cos\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{z^2 - 1}{(z^2 - 1)(-z)^{3k}} = (-1)^{3k} = (-1)^{n-1}.$$

当 $n = 3k + 2$ 时,$z^{2n} = z^{6n+4} = z$,因而此时

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 + 2\cos\frac{k\pi}{n}\right) &= \frac{z - 1}{(z^2 - 1)(-z)^{3k+1}} \\ &= (-1)^{3k+1}\cdot\frac{z - 1}{(z^2 - 1)\cdot z} \\ &= (-1)^{3k+1}\frac{z - 1}{z^3 - z} = (-1)^{3k+1}\frac{z - 1}{1 - z} \\ &= (-1)^{3k+2} = (-1)^n.\end{aligned}$$

综上所述,我们有

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 + 2\cos\frac{k\pi}{n}\right) = \begin{cases}0, n = 3k \text{ 时}, \\ (-1)^{n-1}, n = 3k + 1 \text{ 时}, k \in N, \\ (-1)^n, n = 3k + 2 \text{ 时}.\end{cases}$$

3·31　给定实数 a,b,c.已知复数 z_1,z_2,z_3 满足:

$$\begin{cases}|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1, \\ \dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_3} + \dfrac{z_3}{z_1} = 1.\end{cases}$$

求 $|az_1 + bz_2 + cz_3|$ 的值.

(中国高中数学联赛,1999 年)

[解]　记 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.设

$$\frac{z_1}{z_2} = e^{i\theta}, \frac{z_2}{z_3} = e^{i\varphi},$$

则

$$\frac{z_3}{z_1} = e^{-i(\theta+\varphi)}.$$

由题设可得

$$e^{i\theta} + e^{i\varphi} + e^{-i(\theta+\varphi)} = 1.$$

两边取虚部,有

$$\sin\theta + \sin\varphi - \sin(\theta + \varphi) = 0,$$

$$2\sin\frac{\theta + \varphi}{2}\cos\frac{\theta - \varphi}{2} - 2\sin\frac{\theta + \varphi}{2}\cos\frac{\theta + \varphi}{2} = 0,$$

$$\sin\frac{\theta + \varphi}{2} \cdot \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2} = 0.$$

因此得

$\theta = 2k\pi$ 或 $\varphi = 2k\pi$ 或 $\theta + \varphi = 2k\pi, k \in Z$. 故有 $z_1 = z_2$ 或 $z_2 = z_3$ 或 $z_3 = z_1$.

如果 $z_1 = z_2$,代入已知等式得

$$1 + \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = 1,$$

$$\left(\frac{z_1}{z_3}\right)^2 = -1,$$

$$\frac{z_1}{z_3} = \pm i.$$

于是,我们有

$$|az_1 + bz_2 + cz_3| = |z_1| \cdot |a + b \pm ci| = \sqrt{(a + b)^2 + c^2}.$$

类似地,如果 $z_2 = z_3$,则

$$|az_1 + bz_2 + cz_3| = \sqrt{a^2 + (b + c)^2};$$

如果 $z_3 = z_1$,则

$$|az_1 + bz_2 + cz_3| = \sqrt{(a + c)^2 + b^2}.$$

所求的值为 $\sqrt{(a + b)^2 + c^2}$ 或 $\sqrt{a^2 + (b + c)^2}$ 或 $\sqrt{(c + a)^2 + b^2}$.

3・32 求证:$\sqrt{2} - 1$ 的每个正整数幂都具有 $\sqrt{m} - \sqrt{m - 1}$ 的形式,这里 m 是某个正整数.

(第 26 届加拿大数学奥林匹克,1994 年)

[证]　我们来证明一个更强的命题：当 n 是奇数时，存在正整数 a,b，使

$$(\sqrt{2}-1)^n=\sqrt{2a^2}-\sqrt{b^2},\text{且 } 2a^2-1=b^2;$$

当 n 是偶数时，存在正整数 a,b，使

$$(\sqrt{2}-1)^n=\sqrt{a^2}-\sqrt{2b^2},\text{且 } a^2-1=2b^2.$$

用数学归纳法，

当 $n=1$ 时，显然有

$$\sqrt{2}-1=\sqrt{2\cdot 1^2}-\sqrt{1^2},$$

因此，强化命题当 $n=1$ 时成立.

设当 $n=2k-1$ 时，强化命题成立，即有

$$(\sqrt{2}-1)^{2k-1}=\sqrt{2a^2}-\sqrt{b^2},\text{且 } 2a^2-1=b,a,b\in N.$$

于是，

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}-1)^{2k}&=(\sqrt{2}-1)^{2k-1}.(\sqrt{2}-1)\\&=(a\sqrt{2}-b)(\sqrt{2}-1)\\&=2a+b-(a+b)\sqrt{2}\\&=\sqrt{(2a+b)^2}-\sqrt{2(a+b)^2},\end{aligned}$$

并且

$$(2a+b)^2-2(a+b)^2=2a^2-b^2=1,$$

因此，当 $n=2k$ 时，强化命题也成立.

设当 $n=2k$ 时，强化命题成立，即有

$$(\sqrt{2}-1)^{2k}=\sqrt{a^2}-\sqrt{2b^2},\text{且 } a^2-1=2b^2,a,b\in N.$$

于是，

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}-1)^{2k+1}&=(\sqrt{2}-1)^{2k}(\sqrt{2}-1)\\&=(a-b\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)\\&=-a-2b+(a+b)\sqrt{2}\\&=\sqrt{2\cdot(a+b)^2}-\sqrt{(a+2b)^2},\end{aligned}$$

并且

$$2(a+b)^2-(a+2b)^2=a^2-2b^2=1,$$

因此，当 $n=2k+1$ 时，强化命题也成立.

根据数学归纳法原理，强化命题成立，从而原命题得证.

3·33　求和　$\sum_{n=1}^{1994}(-1)^n \frac{n^2+n+1}{n!}$.

（第26届加拿大数学奥林匹克,1994年）

[解]　由于

$$\frac{n^2+n+1}{n!}=\frac{n}{(n-1)!}+\frac{n+1}{n!}$$

其中 $n\in N, 0!=1$. 因此

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{1994}(-1)^n\cdot\frac{n^2+n+1}{n!}\\&=\sum_{n=1}^{1994}(-1)^n\left(\frac{n}{(n-1)!}+\frac{n+1}{n!}\right)\\&=-\frac{1}{(1-1)!}+\frac{1994+1}{1994!}\\&=-1+\frac{1995}{1994!}.\end{aligned}$$

第二节　证明

3·34　试证 $\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}=1$,这里的两个三次根都取实数值.

（中国北京市数学竞赛,1956年）

[证]　设 $\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}=x$,则

$$\begin{aligned}x^3&=1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}+3\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)\left(1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)}\\&\quad\times\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}\right)+1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}\\&=2+3\sqrt[3]{1-\frac{28}{27}}x\\&=2-x.\end{aligned}$$

于是　　$x^3+x-2=0$

这个方程的惟一实根为 $x=1$,故命题得证.

3·35 试证：

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots(1+x^{2^{k-1}})$$
$$=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{2^k-1}. \qquad ①$$

（匈牙利数学奥林匹克，1941 年）

［证］（用数学归纳法）当 $k=1$ 时，显然等式成立．若等式对 $k\geqslant 1$ 时成立，即有 ① 式，则在 ① 式两边同乘以 $1+x^{2^k}$，得

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots(1+x^{2^{k-1}})(1+x^{2^k})$$
$$=(1+x+x^2+\cdots+x^{2^k-1})(1+x^{2^k})$$
$$=1+x+x^2+\cdots+x^{2^k-1}+x^{2^k}+x^{2^k+1}+\cdots+x^{2^{k+1}-1},$$

所以 $k+1$ 时也有等式 ① 成立．因此等式 ① 对所有的自然数 k 都成立．

3·36 设 $x+y+z=0$，试证：

$$\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\right)\left(\frac{x^5+y^5+z^5}{5}\right)=\left(\frac{x^7+y^7+z^7}{7}\right).$$

（中国上海市数学竞赛，1957 年）

［证］ $\because$ $x+y+z=0, z=-(x+y)$

$$\text{左端}=\frac{1}{2}[x^2+y^2+(x+y)^2]\cdot\frac{1}{5}[x^5+y^5-(x+y)^5]$$
$$=\frac{1}{2}[2(x^2+y^2+xy)]\cdot\frac{1}{5}\{[-5(x^4y+2x^3y^2+2x^2y^3+xy^4)]\}$$
$$=-(x^2+xy+y^2)xy[(x+y)^3-xy(x+y)]$$
$$=-xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2$$

$$\text{右端}=\frac{1}{7}[x^7+y^7-(x+y)^7]$$
$$=-\frac{1}{7}[7x^6y+21x^5y^2+35x^4y^3+35x^3y^4+21x^2y^5+7xy^6]$$
$$=-xy[(x^5+y^5)+3xy(x^3+y^3)+5x^2y^2(x+y)]$$
$$=-xy(x+y)[x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4+3xy(x^2-xy+y^2)+5x^2y^2]$$
$$=-xy(x+y)(x^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3+y^4)$$
$$=-xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2$$

所以左端 = 右端,即等式成立.

3・37 证明当 n,k 都是给定的正整数,且 $n>2,k>2$ 时,$n(n-1)^{k-1}$ 可以写成 n 个连续偶数的和.

(中国高中数学联赛,1978年)

[证] 设 n 个连续偶数为 $2a,2a+2,2a+4,\cdots,2a+2(n-1)$.

若 $n(n-1)^{k-1}=2a+(2a+2)+\cdots+[2a+2(n-1)]$,

则

$$n(n-1)^{k-1}=[2a+(n-1)]\cdot n,$$

$$2a+(n-1)=(n-1)^{k-1},$$

$$a=\frac{1}{2}(n-1)[(n-1)^{k-2}-1].$$

当 n,k 为大于2的整数时,上式计算得到的 a 是正整数,所以 $n(n-1)^{k-1}$ 可以写成从

$$(n-1)[(n-1)^{k-2}-1]$$

开始的 n 个连续偶数的和.

3・38 证明:对任何自然数 n,下式成立:

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}_{n\text{个根号}}=2\cdot\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

(第14届全俄数学奥林匹克,1988年)

[证] 当 $n=1$ 时,结论成立.

设 $n=k$ 时,结论成立,于是利用恒等式 $\cos\alpha=2\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}-1$ 和归纳假设,得

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}_{k+1\text{个根号}}$$

$$=\sqrt{2+2\cdot\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}}$$

$$=\sqrt{2+2\cdot2\cos^2\frac{\pi}{2^{k+2}}-2}$$

$$=2\cdot\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}.$$

因此,当 $n=k+1$ 时,结论也成立.

根据数学归纳原理，当 $n \in N$ 时结论都成立.

3·39　十名运动员参加乒乓球循环赛，其中每两人彼此恰好比赛一场. 在比赛的过程中，第一名选手胜 x_1 场，败 y_1 场，第二名选手胜 x_2 场，败 y_2 场，等等. 证明：

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{10}^2 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{10}^2.$$

（第 21 届全苏数学奥林匹克，1987 年）

［证］　因为每名选手共赛 9 场，所以

$$x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = \cdots = x_{10} + y_{10} = 9,$$

又因为每赛 1 场，恰有一胜一负，所以

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{10} = y_1 + y_2 + \cdots + y_{10}$$

于是，我们有

$$\begin{aligned}&x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{10}^2 - y_1^2 - y_2^2 - \cdots - y_{10}^2\\ =\ &9(x_1 + x_2 + \cdots + x_{10} - y_1 - y_2 - \cdots - y_{10})\\ =\ &0.\end{aligned}$$

故求证的等式成立.

3·40　将 $1,2,3,\cdots,2n-1,2n$ 分成两组，每组 n 个数，设 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ 是按递增顺序写出的第一组数；$b_1 > b_2 > \cdots > b_n$ 是按递减顺序写出的第二组数. 证明：

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \cdots + |a_n - b_n| = n^2.$$

（第 19 届全苏数学奥林匹克，1985 年）

［证］　每一项 $|a_k - b_k|$ $(k = 1,2,\cdots,n)$ 恰是一个大于 n 的数与一个不超过 n 的数之差的绝对值. 因此

$$\begin{aligned}&|a_1 - b_1| + \cdots + |a_n - b_n|\\ =\ &(n+1) + (n+2) + \cdots + 2n - (1 + 2 + \cdots + n)\\ =\ &n^2.\end{aligned}$$

3·41　证明：恒等式 $\dfrac{2}{x^2-1} + \dfrac{4}{x^2-4} + \dfrac{6}{x^2-9} + \cdots + \dfrac{20}{x^2-100} = 11\left(\dfrac{1}{(x-1)(x+10)} + \dfrac{1}{(x-2)(x+9)} + \cdots + \dfrac{1}{(x-10)(x+1)}\right).$

（第 2 届全苏数学奥林匹克，1968 年）

［证］　因为　$\dfrac{2k}{x^2-k^2} = \dfrac{1}{x-k} - \dfrac{1}{x+k}$，$(k = 1,2,\cdots,10)$ 并且

$$\frac{11}{(x-11+k)(x+k)}=\frac{1}{x-11+k}-\frac{1}{x+k}(k=1,2,\cdots,10).$$

所以
$$\sum_{k=1}^{10}\frac{2k}{x^2-k^2}=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{x-k}-\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{x+k}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{x-11+k}-\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{x+k}$$
$$=11\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{(x-11+k)(x+k)}.$$

3·42　对每个正整数 n，设 $h(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$．例如 $h(1)=1,h(2)=1+\frac{1}{2},h(3)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$，对 $n\geqslant 2$，证明：$n+h(1)+h(2)+\cdots+h(n-1)=nh(n)$．

（第 5 届加拿大数学奥林匹克，1973 年）

［证］　因为 $2+h(1)=2+1=2\left(1+\frac{1}{2}\right)=2h(2)$，所以 $n=2$ 时，命题成立．

假定命题对某个 $n\geqslant 2$ 成立，即
$$n+h(1)+h(2)+\cdots+h(n-1)=nh(n),$$
那么两边各加 $1+h(n)$，得
$$n+1+h(1)+h(2)+\cdots+h(n-1)+h(n)$$
$$=nh(n)+1+h(n)$$
$$=(n+1)h(n)+1$$
$$=(n+1)\left[h(n+1)-\frac{1}{n+1}\right]+1$$
$$=(n+1)h(n+1).$$
即命题对 $n+1$ 成立．

根据数学归纳原理，命题得证．

3·43　如果 $x=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,y=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$，证明：$y^x=x^y$．

（第 6 届加拿大数学奥林匹克，1974 年）

［证］　$y^x=\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right]^{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$

$$= \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right]^{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}$$

$$= \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}$$

$$= x^{y}.$$

所以 $y^{x} = x^{y}.$

3・44 设 $p_n(k)$ 表示 n 个元素中有 k 个不动的所有排列的种数.求证:

$$\sum_{k=0}^{n} kp_n(k) = n!.$$

(第 28 届国际数学奥林匹克,1987 年)

[证] 因为 $p_n(k) = c_n^k p_{n-k}(0) = \frac{n!}{k!(n-k)!}p_{n-k}(0)$,所以有

$$\sum_{k=0}^{n} kp_n(k) = \sum_{k=1}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!}p_{n-k}(0)$$

$$= n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}p_{n-1-k}(0)$$

$$= n\sum_{k=0}^{n-1}c_{n-1}^{k}p_{n-1-k}(0)$$

$$= n\sum_{k=0}^{n-1}p_{n-1}(k).$$

因为 $\sum_{k=0}^{n}p_n(k) = n!$,故得$\sum_{k=0}^{n}kp_n(k) = n!$.

3・45 证明:$\frac{1}{\cos0^\circ\cos1^\circ}+\frac{1}{\cos1^\circ\cos2^\circ}+\cdots+\frac{1}{\cos88^\circ\cos89^\circ} = \frac{\cos1^\circ}{\sin^{2}1^\circ}$.

(第 21 届美国数学奥林匹克,1992 年)

[证] 为了书写方便,我们约定下面各三角函数中的角都以度为单位,即 sin1 是 $\sin1^\circ$,$\sin(x+1)$ 是指 $\sin(x+1)^\circ$.于是

$$原式右边 = \frac{\cos1}{\sin^{2}1} = \frac{\operatorname{ctg}1}{\sin1} = \frac{\operatorname{tg}89}{\sin1}.$$

因

$$\frac{\sin1}{\cos x\cos(x+1)}$$

$$= \frac{\sin(x+1)\cos x - \cos(x+1)\sin x}{\cos x\cos(x+1)}$$

$$= \operatorname{tg}(x+1) - \operatorname{tg}x.$$

故
$$\sin 1 \cdot \sum_{x=0}^{88} \frac{1}{\cos x \cos(x+1)}$$
$$= \sum_{x=0}^{88} (\operatorname{tg}(x+1) - \operatorname{tg}x)$$
$$= \operatorname{tg}89^\circ - \operatorname{tg}0 = \operatorname{tg}89.$$

所以,原式左边 $= \sum_{x=0}^{89} \frac{1}{\cos x \cos(x+1)} = \frac{\operatorname{tg}89}{\sin 1} =$ 右边.

3·46　证明: 若 $\frac{x}{y+z+t} = \frac{y}{z+t+x} = \frac{z}{t+x+y} = \frac{t}{x+y+z}$,则 $\frac{x+y}{z+t} + \frac{y+z}{t+x} + \frac{z+t}{x+y} + \frac{t+x}{y+z}$ 为整数.

(匈牙利数学奥林匹克,1990 年)

[证]　若 $x+y+z+t \neq 0$,则

$$\frac{x}{y+z+t} = \cdots = \frac{t}{x+y+z} = \frac{x+y+z+t}{3(x+y+z+t)} = \frac{1}{3},$$

从而 $x = y = z = t$,

$$\frac{x+y}{z+t} + \cdots + \frac{t+x}{y+z} = 4.$$

若 $x+y+z+t = 0$,则

$$\frac{x+y}{z+t} = \cdots = \frac{t+x}{y+z} = -1,$$

所以
$$\frac{x+y}{z+t} + \cdots + \frac{t+x}{y+z} = -4.$$

3·47　证明:若 $ad - bc = 1$,则分数 $\frac{a^2+b^2}{ac+bd}$(a,b,c,d 均为整数)不可约.

(基辅数学奥林匹克,1936 年)

[证]　利用恒等式

$$(ac+bd)^2 + (ad-bc)^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2),$$

假设(a^2+b^2)与$(ac+bd)$被自然数 $m(m \neq 1)$ 整除.则

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) - (ac+bd)^2 = (ad-bc)^2 = 1$$

也能被 m 整除,但这是不可能的.故分数$\frac{a^2+b^2}{ac+bd}$不可约.

3·48　若$\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}=\frac{1}{A+B+C}$,则对任意奇数 n,

$$\frac{1}{A^n}+\frac{1}{B^n}+\frac{1}{C^n}=\frac{1}{A^n+B^n+C^n},$$

试证之.

（基辅数学奥林匹克,1947 年）

[解]　把原来的等式变形为：

$$\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}-\frac{1}{A+B+C}$$
$$\equiv\frac{(A+B)(B+C)(C+A)}{ABC(A+B+C)}=0$$

于是,A,B,C 至少应满足下列三个等式中的一个：

$$A=-B,B=-C,C=-A.$$

又 n 为任意奇数,故所证等式成立.

3·49　正数 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 组成算术级数,证明：

$$t_n=\frac{1}{\sqrt{u_1}+\sqrt{u_2}}+\frac{1}{\sqrt{u_2}+\sqrt{u_3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{u_{n-1}}+\sqrt{u_n}}$$
$$=\frac{n-1}{\sqrt{u_1}+\sqrt{u_n}}.$$

（基辅数学奥林匹克,1935 年）

[证]　设 $d=u_k-u_{k-1}$ 为算术级数的公差,则

$$t_n=\frac{\sqrt{u_2}-\sqrt{u_1}}{u_2-u_1}+\frac{\sqrt{u_3}-\sqrt{u_2}}{u_3-u_2}+\cdots+\frac{\sqrt{u_n}-\sqrt{u_{n-1}}}{u_n-u_{n-1}}$$
$$=\frac{\sqrt{u_n}-\sqrt{u_1}}{d}$$
$$=\frac{u_n-u_1}{d(\sqrt{u_n}+\sqrt{u_1})}$$
$$=\frac{(n-1)d}{d(\sqrt{u_n}+\sqrt{n_1})}$$
$$=\frac{n-1}{\sqrt{u_n}+\sqrt{u_1}}.$$

3·50　试证：

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{5\times6}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\times2n}$$
$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}.$$

（匈牙利数学奥林匹克，1936 年）

［证］ 易知

$$\frac{1}{1\times2}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{1},$$
$$\frac{1}{3\times4}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2},$$
…………
$$\frac{1}{(2n-1)2n}=\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{n}.$$

将以上 n 个式子两边相加即得所证.

3・51　n,r 为非负整数，符号 $\binom{n}{r}$ 表示同时从 n 个物体中选出 r 个的组合数，约定 $\binom{n}{0}=1$，且当 $n<r$ 时，$\binom{n}{r}=0$.
证明：对于所有的整数 $n,r,1\leqslant r\leqslant n$ 均有等式

$$\sum_{d=1}^{\infty}\binom{n-r+1}{d}\binom{r-1}{d-1}=\binom{n}{r}.$$

（第 6 届爱尔兰数学奥林匹克，1993 年）

［证］ 对照下式两端

$$(1+x)^n=(1+x)^{n-r+1}(1+x)^{r-1}$$
$$=\left[\sum_{i=0}^{n-r+1}\binom{n-r+1}{i}x^i\right]\left[\sum_{j=0}^{r-1}\binom{r-1}{j}x^j\right]$$

x^r 的系数，得

$$\binom{n}{r}=\sum_{d=0}^{r}\binom{n-r+1}{d}\binom{r-1}{r-d}$$
$$=\sum_{d=1}^{\infty}\binom{n-r+1}{d}\binom{r-1}{d-1}.$$

3・52　证明或说明不正确：存在素数 a,b,c,d，且 $a<b<c<d$，满足：

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{d}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

（新加坡中学数学竞赛，1987年）

［解］ 假定结论正确，则

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{d}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Rightarrow\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{c}-\frac{1}{d}\Rightarrow cd(b-a)$$
$$=ab(d-c),$$

故 b 整除 $cd(b-a)$.

另一方面，因为 b,c,d 是互不相等的素数，故 b 不能整除 cd，又不能整除 $b-a$，从而 b 不能整除 $cd(b-a)$，这就导致矛盾. 故结论不正确.

3·53 已知 a 是正整数，$r=\sqrt{a+1}+\sqrt{a}$，试证对于每个正整数 n，必有一个正整数 a_n，满足

(1) $r^{2n}+r^{-2n}=4a_n+2$;

(2) $r^n=\sqrt{a_n+1}+\sqrt{a_n}$.

（中国北京市数学竞赛，1963年）

［证］ 先证(2)式

$$\begin{aligned}r^n&=(\sqrt{a+1}+\sqrt{a})^n\\&=(\sqrt{a+1})^n+C_n^1(\sqrt{a+1})^{n-1}\sqrt{a}+C_n^2(\sqrt{a+1})^{n-2}a\\&\quad+\cdots+(\sqrt{a})^n,\end{aligned}\qquad ①$$

$$\begin{aligned}r^{-n}&=(r^{-1})^n=\left(\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}\right)^n=\left(\frac{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}{1}\right)^n\\&=(\sqrt{a+1}-\sqrt{a})^n\\&=(\sqrt{a+1})^n-C_n^1(\sqrt{a+1})^{n-1}\sqrt{a}+C_n^2(\sqrt{a+1})^{n-2}a\\&\quad+\cdots+(-1)^n(\sqrt{a})^n,\end{aligned}\qquad ②$$

用 P 表示①式右边第奇数项之和，Q 表示①式右边第偶数项之和，则由①、②两式可知

$$r_n=P+Q,\ r^{-n}=P-Q.$$

因此 $p^2-Q^2=1$，易知 p^2、Q^2 都是正整数.

令 $Q^2=a_n$，则 $Q=\sqrt{a_n}$，$P=\sqrt{a_n+1}$，于是

$$r^n=\sqrt{a_n+1}+\sqrt{a_n},$$

(2) 式得证.

再由 $r^n=\sqrt{a_n+1}+\sqrt{a_n}$ 和 $r^{-n}=\sqrt{a_n+1}-\sqrt{a_n}$ 二式各自乘再相加,得

$$r^{2n}+r^{-2n}=2(a_n+1)+2a_n=4a_n+2$$

于是(1) 式也得证.

3·54 试证对任一自然数 $n(\neq 0)$ 和任一实数 $x\neq\frac{N\pi}{2^k}(k=0,1,2,\cdots,n;N$ 是任一整数),有

$$\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sin 2^n x}=\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}2^n x.$$

(第 8 届国际数学奥林匹克,1966 年)

[证] $\operatorname{ctg}2^k x-\frac{1}{\sin 2^{k+1}x}$

$$=\frac{1}{\sin 2^{k+1}x}(2\cos^2 2^k x-1)$$

$$=\frac{\cos 2^{k+1}x}{\sin 2^{k+1}x}$$

$$=\operatorname{ctg}2^{k+1}x,$$

取 $k=0,1,2,\cdots,n-1$,相加即得.

3·55 已知:$x+\frac{1}{x}=2\cos\alpha$,试证:$x^n+\frac{1}{x^n}=2\cos n\alpha$.

(中国北京市数学竞赛,1962 年)

[证] $x+\frac{1}{x}=2\cos\alpha$,可以化成

$$x^2-2\cos\alpha\cdot x+1=0$$

解得 $x=\cos\alpha\pm i\sin\alpha$

所以 $x^n+\frac{1}{x^n}=(\cos\alpha\pm i\sin\alpha)^n+(\cos\alpha\pm i\sin\alpha)^{-n}$

$$=\cos n\alpha\pm i\sin n\alpha+\cos n\alpha\mp i\sin n\alpha$$

$$=2\cos n\alpha.$$

3·56 试证下述定理:设一个三角形的边长为 a、b、c,其相应的角为 α、β、γ,且满足条件

$$a+b=\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}(a\operatorname{tg}\alpha+b\operatorname{tg}\beta).$$

那么该三角形是等腰的.

（第 8 届国际数学奥林匹克,1966 年）

[证] $a+b=\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}(a\operatorname{tg}\alpha+b\operatorname{tg}\beta)$,

$\therefore\quad (a+b)\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=a\operatorname{tg}\alpha+b\operatorname{tg}\beta$,

即 $$a\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}-\operatorname{tg}\alpha\right)=b\left(\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\right),$$

$$\frac{a\cdot\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha\right)}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\alpha}=\frac{b\cdot\sin\left(\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\beta},$$

因此得 $\frac{a}{\cos\alpha}=\frac{b}{\cos\beta}$ 或 $\sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)=0$,

由前者得 $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\beta$,故 $\alpha=\beta$.

由后者同样得 $\alpha=\beta$.

所以该三角形是等腰的.

3·57 试证 $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$.

（第 5 届国际数学奥林匹克,1963 年）

[证 1] $$2\sin\frac{\pi}{7}\left(\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}\right)$$
$$=\sin\frac{2\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7}$$
$$=\sin\frac{\pi}{7}.$$

$$\therefore\quad \cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}.$$

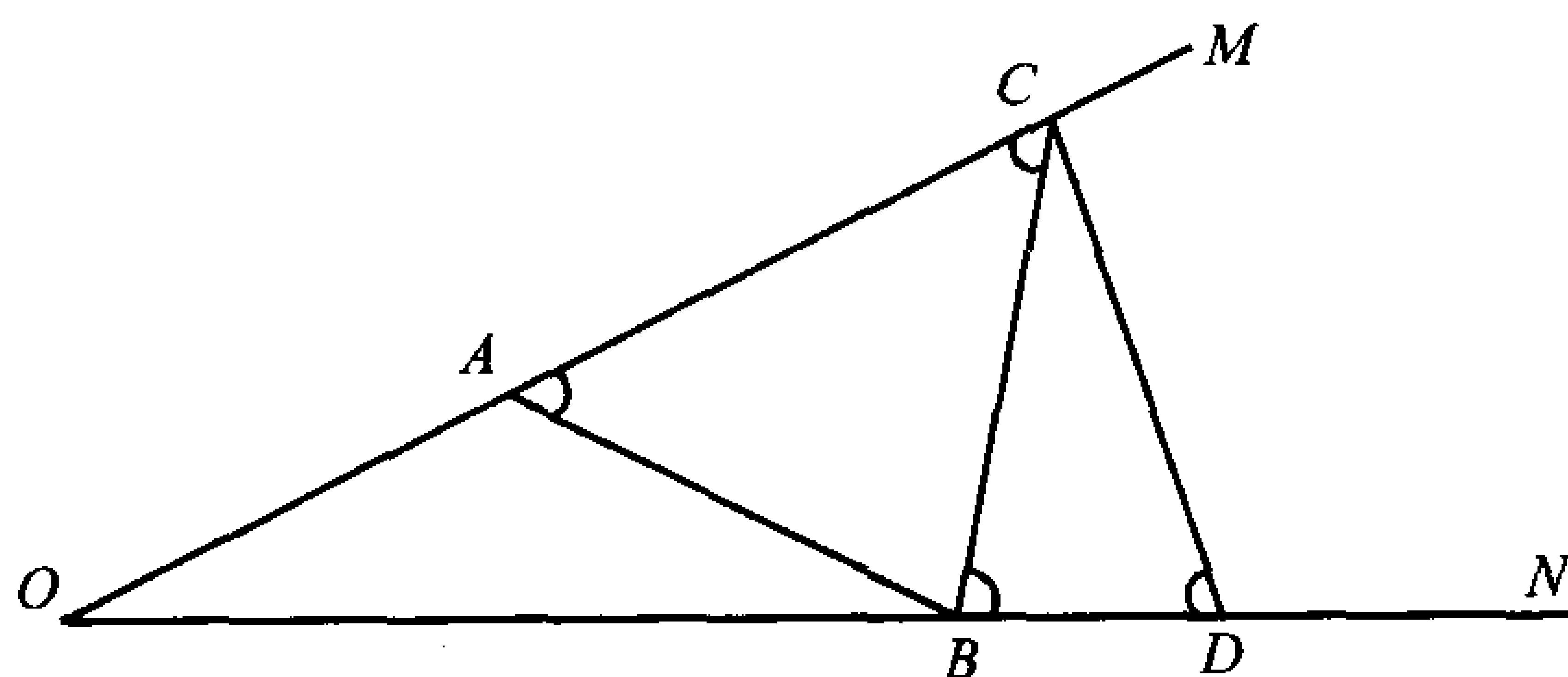
[证 2] 作 $\angle MON=\frac{\pi}{7}$.

顺次地,在 OM 上取 $OA=1$,

在 ON 上取 B,使 $AB=1(B\neq O)$,

在 OM 上取 C,使 $BC=1(C\neq A)$,

在 ON 上取 D,使 $CD=1(D\neq B)$,



则 $\angle CAB = \angle ACB = \dfrac{2\pi}{7}$,

$\angle CBD = \angle CDB = \angle ACD = \dfrac{3\pi}{7}$,

$\therefore \quad OC = OD$.

但 $OC = OA + AC = 1 + 2\cos\dfrac{2\pi}{7}$,

$$OD = OB + BD = 2\cos\frac{\pi}{7} + 2\cos\frac{3\pi}{7},$$

$$\therefore \quad \cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

3·58 (*a*) 证明:$\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{12} = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$.

(*b*) 任给13个不同实数,证明至少存在两个不妨设 x 和 y 满足不等式

$$0 < \frac{x-y}{1+xy} < \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}.$$

(新加坡中学生数学竞赛,1989年)

[证] (*a*) 设 $\theta = \dfrac{\pi}{12}$,则 $\operatorname{tg}2\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$,

即
$$\frac{2\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}^2\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

解此关于 $\operatorname{tg}\theta$ 的方程得 $\operatorname{tg}\theta = 2-\sqrt{3}$,

即 $\operatorname{tg}\theta=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$.

(b) 设13个不同的数是 $a_1, a_2, \cdots, a_{13}$. 由于 $\operatorname{tg}x$ 将 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 映到 $(-\infty, \infty)$, 所以我们能够找到不同的数 $u_i \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 使得 $\operatorname{tg}u_i = a_i (1 \leqslant i \leqslant 13)$. 现将 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 分成12等份, 应用抽屉原理, 在这12个区间中至少有一个子区间含有两 u_i, 不妨设 u_j 和 u_k, 设 $\operatorname{tg}u_j = x, \operatorname{tg}u_k = y, x > y$, 于是 $0 < \operatorname{tg}(u_j - u_k) < \operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$, 即

$$0<\frac{x-y}{1+xy}<\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}.$$

3·59 设 A、B、C 为一个三角形的三个内角, x 满足

$$\cos(x+A)\cdot\cos(x+B)\cdot\cos(x+C)+\cos^3x=0.$$

(1) 证明: $\operatorname{tg}x=\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C$.

(2) 证明: $\sec^2x=\operatorname{cse}^2A+\operatorname{cse}^2B+\operatorname{cse}^2C$.

(加拿大国家集训队训练题)

[证] 将已知等式两端同除以 $\cos^3x\cdot\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C$, 得

$$(\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}A)(\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}B)(\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}C)-\frac{1}{\sin A\sin B\sin C}=0. \quad ①$$

我们令 $S=\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C$,

即 $$S=\frac{1+\cos A\cos B\cos C}{\sin A\sin B\sin C} \quad ②$$

并注意到, 当 $A+B+C=\pi$ 时

$$\operatorname{ctg}A\cdot\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}B\cdot\operatorname{ctg}C+\operatorname{ctg}C\cdot\operatorname{ctg}A=1 \quad ③$$

则展开 ① 可得

$$\operatorname{tg}^3x-S\operatorname{tg}^2x+\operatorname{tg}x-S=0 \quad ④$$

即 $$(\operatorname{tg}x-S)(\operatorname{tg}^2x+1)=0$$

所以 $$\operatorname{tg}x=S=\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C.$$

于是(1)得证.

再将上式两边平方并加1得(利用 ③)

$$\sec^2 x = \operatorname{ctg}^2 A + \operatorname{ctg}^2 B + \operatorname{ctg}^2 C + 2 + 1$$
$$= \operatorname{cse}^2 A + \operatorname{cse}^2 B + \operatorname{cse}^2 C.$$

于是(2)得证.

3·60 证明:$\sin\frac{\pi}{14}\cdot\sin\frac{3\pi}{14}\cdot\sin\frac{5\pi}{14}=\frac{1}{8}$.

(第14届全俄数学奥林匹克,1988年)

[证] 设要证等式的左边为 x,于是我们有

$$x\cdot 8\cdot\cos\frac{\pi}{14} = 2\cdot\left(2\cdot\sin\frac{2\pi}{14}\sin\frac{5\pi}{14}\right)\sin\frac{3\pi}{14}$$
$$= 2\left(\cos\frac{3\pi}{14}-\cos\frac{7\pi}{14}\right)\sin\frac{3\pi}{14}$$
$$= \sin\frac{6\pi}{14}$$
$$= \cos\frac{\pi}{14}$$

两边同除以 $8\cdot\cos\frac{\pi}{14}$,得 $x=\frac{1}{8}$.

即原等式成立.

3·61 任给三个角 A,B,C 满足 $\cos A+\cos B+\cos C=\sin A+\sin B+\sin C=0$. 证明:$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C$ 等于常数,并求出这个常数.

(新加坡中学生数学竞赛,1987年)

[解] 由题设得 $(\cos A+\cos B+\cos C)^2=0$,

即 $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2(\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos A\cos C)=0.$ ①

而 $2(\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A)$
$$=\cos(A+B)+\cos(A-B)+\cos(B+C)+\cos(B-C)+\cos(C+A)+\cos(C-A) \quad ②$$

令 $A+B+C=D$ 得

$$\cos(A+B)+\cos(B+C)+\cos(C+A)$$
$$=\cos(D-C)+\cos(D-A)+\cos(D-B)$$
$$=\cos D(\cos C+\cos A+\cos B)+\sin D(\sin C+\sin A+\sin B)$$
$$=0, \quad ③$$

又 $(\sin A+\sin B)^2=(-\sin C)^2=\sin^2 C,$

$(\cos A+\cos B)^2=(-\cos C)^2=\cos^2 C,$

两式相加，得

$$2+2\cos(A-B)=1,$$

即 $\cos(A-B)=-\frac{1}{2}.$

同理 $\cos(B-C)=\cos(C-A)=-\frac{1}{2},$

由此再利用 ①、② 和 ③ 即得

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=\frac{3}{2}.$$

3·62 设 a,b 为直角三角形的直角边，c 为斜边. 证明：

$$\log_{b+c}a+\log_{c-b}a=2\log_{c+b}a\cdot\log_{c-b}a.$$

（基辅数学奥林匹克，1935 年）

［证］ 左边 $=\frac{1}{\log_a^{(b+c)}}+\frac{1}{\log_a^{(c-b)}}$

$=\frac{\log_a^{(c^2-b^2)}}{\log_a^{(c+b)}\cdot\log_a^{(c-b)}}$

$=\frac{2}{\log_a^{(c+b)}\cdot\log_a^{(c-b)}}$

$=2\log_{c+b}{}^{a}\cdot\log_{c-b}{}^{a}$

= 右边.

证毕.

3·63 x,y,z 是两两不相等的整数，证明：$(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$ 能被 $5(y-z)(z-x)(x-y)$ 整除.

（第 2 届全俄数学奥林匹克，1962 年）

［证］ 设 $x-y=u,y-z=v$，那么 $z-x=-(u+v)$

利用牛顿二项式公式，得

$$(u+v)^5=u^5+5u^4v+10u^3v^2+10u^2v^3+5uv^4+v^5$$

即 $(u+v)^5=u^5+v^5+5uv(u+v)(u^2+uv+v^2)$

$$u^5+v^5+[-(u+v)^5]=-5uv(u+v)(u^2+uv+v^2)$$

故 $(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$

$= 5(x-y)(y-z)(z-x)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

于是命题得证.

3·64 (1) 在任意三角形 ABC 内,如三边长为 a、b、c,试证 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$(图 Ⅰ).

(2) 设 P 为单位圆周上任意一点;$A_1,A_2,\cdots\cdots,A_n$ 为圆的内接正 n 边形的顶点,试证

$$PA_1^2+PA_2^2+\cdots\cdots+PA_n^2\text{ 是常数(图 Ⅱ)}.$$

(中国上海市数学竞赛,1957 年)

[证] (1) 当 $\angle A<90°$ 时,

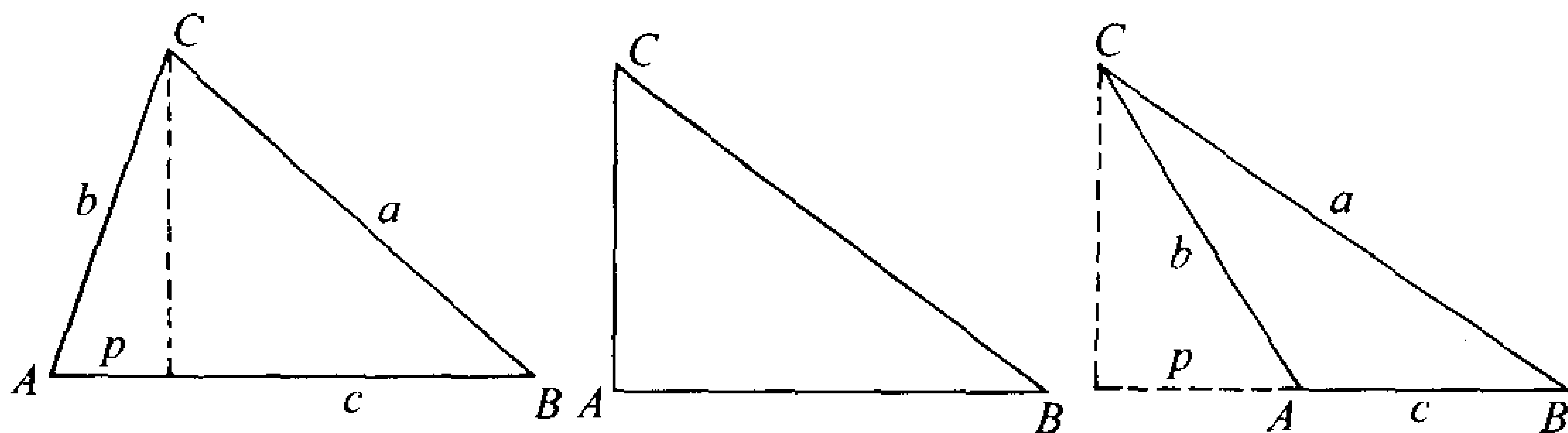


图 Ⅰ

$$a^2=b^2+c^2-2cP$$
$$=b^2+c^2-2bc\frac{P}{b}$$
$$=b^2+c^2-2bc\cos A;$$

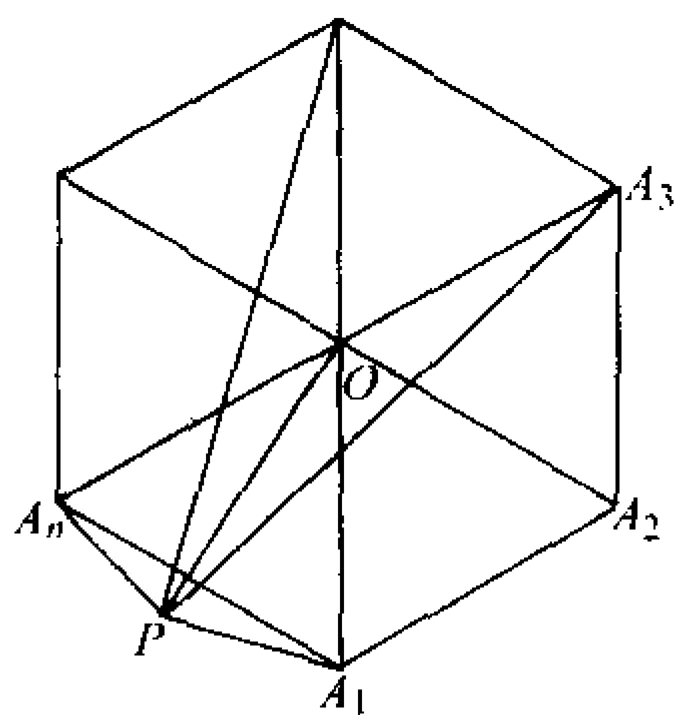


图 Ⅱ

当 $\angle A=90°$ 时,

$$a^2=b^2+c^2$$
$$=b^2+c^2-2bc\cos A;$$

当 $\angle A>90°$ 时,

$$a^2=b^2+c^2+2cP$$
$$=b^2+c^2+2bc\frac{P}{b}$$
$$=b^2+c^2+2bc\cos(180°-A)$$
$$=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

所以,在任意三角形内,均有 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

(2) 由以上证(1),在 $\triangle PA_1O_1$ 内,令 $\angle POA_1=\alpha$,$PO=A_1O=R=1$,则 $PA_1^2=PO^2+A_1O^2-2PO\cdot A_1O\cos POA_1$

$$= 1 + 1 - 2\cos\alpha$$
$$= 2 - 2\cos\alpha.$$

在 $\triangle PA_2O$ 内,$\angle POA_2 = \alpha + \frac{2\pi}{n}$,

则 $$PA_2^2 = 2 - 2\cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right),$$

同理,$PA_3^2 = 2 - 2\cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{n}\right)$,

…………

$$PA_n^2 = 2 - 2\cos POA_n = 2 - 2\cos\left[\alpha + \frac{(n-1)2\pi}{n}\right],$$

所以 $PA_1^2 + PA_2^2 + \cdots\cdots + PA_n^2$

$$= 2n - 2\left\{\cos\alpha + \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right) + \cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{n}\right) + \cdots + \cos\left[\alpha + \frac{(n-1)2\pi}{n}\right]\right.$$

$$= 2n - 2S.$$

其中 $S = \cos\alpha + \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right) + \cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{n}\right) + \cdots + \cos\left[\alpha + \frac{(n-1)2\pi}{n}\right]$.

因为 $$2\cos\alpha \cdot \sin\frac{\pi}{n} = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{n}\right) - \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{n}\right),$$

$$2\cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right) \cdot \sin\frac{\pi}{n} = \sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{n}\right) - \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{n}\right),$$

$$2\cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{n}\right) \cdot \sin\frac{\pi}{n} = \sin\left(\alpha + \frac{5\pi}{n}\right) - \sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{n}\right),$$

…………

$$2\cos\left[\alpha + \frac{(n-1)2\pi}{n}\right]\sin\frac{\pi}{n}$$
$$= \sin\left[\alpha + \frac{(2n-1)\pi}{n}\right] - \sin\left[\alpha + \frac{(2n-3)\pi}{n}\right].$$

等式两边各自相加,得

$$2\sin\frac{\pi}{n} \cdot S = 2\sin\frac{\pi}{n} \cdot \left\{\cos\alpha + \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right) + \cdots + \right.$$

$$\cos\left[\alpha+\frac{(n-1)2\pi}{n}\right]\Bigg\}$$

$$=\sin\left[\alpha+\frac{(2n-1)\pi}{n}\right]-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{n}\right)$$

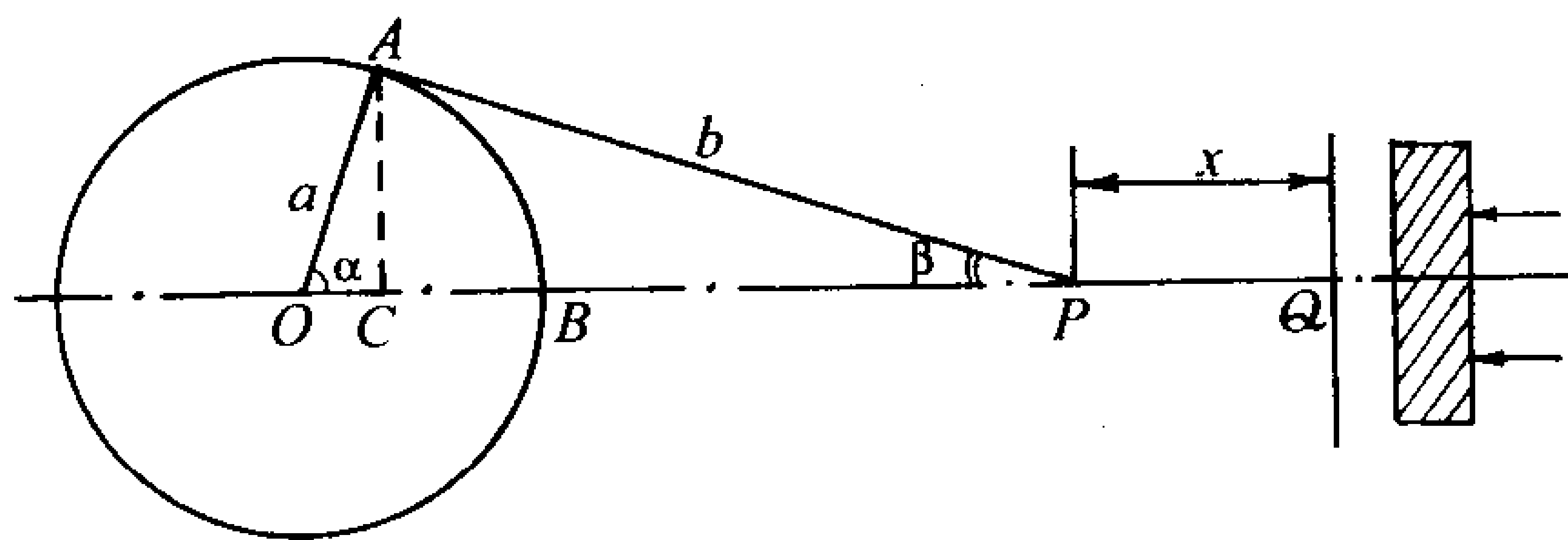
$$=2\cos\left[\alpha+\frac{(n-1)\pi}{n}\right]\sin\pi$$

$$=0.$$

所以 $S=0$.

故 $PA_1^2+PA_2^2+\cdots+PA_n^2=2n$.

3·65 如图,发动机连杆 $AP=b$,曲柄 $OA=a$,$\angle AOP=\alpha$,$\angle APO=\beta$.



(1) 试证 $a\cdot\sin\alpha=b\cdot\sin\beta$;

(2) 求出 $\sin\beta$ 的最大值;

(3) 若 $BQ=b$,$PQ=x$,

试证 $x=a(1-\cos\alpha)+b(1-\cos\beta)$.

(中国上海市数学竞赛,1960年)

[解] (1) 作 $AC\perp OB$,C 为垂足

因 $AC=OA\cdot\sin\alpha=a\cdot\sin\alpha$,

又 $AC=AP\cdot\sin\beta=b\cdot\sin\beta$,

故 $a\cdot\sin\alpha=b\cdot\sin\beta$.

(2) 因 $\sin\beta=\dfrac{a}{b}\sin\alpha$(由(1))

所以当 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ 时,$\sin\beta$ 有最大值为$\dfrac{a}{b}$.

(3)
$$\begin{aligned}PQ&=OQ-OP=(OB+BQ)-(OC+CP)\\&=(OB-OC)+(BQ-CP)\\&=a(1-\cos\alpha)+b(1-\cos\beta),\end{aligned}$$

即 $x=a(1-\cos\alpha)+b(1-\cos\beta)$.

3·66 $n(>3)$为整数,$a_0,a_1,\cdots,a_n$是满足$1\leqslant a_0<a_1<\cdots<a_n\leqslant 2n-3$的整数,求证:存在不同的整数$i,j,k,l,m$,使得

$$a_i+a_j=a_k+a_l=a_m.$$

(日本数学奥林匹克代表队选拔题,1990年)

[证] 我们证明更强的结论:在满足$1\leqslant a_0<a_1<\cdots<a_n\leqslant 2n-3$的整数中,必存在$i,j,k,l$,且均不为$n$,使得

$$a_i+a_j=a_k+a_l=a_n.$$

用反证法.设不存在i,j,k,l满足上式,并记

$$A=\{a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}\}.$$

当$a_n=2p+1$(为奇数)时,考虑p组数$(1+i,2p-i)$,$i=0,1,2,\cdots,p-1$.因为每组数之和为$2p+1=a_n$,所以,两数同属于A的组不多于一个.由于这p组$2p$个数恰包含了从1到$2p$的全部整数,因此集合A的元素均出现在这p组数中.从而集合A的元素个数

$$n\leqslant p+1,$$

$$2n\leqslant 2p+2=a_n+1\leqslant(2n-3)+1,\text{矛盾}.$$

当$a_n=2p$(为偶数)时,考虑$p-1$组数$(1+i,2p-1-i)$,$i=0,1,\cdots,p-2$.因为每组数之和为$2p=a_n$,所以两数同属于A的组不多于一个.由于这$p-1$组$2p-2$个数中,恰包含了从1到$2p-1$中除p以外的全部整数,因此集合A中除可能为p之外的所有元素均出现在这$p-1$组中,从而集合A的元素个数

$$n\leqslant p+1,$$

$$2n\leqslant 2p+2=a_n+2\leqslant(2n-3)+2,\text{矛盾}.$$

故原命题得证.

3·67 考察由恒等式

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2n}x^{2n}\equiv(x+2x^2+\cdots+nx^n)^2$$

确定的多项式,证明:$\sum\limits_{k=n+1}^{2n}\cdot a_k=\dfrac{1}{24}n(n+1)(5n^2+5n+2)$.

(第7届巴尔干地区数学竞赛试题,1990年)

[证] 显然,$a_0=a_1=0,a_2=1$.

当$3\leqslant k\leqslant n$时,

$$\begin{aligned}a_k &= 1\cdot(k-1)+2\cdot(k-2)+\cdots+(k-1)\cdot 1\\&= k(1+2+\cdots+k-1)-[1^2+2^2+\cdots+(k-1)^2]\\&= \frac{1}{2}k^2(k-1)-\frac{1}{6}(k-1)k(2k-1)\\&= \frac{1}{6}(k-1)k(k+1)\\&= C_{k+1}^3.\end{aligned}$$

于是 $\sum\limits_{k=0}^{n}a_k=\sum\limits_{k=2}^{n}C_{k+1}^3.$

由组合数性质 $C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}$ 可得

$$\sum_{k=r}^{n}C_k^r=C_{n+1}^{r+1}.$$

所以 $\sum\limits_{k=0}^{n}a_k=C_{n+2}^4.$

设 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2n}x^{2n}$
$=(x+2x^2+\cdots+nx^n)^2,$

则
$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{2n}a_k &= f(1)-\sum_{k=0}^{n}a_k\\&= \left[n(n+1)\cdot\frac{1}{2}\right]^2-\frac{1}{24}(n+2)(n+1)n(n-1)\\&= \frac{1}{24}n(n+1)(5n^2+5n+2).\end{aligned}$$

3·68 给定自然数 x_1、x_2、…、x_n 以及 y_1、y_2、…、y_m，两个和 $x_1+x_2+\cdots+x_n$ 以及 $y_1+y_2+\cdots+y_m$ 彼此相等且小于 mn. 证明：在等式 $x_1+x_2+\cdots+x_n=y_1+y_2+\cdots+y_m$ 中可以删去一部分加数，使剩下的部分仍然是等式.

（第 11 届全苏数学奥林匹克，1977 年）

[证] 对 $m+n$ 进行归纳.

当 $m+n=4$ 时，$m=2,n=2$. 我们记 $S=x_1+x_2+\cdots+x_n=y_1+y_2+\cdots+y_m$，由 $S\geqslant m$，得 $S\geqslant 2$. 又由 $S<mn$，得 $S<4$，故 $2\leqslant S\leqslant 3$，容易验证，$S=2$ 或 $S=3$ 时，命题成立.

设 $m+n=k$ 时，命题成立，则当 $m+n=k+1$ 时，我们不妨设 x_1 是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中的最大值，y_1 是 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 中的最大值.

若 $x_1 = y_1$，则命题显然成立.

若 $x_1 > y_1$，则令 $x' = x_1 - y_1$，

$$S' = (x_1 - y_1) + x_2 + \cdots + x_n = y_2 + \cdots + y_m,$$

从而有

$$S' = x'_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_2 + \cdots + y_m.$$

由于 $\quad y_1 \geqslant \frac{S}{m}$，因此

$$S' = S - y_1 \leqslant S - \frac{S}{m} = S \cdot \frac{m-1}{m} < m \cdot n \cdot \frac{m-1}{m}$$
$$= n(m-1).$$

根据归纳假设，等式

$$x'_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_2 + \cdots + y_m$$

中可以删去部分项，重新得到正确的等式，于是等式

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_m$$

中必可删去部分项，重新得到正确的等式.

若 $x_1 < y_1$，同理可证.

这就是说，$m + n = k + 1$ 时，命题也成立.

根据数学归纳原理，原命题成立.

3·69　k 个正数 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 的几何平均 G·M 定义为它们的乘积的 k 次方根. 例如，3,4,18 的 G·M 是 6. 证明：n 个正数的集合 S 的 G·M 等于 S 所有非空子集的诸 G·M 的 G·M.

（第 15 届加拿大数学奥林匹克，1983 年）

［证］　考虑集合 $S = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 的任一确定元素 a_i，设 $k = 1, 2, \cdots, n$，S 的 k 元子集有 C_n^k 个，其中含有 a_i 的子集只有 C_{n-1}^{k-1} 个. 而每个这样子集的 G·M 都含有因子 $a_i^{\frac{1}{k}}$，所以 k 元子集的 G·M 的乘积中 a_i 的指数是 $\frac{C_{n-1}^{k-1}}{k}$. S 的非空子集的总个数是

$$C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = (1+1)^n - 1 = 2^n - 1,$$

所有这些子集的 G·M 的乘积中 a_i 的指数是

$$\frac{C_{n-1}^0}{1} + \frac{C_{n-1}^1}{2} + \cdots + \frac{C_{n-1}^{n-1}}{n}$$

$$= \left(n \cdot \frac{C_{n-1}^{0}}{1} + n\frac{C_{n-1}^{1}}{2} + \cdots + n \cdot \frac{C_{n-1}^{n-1}}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \frac{2^n - 1}{n}.$$

所以在 S 所有非空子集的诸 G · M 的 G · M 中，a_i 的指数是

$$\frac{\frac{2^n - 1}{n}}{2^n - 1} = \frac{1}{n}$$

而 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的 G · M 中 a_i 的指数也等于$\frac{1}{n}$，因此原命题得证.

3 · 70　对每一正整数 n，证明：

$$[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}] = [\sqrt{4n+1}] = [\sqrt{4n+2}]$$
$$= [\sqrt{4n+3}].$$

这里$[x]$表示不超过 x 的最大整数.

（第 19 届加拿大数学奥林匹克，1987 年）

［证］　设 x 为正整数，且 $x^2 > 4n+1$.

若 x 为偶数，则

$$x^2 = 4m > 4n+1,$$

因而

$$m \geqslant n+1,$$
$$x^2 = 4m \geqslant 4n+4 > 4n+3.$$

若 x 为奇数，则

$$x^2 = 4m+1 > 4n+1,$$

因而

$$m \geqslant n+1,$$
$$x^2 \geqslant 4n+5,$$

同样有

$$x^2 > 4n+3.$$

特别地，取 $x = [\sqrt{4n+1}] + 1$，则有

$$[\sqrt{4n+1}] + 1 > \sqrt{4n+3} > \sqrt{4n+1} \geqslant [\sqrt{4n+1}],$$

从而

$$[\sqrt{4n+1}] = [\sqrt{4n+2}] = [\sqrt{4n+3}].$$

另一方面

$$(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 = 2n+1+2\sqrt{n(n+1)}$$
$$> 2n+1+2n$$
$$= 4n+1,$$
$$(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 < 2n+1+2(n+1)$$

$$= 4n+3,$$

所以 $\quad [\sqrt{4n+1}] \leqslant [\sqrt{n}+\sqrt{n+1}] \leqslant [\sqrt{4n+3}].$

于是有

$$\begin{aligned}[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}] &= [\sqrt{4n+1}] \\ &= [\sqrt{4n+2}] \\ &= [\sqrt{4n+3}].\end{aligned}$$

3·71 (1) 证明:当且仅当 $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{2}{c+a}$ 时,

$$2b^2=a^2+c^2.$$

(2) 化简 $\quad \frac{1}{2\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}.$

(3) 设 a,b,p,q,r,s 为正整数,满足 $qr-ps=1$, $\frac{p}{q}<\frac{a}{b}<\frac{r}{s}$. 证明: $b \geqslant q+s$.

(加拿大国家集训队训练题)

[证] (1) $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{2}{c+a}$ 等价于

$$\frac{1}{b+c}-\frac{1}{c+a}=\frac{1}{c+a}-\frac{1}{a+b}$$

即 $\quad \frac{a-b}{(b+c)(c+a)}=\frac{b-c}{(c+a)(a+b)}$

它又等价于 $\quad (a-b)(a+b)=(b+c)(b-c),$

即 $\quad 2b^2=a^2+c^2.$

(2) 由于 $\quad \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}$$

$$=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}}=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}},$$

所以,原式 $=\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{99}}-\frac{1}{\sqrt{100}}\right)$

$$=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}.$$

(3) 由于$\frac{p}{q}<\frac{a}{b}$,所以$0<\frac{a}{b}-\frac{p}{q}=\frac{aq-bp}{bq}$,$aq-bp$是一正整数,因而$\frac{a}{b}-\frac{p}{q}\geqslant\frac{1}{bq}$,同样,$\frac{r}{s}-\frac{a}{b}\geqslant\frac{1}{bs}$.

从而
$$\frac{r}{s}-\frac{p}{q}=\left(\frac{r}{s}-\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{a}{b}-\frac{p}{q}\right)\geqslant\frac{1}{bq}+\frac{1}{bs}=\frac{q+s}{bqs}.$$

另一方面,
$$\frac{r}{s}-\frac{p}{q}=\frac{rq-ps}{sq}=\frac{1}{sq},$$

所以
$$\frac{1}{sq}\geqslant\frac{s+q}{bqs},$$

即
$$b\geqslant q+s.$$

3·72 对所有正整数 n,证明

$$|!(2n-1)!-2!(2n-2)!+\cdots-(2n-2)!2!+(2n-1)!|!=\frac{(2n)!}{n+1}.$$

(加拿大国家集训队训练题)

[证] 本题相当于证明

$$\frac{1}{C_{2n}^{1}}-\frac{1}{C_{2n}^{2}}+\cdots-\frac{1}{C_{2n}^{2n-2}}+\frac{1}{C_{2n}^{2n-1}}=\frac{1}{n+1} \quad ①$$

因为等式
$$\frac{1}{C_{2n+1}^{k}}+\frac{1}{C_{2n+1}^{k+1}}=\frac{2n-k+1}{(2n+1)C_{2n}^{k}}+\frac{k+1}{(2n+1)C_{2n}^{k}}=\frac{2n+2}{2n+1}\cdot\frac{1}{C_{2n}^{k}}$$

所以①式左边为

$$\frac{2n+1}{2n+2}\left[\left(\frac{1}{C_{2n+1}^{1}}+\frac{1}{C_{2n+1}^{2}}\right)-\left(\frac{1}{C_{2n+1}^{2}}+\frac{1}{C_{2n+1}^{3}}\right)+\cdots-\left(\frac{1}{C_{2n+1}^{2n-2}}+\frac{1}{C_{2n+1}^{2n-1}}\right)+\left(\frac{1}{C_{2n+1}^{2n-1}}+\frac{1}{C_{2n+1}^{2n}}\right)\right]$$
$$=\frac{2n+1}{2n+2}\left(\frac{1}{C_{2n+1}^{1}}+\frac{1}{C_{2n+1}^{2n}}\right)$$
$$=\frac{1}{n+1}.$$

3·73　观察

$$\frac{1}{1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2};\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6};\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12};\frac{1}{4}=\frac{1}{5}+\frac{1}{20}.$$

由这些例子的启发,叙述一般规律,并加以证明.对任何大于1的整数 n,证明存在整数 i 和 j,使得

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{i(i+1)}+\frac{1}{(i+1)(i+2)}+\frac{1}{(i+2)(i+3)}+\cdots+\frac{1}{j(j+1)}.$$

(第5届加拿大数学奥林匹克,1973年)

[**解**]　由所给的例子猜想一般规律

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)},n=1,2,3,\cdots \qquad ①$$

因为 $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n+1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}$

所以,① 式是成立的.

把 ① 式写成等价形式

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},n=1,2,3,\cdots$$

于是,我们有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{i(i+1)}+\frac{1}{(i+1)(i+2)}+\cdots+\frac{1}{j(j+1)}\\&=\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)+\left(\frac{1}{i+1}-\frac{1}{i+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{j}-\frac{1}{j+1}\right)\\&=\frac{1}{i}-\frac{1}{j+1}.\end{aligned}$$

设 $\frac{1}{n}=\frac{1}{i}-\frac{1}{j+1}$, ②

于是我们只需证明存在正整数 i 和 j 使 ② 式成立.

将 ① 式中的 n 改为 $n-1$,得

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{(n-1)n}.$$

因此,当 $i=n-1,j+1=(n-1)n$ 时,② 式成立.故原命题得证.

3·74　设 $1\leqslant r\leqslant n$,考虑集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的所有含 r 个元素的子集及每个这样子集中的最小元素.用 $F(n,r)$ 表示所有这样的最小数的算术平均值.求证:

$$F(n,r)=(n+1)/(r+1).$$

（第22届国际数学奥林匹克，1981年）

[证] 集合$\{1,2,\cdots,n\}$的r元子集共有C_n^r个.如果一个r元子集中的最小元为j，则其余$r-1$个元素必都取自$\{j+1,\cdots,n\}$.所以最小元为j的r元子集共有C_{n-j}^{r-1}个.于是有

$$\sum_{j=1}^{n-r+1}C_{n-j}^{r-1}=C_n^r. \qquad ①$$

利用①式，可以算出所有r元子集最小数的和为

$$\begin{aligned}S&=\sum_{j=1}^{n-r+1}jC_{n-j}^{r-1}=C_n^r+\sum_{j=2}^{n-r+1}(j-1)C_{n-j}^{r-1}\\&=C_n^r+C_{n-1}^r+\sum_{j=3}^{n-r+1}(j-2)C_{n-j}^{r-1}\\&=\sum_{j=0}^{n-r}C_{n-j}^r=C_{n+1}^{r+1}.\end{aligned}$$

由此即得

$$F(n,r)=C_{n+1}^{r+1}/C_n^r=(n+1)/(r+1).$$

3·75　设数列$u_0,u_1,u_2,\cdots$的定义如下：

$$u_0=2,u_1=\frac{5}{2},$$

$$u_{n+1}=u_n(u_{n-1}^2-2)-u_1,n=1,2,\cdots$$

试证$[u_n]=2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}},n=1,2,\cdots$

这里$[x]$表示不大于x的最大整数.

（第18届国际数学奥林匹克，1976年）

[证] 首先用数学归纳法证明：当$n>0$时，

$$u_n=2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}+2^{-\frac{2^n-(-1)^n}{3}}.$$

事实上，由

$$u_1=\frac{5}{2}=2^1+2^{-1}=2^{\frac{2^1-(-1)^1}{3}}+2^{-\frac{2^1-(-1)^1}{3}},$$

$$u_2=\frac{5}{2}=2^{\frac{2^2-(-1)^2}{3}}+2^{-\frac{2^2-(-1)^2}{3}},$$

可知命题对$n=1,2$为真.

设命题对 $n=k-1,k$ 成立，我们来证明命题对 $n=k+1$ 成立.

设 $f(n)=\dfrac{2^n-(-1)^n}{3}$,

由数列递推关系得

$$u_{k+1}=(2^{f(k)}+2^{-f(k)})[(2^{f(k-1)}+2^{-f(k-1)})^2-2]-\frac{5}{2}$$
$$=2^{f(k)+2f(k-1)}+2^{-[f(k)+2f(k-1)]}+2^{f(k)-2f(k-1)}+2^{-[f(k)-2f(k-1)]}-\frac{5}{2}.$$

因为
$$f(k)+2f(k-1)=\frac{2^k-(-1)^k}{3}+2\cdot\frac{2^{k-1}-(-1)^{k-1}}{3}=\frac{2^{k+1}-(-1)^{k+1}}{3}=f(k+1),$$
$$f(k)-2f(k-1)=\frac{2^k-(-1)^k}{3}-2\cdot\frac{2^{k-1}-(-1)^{k-1}}{3}=(-1)^{k+1},$$

所以
$$u_{k+1}=2^{f(k+1)}+2^{-f(k+1)}+2^{(-1)^{k+1}}+2^{-(-1)^{k+1}}-\frac{5}{2}.$$

因为
$$2^{(-1)^{k+1}}+2^{-(-1)^{k+1}}-\frac{5}{2}=2^{(-1)^{k+1}}+2^{(-1)^k}-\frac{5}{2}=0,$$

所以
$$u_{k+1}=2^{f(k+1)}+2^{-f(k+1)}=2^{\frac{2^{k+1}-(-1)^{k+1}}{3}}+2^{-\frac{2^{k+1}-(-1)^{k+1}}{3}}.$$

这就证明了命题对 $n=k+1$ 成立.

其次证明 $f(n)=\dfrac{2^n-(-1)^n}{3}$ 是整数.

因为当 n 为偶数时，

$2^n\equiv 1\pmod 3$　且 $(-1)^n\equiv 1\pmod 3$;

当 n 为奇数时，

$2^n\equiv 2\pmod 3$　且 $(-1)^n\equiv 2\pmod 3$

所以 $2^n-(-1)^n\equiv 0\pmod 3$.

因此 $f(n)=\dfrac{2^n-(-1)^n}{3}$

是整数，从而 $2^{-f(n)}$ 是真分数. 由此可知

$$[u_n]=2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}.$$

3·76　设 n 为自然数，试证恒等式

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k 2^k C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}=C_{2n+1}^{n}.$$

（第 9 届中国数学奥林匹克，1994 年）

[解]　考虑母函数 $(x+1)^{2n+1}$，它的 x^n 的系数为 C_{2n+1}^{n}.

另一方面，$(x+1)^{2n+1}=(x^2+2x+1)^n(x+1)$

$$=(x^2+2x+1)^n x+(x^2+2x+1)^n,$$

且　$(x^2+2x+1)^n$

$$=\sum_{i+j+k=n}\frac{n!}{i!j!k!}(x^2)^i(2x)^j$$

$$=\sum_{0\leqslant i+j\leqslant n}\frac{n!\cdot 2^j}{i!j!(n-i-j)!}x^{2i+j}$$

故　$(x+1)^{2n+1}$ 的 x^n 的系数为

$$\sum_{2i+j=n-1}\frac{n!\cdot 2^j}{i!j!(n-i-j)!}+\sum_{2i+j=n}\frac{n!2^j}{i!j!(n-i-j)!}$$

$$=\sum_{0\leqslant 2i\leqslant n-1}\frac{n!2^{n-1-2i}}{i!(n-1-2i)!(i+1)!}+\sum_{0\leqslant 2i\leqslant n}\frac{n!\cdot 2^{n-2i}}{i!(n-2i)!i!}$$

$$=\sum_{\substack{k=1\\2\nmid k}}^{n}\frac{n!}{(n-k)!k!}\cdot\frac{k!}{\left(\frac{k-1}{2}\right)!\left(\frac{k+1}{2}\right)!}2^{n-k}+\sum_{\substack{k=0\\2\mid k}}^{n}\frac{n!}{(n-k)!k!}\cdot\frac{k!}{\left[\frac{k}{2}\right]!^2}\cdot 2^{n-k}$$

$$=\sum_{\substack{k=1\\2\nmid k}}^{n}C_n^k\cdot 2^{n-k}\cdot C_k^{\left[\frac{k}{2}\right]}+\sum_{\substack{k=0\\2\mid k}}^{n}C_n^k\cdot 2^{n-k}\cdot C_k^{\left[\frac{k}{2}\right]}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot 2^{n-k}\cdot C_k^{\left[\frac{k}{2}\right]}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot 2^k\cdot C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}.$$

所以 $\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot 2^k \cdot C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} = C_{2n+1}^n$.

3·77　已知一个由 0,1 组成的数列 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,A 为等于(0,1,0)或(1,0,1)的三元数组(x_i,x_j,x_k),$i<j<k$ 的个数,对 $1\leqslant i\leqslant n$,令 d_i 为满足 $j<i$,并且 $x_j=x_i$ 或者 $j>i$,并且 $x_j\neq x_i$ 的 j 的个数.

(1) 试证明:$A=C_n^3-C_{d_1}^2-C_{d_2}^2-\cdots-C_{d_n}^2$;

(2) 给定奇数 n,A 的最大值是多少?

(第 16 届美国数学奥林匹克,1987 年)

[解] (1) 由 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 组成的三元数组共有 C_n^3 个.

对每个数 x_i,由题设,在它前面与它相等的数及在它后面与它不等的数共 d_i 个.

而从这 d_i 个数中任取两个数与 x_i 组成三元数组,在不改变原来下标顺序的情况下,所组成的三元数组都不会等于(0,1,0)或(1,0,1).这是因为,若 x_i 取 0,则在它前面取两个数时,只能取与它相等的数,即 0,0,组成(0,0,0),在它后面取两个数时,只能取与它不等的数,即 1,1,组成(0,1,1),如果在它前面取一个(只能是 0),在它后面取一个(只能是 1),即组成(0,0,1),若 x_i 取 1,则可能组成的数组为(1,1,1),(1,0,0)和(1,1,0).因此不会出现(0,1,0)和(1,0,1)数组.

因此所求(0,1,0)和(1,0,1)数组的个数 A,必须从 C_n^3 中把所有的 $C_{d_i}^2$ 减去.

同时这样得到的 $\sum_{i=1}^{n} C_{d_i}^2$ 个数组没有重复.事实上,如果(x_i,x_j,x_k)是作为从 x_i 后面取两个与它不同的数得到的,则有 $x_i\neq x_j\neq x_k$,如果(x_i,x_j,x_k)是作为从 x_j 得到的,则有 $x_i=x_j\neq x_k$,如果(x_i,x_j,x_k)是作为从 x_k 得到的,则有 $x_i=x_j=x_k$,所以都不重复.

另一方面,不等于(0,1,0)或(1,0,1)的数组有(0,0,0),(0,0,1),(0,1,1),(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1).这六组数中每组都在 $\sum_{i=1}^{n} C_{d_i}^2$ 个数组中出现,于是有

$$A=C_n^3-C_{d_1}^2-C_{d_2}^2-\cdots-C_{d_n}^2.$$

(2) 设 $n=2k+1$ 为给定的奇数.

又设 $x_1,x_2,\cdots,x_{2k+1}$ 中有 s 个0，t 个1，其中 $s+t=n$.

若 $x_i=1$，设这个1是第 j 个1，则在它前面有 $j-1$ 个1，$i-j$ 个0，后面有 $t-j$ 个1，$s-(i-j)$ 个0，于是

$$d_i=(j-1)+[s-(i-j)]=s-i+2j-1.$$

同样，若 $x_i=0$，设这个0是第 j 个0，则在它前面有 $j-1$ 个0，在它后面有 $t-(i-j)$ 个1，于是

$$d_i=(j-1)+[t-(i-j)]=t-i+2j-1.$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n}d_i=\sum_{x_i=1}d_i+\sum_{x_i=0}d_i$$

$$=2st-\sum_{i=1}^{n}i+s(s+1)+t(t+1)-n$$

$$=(s+t)^2+(s+t)-\frac{1}{2}n(n+1)-n$$

$$=n^2+n-\frac{1}{2}n(n+1)-n$$

$$=\frac{1}{2}n(n-1).$$

$$\sum_{i=1}^{n}C_{d_i}^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{d_i(d_i-1)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}d_i^2-\sum_{i=1}^{n}d_i\right).$$

由柯西-施瓦兹不等式得

$$\left(\sum_{i=1}^{n}d_i\right)^2\leqslant n\sum_{i=1}^{n}d_i^2,$$

所以有

$$\sum_{i=1}^{n}C_{d_i}^2\geqslant\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}d_i\right)^2-\sum_{i=1}^{n}d_i\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}d_i\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}d_i-1\right)$$

$$=\frac{1}{4}n(n-1)\left[\frac{1}{2}(n-1)-1\right]$$

$$=\frac{1}{8}n(n-1)(n-3).$$

因为 $n=2k+1$,所以 $n-1=2k$,$n-3=2k-2$,则

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} C_{d_i}^2 &\geqslant \frac{1}{8}n(n-1)(n-3)\\ &= \frac{n}{2}k(k-1)\\ &= nC_k^2.\end{aligned}$$

因此,我们有

$$A \leqslant C_{2k+1}^3 - nC_k^2,$$

并且当且仅当所有的 $d_i=\frac{1}{2}(n-1)=k$ 时,等号成立.

这就是说,对每个 x_i,d_i 都相同.

若 $x_i=1$,则 $d_i=k$,从而 $s=k$,$t=k+1$,设 x_i 是第 j 个 1,则 $k=d_i=s-i+2j-1=k-i+2j-1$,即

$$i=2j-1.$$

于是所有的奇数位都是 1,得到数列 1,0,1,0,…,0,1.

若 $x_i=0$,同样得到 0,1,0,1,…,0,1,0.

此时,A 有最大值 $C_{2k+1}^3-nC_k^2$.

3·78　设 $a_n=\frac{n^2+1}{\sqrt{n^4+4}}$,$n=1,2,3,\cdots$,$b_n=a_1a_2\cdots a_n$,证明 $\frac{b_n}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+2n+2}}$. 并证明:$\frac{1}{(n+1)^3}<\frac{b_n}{\sqrt{2}}-\frac{n}{n+1}<\frac{1}{n^3}$ 对所有的正整数 n 成立.

(第 4 届爱尔兰数学奥林匹克,1991 年)

[证]　先证明 $\frac{b_n}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+2n+2}}$,$n=1,2,\cdots$

当 $n=1$ 时,等式显然成立.

设 $n-1$ 时,等式成立,即

$$\frac{b_{n-1}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{(n-1)^2+1}}{\sqrt{(n-1)^2+2(n-1)+2}}$$

于是　$$\frac{b_n}{\sqrt{2}}=\frac{b_{n-1}}{\sqrt{2}}\cdot a_n=\frac{\sqrt{(n-1)^2+1}}{\sqrt{(n-1)^2+2(n-1)+2}}\cdot a_n$$

$$= \frac{\sqrt{n^2-2n+2}}{\sqrt{n^2+1}} \cdot \frac{n^2+1}{\sqrt{n^4+4}}$$

$$= \sqrt{\frac{n^2-2n+2}{n^4+4}} \cdot \sqrt{n^2+1}$$

$$= \sqrt{\frac{n^2-2n+2}{n^4+4n^2+4-4n^2}} \cdot \sqrt{n^2+1}$$

$$= \sqrt{\frac{n^2+2-2n}{(n^2+2)^2-(2n)^2}} \cdot \sqrt{n^2+1}$$

$$= \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+2n+2}}.$$

故等式对任意自然数 n 都成立.

再证明 $\frac{b_n}{\sqrt{2}} - \frac{n}{n+1} < \frac{1}{n^3}$.

事实上, $\frac{b_n}{\sqrt{2}} - \frac{n}{n+1} < \frac{1}{n^3}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+2n+2}} < \frac{n^4+n+1}{n^3(n+1)}$$

$$\Leftrightarrow (n^2+1)[n^3(n+1)]^2 < (n^2+2n+2)(n^4+n+1)^2$$

$$\Leftrightarrow (n^8+n^6)(n^2+2n+1) < (n^2+2n+2)(n^8+2n^5+2n^4+n^2+2n+1)$$

$$\Leftrightarrow n^{10}+2n^9+2n^8+2n^7+n^6 < n^{10}+2n^9+2n^8+2n^7+6n^6+8n^5+5n^4+4n^3+7n^2+6n+2.$$

$$\Leftrightarrow 0 < 5n^6+8n^5+5n^4+4n^3+7n^2+6n+2.$$

因为最后一个不等式成立,所以原不等式也成立.

最后,同理可证

$$\frac{1}{(n+1)^3} < \frac{b_n}{\sqrt{2}} - \frac{n}{n+1}.$$

综上所述,原命题得证.

3·79 设 $A+B+C=\pi$, $\sin A - \sin B = \sin B - \sin C$,试证:

$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=3.$

（中国北京市数学竞赛，1957年）

［证］ 由 $A+B+C=\pi$ 得 $2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A+C}{2}=2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$

$=\sin B$，

又由已知得 $\sin B=\frac{1}{2}(\sin A+\sin C)$

$$=\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2},$$

故 $\quad 2\cos\frac{A+C}{2}=\cos\frac{A-C}{2}$，

即 $\quad 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}$

$$=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2},$$

所以 $\quad \cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}=3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}$，

即 $\quad \operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=3.$

3·80　设 $A+B+C=180°$，试证：

$$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C-2\cos A\cos B\cos C=2.$$

（中国北京市数学竞赛，1962年）

［证］ 因为 $\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C$

$$=\frac{1+\cos2A}{2}+\frac{1+\cos2B}{2}+\frac{1+\cos2C}{2}$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(\cos2A+\cos2B+\cos2C)$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(-4\cos A\cos B\cos C-1)$$

$$=1-2\cos A\cos B\cos C,$$

所以

$$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C$$

$$=3-(\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C)$$

$$=3-(1-2\cos A\cos B\cos C)$$

$$=2+2\cos A\cos B\cos C.$$

移项即得

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C-2\cos A\cos B\cos C=2.$$

3·81　试证恒等式

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}.$$

（中国北京市数学竞赛，1956年）

［证］
$$\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x=2\sin\frac{1}{2}x\cos nx,$$

$$\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(n-\frac{3}{2}\right)x=2\sin\frac{1}{2}x\cos(n-1)x,$$

…………………

$$\sin\frac{3}{2}x-\sin\frac{1}{2}x=2\sin\frac{x}{2}\cos x,$$

$$\sin\frac{1}{2}x=2\left(\sin\frac{1}{2}x\right)\left(\frac{1}{2}\right).$$

把上面所有的等式的两边分别相加，则得

$$\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x=2\sin\frac{1}{2}x\left(\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx\right).$$

所以
$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}.$$

3·82　试证：

$$\left(\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}-\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)\left(1+\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)=2\csc\theta.$$

（中国北京市数学竞赛，1964年）

［证］
$$\left(\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}-\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)\left(1+\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}\left(1+\frac{2\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$=\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}}{\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{1+\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}}=\frac{\sec^2\frac{\theta}{2}}{\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{2}{\sin\theta}$$

$$=2\csc\theta.$$

3·83 试证:若 α,β,γ 是直角三角形的内角,则

$\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha-\beta)+\sin\beta\sin\gamma\sin(\beta-\gamma)+\sin\gamma\sin\alpha\sin(\gamma-\alpha)+\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)=0.$

(匈牙利数学奥林匹克,1974 年)

[证] 不妨设 $\alpha=90^\circ=\beta+\gamma$,则有

$\sin\alpha=1,\sin(\alpha-\beta)=\sin\gamma,$

$\sin(\gamma-\alpha)=-\sin(\alpha-\gamma)=-\sin\beta.$

因此

$\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha-\beta)=\sin\beta\sin\gamma,$

$\sin\beta\sin\gamma\sin(\beta-\gamma)=\sin\beta\sin\gamma\sin(\beta-\gamma),$

$\sin\gamma\sin\alpha\sin(\gamma-\alpha)=-\sin\gamma\sin\beta,$

$\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)=-\sin\gamma\sin(\beta-\gamma)\sin\beta.$

将 4 个式子相加即得证.

3·84 试证:如果 n 是大于 1 的自然数,那么

$$\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{4\pi}{n}+\cos\frac{6\pi}{n}+\cdots+\cos\frac{2n\pi}{n}=0.$$

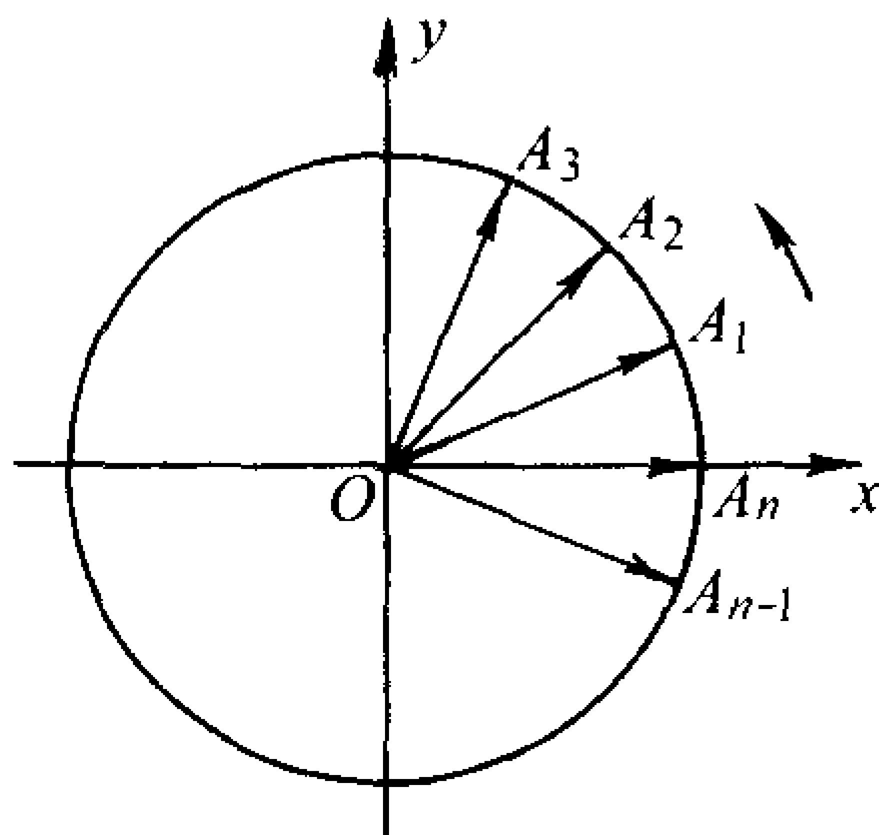
(波兰数学奥林匹克,1958 年)

[证] 在平面上确立直角坐标系 xoy,并考察 n 个单位矢量 $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2},\cdots,\overrightarrow{OA_{n-1}},\overrightarrow{OA_n}$,它们与 ox 轴夹角分别为 $2\pi/n,4\pi/n,\cdots(2n-2)\pi/n,2n\pi/n$(如图)设 $\vec{V}$ 是这些矢量的和:

$$\vec{V}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_{n-1}}+\overrightarrow{OA_n}.$$

沿平行于 Ox 和 Oy 轴的方向将每个矢量 $\overrightarrow{OA_i}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 分解

(投影). 矢量 $\overrightarrow{OA_i}$ 的两个分量分别是 $\cos(2i\pi/n)$, $\sin(2i\pi/n)$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 矢量 $\vec{V}$ 的分量记作 X 和 Y. 那么



$$X=\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{4\pi}{n}+\cdots+\cos\frac{(2n-2)\pi}{n}+\cos\frac{2n\pi}{n},$$

$$Y=\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{4\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(2n-2)\pi}{n}+\sin\frac{2n\pi}{n}.$$

将 n 个矢量 $\overrightarrow{OA_i}$ 绕点 O 旋转角度 $2\pi/n$(因 $n>1$,所以转角小于 2π). 于是它们的和矢量,也即 $\vec{V}$ 也旋转了 $2\pi/n$. 旋转后所得的矢量组与原来的矢量组没有任何差别,因为矢量 $\overrightarrow{OA_1}$ 变成了矢量 $\overrightarrow{OA_2}$,矢量 $\overrightarrow{OA_2}$ 变成了矢量 $\overrightarrow{OA_3}$,等等,最后矢量 $\overrightarrow{OA_{n-1}}$ 变成了矢量 $\overrightarrow{OA_n}$,矢量 $\overrightarrow{OA_n}$ 变成了矢量 $\overrightarrow{OA_1}$. 但若旋转后的矢量组与旋转前的矢量组重合,则旋转前后的和矢量应当一样,也就是矢量 $\vec{V}$. 因此,矢量 $\vec{V}$ 在绕 O 点旋转比 2π 小的角 $2\pi/n$ 时是不变的. 只有零矢量才具有这种性质. 零矢量的两个分量皆等于零,因此 $X=0$. 于是本题得证.

3·85　设 $n\geqslant 2$, $a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n$ 都是正整数,且 $a_k\leqslant k(1\leqslant k\leqslant n)$. 试证明,当且仅当 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 为偶数时,可以适当选取"+"号与"−"号,使得 $a_1\pm a_2\pm\cdots\pm a_n=0$.

(第 5 届中国数学奥林匹克选拔试题,1990 年)

[证]　必要性:由于加、减号的选择不改变 $a_1\pm a_2\pm\cdots\pm a_n$ 的奇偶性,因此仅当 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 是偶数时,才可能通过选择加减号使 $a_1\pm a_2\pm\cdots\pm a_n=0$.

充分性: $n=2$ 时, $a_1=1$. 由 a_1+a_2 是偶数,且 $a_2\leqslant 2$ 得 $a_2=1$,

从而有 $a_2 - a_1 = 0$. 因此，$n = 2$ 时，命题的充分性成立.

设 $n \leqslant k$ 时，命题的充分性成立.

当 $n = k+1$ 时，若 $a_{k+1} \neq a_k$，则 $1 \leqslant |a_{k+1} - a_k| = k$，故 $a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}, |a_{k+1} - a_k|$ 符合归纳假设条件，由归纳假设知，可通过加减号的选择使

$$a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_{k-1} \pm |a_{k+1} - a_k| = 0,$$

从而可使

$$a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_{k-1} \pm a_k \pm a_{k+1} = 0.$$

若 $a_{k+1} = a_k$，则 $k-1 \neq 1$（否则的话，就有 $a_{k-1} = a_1 = 1$，从而 $a_1 + \cdots + a_k + a_{k+1} = a_1 + a_k + a_{k+1} = 1 + 2a_k$ 为奇数，与题设矛盾.）. 由归纳假设，可通过加减号的选择使

$$a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_{k-1} = 0,$$

从而可使

$$a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_{k-1} + a_k - a_{k+1} = 0.$$

因此当 $n = k+1$ 时，命题的充分性仍成立. 故命题充分性得证.

3·86　单位圆被点 A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 分成五个等弧. 试证弦 A_0A_1 和 A_0A_2 之长满足等式 $(A_0A_1 \cdot A_0A_2)^2 = 5$.

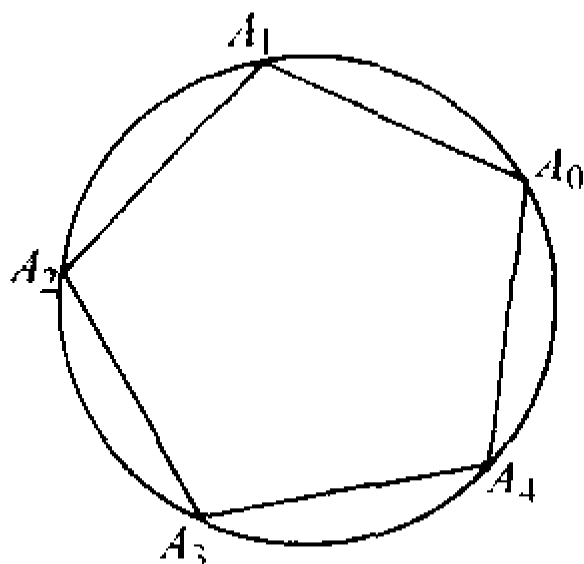
（匈牙利数学奥林匹克，1899 年）

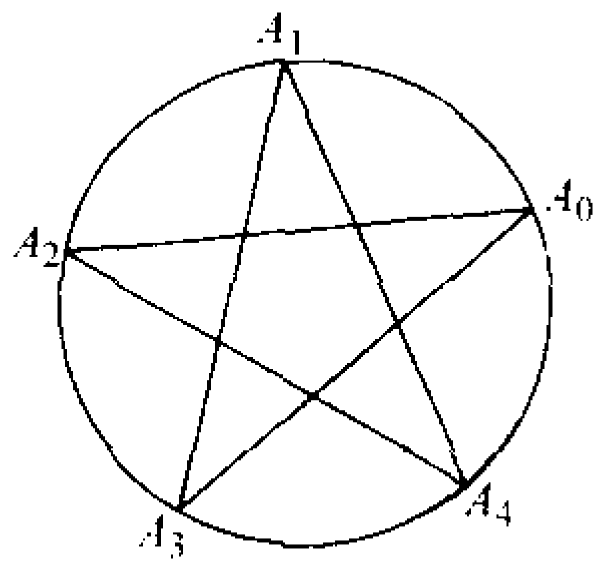
［证］　由于单位圆的弦长等于它所对的圆心角的一半的正弦的两倍，因此（如下图）

$$A_0A_1 = 2\sin 36° = 4\sin 18°\cos 18°,$$

$$A_0A_2 = 2\sin 72° = 2\cos 18°,$$

从而得　$A_0A_1 \cdot A_0A_2 = 8\sin 18°\cos^2 18°.$





角 18° 的正弦的两倍等于内接于单位圆的正十边形的边长，这个边长等于

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

因此 $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$,

及 $\cos^2 18^\circ = 1 - \sin^2 18^\circ = 1 - \frac{6-2\sqrt{5}}{16} = \frac{5+\sqrt{5}}{8} = \sqrt{5}\,\frac{\sqrt{5}+1}{8}$.

于是 $8\sin 18^\circ \cos^2 18^\circ = \sqrt{5}\,\frac{5-1}{4} = \sqrt{5}$,

所以 $(A_0A_1 \cdot A_0A_2)^2 = (\sqrt{5})^2 = 5.$

3·87 证明:如果

$$\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1,$$

则 $x+y=0.$

(第20届俄罗斯数学奥林匹克决赛,1994年)

[证] 在所给等式两端同乘 $x-\sqrt{x^2+1}$,得

$$-\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=x-\sqrt{x^2+1} \qquad ①$$

在所给等式两端同乘 $y-\sqrt{y^2+1}$,得

$$-\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=y-\sqrt{y^2+1} \qquad ②$$

①+②得

$$-y-x=x+y,$$

$$x+y=0.$$

3·88 证明恒等式:

$$\frac{a_1}{a_2(a_1+a_2)}+\frac{a_2}{a_3(a_2+a_3)}+\cdots+\frac{a_n}{a_1(a_n+a_1)}$$

$$=\frac{a_2}{a_1(a_1+a_2)}+\frac{a_3}{a_2(a_2+a_3)}+\cdots+\frac{a_1}{a_n(a_n+a_1)}.$$

(第20届俄罗斯数学奥林匹克决赛,1994年)

[证] 我们有

$$\frac{a_1}{a_2(a_1+a_2)}+\frac{a_2}{a_3(a_2+a_3)}+\cdots+\frac{a_n}{a_1(a_n+a_1)}$$

$$=\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1+a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_2+a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_n+a_1}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 + a_2}\right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_2 + a_3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_n + a_1}\right)$$

$$= \frac{a_2}{a_1(a_1 + a_2)} + \frac{a_3}{a_2(a_2 + a_3)} + \cdots + \frac{a_1}{a_n(a_n + a_1)}.$$

3·89 整数 a,b,c 使得

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \text{ 与 } \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$$

均为整数,证明:$|a| = |b| = |c|$.

(第 58 届莫斯科数学奥林匹克,1996 年)

[证] 如果 $(a,b,c) = d \neq 1$,那么可以转而讨论 $\frac{a}{d},\frac{b}{d},\frac{c}{d}$.因此不妨设 $(a,b,c) = 1$.

如果结论不真,那么 $|a|,|b|,|c|$ 中至少有一个不等于1.不妨设 $|a| \neq 1$.

设 P 是 a 的一个质因数.则

$$abc\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) = a^2c + b^2a + c^2b$$

可被 p 整除.因此 c^2b 可被 p 整除,从而 c 或 b 可被 p 整除.不妨设 b 可被 p 整除.于是 c 不能被 p 整除.

设 p^r 是可整除 a 的 p 的最高方幂,p^s 是可整除 b 的 p 的最高方幂.不妨设 $r \leqslant s$.于是

$$abc\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}\right) = a^2b + c^2a + b^2c$$

可被 p^{r+s} 整除.注意到 a^2b 和 b^2c 都可被 p^{r+s} 整除,因此 c^2a 也可被 p^{r+s} 整除,从而 a 可被 p^{r+s} 整除,矛盾.

故结论成立,且 $|a| = |b| = |c| = 1$.

3·90 对于一个 $\triangle ABC$:

(1) 求证:$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A\cos B\cos C$.

(2) 如果 $\frac{\cos A}{39} = \frac{\cos B}{33} = \frac{\cos C}{25}$,求 $\sin A,\sin B,\sin C$ 三数值之比.

(韩国数学奥林匹克,1994 年)

[解] (1) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$

$$= \frac{1}{2}(1+\cos 2A)+\frac{1}{2}(1+\cos 2B)+\cos^2 C$$
$$= 1+\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B)+\cos^2 C$$
$$= 1+\cos(A+B)\cos(A-B)+\cos^2 C$$
$$= 1-\cos C[\cos(A-B)+\cos(A+B)]$$
$$= 1-2\cos A\cos B\cos C.$$

(2) 令
$$\frac{\cos A}{39}=\frac{\cos B}{33}=\frac{\cos C}{25}=\frac{1}{x},$$
由于 A,B,C 不可能都是钝角,因此 $x>0$,从而 A,B,C 都是锐角.

于是,我们有
$$\cos A=\frac{39}{x},\ \cos B=\frac{33}{x},\ \cos C=\frac{25}{x}, \qquad ①$$
利用在(1)中所证的公式,得
$$\left(\frac{39}{x}\right)^2+\left(\frac{33}{x}\right)^2+\left(\frac{25}{x}\right)^2=1-2\cdot\frac{39}{x}\cdot\frac{33}{x}\cdot\frac{25}{x},$$
化简,有
$$x^3-3235x-990.65=0,$$
分解因式,得
$$(x-65)(x^2+65x+990)=0,$$
因为 $x>0$,所以只有一解
$$x=65$$
代入①,得
$$\cos A=\frac{3}{5},\ \cos B=\frac{33}{65},\ \cos C=\frac{5}{13},$$
注意到 A,B,C 都是锐角,我们有
$$\sin A=\frac{4}{5},\ \sin B=\frac{56}{65},\ \sin C=\frac{12}{13},$$
故
$$\frac{\sin A}{13}=\frac{\sin B}{14}=\frac{\sin C}{15}.$$

3·91 x,y 是正整数,$y>3$,且
$$x^2+y^4=2[(x-6)^2+(y+1)^2],$$

求证：$x^2+y^4=1994$.

（爱尔兰数学奥林匹克，1994 年）

［证］ 将已知等式展开，移项，得

$$x^2+y^4-2(x^2-12x+36)-2(y^2+2y+1)=0,$$

化简上式，有

$$(y^2-1)^2-(x-12)^2=4y-69,$$

即
$$(y^2-x+11)(y^2+x-13)=4y-69. \quad ①$$

如果 $4y>69$，那么由于 y 是正整数，因此可得 $y\geqslant 18$.

由于 x 是正整数，因此

$$(y^2+x-13)-(4y-69)$$
$$>y^2-4y+56=(y-2)^2+52\geqslant 52. \quad ②$$

由 $4y>69$ 可知

$$y^2+x-13>52,$$

再由 ① 式，有 $y^2-x+11\geqslant 1$.

仍由 ① 式，得 $4y-69\geqslant y^2+x-13$

此与 ② 式矛盾.

所以，$4y\leqslant 69$.

由于 y 是正整数，根据题设和上式可知

$$4\leqslant y\leqslant 17$$

根据给定方程可知，x^2+y^4 是偶数，从而 x 和 y 的奇偶性相同，$x-6$ 与 $y-1$ 的奇偶性不同，$(x-6)^2+(y+1)^2$ 是奇数，所以 $2[(x-6)^2+(y+1)^2]$ 不是 4 的倍数. 如果 x,y 都是偶数，那么 x^2+y^4 是 4 的倍数，矛盾. 因此，x,y 都是奇数. 于是，我们有 $y\geqslant 5$,

注意到 $x\geqslant 1$，可得 $y^2+x-13>12$

由 ①，$69-4y\geqslant y^2+x-13>y^2-13$,

因此 $y^2+4y<82$

由 $y\geqslant 5$ 得 $y^2<62$,

所以 $y\leqslant 7$.

于是，奇数 y 只可能取 5 和 7 两个值.

若 $y=7$，则 ① 式化为

$$(60-x)(x+36)=-41,$$

即
$$(x-60)(x+36)=41. \quad ③$$

第三章 等式

因为 x 是正整数,所以由上式可知

$$x \geqslant 61,$$

于是有 $\quad x + 36 \geqslant 97.$

这显然与③式矛盾.

所以, y 必然等于 5.

把 $y = 5$ 代入①式,有

$$(36 - x)(x + 12) = -49,$$

即 $\quad (x - 36)(x + 12) = 49,$

这个方程有两个解

$$x = 37, x = -13 (舍去).$$

因此,原方程只有一组正整数解

$$\begin{cases} x = 37, \\ y = 5. \end{cases}$$

所以 $\quad x^2 + y^4 = 37^2 + 5^4 = 1994.$

3·92 $\{x_n \mid n \in N\}$ 是一个实数列,对于每个正整数 $n \geqslant 2$,有

$$x_1 - C_n^1 x_2 + C_n^2 x_3 - \cdots + (-1)^n C_n^n x_{n+1} = 0.$$

求证:对每个正整数 $k, n, 1 \leqslant k \leqslant n - 1$,都有

$$\sum_{p=0}^{n} (-1)^p C_n^p \cdot x_{p+1}^k = 0.$$

(罗马尼亚数学奥林匹克,1994年)

[证] 取等差数列 $\{a_n \mid n \in N\}$,其中

$a_1 = x_1, a_2 = x_2$,公差 $d = x_2 - x_1$.

$$\sum_{p=0}^{n} (-1)^p C_n^p a_{p+1} = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p C_n^p (a_1 + pd)$$

$$= a_1 \sum_{p=0}^{n} (-1)^p C_n^p + d \sum_{p=0}^{n} (-1)^p p C_n^p$$

注意到

$$pC_n^p = p \cdot \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} = nC_{n-1}^{p-1},$$

以及

$$0 = (1-1)^n = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p C_n^p,$$

$$0=(1-1)^{n-1}=\sum_{q=0}^{n-1}(-1)^q C_{n-1}^q=\sum_{p=0}^{n}(-1)^{p-1}C_{n-1}^{p-1},$$
$$(\text{令 } q=p-1)$$

我们有

$$\sum_{p=0}^{n}(-1)^p C_n^p a_{n+1}=d\sum_{p=1}^{n}(-1)^p nC_{n-1}^{p-1}$$
$$=-dn\sum_{p=1}^{n}(-1)^{p-1}C_{n-1}^{p-1}=0.$$

由已知 $x_1=a_1, x_2=a_2$.

设已证得 $x_1=a_1, x_2=a_2, \cdots, x_k=a_k$，其中 k 为不小于2的某个数.

在已知等式中令 $n=k$，得

$$x_1-C_k^1x_2+C_k^2x_3-\cdots+(-1)^{k-1}C_k^{k-1}x_k+(-1)^kC_k^kx_{k+1}=0, \quad ①$$

在我们证得的等式

$$\sum_{p=0}^{n}(-1)^pC_n^pa_{n+1}=0$$

中，令 $n=k$，得

$$a_1-C_k^1a_2+C_k^2a_3-\cdots+(-1)^{k-1}C_k^{k-1}a_k+(-1)^kC_k^ka_{k+1}=0, \quad ②$$

① - ②，并归纳假设，得

$$(-1)^kC_k^k(x_{k+1}-a_{k+1})=0,$$

所以 $\quad x_{k+1}=a_{k+1}$.

根据数学归纳法原理知，$x_n=a_n, n\in N$.

换句话说，题目给出的数列 $\{x_n \mid n\in N\}$ 是一个等差数列.

下面证明一个强化命题：若 $\{x_n \mid n\in N\}$ 是等差数列，则

$$\sum_{p=0}^{n}(-1)^pC_n^px_{p+1}^k=0,$$

其中 $k\in N, n\geqslant k+1$.

显然，由上面的讨论可知，强化命题在 $k=1$ 时对所有的 $n\geqslant k+1$ 都成立.

设对某个正整数 k，已证得

$$\sum_{p=0}^{n}(-1)^p C_n^p x_{p+1}^k = 0.$$

对所有的 $n \geqslant k+1$ 都成立.

于是,对于 $n \geqslant (k+1)+1$ 我们有

$$\sum_{p=0}^{n}(-1)^p C_n^p x_{p+1}^{k+1} = \sum_{p=0}^{n}(-1)^p C_n^p \cdot x_{p+1}^k \cdot x_{p+1}$$

$$= \sum_{p=0}^{n}(-1)^p C_n^p x_{p+1}^k \cdot (x_1 + pd)$$

$$= x_1 \sum_{p=0}^{n}(-1)^p C_n^p x_{p+1}^k + d \sum_{p=0}^{n}(-1)^p \cdot p \cdot C_n^p \cdot x_{p+1}^k$$

$$= nd \sum_{p=1}^{n}(-1)^p C_{n-1}^{p-1} x_{p+1}^k$$

$$= -nd \sum_{q=0}^{n-1}(-1)^q C_{n-1}^q y_{q+1}^k.$$

(令 $q = p-1, y_{q+1} = x_{p+1}$)

因为 $\{x_n \mid n \in N\}$ 是等差数列,所以 $\{y_n \mid n \in N\}$ 也是等差数列.于是由归纳假设可得

$$\sum_{q=0}^{n-1}(-1)^q C_{n-1}^q y_{q+1}^k = 0,$$

从而有

$$\sum_{p=0}^{n}(-1)^p C_n^p x_{p+1}^{k+1} = 0.$$

根据数学归纳法原理,强化命题得证,从而原命题得证.

3・93　对非负整数 n 和 k,定义 $Q(n,k)$ 为 $(1+x+x^2+x^3)^n$ 展开式中 x^k 的系数.证明:

$$Q(n,k) = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\cdot\binom{n}{k-2j},$$

这里 $\binom{a}{b} = C_a^b$,当 $a \geqslant b \geqslant 0$ 时,$\binom{a}{b} = \dfrac{a!}{b!(a-b)!}$,其他情况下,$\binom{a}{b} = 0$.

(第 53 届普特南数学竞赛,1993 年)

[证]　$\sum_{k\geqslant 0} Q(n,k) \cdot x^k = (1+x+x^2+x^3)^n$

$$= (1+x)^n(1+x^2)^n$$

$$= \sum_{i\geq 0}\binom{n}{i}x^i \cdot \sum_{j\geq 0}\binom{n}{j}x^{2i}$$

$$= \sum_{i\geq 0}\sum_{j\geq 0}x^{i+2j}\cdot\binom{n}{i}\cdot\binom{n}{j}$$

$$= \sum_{k\geq 0}x^k\sum_{j\geq 0}\binom{n}{k-2j}\cdot\binom{n}{j}.$$

比较 x^k 的系数,得

$$Q(n,k) = \sum_{j\geq 0}\binom{n}{k-2j}\cdot\binom{n}{j} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\binom{n}{k-2j}.$$

第四章　方 程

第1节　一元二次方程

4·1　如果 p,q_1 和 q_2 是实数,而 $p=q_1+q_2+1$,那么两个方程

$$x^2+x+q_1=0,x^2+px+q_2=0$$

中至少有一个方程,它有两个不同的实根.

（第2届友谊杯国际数学竞赛,1988年）

[证]　若 $x^2+x+q_1=0$ 没有两个不同的实根,

则　$\Delta_1=1-4q_1\leqslant 0$,即 $q_1\geqslant\frac{1}{4}$.

在这种情况下,方程 $x^2+px+q_2=0$ 的判别式

$$\begin{aligned}\Delta_2&=p^2-4q_2=(q_1+q_2+1)^2-4q_2\\&=q_2^2+2(q_1+1)q_2+(q_1+1)^2-4q_2\\&=q_2^2+2(q_1-1)q_2+(1+q_1)^2.\end{aligned}$$

而上述关于 q_2 的二次三项式的判别式

$$\begin{aligned}\Delta_3&=4(q_1-1)^2-4(1+q_1)^2\\&=4(-4q_1)=-16q_1.\end{aligned}$$

因为 $q_1\geqslant\frac{1}{4}$,所以 $\Delta_3<0$,从而 $\Delta_2>0$,即方程 $x^2+px+q_2=0$ 有两个不同的实根.故命题得证.

4·2　求使得方程 $a^2x^2+ax+1-7a^2=0$ 有两整数根的所有正

值 a.

（第16届全俄数学奥林匹克,1990年）

［解］ 若原方程有两整数根,则由韦达定理知 $-\frac{1}{a}$ 为整数,因此 a 为形如 $\frac{1}{n}(n\in N)$ 的数.令 $a=\frac{1}{n}$,将原方程变形为

$$x^2+nx+n^2-7=0,$$

于是 $\Delta=n^2-4n^2+28=-3n^2+28\geqslant 0,$

从而 $n^2\leqslant 9, n\leqslant 3.$

$$a=1,\frac{1}{2},\text{或}\frac{1}{3}.$$

经验证 $a=1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}$ 时,方程均有两个整数根.

4·3 已知方程 $2x^2-9x+8=0$,求作一个二次方程,使它的一个根为原方程两根和的倒数,另一根为原方程两根差的平方.

（中国高中数学联赛,1978年）

［解］ 设 x_1,x_2 为方程 $2x^2-9x+8=0$ 的两个根.由韦达定理,得

$$\begin{cases}x_1+x_2=\frac{9}{2},\\ x_1x_2=4.\end{cases}$$

设所求方程为 $x^2+px+q=0$,它的两根为 x'_1,x'_2.由题意知

$$x'_1=\frac{1}{x_1+x_2}=\frac{2}{9},$$

$$x'_2=(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\frac{81}{4}-16=\frac{17}{4}.$$

故 $p=-(x'_1+x'_2)=-\frac{161}{36},$

$$q=x'_1x'_2=\frac{34}{36},$$

因此,所求方程为 $36x^2-161x+34=0.$

4·4 设 x_1 和 x_2 是方程

$$x^2-(a+d)x+ad-bc=0$$

的根.试证:x_1^3 和 x_2^3 是方程

$$y^2-(a^3+d^3+3abc+3bcd)y+(ad-bc)^3=0$$

的根.

（匈牙利数学奥林匹克,1899 年）

［证］ 对方程

$$x^2-(a+d)x+(ad-bc)=0 \quad ①$$

应用韦达定理得

$$a+d=x_1+x_2, ad-bc=x_1x_2.$$

因此 $a^3+d^3+3abc+3bcd=a^3+d^3+3(a+d)bc$

$=(a+d)^3-3(a+d)(ad-bc)$

$=(x_1+x_2)^3-3(x_1+x_2)x_1x_2=x_1^3+x_2^3,$

且 $(ad-bc)^3=x_1^3x_2^3.$

所以 x_1^3 和 x_2^3 是方程

$$y^2-(a^3+d^3+3abc+3bcd)y+(ad-bc)^3=0$$

的根.

4·5 设 p 和 q 是两个奇整数,试证:方程

$$x^2+2px+2q=0 \quad ①$$

不可能有有理根.

（匈牙利数学奥林匹克,1908 年）

［证］ (1) 方程①的根不可能是奇数.事实上,若 x 为奇数,则 x^2 为奇数,而 $2px+2q$ 是偶数,因此 $x^2+2px+2q$ 取奇数值,不可能是零.

(2) 方程①的根不可能是偶数.事实上,若 x 是偶数,则 x^2+2px 能被 4 整除,而这时常数项 $2q$ 被 4 除时余 2,因此 $x^2+2px+2q\neq 0$.

(3) 方程①的根不可能是分数.事实上,若 x 是分数,则 $x+p$ 也是分数,而方程①可变成

$$(x+p)^2=p^2-2q,$$

等号右端是一个整数 p^2-2q,左端是一个分数,这是一个矛盾.

4·6 试证:如果整系数二次方程

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0)$$

有有理根,那么数 a,b,c 至少有一个是偶数.

（波兰数学奥林匹克,1959 年）

［证］ 在方程

$$ax^2+bx+c=0 \quad ①$$

中，令 $x=y/a$，然后两边同乘以 a，得整系数方程

$$y^2+by+ac=0 \quad ②$$

如果 x 是有理数，那么数 $y=ax$ 也是有理数．因此，方程 ② 与方程 ① 一样，也有有理根．我们知道，最高项系数为 1 的整系数方程如果有有理根，那么这个有理根必是整数．因此，方程 ② 有整数根 y_1．于是方程 ② 的另一个根 $-b-y_1$ 也是整数．因为

$$y_1+y_2=-b, y_1y_2=ac,$$

所以

$$abc=-y_1y_2(y_1+y_2).$$

数 $y_1,y_2,(y_1+y_2)$ 中至少有一个是偶数，所以乘积 abc 是偶数．由此可知，a,b,c 中至少有一个是偶数．

4·7　如果方程 $x^2+ax+b=0$ 与 $x^2+px+q=0$ 有一个非零公共根，求以它们的相异根为根的二次方程．

（中国上海市数学竞赛，1957 年）

[解]　令公共根为 α，由韦达定理知，相异根为 $\frac{b}{\alpha}$ 与 $\frac{q}{\alpha}$．

因 α 是公共根，有 $\begin{cases}\alpha^2+a\alpha+b=0,\\ \alpha^2+p\alpha+q=0.\end{cases}$

方程两边相减，得　$\alpha=\frac{q-b}{a-p}$．

于是，两相异根为 $\frac{b(a-p)}{q-b}$ 与 $\frac{q(a-p)}{q-b}$．

故所求方程为

$$x^2-\frac{(b+q)(a-p)}{q-b}x+\frac{bq(a-p)^2}{(q-b)^2}=0.$$

4·8　k 是什么实数时，方程 $4x^2-(2-k)x+k-5=0$ 的两个根都是负数？

（中国上海市数学竞赛，1962 年）

[解]　设方程的两根为 α,β，由题设必须满足：

$$\begin{cases} \alpha+\beta=\dfrac{2-k}{4}<0, & ① \\ \alpha\beta=\dfrac{k-5}{4}>0, & ② \\ (k-2)^2-16(k-5)\geqslant 0. & ③ \end{cases}$$

由① $2-k<0$,即 $k>2$.

由② $k-5>0$,即 $k>5$.

由③ $k^2-20k+84=(k-14)(k-6)\geqslant 0$,

即 $k\geqslant 14$ 或 $k\leqslant 6$.

综上所述,当 $k\geqslant 14$ 时或 $5<k\leqslant 6$ 时,方程的两根都是负数.

4·9 已知某二次三项式当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时取得极值25;这个二次三项式的两根的立方和等于19.试求这个二次三项式.

(中国北京市数学竞赛,1964年)

[解] 由第一个已知条件得知,这个二次三项式的首项系数不等于0,而且可以写作

$$a\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+25,$$

即 $$ax^2-ax+\frac{1}{4}a+25. \qquad ①$$

于是,由韦达定理得

$$x_1+x_2=1, x_1x_2=\frac{1}{4}+\frac{25}{a}.$$

所以 $$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2]$$
$$=1-3\left(\frac{1}{4}+\frac{25}{a}\right)$$
$$=\frac{1}{4}-\frac{75}{a}.$$

由第二个已知条件,得 $\dfrac{1}{4}-\dfrac{75}{a}=19$,

所以 $a=-4$.

代入①式,得 $-4x^2+4x+24$.

经检验,二次三项式 $-4x^2+4x+24$ 即为所求.

4·10 已知方程 $x^2-2x+\lg(2a^2-a)=0$ 有一个正根和一个

负根，试求实数 a 的值的范围.

（中国北京市数学竞赛，1964 年）

[解] 由题设可知 $\lg(2a^2 - a) < 0$.

所以 $0 < 2a^2 - a < 1$,

解之即得 a 应在范围为

$$-\frac{1}{2} < a < 0 \text{或} \frac{1}{2} < a < 1.$$

4·11 当 a、b、c 为实数时，试证：方程

$$x^2 - (a + b)x + (ab - c^2) = 0$$

有两个实数根，并求出这两个根相等的条件.

（中国北京市数学竞赛，1962 年）

[解] 所给方程的判别式为

$$\Delta = (a + b)^2 - 4(ab - c^2) = (a - b)^2 + 4c^2,$$

因为 a、b、c 均为实数，故 $\Delta \geqslant 0$，所以方程有两个实数根. 这两个根相等的条件是

$$(a - b)^2 + 4c^2 = 0,$$

即 $a = b, c = 0$.

4·12 当 m 是什么实数时，方程

$$x^2 + (m + 2)x + (m + 5) = 0$$

的两个根都是正数？

（中国北京市数学竞赛，1962 年）

[解] 要使方程的两个根都是正数，当且仅当 m 满足下列不等式

$$\begin{cases} (m + 2)^2 - 4(m + 5) \geqslant 0, & ① \\ -(m + 2) > 0, & ② \\ m + 5 > 0. & ③ \end{cases}$$

由 ① 得 $|m| \geqslant 4$；由 ② 得 $m < -2$；由 ③ 得 $m > -5$.

所以 $-5 < m \leqslant -4$.

4·13 设方程 $x^2 - px + q = 0$ 的两根为 r 和 s，且它们都不等于零. 试求以 $r^2 + \frac{1}{s^2}$ 和 $s^2 + \frac{1}{r^2}$ 为根的方程（不必解出原方程）.

（中国北京市数学竞赛，1956 年）

[解] 所求方程应为

$$\left[x-\left(r^2+\frac{1}{s^2}\right)\right]\left[x-\left(s^2+\frac{1}{r^2}\right)\right]=0,$$

即 $$x^2-\left(r^2+s^2+\frac{1}{r^2}+\frac{1}{s^2}\right)x+\left(r^2s^2+2+\frac{1}{r^2s^2}\right)=0. \qquad ①$$

但是 r、s 是 $x^2-px+q=0$ 的两根，由根与系数的关系知道：$r+s=p, rs=q$，所以

$$r^2+s^2+\frac{1}{r^2}+\frac{1}{s^2}=\frac{(r^2s^2+1)(r^2+s^2)}{r^2s^2}$$

$$=\frac{(q^2+1)(p^2-2q)}{q^2},$$

$$r^2s^2+2+\frac{1}{r^2s^2}=q^2+2+\frac{1}{q^2}=\left(\frac{1}{q}+q\right)^2,$$

把这些结果代入 ① 式，即得

$$x^2-\frac{(q^2+1)(p^2-2q)}{q^2}x+\left(q+\frac{1}{q}\right)^2=0.$$

4·14 试求 $x^2-2x\sin\frac{\pi x}{2}+1=0$ 的所有实根.

（中国北京市数学竞赛，1956 年）

［解］ 因 x 为实数，故所给二次方程之判别式应大于或等于零.

$$\left(2\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2-4\geqslant 0, \text{即} \quad \left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2\geqslant 1.$$

但同时又有 $$\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2\leqslant 1,$$

所以 $$\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2=1,$$

从而 $$\sin\frac{\pi x}{2}=\pm 1.$$

故 $$x=\pm 1, \pm 3, \pm 5, \cdots$$

代入原式，只有 $x=\pm 1$ 满足，所以，所求实根为 $x=\pm 1$.

4·15 已知 $\mathrm{tg}\alpha$ 及 $\mathrm{tg}\beta$ 为 $x^2+px+q=0$ 的两根，试求 $\sin^2(\alpha+\beta)+p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+q\cos^2(\alpha+\beta)$ 之值.

（中国北京市数学竞赛，1957 年）

[**解**]　由根与系数关系得

$$\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta=-p \text{ 和 } \mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta=q,$$

所以　$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{-p}{1-q}$.

故所求之值为

$$\begin{aligned}&\sin^2(\alpha+\beta)+p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+q\cos^2(\alpha+\beta)\\&=\cos^2(\alpha+\beta)[\mathrm{tg}^2(\alpha+\beta)+p\mathrm{tg}(\alpha+\beta)+q]\\&=\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2(\alpha+\beta)}[\mathrm{tg}^2(\alpha+\beta)+p\mathrm{tg}(\alpha+\beta)+q]\\&=\frac{1}{1+\dfrac{p^2}{(1-q)^2}}\left[\frac{p^2}{(1-q)^2}-\frac{p^2}{1-q}+q\right]\\&=q.\end{aligned}$$

4・16　b 为何值时,方程

$$1988x^2+bx+8891=0 \text{ 和 } 8891x^2+bx+1988=0$$

有一个公共的根.

(第 20 届加拿大数学奥林匹克,1988 年)

[**解**]　设给定的两个方程有一公共根 x,则

$$1988x^2+bx+8891=8891x^2+bx+1988,$$

化简后解得　$x=\pm 1$.再代入给定方程得

$$b=\mp 10879.$$

4・17　若 a,b,c 为一三角形的三条边,则方程

$$b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2=0$$

的根是复共轭的,试证之.

(基辅数学奥林匹克,1939 年)

[**证**]　$\Delta=(b^2+c^2-a^2)^2-4b^2c^2$

$$=(a+b+c)(b+c-a)(b-c-a)(b-c+a).$$

由于 a,b,c 为三角形三边.所以

$$a+b+c>0,b+c-a>0,b-c-a<0,$$
$$b-c+a>0,$$

因此

$$\Delta<0.$$

即方程没有实数根.从而原命题得证.

4·18　方程 $x^2+ax+b+1=0$ 的根是自然数,证明:a^2+b^2 是合数.

(第20届全苏数学奥林匹克,1986年)

[证]　设 x_1 和 x_2 是原方程的两个根.由韦达定理,得

$$\begin{cases} x_1+x_2=-a, \\ x_1x_2=b+1. \end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= (x_1+x_2)^2+(x_1x_2-1)^2 \\ &= x_1^2+x_2^2+x_1^2x_2^2+1 \\ &= (x_1^2+1)(x_2^2+1), \end{aligned}$$

故 a^2+b^2 是合数.

4·19　已知二次三项式 $f(x)=ax^2+bx+c$ 使方程 $f(x)=x$ 没有实根.证明:方程 $f(f(x))=x$ 也没有实根.

(第7届全苏数学奥林匹克,1973年)

[证]　由已知 $f(x)=x$ 没有实根.

因此当 $a>0$ 时,对所有实数 x 都有 $f(x)>x$,于是我们有

$$f(f(x))>f(x)>x,$$

即　$$f(f(x))>x,$$

故 $a>0$ 时方程 $f(f(x))=x$ 没有实根.

同理,当 $a<0$ 时,可得 $f(x)<x$,从而有

$$f(f(x))<f(x)<x,$$

故 $a<0$ 时方程 $f(f(x))=x$ 也没有实数根.

由已知,$f(x)$ 是二次三项式,即 $a\neq 0$,故命题证毕.

4·20　有一个 $\triangle ABC$,a、b、c 分别为 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边,若 b 为 a、c 的等差中项,$\mathrm{tg}\frac{B}{2}$ 为 $\mathrm{tg}\frac{A}{2}$、$\mathrm{tg}\frac{C}{2}$ 的等比中项,试作以 $\mathrm{tg}\frac{A}{2}$、$\mathrm{tg}\frac{C}{2}$ 为根的二次方程.

(中国上海市数学竞赛,1958年)

[解]　由题意有 $A+B+C=180°$,　①

$$2b=a+c, \tag{②}$$

$$\left(\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)^2 = \operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2}. \quad ③$$

由 ② 及正弦定理　$2\sin B = \sin A + \sin C$,

由 ①　$2\sin(A + C) = \sin A + \sin C$,

即　$2(\sin A\cos C + \cos A\sin C) = \sin A + \sin C$　④

又因为 $\sin x = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$,

及　$\cos x = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$,($x = A$ 或 C)

代入 ④ 并整理得

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2} = 3\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\right),$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{3}. \quad ⑤$$

由 ③　$\operatorname{ctg}\dfrac{A}{2}\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{C}{2} = \left[\operatorname{ctg}\dfrac{180^\circ - (A + C)}{2}\right]^2 = \left(\operatorname{tg}\dfrac{A + C}{2}\right)^2$,

即　$\dfrac{1}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2}} = \left(\dfrac{\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2}}\right)^2$.

将 ⑤ 代入上式得 $\left(\operatorname{tg}\dfrac{A}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{C}{2}\right)^2 = \dfrac{4}{3}$,

因 $\operatorname{tg}\dfrac{A}{2} > 0, \operatorname{tg}\dfrac{C}{2} > 0$,

故　$\operatorname{tg}\dfrac{A}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{C}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

由韦达定理,所求方程为

$$x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x + \frac{1}{3} = 0,$$

即 $3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0.$

4·21 在黑板上写着方程

$x^3 + \cdots x^2 + \cdots x + \cdots = 0$,两人做游戏:第一个人把异于0的整数(正整数或负整数)填到其中的任一个空上,接着第二个人把整数填到其余的一个空上,最后第一个人把一个整数填到最后的空上.

证明:不管第二个人填什么数,第一个人总能使所得方程的三个根都是整数.

(第3届全苏数学奥林匹克,1969年)

[证] 如果第一个游戏者把 -1 放在 x 之前,而且他在第二次填数时,把与第二个人所填数的符号相反的数填到最后一个空上,那么就得到了形如 $x^3 - ax^2 - x + a = (x^2-1)(x-a)$ 的多项式,这个多项式的根为 $-1,1,a$.它们都是整数.

4·22 在黑板上写有方程式

$$x^3 + ____ x^2 + ____ x + ____ = 0,$$

两个人按如下法则进行游戏:甲先任意说一个数,乙则将该数填入3个空白处的任意一处;然后甲再说任一数,乙再填在剩下的两个空白处的任意一处;最后,甲再在剩下的一个空白处上任意写上一数,如果所得的方程具有3个不同的整数根,则甲获胜.试问,甲是否一定能获胜?

(第24届全苏数学奥林匹克,1990年)

[解] 答案是肯定的.

事实上,甲可采用如下策略:他先说0.如果乙将0置于最后一个位置,则方程的左端变为多项式 $x^3 + ax^2 + bx$(系数 a 和 b 暂未确定).甲再次说2和 -3,于是根据乙对2的两种不同的填写位置,可将多项式分解成

$$x(x-1)(x+3) \text{ 或 } x(x-1)(x-2).$$

此时,甲即获胜.

如果乙一开始将0填在第一个位置上,则形成了多项式 $x^3 + bx + c$,此时甲再说数 $-(3\cdot4\cdot5)^2$,并根据乙的行动,甲再置 $c=0$ 或置 $b = 3^2\cdot4^2 - 3^2\cdot5^2 - 4^2\cdot5^2$,于是可分别得到分解式 $x(x+3\cdot4\cdot5)(x-3\cdot4\cdot5)$ 或 $(x+3^2)(x+4^2)(x-5^2)$,甲亦获胜.

如果一开始形成了多项式 $x^3 + ax^2 + C$,则甲说数 $6^2\cdot7^3$,然后再置 $a = -49$ 或置 $C = -6^8\cdot7^6$,于是可分别得到分解式

$(x+2\cdot 7)(x-3\cdot 7)(x-6\cdot 7)$ 或

$(x-2\cdot 6^2\cdot 7^2)(x+3\cdot 6^2\cdot 7^2)(x+6\cdot 6^2\cdot 7^2)$，于是甲亦可获胜.

4·23　试证不论 n 是什么整数，方程

$$x^2-16nx+7^s=0 \quad ①$$

没有整数解，方程中的 s 是任何正的奇数.

（中国北京市数学竞赛，1962 年）

[证]　设 ① 式的两根为 x_1,x_2，则有

$$x_1+x_2=16n, \quad ②$$

$$x_1x_2=7^s. \quad ③$$

若 ① 式有一根是整数，则由 ②，另一根也是整数. 因 7 是素数，由 ③ 知，x_1、x_2 可以写成如下形式

$$x_1=\pm 7^k, x_2=\pm 7^h. \quad ④$$

上面两式同时取正号或负号，$k+h=s$. 把 ④ 式代入 ② 得

$$7^k+7^h=\pm 16n. \quad ⑤$$

因为 $k+h=s$ 为奇数，所以不妨设 $k>h$，并且

$$k-h=k+h-2h=S-2h$$

仍为奇数，由 ⑤ 得

$$7^h(7^{k-h}+1)=\pm 16n, \quad ⑥$$

当 M 为奇数时，由恒等式

$$x^M+1=(x+1)(x^{M-1}-x^{M-2}+x^{m-3}-\cdots+1) \quad ⑦$$

得　$$7^{k-h}+1=8\cdot(7^{k-h-1}-7^{k-h-2}+7^{k-h-3}-\cdots+1). \quad ⑧$$

⑧ 式的右边括号中的每一项都是奇数，并且项数 $k-h$ 也是奇数，故其代数和为奇数，将它记为 m，则由 ⑥ 式得

$$7^h\cdot 8m=\pm 16n,$$

即　$$7^hm=\pm 2n.$$

上式左边为奇数的积，仍为奇数，而右边是偶数，显然是不可能的. 这个矛盾证明了 ① 式无整数解.

4·24　已知 $x^2\cos A-2x+\cos A=0$ 的两个根的平方差为 $\frac{3}{8}$，试求 A 的值$(0<A<\pi)$.

（中国上海市数学竞赛，1962 年）

[解]　设 $\cos A \neq 0$（$\cos A = 0$ 不符合题意）.

将原方程改写为：$x^2 - \frac{2}{\cos A}x + 1 = 0$，设其两根为 α、β，由韦达定理及题设有

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{2}{\cos A}, & ① \\ \alpha\beta = 1, & ② \\ \alpha^2 - \beta^2 = \frac{3}{8}. & ③ \end{cases}$$

由 ②$\beta = \frac{1}{\alpha}$，代入 ③

得　$\alpha^2 - \frac{1}{\alpha^2} = \frac{3}{8}$，即　$8\alpha^4 - 3\alpha^2 - 8 = 0$，

$$\alpha^2 = \frac{1}{16}(3 \pm \sqrt{9 + 256}),\text{因 } \alpha^2 > 0,$$

故得　$\alpha^2 = \frac{1}{16}(\sqrt{265} + 3)$，　④

代入 ③　$\beta^2 = \alpha^2 - \frac{3}{8} = \frac{1}{16}(\sqrt{265} - 3)$，　⑤

① 式两端平方得　$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = \frac{4}{\cos^2 A}$，　⑥

将 ②，④，⑤ 代入 ⑥ 得　$\frac{\sqrt{265} + 16}{8} = \frac{4}{\cos^2 A}$.

所以　$\cos^2 A = \frac{32}{9}(\sqrt{265} - 16)$，

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = \frac{1}{9}(521 - 32\sqrt{265}).$$

因 $0 < A < \pi$，故 $\sin A > 0$，

所以　$\sin A = \frac{1}{3}(\sqrt{265} - 16) \doteq \frac{1}{3}(16.27882 - 16)$

$= 0.09294$.

$A \doteq 5°20'$ 或 $A \doteq 174°40'$.

4·25　(1) 求二次方程

$$\begin{cases} x^2 + p_1 x + q_1 = 0, \\ x^2 + p_2 x + q_2 = 0. \end{cases} \quad (*)$$

有公共根的充要条件.

(2) 试证:如果二次方程㊟有公共根,但两个方程并不互相重合,并且 p_1, q_1, p_2, q_2 都是有理数,那么这两个方程的根都是有理数.

(波兰数学奥林匹克,1960年)

[**解**] (1) 设某数 x 满足两个方程:

$$\begin{cases} x^2 + p_1x + q_1 = 0, \\ x^2 + p_2x + q_2 = 0. \end{cases} \tag{①}$$

由这两个方程消去 x,即可求出题中所说的充要条件. 例如,用下列方法进行.

若 $p_1 \neq p_2$,那么由 ① 可解出 x 及x^2:

$$x = -\frac{q_2 - q_1}{p_2 - p_1}, \quad x^2 = \frac{p_1q_2 - p_2q_1}{p_2 - p_1}. \tag{②}$$

因此,下列关系应当成立:

$$\frac{p_1q_2 - p_2q_1}{p_2 - p_1} = \left(\frac{q_2 - q_1}{p_2 - p_1}\right)^2. \tag{③}$$

经不复杂的计算,③ 可以化为

$$(p_1 - p_2)(p_1q_2 - p_2q_1) + (q_1 - q_2)^2 = 0. \tag{④}$$

若 $p_1 = p_2$,那么将 ① 中两个方程相减可得 $q_1 - q_2 = 0$. 在这种情况下,④ 式也成立,于是关系式 ④ 是方程 ① 有公共根的必要条件.

条件 ④ 也是充分的. 事实上,若 $p_1 \neq p_2$,那么由 ④ 可得 ③,从而

$$x = -\frac{q_2 - q_1}{p_2 - p_1} \tag{⑤}$$

是方程 ① 的公共根. 若 $p_1 = p_2$,那么由 ④ 得 $q_1 = q_2$,这时 ① 中两方程完全一样.

如果原方程 ① 的系数 p_1, q_1, p_2, q_2 是实的且满足条件 ④,那么当 $p_1 \neq p_2$ 时,它们由关系式 ⑤ 确定的公共根是实的. 因此,① 中方程其余的根也是实的. 当 $p_1 = p_2$ 时,① 中两个方程有相同的根,但不一定是实的.

(2) 如果 p_1, q_1, p_2, q_2 是有理数,而且 ① 中的方程有公共根,但两方程不相重合,那么 $p_1 \neq p_2$,并且方程 ① 的公共根由 ⑤ 式确定,因而是有理数. 方程 ① 的其余根 x_2 和 x_3 是 $x_2 = -p_1 - x_1$ 及 $x_3 = -p_2 - x_1$,因而也是有理根.

代数卷

4·26　试证:若实数 a,b,c 满足条件

$$\frac{a}{m+2}+\frac{b}{m+1}+\frac{c}{m}=0, \quad ①$$

这里 m 是正数,那么方程

$$ax^2+bx+c=0 \quad ②$$

有一个根介于0和1之间.

(波兰数学奥林匹克,1969年)

[证]　只需对 $a\geqslant 0$ 证明本题即可.因为当 $a<0$ 时,将①式及②式两端同乘 -1,即化为 $a>0$ 的情形.现分两种情形证明.

(1) 若 $a=0$.

如果 $b\neq 0$,则方程②有根

$$x_0=-\frac{c}{b}.$$

由①知　$\dfrac{c}{b}=-\dfrac{m}{m+1}$,因而

$$x_0=\frac{m}{m+1}.$$

显然 $0<x_0<1$.

如果 $b=0$,则由等式①知 $c=0$.这时任何 x 都满足②,自然包括0和1之间的数.

(2) 若 $a>0$.

用 $f(x)$ 表示方程②的左端.注意到

$$f\left(\frac{m}{m+1}\right)=a\left(\frac{m}{m+1}\right)^2+b\left(\frac{m}{m+1}\right)+c$$

$$=m\left(\frac{am}{(m+1)^2}+\frac{b}{m+1}+\frac{c}{m}\right).$$

由条件①知

$$f\left(\frac{m}{m+1}\right)=m\left(\frac{am}{(m+1)^2}-\frac{a}{m+2}\right)$$

$$=am\cdot\frac{m(m+2)-(m+1)^2}{(m+1)^2(m+2)}$$

$$=\frac{-am}{(m+1)^2(m+2)}<0. \quad ③$$

其次,(i) 若 $c>0$,则

$$f(0)=c>0. \qquad ④$$

由不等式③,④知,当 $c>0$ 时,方程 $f(x)=0$ 有一根在区间 $\left(0,\frac{m}{m+1}\right)$ 中,而这个区间包含在(0,1)中.

(ii) 若 $c\leqslant 0$,则

$$f(1)=a+b+c=(m+1)\left(\frac{a}{m+1}+\frac{b}{m+1}+\frac{c}{m+1}\right).$$

利用条件①得

$$\begin{aligned}f(1)&=(m+1)\left[\left(\frac{a}{m+1}+\frac{b}{m+1}+\frac{c}{m+1}\right)\right.\\&\quad\left.-\left(\frac{a}{m+2}+\frac{b}{m+1}+\frac{c}{m}\right)\right]\\&=(m+1)\left(\frac{a}{m+1}-\frac{a}{m+2}+\frac{c}{m+1}-\frac{c}{m}\right)\\&=(m+1)\left(\frac{a}{(m+1)(m+2)}-\frac{c}{m(m+1)}\right).\end{aligned}$$

由于 $c\leqslant 0$,故得

$$f(1)>0. \qquad ⑤$$

由不等式③,⑤知,当 $c\leqslant 0$ 时,方程 $f(x)=0$ 有一根在区间 $\left(\frac{m}{m+1},1\right)$ 中,而这个区间包含在(0,1)之中,证毕.

4·27 已知 a 为自然数,以 a 为首项系数的整系数的二次三项式有两个小于1的不等的正根.求 a 的最小值.

(第3届全苏数学奥林匹克,1969年)

[解] 设
$$\begin{aligned}f(x)&=ax^2+bx+c\\&=a(x-x_1)(x-x_2),\end{aligned}$$

其中 $0<x_1<1,0<x_2<1,a,b,c$ 为整数,$a>0$.

由已知可得 $f(0)$ 和 $f(1)$ 都是正整数,因此

$$f(0)\cdot f(1)\geqslant 1,$$

即 $$a^2x_1(1-x_1)x_2(1-x_2)\geqslant 1.$$

但是 $$x_1(1-x_1)\leqslant\frac{1}{4},$$

$$x_2(1-x_2)\leqslant\frac{1}{4},$$

并且由于 $x_1 \neq x_2$，因此，以上两式的等号不可能同时成立．于是，我们有

$$x_1(1-x_1)x_2(1-x_2) < \frac{1}{16},$$

故 $$a^2 \cdot \frac{1}{16} > a^2 x_1(1-x_1)x_2(1-x_2) \geqslant 1,$$

从而得 $a^2 > 16$,

$$a > 4,$$

所以 $a \geqslant 5$.

另一方面，当 $a = 5$ 时，方程

$$5x^2 - 5x + 1 = 0$$

有两个在区间 $(0,1)$ 上的不同的根．

故所求的 a 的最小值是 5.

4·28 a,b,c,A,B,C 是 6 个正实数，使得方程 $ax^2 - bx + c = 0$ 和 $Ax^2 - Bx + C = 0$ 有实根．求证在方程 $ax^2 - bx + c = 0$ 的两实根之间的任一实数 u 与在方程 $Ax^2 - Bx + C = 0$ 的两实根之间的任一实数 v 有下述不等式：

$$(au + Av)\left(\frac{c}{u} + \frac{C}{v}\right) \leqslant \left(\frac{b+B}{2}\right)^2.$$

（罗马尼亚数学奥林匹克，1994 年）

［证］ 由题设

$$au^2 - bu + c \leqslant 0, \quad ①$$

$$Av^2 - Bv + C \leqslant 0. \quad ②$$

由于 a,b,c,A,B,C 都是正实数，因此

$$u > 0, v > 0.$$

由 ①，② 得

$$0 < au + \frac{c}{u} \leqslant b,$$

和 $$0 < Av + \frac{C}{v} \leqslant B,$$

将以上两个不等式相加，得

$$0 < au + \frac{c}{u} + Av + \frac{C}{v} \leqslant b + B,$$

因此

$$(au+Av)\left(\frac{c}{u}+\frac{C}{v}\right)$$

$$\leqslant\frac{1}{4}\left[(au+Av)+\left(\frac{c}{u}+\frac{C}{v}\right)\right]^2$$

$$\leqslant\left(\frac{b+B}{2}\right)^2.$$

4·29　$a,b,c\in R$,已知方程

$$ax^2+bx+c=0$$

有两个实根,如果

$$|a(b-c)|>|b^2-ac|+|c^2-ab|.$$

求证该方程在区间(0,2)内至少有一个根.

（保加利亚数学奥林匹克,1994年）

[证]　因为给定方程有两个实根,所以 $a\neq0$.

因为用 $-a,-b,-c$ 来代替 a,b,c 时,题目所有的条件都不改变,所以只需在 $a>0$ 的情况下,证明本题即可.

由于

$$|(b^2-ac)-(c^2-ab)|\leqslant|b^2-ac|+|c^2-ab|$$
$$<|a(b-c)|$$

以及

$$b^2-ac-(c^2-ab)=(b-c)(a+b+c),$$

因此

$$|b-c|\cdot|a+b+c|<a\cdot|b-c|.$$

由这个不等式显然可得

$$b\neq c,$$

且　$|a+b+c|<a$

即　$-a<a+b+c<a,$

$$-2a<b+c<0.$$

记

$$f(x)=ax^2+bx+c,$$

则

$$f(0)+f(2)=2(2a+b+c)>0.$$

如果 $b < c$,则

$$(b^2 - ac) + (c^2 - ab) \leqslant |b^2 - ac| + |c^2 - ab| < |a(b - c)| = a(c - b),$$

于是有

$$b^2 + c^2 < 2ac,$$

又由于 $f(x) = 0$ 有两个实根,因此判别式

$$b^2 - 4ac \geqslant 0.$$

故得

$$b^2 \geqslant 4ac > 2(b^2 + c^2),$$

$$0 > b^2 + 2c^2,$$

矛盾.所以 $b > c$.又因上面已经证得 $b + c < 0$,所以 $c < 0$,即

$$f(0) < 0.$$

再利用上面证得的结果

$$f(0) + f(2) > 0,$$

可得

$$f(2) > 0.$$

因此,在(0,2)内至少有方程 $f(x) = 0$ 的一个根.

第2节　代数方程

4·30　求方程 $x^2 - 8[x] + 7 = 0$ 的全部解.其中 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数.

(第13届全俄数学奥林匹克,1987年)

[解]　设 x 是给定方程的根,且 $[x] = n$,由原方程得

$$x^2 + 7 = 8n.$$

这表明 $n > 0$,利用 $n \leqslant x < n + 1$,得

$$n^2 + 7 \leqslant x^2 + 7 < (n + 1)^2 + 7 = n^2 + 2n + 8.$$

用 $8n$ 代 $x^2 + 7$,得关于 n 的不等式

$$n^2 + 7 \leqslant 8n < n^2 + 2n + 8,$$

即

$$\begin{cases} n^2 - 6n + 8 > 0, \\ n^2 - 8n + 7 \leqslant 0. \end{cases}$$

解得　　$1 \leqslant n < 2$ 或 $4 < n \leqslant 7$.

所以　　$n = 1,5,6,7$.

$n = 1$ 得 $x = 1$,

$n = 5$ 得 $x = \sqrt{33}$,

$n = 6$ 得 $x = \sqrt{41}$,

$n = 7$ 得 $x = 7$.

4・31　求方程 $[x^2 - 2x] = [x]^2 - 2[x]$ 的实数解.

(匈牙利数学奥林匹克,1990 年)

[解]　设 $y = x - 1$,则 $[y^2] = [y]^2$.

若 $y \geqslant 0$,则 $y^2 \geqslant [y]^2 > y^2 - 1$.

所以　　$[y] \leqslant y < \sqrt{1 + [y]^2}$.

即　　$x \in [n + 1, 1 + \sqrt{1 + n^2})$,对于任意 $n \in N \cup \{0\}$.

若 $y < 0$,则　$[y]^2 \geqslant y^2 \geqslant [y^2]$,

所以必须 y 为整数,才能有 $[y^2] = [y]^2$,即 x 为负整数或 0.

4・32　试解方程 $x^4 + (x - 4)^4 = 626$.

(中国北京市数学竞赛,1957 年)

[解]　作代换 $y = x - 2$,则原方程变为

$$(y + 2)^4 + (y - 2)^4 = 626,$$

即　　$y^4 + 24y^2 - 297 = 0$.

所以　　$y^2 = 9, -33$;即 $y = \pm 3, \pm \sqrt{33}i$,

故原方程的两实根和两虚根为:

$$5, -1; 2 + \sqrt{33}i, 2 - \sqrt{33}i.$$

4・33　求满足方程 $|x + 3| - |x - 1| = x + 1$ 的一切实数.

(第 5 届加拿大数学奥林匹克,1973 年)

[解]　当 $x \leqslant -3$ 时,方程化为

$$-(x + 3) - (1 - x) = x + 1,$$

即得　　$x = -5$.

当 $-3 < x \leqslant 1$ 时,方程化为

$$x + 3 - (1 - x) = x + 1,$$

即得　　$x = -1$.

当 $x > 1$ 时,方程化为

$$(x+3)-(x-1)=x+1,$$

即得 $x=3.$

因此,所求的解是 $-5,-1,3.$

4·34 试求适合下列关系中,x 的实数值范围:

$$|3x-2|+|3x+1|=3.$$

(中国上海市数学竞赛,1957 年)

[解] $\because$ $|3x-2|+|3x+1|=|2-3x|+|3x+1|=3,$

而 $|2-3x+3x+1|=3,$

$\therefore$ $|2-3x|+|3x+1|=|(2-3x)+(3x+1)|,$

$\therefore$ $2-3x$ 与 $3x+1$ 必须同号,或有一为 0,

若 $\begin{cases}2-3x\geqslant 0\\ 3x+1\geqslant 0,\end{cases}$,则 $-\dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{2}{3}.$

若 $\begin{cases}2-3x\leqslant 0\\ 3x+1\leqslant 0,\end{cases}$ 无解.

$\therefore$ 原式中 x 实数值范围为:$-\dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{2}{3}.$

4·35 解方程:$|x+1|+\dfrac{1}{2}|2x-3|=5x+2.$

(中国上海市数学竞赛,1960 年)

[解] 首先,因方程左端不小于 0,故右端亦应不小于 0,即 $5x+2\geqslant 0,x\geqslant -\dfrac{2}{5}.$

其次再分两种情况讨论:

(1) 当 $x\geqslant\dfrac{3}{2}$ 时,原方程为:

$$x+1+\frac{1}{2}(2x-3)=5x+2,$$

$4x-1=10x+4,x=-\dfrac{5}{6}$,矛盾,无解.

(2) 当 $-\dfrac{2}{5}\leqslant x<\dfrac{3}{2}$ 时,原方程为:

$$x+1+\frac{1}{2}(3-2x)=5x+2,$$

$\dfrac{5}{2}=5x+2$,故 $x=\dfrac{1}{10}.$

所以原方程有惟一解 $x=\frac{1}{10}$.

4·36 试求1的n个n次方根,并求它们n次幂的和.

(中国上海市数学竞赛,1962年)

[解] $x^n=1$,即 $x^n=\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi$.$(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$
故由棣美弗定理知n个根为:

$$x_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}.(k=0,1,2,\cdots,n-1)$$

又因 $x_k^n=1.(k=0,1,2,\cdots,n-1)$

所以 $x_0^n+x_1^n+\cdots+x_{n-1}^n=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n个}=n.$

4·37 试指出,若方程

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

有三个成等差数列的实根,实数a,b,c应满足什么样的充要条件?

(波兰数学奥林匹克,1952年)

[解] 设实系数三次方程

$$x^3+ax^2+bx+c=0 \quad ①$$

的三个实根x_0-y,x_0,x_0+y构成等差数列.由根与系数的关系,得

$$(x_0-y)+x_0+(x_0+y)=-a,$$

所以 $x_0=-\frac{1}{3}a.$

将方程①中的x换为$-\frac{1}{3}a$得

$$\left(-\frac{1}{3}a\right)^3+a\left(-\frac{1}{3}a\right)^2+b\left(-\frac{1}{3}a\right)+c=0,$$

化简得 $2a^3-9ab+27c=0.$ ②

反过来,若a,b,c满足等式②,也就是说,方程①有根$x_0=-\frac{1}{3}a$.设方程的另外两个根为x_1,x_2,由根与系数的关系,得

$$x_0+x_1+x_2=-a,x_0x_1+x_1x_2+x_2x_0=b,$$

而$x_0=-\frac{1}{3}a$,于是

$$x_1+x_2=-\frac{2}{3}a,x_1x_2=b-\frac{2}{9}a^2.$$

因此，x_1, x_0, x_2 成等差数列，且数 x_1 与 x_2 满足二次方程

$$x^2 + \frac{2}{3}ax + \left(b - \frac{2}{9}a^2\right) = 0.$$

显然，当且仅当 $\triangle = \left(\frac{2}{3}a\right)^2 - 4\left(b - \frac{2}{9}a^2\right) \geqslant 0$ 时，也即，当且仅当

$$a^2 - 3b \geqslant 0 \quad ③$$

时，x_1 与 x_2 为实数.

于是，三次方程①具有三个组成等差数列的实根的充要条件是关系式②和③同时成立.

4·38　为使方程

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad ①$$

有三个组成等比数列的不同的实根，实数 a, b, c 应满足什么条件？

（波兰数学奥林匹克，1955年）

[解]　设 x_1, x_1q, x_1q^2 是方程①的三个根，其中 x_1, q 皆为实数，$x_1 \neq 0, q \neq 0, \pm 1$. 这样的三个根满足题中的要求. 根据与系数的关系，有

$$\begin{cases} x_1 + x_1q + x_1q^2 = -a, \\ x_1^2q + x_1^2q^2 + x_1^2q^3 = b, \\ x_1^3q^3 = -c. \end{cases} \quad ②$$

为简便计，用 m 表示适合 $m^3 = -c$ 的惟一的实数，于是②变为

$$\begin{cases} x_1(1 + q + q^2) = -a, \\ x_1^2q(1 + q + q^2) = b, \\ x_1q = m. \end{cases} \quad ③$$

这个方程组等价于方程组

$$\begin{cases} x_1(1 + q + q^2) = -a, \\ ax_1q + b = 0, \\ x_1q = m. \end{cases} \quad ④$$

从方程组④的后两个式子得

$$b = -am. \quad ⓐ$$

于是我们得到了原方程①的系数的第一个必要条件. 如果这个条件被满足，④等价于

$$\begin{cases} x_1(1+q+q^2)=-a, \\ x_1 q = m. \end{cases} \quad ⑤$$

于 ⑤ 的第一式中,用 m 代 $x_1 q$,得

$$\begin{cases} x_1 + mq = -a - m, \\ x_1 q = m. \end{cases} \quad ⑥$$

⑤ 与 ⑥ 等价.

注意到 x_1, q 的特征,系数 a, b, c 应满足的第二个必要条件是

$$m \neq 0. \quad (\beta)$$

自 ⑥ 中消去 x_1,得方程

$$mq^2 + (m+a)q + m = 0. \quad ⑦$$

由于 q 为实数,因而

$$(m+a)^2 - 4m^2 \geqslant 0,$$

也即

$$a^2 + 2am - 3m^2 \geqslant 0. \quad (\gamma)$$

因 $q \neq \pm 1$,故由方程 ⑦ 得系数 a, b, c 应满足的另外两个必要条件:

$$a \neq -3m, \quad (\delta)$$

$$a \neq m. \quad (\varepsilon)$$

注意到,当 $a=-3m$ 或 $a=m$ 时,三项式 $a^2+2am-3m^2$ 的值为 0. 这就使我们可以把条件(γ),(δ) 和(ε) 以一个条件代替:

$$a^2 + 2am - 3m^2 > 0. \quad (\eta)$$

于是,我们得到方程 ① 的系数 a, b, c 应该满足的三个必要条件 (α),(β),(η).

条件也是充分的. 即,如果条件 (α),(β),(η) 满足,必存在满足要求的 x_1, q.

事实上,由条件 (β) 和(η) 可得,方程 ⑦ 有两个实根. 设 q 是其中的一个(于是另一根是 $1/q$). 由条件(β),$q \neq 0$;由条件 ⑦,$q \neq \pm 1$. 于是,从关系式组 ⑥ 的第二式得 $x_1 = m/q$,并且 x_1 是满足关系式组 ⑥ 的第一式的实数. 此外,按条件 (β),$x_1 \neq 0$. 如果条件 (α) 满足,那么关系式组 ⑥ 等价于关系式组 ②. 这样,求得的值 x_1 和 q 满足关系式(ι),从而说明 $x_1, x_1 q, x_1 q^2$ 是 ① 的根.

条件(η) 意味着 m 介于 a 与 $-a/3$ 之间. 因为 $m^3=-c$,所以条件

ⓐ,ⓑ,ⓒ 可以改写为如下形式：

$$\begin{cases} b^3 = a^3 c, \\ c \neq 0, \\ c \text{ 介于 } -a^3 \text{ 和 } a^3/27 \text{ 之间}. \end{cases}$$

此即所求的条件.

4·39　试证：若两个整系数三次方程有一个公共的无理根，那么它们还有另一个公共根.

（波兰数学奥林匹克，1966 年）

［证］　设多项式

$$P(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3,$$
$$Q(x) = b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3. \quad ①$$

有公共无理根 α，其中系数 $a_i, b_i (i = 0,1,2,3)$ 是整数，$a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$.

数 α 也是多项式

$$R(x) = b_0P(x) - a_0Q(x)$$
$$= (a_1b_0 - a_0b_1)x^2 + (a_2b_0 - a_0b_2)x + (a_3b_0 - a_0b_3) \quad ②$$

的根，这是因为 $R(\alpha) = b_0P(\alpha) - a_0Q(\alpha) = 0$. 现分两种情况讨论.

(1) $a_1b_0 - a_0b_1 \neq 0$. 于是 $R(x)$ 是 x 的整系数二次多项式，因此它的无理根 α 有 $m + n\sqrt{p}$ 的形式，这里 m, n, p 是有理数，p 不是有理数的平方，且 $n \neq 0$.

注意到

$$p(m + n\sqrt{p}) = a_0(m + n\sqrt{p})^3 + a_1(m + n\sqrt{p})^2 + a_2(m + n\sqrt{p}) + a_3$$
$$= M + N\sqrt{p},$$
$$P(m - n\sqrt{p}) = a_0(m - n\sqrt{p})^3 + a_1(m - n\sqrt{p})^2 + a_2(m - n\sqrt{p}) + a_3$$
$$= M - N\sqrt{p},$$

这里

$$M = a_0m^3 + 3a_0mn^2p + a_1m^2 + a_1n^2p + a_2m + a_3,$$
$$N = 3a_0m^2n + a_0n^3p + 2a_1mn + a_2n.$$

因为数 $m + n\sqrt{p}$ 是多项式 $P(x)$ 的根，所以 $M + N\sqrt{p} = 0$. 因而 $N = 0$. 因若不然，将会有 $\sqrt{p} = -M/N$，但 $\sqrt{p}$ 是无理数，M/N 是有理

数，所以这是不可能的. 于是也有 $M=0$. 从而 $M-N\sqrt{p}=0$. 这表明 $m-n\sqrt{p}$ 也是多项式 $P(x)$ 的根.

类似地可以证明 $m-n\sqrt{p}$ 也是多项式 $Q(x)$ 的根.

总之，多项式 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 有与根 $m+n\sqrt{p}$ 不同的公共根 $m-n\sqrt{p}$(因为 $n\neq 0, p\neq 0$).

(2) $a_1b_0-a_0b_1=0$. 这时 $R(x)$ 是 x 的整系数一次多项式，但当独立变量 x 取无理值 α 时，这个多项式为零，因此它必须恒等于零，亦即对一切 x,

$$b_0P(x)-a_0Q(x)=0.$$

因此，多项式 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 的值成比例，多项式 $P(x)$ 的每个根也是多项式 $Q(x)$ 的根，反之亦然. 三次多项式 $P(x)$ 除 α 外还有两个(实的或复的)根 α' 及 α''. 它们中至少有一个异于 α. 若不然，将有 $\alpha=\alpha'=\alpha''$. 于是从 $\alpha+\alpha'+\alpha''=-\dfrac{a_1}{a_0}$ 推出 $\alpha=-\dfrac{a_1}{3a_0}$，但 α 是无理数，而 $-\dfrac{a_1}{3a_0}$ 是有理数，所以这不可能. 现设 $\alpha'\neq\alpha$，那么 α' 就是多项式 $P(x)$ 与 $Q(x)$ 的另一个公共根.

4・40 试证：方程 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x+b}=0$(其中 a 和 b 是正数)有两个实数根，而且一个根在 $\dfrac{a}{3}$ 和 $\dfrac{2a}{3}$ 之间，另一个根在 $-\dfrac{2b}{3}$ 和 $-\dfrac{b}{3}$ 之间.

(匈牙利数学奥林匹克，1918年)

[证] 将方程

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+b}=0 \qquad ①$$

去分母后，得

$$f(x)=3x^2-2(a-b)x-ab=0. \qquad ②$$

因为当 $x=-b,0,a$ 时，$f(x)$ 的值

$$f(-b)=b(a+b)>0, f(0)=-ab<0,$$

$$f(a)=a(a+b)>0,$$

它们的符号交替改变，所以方程的负根大于 $-b$，而正根小于 a.

将正根 x_1 代入方程 ①，得

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_1+b}=\frac{1}{a-x_1}, \quad ③$$

它左右两边所有的项都是正的,由于

$$\frac{1}{x_1}<\frac{1}{a-x_1},$$

所以 $x_1>\frac{a}{2}$,从而也有 $x_1>\frac{a}{3}$.

又因为 $x_1<x_1+b$,所以$\frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_1+b}$,且由方程 ③ 得不等式

$$\frac{2}{x_1}>\frac{1}{a-x_1}.$$

由此可得 $x_1<\frac{2a}{3}$.

同理可证负根 x_2 在 $-\frac{2b}{3}$ 和 $-\frac{b}{3}$ 之间.

4·41 解方程 $5x^2+x-x\cdot\sqrt{5x^2-1}-2=0$.

(中国高中数学联赛,1979 年)

[解] 将原方程化为

$$(5x^2-1)-x\cdot\sqrt{5x^2-1}+(x-1)=0,$$

分解因式得

$$(\sqrt{5x^2-1}-x+1)(\sqrt{5x^2-1}-1)=0.$$

由 $\sqrt{5x^2-1}-x+1=0$,解得 $x_1=\frac{1}{2}, x_2=-1$.

由 $\sqrt{5x^2-1}-1=0$,解得 $x_{3,4}=\pm\frac{\sqrt{10}}{5}$.

经检验知,$x_1=\frac{1}{2}$,$x_2=-1$ 都是增根.所以原方程的根是 $\pm\frac{\sqrt{10}}{5}$.

4·42 试求方程 $x=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}}$ 的正根,并证明只有一个正根.

(中国上海市数学竞赛,1957 年)

[解] (1) 如 $x=2$,则

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2}}}}=2.$$

$\therefore\quad$ 2 是方程的正根.

(2) 如 $x>2$,令 $x=2+\alpha(\alpha>0)$,

则 $\because\quad (2+\alpha)^2=4+4\alpha+\alpha^2>4+\alpha>4$,

$\therefore\quad x^2>2+x>4, x>\sqrt{2+x}>2.$

同理可得:

$$\sqrt{2+x}>\sqrt{2+\sqrt{2+x}}>2,$$

$$\sqrt{2+\sqrt{2+x}}>\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}>2,$$

…………

$$\therefore\quad x>\sqrt{2+x}>\sqrt{2+\sqrt{2+x}}>\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}$$

$$>\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}}.$$

即当 $x>2$ 时,不可能是方程的根.

(3) 如 $0<x<2$,令 $x=2-\alpha\quad(2>\alpha>0)$.

则 $\because\quad (2-\alpha)^2=4-4\alpha+\alpha^2=4-\alpha(4-\alpha)$

且 $\quad 4-\alpha>1$,

$\therefore\quad 4>4-\alpha>4-\alpha(4-\alpha)$,

$4>2+x>x^2$,

$\therefore\quad 2>\sqrt{2+x}>x.$

同理可得:

$$2>\sqrt{2+\sqrt{2+x}}>\sqrt{2+x},$$

$$2>\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}>\sqrt{2+\sqrt{2+x}},$$

…………

$$\therefore\quad \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}}>\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}$$

$$>\sqrt{2+\sqrt{2+x}}>\sqrt{2+x}>x.$$

即当 $0<x<2$ 时,也不可能是方程的根,因此这一方程只有惟一的正根 2.

4·43 对任意的实数 t,用 $[t]$ 表示小于或等于 t 的最大整数.例如 $[8]=8,[\pi]=3,\left[-\dfrac{5}{2}\right]=-3$.试证方程

$[x]+[2x]+[4x]+[8x]+[16x]+[32x]=12345$ 没有实数解.

(第13届加拿大数学奥林匹克,1981年)

[证] 记 $f(x)=[x]+[2x]+[4x]+[8x]+[16x]+[32x]$

假设方程有一实数解 x,则

$$f(x)=12345,$$
$$f(195)=12285<12345,$$
$$f(196)=12348>12345.$$

且 $f(x)$ 是递增的,于是有

$$195<x<196.$$

记 $y=x-195$,则 $0<y<1$.

$$\begin{aligned}f(y)&=[x-195]+[2x-2\times195]+\cdots+[32x-32\times195]\\&=f(x)-f(195)\\&=12345-12285\\&=60.\end{aligned}$$

由于 $0<y<1$,则对一切正整数 n,$0<ny<n$.

从而 $[ny]\leqslant n-1$,从而又有

$$\begin{aligned}f(y)&=[y]+[2y]+[4y]+[8y]+[16y]+[32y]\\&\leqslant0+1+3+7+15+31\\&=57<60.\end{aligned}$$

出现矛盾.

因此原方程没有实数解.

4·44 设 m 为实数,解 x 的方程

$$|x^2-1|+|x^2-4|=mx.$$

(加拿大国家集训队训练题)

[解] 由于方程 $|x^2-1|+|x^2-4|=mx$ ①

的左边两项不可能同时为0,所以左边恒为正,$m\neq0$.

先讨论 $m>0$ 的情形,此时 $x>0$.

若 $0<x\leqslant1$,则由①得 $1-x^2+4-x^2=mx$,

即 $2x^2+mx-5=0$.

从而 $x=\dfrac{-m+\sqrt{m^2+40}}{4},\dfrac{-m-\sqrt{m^2+40}}{4}\leqslant1.$

$\Longleftrightarrow m^2+40\leqslant m^2+8m+16\Longleftrightarrow 3\leqslant m$.

若 $1<x\leqslant 2$,则由 ① 得 $x^2-1+4-x^2=mx$.

从而 $$1<\frac{3}{m}\leqslant 2\Longleftrightarrow \frac{3}{2}\leqslant m<3.$$

若 $x>2$,则由 ① 得 $2x^2-mx-5=0$.

解得 $$x=\frac{m+\sqrt{m^2+40}}{4},$$

从而 $$\frac{m+\sqrt{m^2+40}}{4}>2\Longleftrightarrow m^2+40>(8-m)^2 \text{ 或 } m>8$$

$$\Longleftrightarrow 5>8-2m \text{ 或 } m>8\Longleftrightarrow m>\frac{3}{2}.$$

对于 $m<0$ 的情形,易知 $x<0$,此时用 $-m$, $-x$ 来代替 m, x,就化为 $m>0$ 的情形了.

因此,本题的答案是

在 $m\geqslant 3$ 时,$x=\dfrac{-m\pm\sqrt{m^2+40}}{4}$;

在 $\dfrac{3}{2}\leqslant m<3$ 时,$x=\dfrac{m+\sqrt{m^2+40}}{4}$,$\dfrac{3}{m}$;

在 $m\leqslant -3$ 时,$x=\dfrac{-m\pm\sqrt{m^2+40}}{4}$;

在 $-\dfrac{3}{2}\geqslant m>-3$ 时,$x=\dfrac{m-\sqrt{m^2+40}}{4}$,$\dfrac{3}{m}$;

在 m 为其他值时,方程 ① 无解.

4·45 $f(x)=x^3-3x+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}$,将 $\dfrac{f(x)-2}{f(x)+2}$ 表示成一个分式,分子、分母都呈 $u\sqrt{v}$ 的形式,这里 u, v 都是 x 的一次多项式,说出对什么样的 x,你的等式成立.

(加拿大国家集训队训练题)

[解] 若 $x\geqslant 2$,则

$$\frac{f(x)-2}{f(x)+2}=\frac{x^3-3x-2+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{x^3-3x+2+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}$$

$$=\frac{(x+1)^2(x-2)+(x+1)(x-1)\sqrt{x^2-4}}{(x-1)^2(x+2)+(x+1)(x-1)\sqrt{x^2-4}}$$

$$=\frac{(x+1)\sqrt{x-2}[(x+1)\sqrt{x-2}+(x-1)\sqrt{x+2}]}{(x-1)\sqrt{x+2}[(x-1)\sqrt{x+2}+(x+1)\sqrt{x-2}]}$$

$$=\frac{(x+1)\sqrt{x-2}}{(x-1)\sqrt{x+2}}.$$

若 $x\leqslant -2$,则

$$\frac{f(x)-2}{f(x)+2}$$

$$=\frac{-(x+1)\sqrt{-x+2}[(x+1)\sqrt{-x+2}-(x-1)\sqrt{-x-2}]}{(x-1)\sqrt{-x-2}[-(x-1)\sqrt{-x-2}+(x+1)\sqrt{-x+2}]}$$

$$=\frac{-(x+1)\sqrt{-x+2}}{(x-1)\sqrt{-x-2}}.$$

4·46　设方程

$$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$$

的系数都是实数且满足条件 $0<a_0\leqslant a_1\leqslant\cdots\leqslant a_{n-1}\leqslant 1$. 已知 λ 为此方程的复根且 $|\lambda|\geqslant 1$. 求证:$\lambda^{n+1}=1$.

(第 7 届中国中学生数学冬令营,1992 年)

[解]　因 λ 为方程的根,故有

$$\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0.$$

将上式两端同乘以 $\lambda-1$,得到

$$\begin{aligned}0&=(\lambda-1)(\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0)\\&=\lambda^{n+1}+(a_{n-1}-1)\lambda^n+(a_{n-2}-a_{n-1})\lambda^{n-1}+\cdots\\&\quad+(a_0-a_1)\lambda-a_0,\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}\lambda^{n+1}=&(1-a_{n-1})\lambda^n+(a_{n-1}-a_{n-2})\lambda^{n-1}+\cdots\\&+(a_1-a_0)\lambda+a_0\end{aligned}\qquad ①$$

其中右端的系数都是非负数. 因此有

$$\begin{aligned}|\lambda|^{n+1}=&|(1-a_{n-1})\lambda^n+(a_{n-1}-a_{n-2})\lambda^{n-1}+\cdots+\\&(a_1-a_0)\lambda+a_0|\\\leqslant&(1-a_{n-1})|\lambda|^n+(a_{n-1}-a_{n-2})|\lambda|^{n-1}+\cdots\\&+(a_1-a_0)|\lambda|+a_0\end{aligned}\qquad ②$$

由已知 $|\lambda|\geqslant 1$,故由 ② 式又有

$$|\lambda|^{n+1}\leqslant(1-a_{n-1})|\lambda|^n+(a_{n-1}-a_{n-2})|\lambda|^n+\cdots+$$

$$(a_1 - a_0)|\lambda|^n + a_0|\lambda|^n = |\lambda|^n \qquad ③$$

由此即得 $|\lambda| \leqslant 1$,从而得到 $|\lambda| = 1$.这样一来,不等式②,③都变为等式.因而有如下的辐角关系:

$$\begin{aligned}\arg(1 - a_{n-1})\lambda^n &= \arg(a_{n-1} - a_{n-2})\lambda^{n-1}\\ &= \cdots = \arg(a_1 - a_0)\lambda\\ &= \arg a_0 = 0,\end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{cases}(1 - a_{n-1})\lambda^n \geqslant 0\\ (a_{n-i} - a_{n-i-1})\lambda^{n-1} \geqslant 0, i = 1,2,\cdots,n-1.\end{cases} \qquad ④$$

由④和②式得知

$$\begin{aligned}\lambda^{n+1} = &(1 - a_{n-1})\lambda^n + (a_{n-1} - a_{n-2})\lambda^{n-1} + \cdots +\\ &(a_1 - a_0)\lambda + a_0\\ \geqslant &0.\end{aligned}$$

从而有 $\lambda^{n+1} = |\lambda^{n+1}| = |\lambda|^{n+1} = 1.$

4·47 设 a,b 是实数,且 $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ 至少有一个实根,试计算 $a^2 + b^2$ 能取的最小值.

(第15届国际数学奥林匹克,1973年)

[解] 首先考虑方程

$$x + \frac{1}{x} = y,$$

这里 y 是实数,此方程可写成 x 的二次方程 $x^2 - yx + 1 = 0$,它有实根的充要条件是其判别式不小于0,即

$$y^2 - 4 \geqslant 0 \text{ 或 } |y| \geqslant 2. \qquad ①$$

原方程可写成

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + (b - 2) = 0.$$

令 $y = x + \dfrac{1}{x}$ 则得

$$y^2 + ay + (b - 2) = 0,$$

解得 $$y = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4(b-2)}}{2}. \qquad ②$$

因为原方程至少有一个实根,由①可知,②中至少有一个根的绝

对值$\geqslant 2$,所以

$$|a|+\sqrt{a^2-4(b-2)}\geqslant 4,$$

即 $$\sqrt{a^2-4(b-2)}\geqslant 4-|a|,$$

去根号,得 $$8|a|\geqslant 8+4b,$$

两边平方,得 $$4a^2\geqslant b^2+4b+4,$$

则 $$4(a^2+b^2)\geqslant 5b^2+4b+4,$$

故 $$a^2+b^2\geqslant\frac{5}{4}\left(b+\frac{2}{5}\right)^2+\frac{4}{5}.$$

由此可知,当$b=-\frac{2}{5}$时,a^2+b^2取最小值$\frac{4}{5}$.

4·48 若 $p_1(x)=x^2-2$.

$$p_i(x)=p_1[p_{i-1}(x)],i=2,3,4,\cdots$$

求证对任何自然数n,方程$p_n(x)=x$的解是互不相同的实数.

(第18届国际数学奥林匹克,1976年)

[证] 用数学归纳法不难证明:当$|x|>2$时,必有$p_n(x)>x$.
因此我们在定义域$[-2,2]$上讨论$p_n(x)$,并作代换

$$x=2\cos t,t\in[0,\pi]$$

首先用数学归纳法证明,对于任何自然数n有

$$p_n(2\cos t)=2\cos 2^n t.$$

事实上,当$n=1$时,由

$$p_1(2\cos t)=2(2\cos^2 t-1)=2\cos 2t$$

可知,命题正确.

设命题对$n-1$时正确,即

$$p_{n-1}(2\cos t)=2\cos 2^{n-1}t$$

由$p_n(x)$的定义可知,

$$\begin{aligned}p_n(2\cos t)&=p_1[p_{n-1}(2\cos t)]\\&=p_1(2\cos 2^{n-1}t)\\&=2(2\cos^2 2^{n-1}t-1)=2\cos 2^n t.\end{aligned}$$

故命题对n也正确.

其次,我们来解方程$p_n(2\cos t)=2\cos t$,

即解方程 $$2\cos 2^n t=2\cos t,$$

解之,得 $2^n t = \pm t + 2m\pi$(m 为整数).

从上解中取出下列 2^n 个值:

$$t_k = \frac{2k\pi}{2^n - 1}, k = 0,1,\cdots,2^{n-1} - 1,$$

$$s_l = \frac{2l\pi}{2^n + 1}, l = 1,2,\cdots,2^{n-1}.$$

显然,这两组值满足下述关系

$$0 \leqslant t_0 < t_1 < \cdots < t_{2^{n-1}-1} < \pi,$$

$$0 < S_1 < S_2 < \cdots < S_{2^{n-1}} < \pi.$$

由于余弦函数在区间$[0,\pi]$内是单调递降的,故知

$2\cos t_k$(对应地,$2\cos s_l$),

$k = 0,1,\cdots,2^{n-1} - 1$(对应地,$l = 1,2,\cdots,2^{n-1}$)是方程的不同的解.

再来证明,$t_{k0} \neq s_{l0}$($0 \leqslant k_0 \leqslant 2^{n-1} - 1, 1 \leqslant l_0 \leqslant 2^{n-1}$).

如其不然,由$\dfrac{2k_0\pi}{2^n - 1} = \dfrac{2l_0\pi}{2^n + 1}$

可得 $$l_0 = k_0\frac{2^n + 1}{2^n - 1} = k_0 + k_0\frac{2}{2^n - 1}.$$

因为$(2,2^n - 1) = 1$,即 2 与 $2^n - 1$ 互质,并且 l_0 是自然数,所以应有 $2^n - 1$ 整除 k_0,但是 $0 \leqslant k_0 \leqslant 2^{n-1} - 1$,故必有 $k_0 = 0$,从而 $l_0 = 0$,这与 $1 \leqslant l_0$ 矛盾.

由此可见,$2\cos t_{k0} \neq 2\cos S_{l0}$($0 \leqslant k_0 \leqslant 2^{n-1} - 1, 1 \leqslant l_0 \leqslant 2^{n-1}$),也就是说

$$x_k = 2\cos t_k \quad (k = 0,1,\cdots,2^{n-1} - 1)$$

和 $x_l = 2\cos S_l \quad (l = 1,2,\cdots,2^{n-1})$ 是方程 $p_n(x) = x$ 的 2^n 个互不相同的实数解.并且由 $p_n(x)$ 的定义可知,这个方程是一个 2^n 次代数方程.由代数的基本定理可知,方程再也没有其他的解.

4·49 解方程 $x^2 + \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2 = 3$.

(第 24 届加拿大数学奥林匹克,1992 年)

[解] 因为 $x^2 - 2\cdot\dfrac{x^2}{x+1} + \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2 = \left(x - \dfrac{x}{x+1}\right)^2$

$$= \left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2;$$

原方程可化为

$$x^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 - 2\cdot\frac{x^2}{x+1} + 2\cdot\frac{x^2}{x+1} = 3,$$

即 $$\left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2 + 2\cdot\frac{x^2}{x+1} - 3 = 0,$$

$$\left(\frac{x^2}{x+1}+3\right)\left(\frac{x^2}{x+1}-1\right) = 0,$$

有 $$\frac{x^2}{x+1} = -3 \text{ 或 } \frac{x^2}{x+1} = 1.$$

解这两个方程得

$$x_1 = \frac{-3+\sqrt{3}i}{2}, x_2 = \frac{-3-\sqrt{3}i}{2},$$

$$x_3 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, x_4 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

4·50　解方程

$$\frac{1}{x^2-10x-29} + \frac{1}{x^2-10x-45} - \frac{2}{x^2-10x-69} = 0.$$

(第 8 届美国数学邀请赛,1990 年)

[解]　设 $x^2 - 10x - 49 = t$.则原方程化为

$$\frac{1}{t+20} + \frac{1}{t+4} - \frac{2}{t-20} = 0$$

去分母,得

$$(t+4)(t-20) + (t+20)(t-20) - 2(t+20)(t+4) = 0,$$

展开并化简得

$$-64t = 640,$$

即 $$t = -10.$$

代入得 $$x^2 - 10x - 49 = -10,$$

即 $$x^2 - 10x - 39 = 0,$$

解得 $$x_1 = 13, x_2 = -3.$$

经检验,x_1,x_2 都是原方程的根.

4·51　求下列方程所有根的和

$$\sqrt[4]{x}=\frac{12}{7-\sqrt[4]{x}}.$$

（第 4 届美国数学邀请赛，1986 年）

[解]　令 $y=\sqrt[4]{x}$，则

$$y=\frac{12}{7-y}，即\ y^2-7y+12=0,$$

解得　$y_1=3, y_2=4.$

从而有　$x_1=3^4, x_2=4^4.$

故所有根的和 $x_1+x_2=3^4+4^4=337.$

4・52　对某个自然数 n，2^n 与 5^n 最大数位上的数字相同，问这个数字是什么？

（第 14 届全俄数学奥林匹克，1988 年）

[解]　设这个数字为 a，因为

$$2^n\cdot 5^n=10^n,$$

所以　$a^2<10<(a+1)^2.$

从而得　$a=3$.（例如 $2^5=32, 5^5=3125$）

4・53　求方程 $x^2+25x+52=3\sqrt{x^2+25x+80}$ 的所有实数解的积.

（日本数学奥林匹克代表队选拔试题，1990 年）

[解]　设 $\sqrt{x^2+25x+80}=u$，则原方程可化为

$$u^2-28=3u.$$

因为　$u\geqslant 0$，所以 $u=7$.

即　$x^2+25x+80=7^2.$

由 $\Delta>0$ 可知，方程有相异实根，由韦达定理得，所求两根之积为 $80-49=31$.

4・54　解方程 $(x^2+x)^2+\sqrt{x^2-1}=0.$

（第 52 届莫斯科数学奥林匹克，1989 年）

[解]　由原方程得

$$\begin{cases}x^2+x=0,\\ x^2-1=0.\end{cases}$$

因此，只有一个实数解 $x=-1$.

4·55　试求大于1的实数 x,y,z,满足等式

$$x+y+z+\frac{3}{x-1}+\frac{3}{y-1}+\frac{3}{z-1}=2(\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}+\sqrt{z+2}).$$

（北欧数学竞赛,1992年）

[解]　令 $f(t)=t+\frac{3}{t-1}-2\sqrt{t+2}$,则

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{1}{t-1}(t^2-t+3-2(t-1)\sqrt{t+2})\\&=\frac{1}{t-1}[t^2-2t+1+(\sqrt{t+2})^2-2(t-1)\sqrt{t+2}]\\&=\frac{1}{t-1}[t-1-\sqrt{t+2}]^2.\end{aligned}$$

显然,当 $t>1$ 时,$f(t)\geqslant 0$,并且仅当 $t-1-\sqrt{t+2}=0$ 时等号成立.

即　$t=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ 时等式成立.

易知原方程可化为

$f(x)+f(y)+f(z)=0$,其中 $x>1,y>1,z>1$,它等价于

$$f(x)=0,f(y)=0,f(z)=0.$$

所以　$x=y=z=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$.

4·56　设 a 和 b 是 $x^4+x^3-1=0$ 的两个根,试证:ab 是 $x^6+x^4+x^3-x^2-1=0$ 的一个根.

（第6届美国数学奥林匹克,1977年）

[证]　设 $a、b、c、d$ 为方程 $x^4+x^3-1=0$ 的四个根,则由韦达定理,有

$$a+b+c+d=-1, \quad ①$$

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd=0, \quad ②$$

$$bcd+acd+adb+abc=0, \quad ③$$

$$abcd=-1. \quad ④$$

设　$p=a+b,q=ab,r=c+d,s=cd$,则关系式①～④变形为

$$p+r=-1,$$

$$pr+q+s=0,$$

$qr + ps = 0,$

$qs = -1.$

消去 p、r 和 s,得 $q^6 + q^4 + q^3 - q^2 - 1 = 0$.

4·57 若$2a^2 < 5b$,试证方程

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

的根不全是实数.

(第 12 届美国数学奥林匹克,1983 年)

[证] 用反证法.若方程的根全是实数,设这些根为 $x_i(1 \leqslant i \leqslant 5)$,则由韦达定理得

$$-a = \sum_{i=1}^{5} x_i, b = \sum_{i<j} x_i x_j.$$

$2a^2 - 5b < 0$ 等价于

$$2\left(\sum_{i=1}^{5} x_i\right)^2 - 5\sum_{i<j} x_i x_j < 0,$$

即
$$2\sum_{i=1}^{5} x_i^2 - \sum_{i<j} x_i x_j < 0.$$

将上式两边同时乘以 2,并注意 $4\sum x_i^2 = \sum_{i<j}(x_i^2 + x_j^2)$,于是

$$\begin{aligned}
&4\sum_{i=1}^{5} x_i^2 - 2\sum_{i<j} x_i x_j \\
=& \sum_{i<j}(x_i^2 + x_j^2) - 2\sum_{i<j} x_i x_j \\
=& \sum_{i<j}(x_i - x_j)^2 < 0,
\end{aligned}$$

这是矛盾.因此,所有的根不全是实数.

4·58 求满足等式

$(5 + 3\sqrt{2})^m = (3 + 5\sqrt{2})^n$ 的整数 m 和 n.

(第 18 届全苏数学奥林匹克,1984 年)

[解] 设$(5 + 3\sqrt{2})^m = (3 + 5\sqrt{2})^n = A + B\sqrt{2}$,其中 A,B 为有理数.

如果 $B = 0$,那么必有 $m = n = 0$.

如果 $B \neq 0$,那么

$$(5 - 3\sqrt{2})^m = (3 - 5\sqrt{2})^n = A - B\sqrt{2} \qquad ①$$

另一方面,因为 $0<5-3\sqrt{2}<1$ 而 $|3-5\sqrt{2}|>1$,
所以 ① 式不可能成立.这是一个矛盾.

故仅当 $m=n=0$ 时等式成立.

4·59 方程 $z^6+z^3+1=0$ 有一个复数根,在复平面上这个根的辐角 θ 在 90° 和 180° 之间,求 θ 的度数.

(第 2 届美国数学邀请赛,1984 年)

[解] 设 $\omega=z^3$.于是将原方程化为

$$\omega^2+\omega+1=0,$$

$$\omega=\cos\frac{2\pi}{3}\pm i\sin\frac{2\pi}{3}.$$

因为 z 是 w 的三次方根,所以有

$$z_1=\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9},$$

$$z_2=\cos\frac{8\pi}{9}+i\sin\frac{8\pi}{9},$$

$$z_3=\cos\frac{14\pi}{9}+i\sin\frac{14\pi}{9},$$

$$z_4=\cos\frac{4\pi}{9}+i\sin\frac{4\pi}{9},$$

$$z_5=\cos\frac{10\pi}{9}+i\sin\frac{10\pi}{9},$$

$$z_6=\cos\frac{16\pi}{9}+i\sin\frac{16\pi}{9}.$$

其中在 90° 和 180° 之间的辐角只有 $\frac{8\pi}{9}$,所以 $\theta=160^\circ$.

4·60 四次方程

$$x^4-18x^3+kx^2+200x-1984=0$$

的四个根当中的两个的积是 -32,试确定 k 的值.

(第 13 届美国数学奥林匹克,1984 年)

[解] 设方程的四个根是 x_1、x_2、x_3、x_4,则由韦达定理有

$$x_1+x_2+x_3+x_4=18, \quad ①$$

$$x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=k, \quad ②$$

$$x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4=-200, \quad ③$$

$$x_1x_2x_3x_4=-1984. \quad ④$$

再设 x_1 与 x_2 的积是 -32,即

$$x_1x_2=-32. \quad ⑤$$

由 ④ ÷ ⑤ 得

$$x_3x_4=62. \quad ⑥$$

将 ⑤、⑥ 代入 ③、② 得

$$-32(x_3+x_4)+62(x_1+x_2)=-200, \quad ⑦$$

$$-32+(x_1+x_2)(x_3+x_4)+62=k. \quad ⑧$$

将 x_1+x_2 和 x_3+x_4 各看作一个未知数,联立 ①、⑦ 解得

$$x_1+x_2=4, x_3+x_4=14,$$

代入 ⑧ 即得

$$k=-32+56+62=86.$$

4·61 当 a、b、c 取什么实数值时,等式

$$|ax+by+cz|+|bx+cy+az|+|cx+ay+bz|$$
$$=|x|+|y|+|z|$$

对一切实数 x,y,z 成立?

(第 8 届全苏数学奥林匹克,1974 年)

[解] 令 $x=y=z=1$,得

$$|a+b+c|=1, \quad ①$$

令 $x=y=0,z=1$,得

$$|a|+|b|+|c|=1, \quad ②$$

再令 $x=1,y=-1,z=0$ 得

$$|a-b|+|b-c|+|c-a|=2. \quad ③$$

由 ①、② 得,a,b,c 中除去 0 以外,符号都相同,即有

$$ab\geqslant 0, bc\geqslant 0, ca\geqslant 0. \quad ④$$

由于

$$|a-b|+|b-c|+|c-a|$$
$$\leqslant(|a|+|b|)+(|b|+|c|)+(|c|+|a|),$$

因此由 ② 得

$$|a-b|+|b-c|+|c-a|\leqslant 2. \quad ⑤$$

由 ③ 知,在上式中等号成立,因此必有

$$\begin{cases} |a-b|=|a|+|b|, \\ |b-c|=|b|+|c|, \\ |c-a|=|c|+|a|. \end{cases} \quad ⑥$$

由上式可知

$$ab \leqslant 0, bc \leqslant 0, ca \leqslant 0, \quad ⑦$$

由④、⑦得

$$ab = 0, bc = 0, ca = 0, \quad ⑧$$

由⑧知，a,b,c 中至少有两个为0，再由①得，a,b,c 中必有两个为0，第三个为 ± 1.

所以，在以下六种情况下，给定等式对一切实数 x,y,z 都成立：

$$\begin{cases} x=0, \\ y=0, \\ z=1; \end{cases} \begin{cases} x=0, \\ y=0, \\ z=-1; \end{cases} \begin{cases} x=1, \\ y=0, \\ z=0; \end{cases} \begin{cases} x=-1, \\ y=0, \\ z=0; \end{cases} \begin{cases} x=0, \\ y=1, \\ z=0; \end{cases} \begin{cases} x=0, \\ y=-1, \\ z=0. \end{cases}$$

4·62 解方程

$$\cfrac{x}{2+\cfrac{x}{2+\cfrac{x}{2+\ddots\cfrac{}{2+\cfrac{x}{1+\sqrt{1+x}}}}}} = 1$$

(在上边的表达式中有 1985 个 2).

(第 19 届全苏数学奥林匹克，1985 年)

[解] 因为 $x=0$ 不适合原方程，所以不妨设 $x \neq 0$，从而 $\sqrt{1+x}-1 \neq 0$. 于是，我们有

$$2+\frac{x}{1+\sqrt{1+x}} = 2+(\sqrt{1+x}-1) = 1+\sqrt{1+x}.$$

上式表明，原方程可化为

$$\frac{x}{1+\sqrt{1+x}} = 1,$$

分母有理化，得 $\quad \sqrt{1+x}-1=1,$

故 $\quad x=3.$

经检验，$x=3$ 是原方程的解.

4·63　求所有能使等式

$$\sqrt{x^2-p}+2\sqrt{x^2-1}=x$$

成立的 x 的值.其中 p 是一个实参数.

（第 5 届国际数学奥林匹克,1963 年）

[解]　$$\sqrt{x^2-p}+2\sqrt{x^2-1}=x \qquad ①$$

移项并两边平方得

$$x^2-p=x^2+4(x^2-1)-4x\sqrt{x^2-1},$$

即　$$4(x^2-1)+p=4x\sqrt{x^2-1}.$$

两边再平方得

$$16(x^2-1)^2+8p(x^2-1)+p^2=16x^2(x^2-1),$$

整理得　$$8(2-p)x^2=(p-4)^2. \qquad ②$$

下面对参数 p 进行讨论.

(1) 当 $p=2$ 时,方程 ② 化为

$$0\cdot x^2=4$$

显然无解.于是原方程无解.

(2) 当 $p>2$ 时,对任意实数 x,有

$$8(2-p)x^2\leqslant 0,$$

而 ② 之右边　$(p-4)^2\geqslant 0$.

于是仅当 $p=4$ 时,方程 ② 有解:$x=0$.

然而将 $x=0$ 代入原方程 ①,其左边没有意义,所以 $x=0$ 不是原方程的解.因此 $p>2$ 时,原方程无解.

(3) 当 $p<2$ 时,由方程 ② 得

$$x^2=\frac{(4-p)^2}{8(2-p)},$$

又由方程 ① 知,$x>0$,所以有

$$x=\frac{4-p}{2\sqrt{2(2-p)}}. \qquad ③$$

将 ③ 代入原方程 ① 检验,得

$$\frac{|3p-4|}{2\sqrt{2(2-p)}}+\frac{2|p|}{2\sqrt{2(2-p)}}=\frac{4-p}{2\sqrt{2(2-p)}},$$

即　$$|3p-4|+2|p|=4-p. \qquad ④$$

对 p 分情况讨论.

当 $p<0$ 时,④ 化为

$$(4-3p)-2p=4-p,$$

得 $\qquad p=0,$

与 $p<0$ 矛盾,所以 $p<0$ 时,③ 不是原方程的解.

当 $0\leqslant p\leqslant\frac{4}{3}$ 时,④ 化为

$$(4-3p)+2p=4-p,$$

此式成立,所以 $0\leqslant p\leqslant\frac{4}{3}$ 时,③ 是原方程的解.

当 $\frac{4}{3}<p<2$ 时,④ 化为

$$(3p-4)+2p=4-p,$$

得 $\qquad p=\frac{4}{3},$

与 $\frac{4}{3}<p<2$ 矛盾,所以 $\frac{4}{3}<p<2$ 时,③ 不是原方程的解.

由以上讨论可得

当 $p<0$ 或 $p>\frac{4}{3}$ 时,原方程无解.

当 $0\leqslant p\leqslant\frac{4}{3}$ 时,原方程有惟一解:

$$x=\frac{4-p}{2\sqrt{2(2-p)}}.$$

4·64 求方程 $x^2+18x+30=2\sqrt{x^2+18x+45}$ 的实根的乘积.

(第 1 届美国数学邀请赛,1983 年)

[解] 设 $y=\sqrt{x^2+18x+45}$. 由原方程得

$$y^2-15=2y,$$

移项得 $\quad y^2-2y-15=0,$

解得 $\quad y_1=5, y_2=-3$(由 $y>0$,舍去).

于是我们有

$$\sqrt{x^2+18x+45}=5,$$

即 $x^2+18x+20=0.$

由判别式 $\Delta=18^2-4\times20>0$ 知,方程有二实根.再由韦达定理知,此二实根的乘积为20,即已知方程的实根之积为20.

4·65 已知三次方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 有三个实根.求证:$a^2-3b\geqslant0$,并且 $\sqrt{a^2-3b}$ 不大于最大根与最小根的差.

(第17届美国数学奥林匹克,1988年)

[证] 不妨设方程的三个实根 p,q,r 满足 $p\leqslant q\leqslant r$.

由韦达定理得

$$a=-(p+q+r),$$
$$b=pq+qr+rp,$$

于是

$$\begin{aligned}a^2-3b&=(p+q+r)^2-3(pq+qr+rp)\\&=p^2+q^2+r^2-pq-qr-rp\\&=\frac{1}{2}[(p-q)^2+(q-r)^2+(r-p)^2]\\&\geqslant0.\end{aligned}$$

又由 $q-p\geqslant0,r-q\geqslant0,r-p\geqslant0$ 得

$$\begin{aligned}&(a^2-3b)-(r-p)^2\\&=\frac{1}{2}[(p-q)^2+(q-r)^2+(r-p)^2]-(r-p)^2\\&=\frac{1}{2}[(p-q)^2+(q-r)^2-(r-p)^2]\\&\leqslant\frac{1}{2}[(q-p+r-q)^2-(r-p)^2]\\&=0.\end{aligned}$$

即 $a^2-3b\leqslant(r-p)^2,$

开方得 $\sqrt{a^2-3b}\leqslant r-p.$

4·66 求方程

$$x^4-(2\cdot10^{10}+1)x^2-x+10^{20}+10^{10}-1=0$$

的所有实数根,精确到小数点后四位.

(第14届美国数学奥林匹克,1985年)

[解] 由笛卡尔符号法则:

如果实系数 n 次代数方程

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0(a_0 \neq 0, a_n \neq 0)$$

的系数序列

$$\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n\}$$

的变号次数为 p,那么该方程的正根个数(一个 k 重根按k 个根计算)等于 p 或者比 p 少一个正偶数.

考虑到已知方程的系数变号次数为 2,可知已知方程至多有两个正根.

将已知方程变形为

$$\left(x^2 - 10^{10} - \frac{1}{2}\right)^2 = x + \frac{5}{4}. \quad ①$$

先证明方程 ① 无负根.因为不然的话,若方程 ① 有负根 $x < 0$,则由 ① 知

$$x + \frac{5}{4} \geqslant 0,$$

得

$$-\frac{5}{4} < x < 0.$$

另一方面,当 $-\frac{5}{4} < x < 0$ 时,① 式左边接近于 10^{20},而 ① 式右端小于$\frac{5}{4}$,因此不可能使 ① 式成立.

再用逐步逼近法求出两个正根.为此,我们令

$$f(x) = \left(x^2 - 10^{10} - \frac{1}{2}\right)^2 - x - \frac{5}{4}.$$

易知 $f(10^5 - 1) > 0, f(10^5) < 0, f(10^5 + 1) > 0$ 因此方程的两个正根一个在 $10^5 - 1$ 和 10^5 之间,一个在 10^5 和 $10^5 + 1$ 之间.

设 $x = 10^5 + c$,其中 $0 < c < 1$ 或 $-1 < c < 0$.显然 c 相对于 10^5 来说是相当小的.

在方程 ① 中,我们去掉$\frac{1}{2}$ 和$\frac{5}{4}$,可得一个近似等式

$$(x^2 - 10^{10})^2 \approx x.$$

把 $x = 10^5 + c$ 代入得

$$(2c \cdot 10^5 + c^2)^2 \approx 10^5 + c,$$

$$4c^2 \cdot 10^{10} + 4c^3 \cdot 10^5 + c^4 \approx 10^5 + c.$$

由于 c 相当小，因此我们可以忽略 $c, 4c^3 \cdot 10^5$ 和 c^4 三项，得

$$4c^2 \cdot 10^{10} \approx 10^5,$$

即

$$c \approx \pm \frac{1}{2\sqrt{10^5}} = \pm \frac{\sqrt{10}}{2000} \approx \pm 0.00158.$$

我们猜想 $x = 10^5 \pm 0.0016$ 为方程的两个近似根，下面我们来验证这个猜想.

事实上，

$$\begin{aligned}
& f(10^5 \pm 0.00155) \\
= & \left[\pm 310 + (0.00155)^2 - \frac{1}{2}\right]^2 - (10^5 \pm 0.00155) - \frac{5}{4} \\
< & 311^2 - 10^5 \\
= & 96721 - 10^5 \\
< & 0, \\
& f(10^5 \pm 0.00165) \\
= & \left[\pm 330 + (0.00165)^2 - \frac{1}{2}\right]^2 - (10^5 \pm 0.00165) - \frac{5}{4} \\
> & 320^2 - 10^5 - 2 \\
= & 102400 - 10^5 - 2 \\
> & 0.
\end{aligned}$$

所以方程的根在 $(10^5 + 0.00155, 10^5 + 0.00165)$ 及 $(10^5 - 0.00165, 10^5 - 0.00155)$ 内，从而方程的两个近似根为 $x \approx 10^5 \pm 0.0016$.

4·67　欧拉的一个猜想在 1960 年被美国的数学家所推翻，他们证实了存在正实数 n，使得

$$133^5 + 110^5 + 84^5 + 27^5 = n^5,$$

求 n 的值.

（第 7 届美国数学邀请赛，1989 年）

[解]　显然 $n \geqslant 134$. 另一方面，

$$\begin{aligned}
n^5 &= 133^5 + 110^5 + 84^5 + 27^5 \\
&< 133^5 + 110^5 + (84 + 27)^5 \\
&< 3 \cdot 133^5
\end{aligned}$$

$$< \frac{3125}{1024} \cdot 133^5$$
$$= \left(\frac{5 \times 133}{4}\right)^5$$
$$= \left(166 \frac{1}{4}\right)^5,$$

因此　$n \leqslant 166$.

由于 a^5 与 a 的个位数字相同,因此 n 的个位数字与 $3+0+4+7$ 的个位数字相同,从而 n 的个位数字是 4,n 的可能值是 134,144,154 或 164.

注意到 84,27 都是 3 的倍数,而 133^5 用 3 除余 1,110^5 用 3 除余 2,因此 $133^5+110^5+84^5+27^5$ 是 3 的倍数,即 n 是 3 的倍数.

在 134,144,154,164 中只有 144 是 3 的倍数,因此 n 只可能取值 144.

经检验知,$144^5=133^5+110^5+84^5+27^5$.故所求的值 $n=144$.

4·68　$n(n \geqslant 2)$ 名选手的比赛持续 k 天,每天各选手的得分恰为 $1,2,\cdots,n$(无两人同分),k 天结束后,每位选手的总分都是 26,试求所有可能的 (n,k) 值.

(第 22 届加拿大数学奥林匹克,1990 年)

[解]　用两种不同的方法计算全体选手总分之和,得

$$k(1+2+\cdots+n)=26n,$$

所以　$k(n+1)=52$.

而 $52=2^2 \times 13$,共有 6 个因子:1,2,4,13,26,52.由于 $n+1 \geqslant 3$,$k \geqslant 2$(如只有一天,不可能各选手总分相同),故只有三组解:

$$(n,k)=(25,2),(12,4),(3,13).$$

这三组解都是可能的:

	$n=25$				
$k=2$	1,	2,	3,	…,	25
	25,	24,	23,	…,	1

	$n=12$				
$k=4$	1,	2,	3,	…,	12
	12,	11,	10,	…,	1
	1,	2,	3,	…,	12
	12,	11,	10,	…,	1

	$k=13$												
$n=3$	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3
	2	2	2	2	3	3	3	3	1	1	1	1	2
	3	3	3	3	1	1	1	1	3	2	2	2	1

4·69 设 a 为正实数，$b=(a+\sqrt{a^2+1})^{\frac{1}{3}}+(a-\sqrt{a^2+1})^{\frac{1}{3}}$，求证：$b$ 是正整数的充要条件是 a 为 $\frac{1}{2}n(n^2+3)$ 形式的正整数($n\in N$).

(爱尔兰数学奥林匹克，1989年)

[证] 设 $\alpha=(a+\sqrt{a^2+1})^{\frac{1}{3}}$，$\beta=(a-\sqrt{a^2+1})^{\frac{1}{3}}$，则

$$b^3=(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)=2a-3b$$

即
$$b^3=2a-3b. \quad ①$$

也就是说，b 是三次方程

$$x^3+3x-2a=0 \quad ②$$

的一个根.

必要性：设 b 是一个正整数，由①有 $a=\frac{1}{2}b(b^2+3)$，b 是偶数时，a 是正整数；b 是奇数时，b^2+3 是偶数，a 也是正整数. 所以 a 是一个形如 $\frac{1}{2}n(n^2+3)$ 的正整数.

充分性：设 $a=\frac{1}{2}n(n^2+3)(n\in N)$，则 $x=n$ 是方程②的一个根，又因为当 $x_1<x_2(x_1,x_2\in R)$ 时，

$$(x_1^3+3x_1-2a)-(x_2^3+3x_2-2a)$$

$$= (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 3)$$

$$= (x_1 - x_2)\left[\left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 + 3\right] < 0,$$

所以函数 $f(x) = x^3 + 3x - 2a$ 是严格递增的，从而方程②仅有惟一根 $x = n$. 又因为 b 是方程②的一个根，所以 $b = n$，即 b 是一个正整数.

4·70　函数列 $\{f_n(x)\}$ 由下列条件递归定义：

$$\begin{cases} f_1(x) = \sqrt{x^2 + 48} \\ f_{n+1}(x) = \sqrt{x^2 + 6f_n(x)} \end{cases} \text{对每个 } n \geqslant 1.$$

求方程 $f_n(x) = 2x$ 的所有实数解.

（第 19 届美国数学奥林匹克，1990 年）

[解]　由已知得

$$f_n(x) > 0 \quad (n = 1,2,\cdots),$$

因此方程 $f_n(x) = 2x$ 只有正数解.

首先我们用数学归纳法证明 $x = 4$ 是方程

$$f_n(x) = 2x \qquad ①$$

的解.

事实上，当 $n = 1$ 时，将 $x = 4$ 代入①的左边得 $f_1(4) = \sqrt{4^2 + 48} = 8$；代入①的右边得 $2 \times 4 = 8$. 因此 $x = 4$ 是 $f_1(x) = 2x$ 的解.

假设 $x = 4$ 是 $f_k(x) = 2x$ 的解. 即 $f_k(4) = 8$.

于是

$$f_{k+1}(4) = \sqrt{4^2 + 6f_k(4)} = \sqrt{4^2 + 48} = 8 = 2 \times 4.$$

因此，$x = 4$ 也是 $f_{k+1}(x) = 2x$ 的解.

根据数学归纳原理，对于任意自然数 n，$x = 4$ 都是方程①的解.

接着，我们用数学归纳法证明，函数 $\dfrac{f_n(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上是单调减函数.

事实上，$n = 1$ 时，

$$\frac{f_1(x)}{x} = \sqrt{1 + \frac{48}{x^2}},$$

显然在$(0,+\infty)$上是单调减函数.

假设$\frac{f_k(x)}{x}$在$(0,+\infty)$是单调减函数.于是

$$\frac{f_{k+1}(x)}{x}=\sqrt{1+\frac{6}{x}\cdot\frac{f_k(x)}{x}}$$

在$(0,+\infty)$上也是单调减函数.

根据数学归纳原理,对于任意自然数n,函数$\frac{f_n(x)}{x}$在$(0,+\infty)$上都是单调减函数.从而$\frac{f_n(x)}{x}=2$在$(0,+\infty)$上只有惟一解$x=4$.

4·71　若方程$x^3-x^2-x-1=0$的根为a,b,c.证明:

(1)a,b,c互不相同;

(2)$\frac{a^{1982}-b^{1982}}{a-b}+\frac{b^{1982}-c^{1982}}{b-c}+\frac{c^{1982}-a^{1982}}{c-a}$为整数.

(第14届加拿大数学奥林匹克,1982年)

[证]　(1)由韦达定理得

$$\begin{cases}a+b+c=1,\\ab+bc+ca=-1,\\abc=1.\end{cases}$$

若a,b,c中有两个相等,不妨设$a=b$.则代入上式可得

$$\begin{cases}2a+c=1, & ①\\a^2+2ac=-1, & ②\\a^2c=1. & ③\end{cases}$$

由③得$c>0$,再由②得$a<0$.

由①得

$$c=1-2a,$$

代入②并整理得

$$3a^2-2a-1=0,$$

从而有$a=1,a=-\frac{1}{3}$.考虑到$a<0$,故取$a=-\frac{1}{3}$.由$a=b$得$b=-\frac{1}{3}$.又代入①得$c=\frac{5}{3}$.但此时不满足③,出现矛盾.故a,b,c互不相等.

(2) 设 $S_n = \frac{a^n - b^n}{a - b} + \frac{b^n - c^n}{b - c} + \frac{c^n - a^n}{c - a}$.

我们来证明一个更一般的命题:对于任何自然数 n,S_n 都是整数.

事实上,$S_0 = 0$,$S_1 = 3$ 都是整数.另外 $S_2 = (a + b) + (b + c) + (c + a) = 2(a + b + c) = 2$ 也是整数.假设 $n = k - 3, n = k - 2, n = k - 1$ 时,S_n 都是整数.则当 $n = k$ 时($k \geqslant 3$),我们有

$$S_k = \frac{a^k - b^k}{a - b} + \frac{b^k - c^k}{b - c} + \frac{c^k - a^k}{c - a}$$

但由 $a^3 - a^2 - a - 1 = 0$ 即 $a^3 = a^2 + a + 1$ 可得

$$a^k = a^{k-1} + a^{k-2} + a^{k-3},$$

同理可得

$$b^k = b^{k-1} + b^{k-2} + b^{k-3},$$

$$c^k = c^{k-1} + c^{k-2} + c^{k-3},$$

于是

$$S_k = S_{k-1} + S_{k-2} + S_{k-3},$$

由归纳假设可知 S_k 也是整数.

根据数学归纳原理,对于任何非负整数 n,S_n 都是整数.从而 $n = 1982$ 时,S_{1982} 也是整数.

4·72 设 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 为复数,满足

$$|z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| = 1.$$

求证上述 n 个复数中,必存在若干个复数,它们的和的模不小于 $\frac{1}{6}$.

(第 1 届中国中学生数学冬令营,1986 年)

[证] 设 $z_k = a_k + b_k i (i^2 = -1, k = 1, 2, \cdots, n)$.则

$$|z_k| \leqslant |a_k| + |b_k|.$$

于是,我们有

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k=1}^{n} |z_k| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k| + \sum_{k=1}^{n} |b_k| \\ &= \sum_{a_k \geqslant 0} |a_k| + \sum_{a_k < 0} |a_k| + \sum_{b_k \geqslant 0} |b_k| + \sum_{b_k < 0} |b_k|, \end{aligned}$$

上式四项中必有一项不小于$\frac{1}{4}$.不妨设

$$\sum_{a_k \geqslant 0} |a_k| \geqslant \frac{1}{4},$$

于是

$$\left|\sum_{a_k \geqslant 0} z_k\right| \geqslant \left|\sum_{a_k \geqslant 0} a_k\right| = \sum_{a_k \geqslant 0} |a_k| \geqslant \frac{1}{4} > \frac{1}{6}.$$

4・73　设 n 为自然数,求证:方程

$$z^{n+1} - z^n - 1 = 0$$

有模为 1 的复根的充分必要条件是 $n+2$ 可被 6 整除.

（第 2 届中国中学生数学冬令营,1987 年）

[证]　设 w 是方程

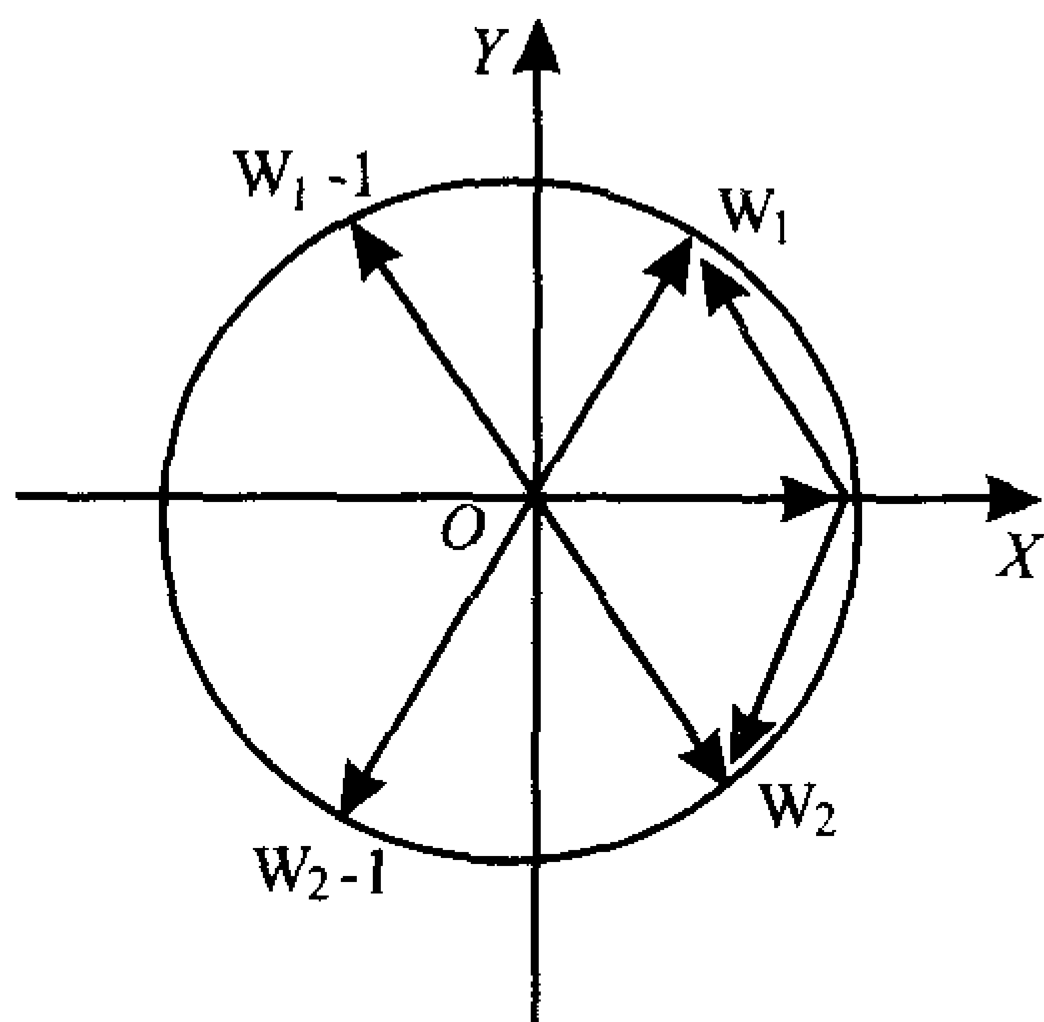
$$z^{n+1} - z^n - 1 = 0$$

的一个模为 1 的复根,则

$$w^{n+1} - w^n - 1 = 0,$$
$$w^n(w-1) = 1,$$
$$|w|^n \cdot |w-1| = 1.$$

因为　$|w| = 1$,所以

$$|w-1| = 1.$$



在复平面上,点 w 和 $w-1$ 都在单位圆上,而单位圆上满足 $|w-1| = 1$ 的点 w 只能是

$\cos\frac{\pi}{3} \pm i\sin\frac{\pi}{3}$(即图中的 w_1 和 w_2 点),而

$$w - 1 = \cos\frac{2\pi}{3} \pm i\sin\frac{2\pi}{3},$$

于是　$1 = w^n(w-1)$

$$= \left(\cos\frac{\pi}{3} \pm i\sin\frac{\pi}{3}\right)^n \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} \pm i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \cos\frac{n+2}{3}\pi \pm i\sin\frac{n+2}{3}\pi,$$

因此　$\frac{n+2}{3}\pi = 2k\pi \quad (k \in Z).$

$$n+2=6k.$$

故 $n+2$ 可被 6 整除.

反过来,若 $n+2$ 可被 6 整除,我们可设

$$n+2=6k \quad (k\in Z).$$

取 $$w=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3},$$

则 $$w-1=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3},$$

于是
$$\begin{aligned}&w^{n+1}-w^n-1\\=&w^n(w-1)-1\\=&\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}\right)\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)-1\\=&\left(\cos\frac{n+2}{3}\pi+i\sin\frac{n+2}{3}\pi\right)-1\\=&(\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi)-1\\=&0.\end{aligned}$$

因此,w 是方程 $z^{n+1}-z^n-1=0$ 的一个根,又因为 $|w|=1$,故方程 $z^{n+1}-z^n-1=0$ 有模为 1 的复根.

4·74 如果 α,β,γ 是方程 $x^3-x-1=0$ 的根,求

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha}+\frac{1+\beta}{1-\beta}+\frac{1+\gamma}{1-\gamma}$$

的值.

(第 28 届加拿大数学奥林匹克,1996 年)

[解] 由已知得

$$x^3-x-1=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma),$$

所以

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0,\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1,\\ \alpha\beta\gamma=1.\end{cases}$$

于是,我们有

$$\begin{aligned}&\frac{1+\alpha}{1-\alpha}+\frac{1+\beta}{1-\beta}+\frac{1+\gamma}{1-\gamma}=2\left(\frac{1}{1-\alpha}+\frac{1}{1-\beta}+\frac{1}{1-\gamma}\right)-3\\=&2\left(\frac{3-2(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}\right)-3\end{aligned}$$

$$= 2\left(\frac{3-1}{1-1-1}\right)-3$$
$$= -7.$$

4·75 已知 $f(x)$, $g(x)$ 和 $h(x)$ 都是二次三项式. 试问:方程 $f(g(h(x)))=0$ 的所有根能否恰为 1,2,3,4,5,6,7,8?

(第 21 届俄罗斯数学奥林匹克决赛,1995 年)

[解] 不可能.

事实上,如果 1,2,3,4,5,6,7,8 是方程 $f(g(h(x)))=0$ 的 8 个根,并且抛物线 $y=h(x)$ 的对称轴是 $x=a$,那么:

$h(x_1)=h(x_2)$ 当且仅当 $x_1+x_2=2a$.

由于方程 $f(g(x))=0$ 至多四个根,而 $h(1)$, $h(2)$, $\cdots$, $h(8)$ 都是它的根,因此必有

$$h(1)=h(8), h(2)=h(7), h(3)=h(6), h(4)=h(5)$$

且 $\quad a=4.5$,

$h(1)$, $h(2)$, $h(3)$, $h(4)$ 为单调数列.

又由于方程 $f(x)=0$ 至多有二个根,而 $g(h(1))$, $g(h(2))$, $g(h(3))$, $g(h(4))$ 都是它的根,因此必有

$$g(h(1))=g(h(4)), g(h(2))=g(h(3)),$$

从而得

$$h(1)+h(4)=h(2)+h(3)=2b,$$

其中 $x=b$ 是抛物线 $y=g(x)$ 的对称轴.

令 $\quad h(x)=Ax^2+Bx+C$,则

$$h(1)+h(4)=A\cdot 17+B\cdot 5+C\cdot 2,$$
$$h(2)+h(3)=A\cdot 13+B\cdot 5+C\cdot 2,$$

从而得

$$17A+5B+2C=13A+5B+2C,$$
$$A=0.$$

此与 $h(x)$ 是二次三项式矛盾.

因此,方程 $f(g(h(x)))=0$ 的所有根不可能恰为 1,2,3,4,5,6,7,8.

4·76 设 $n\geqslant 4$, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$; $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是两组实数,满足

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^2<1,\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2<1.$$

记

$$A^2=1-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^2,B^2=1-\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2,$$

$$W=\frac{1}{2}\left(1-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\beta_j\right)^2.$$

求出一切实数 λ,使得方程

$$x^n+\lambda(x^{n-1}+\cdots+x^3+wx^2+ABx+1)=0$$

仅有实数根.

(中国国家队选拔赛,1996 年)

[**解**] 显然 $\lambda=0$ 时题中方程仅有实数根.

下面证明 $\lambda\neq0$ 时,题中方程的根不可能都是实数.

事实上,若 $\lambda\neq0$,且题中方程的 n 个根都是实数.这时我们记这 n 个根为

$$r_1,r_2,\cdots,r_n.$$

显然这 n 个根都不等于 0.再由根与系数的关系可得

$$\begin{cases}r_1r_2\cdots\cdots r_n=(-1)^n\lambda,\\ r_1r_2\cdots\cdots r_n\left(\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}+\cdots+\dfrac{1}{r_n}\right)=(-1)^{n-1}\lambda AB,\\ r_1r_2\cdots\cdots r_n\cdot\left(\displaystyle\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}\dfrac{1}{r_jr_k}\right)=(-1)^{n-2}\lambda W.\end{cases}$$

将上面第一个关系式代入另外两个关系式中,我们有

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\dfrac{1}{r_j}=-AB,\\ \displaystyle\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}\dfrac{1}{r_jr_k}=W.\end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned}A^2B^2-2W&=\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{r_j}\right)^2-2\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}\frac{1}{r_jr_k}\\&=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{r_j^2}>0.\end{aligned}$$

另一方面,由已知条件

$$
\begin{aligned}
A^2B^2 &= \left(1-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^2\right)\left(1-\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2\right) \\
&\leqslant \left[\frac{\left(1-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^2\right)+\left(1-\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2\right)}{2}\right]^2 \\
&= \left(1-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j^2+\beta_j^2)\right)^2 \\
&\leqslant \left(1-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\beta_j\right)^2 \\
&= 2W.
\end{aligned}
$$

即 $A^2B^2-2W\leqslant 0$,矛盾.

因此,$\lambda \neq 0$ 时,题中方程的根不可能都是实根.

综上所述,当且仅当实数 $\lambda=0$ 时,题中方程仅有实数根.

4·77 给定三个二次三项式:

$$p_1(x)=x^2+p_1x+q_1,$$

$$p_2(x)=x^2+p_2x+q_2,$$

$$p_3(x)=x^2+p_3x+q_3.$$

证明方程 $|p_1(x)|+|p_2(x)|=|p_3(x)|$ 至多有 8 个根.

(第 20 届俄罗斯数学奥林匹克决赛,1994 年)

[证] 原方程的每一个根都应当是

$$\pm p_1(x)\pm p_2(x)=\pm p_3(x)$$

的根,从而是

$$\pm p_1(x)\pm p_2(x)=p_3(x)$$

的根.也就是以下四个二次方程之一的根:

$$p_1(x)+p_2(x)=p_3(x),$$

$$p_1(x)-p_2(x)=p_3(x),$$

$$-p_1(x)+p_2(x)=p_3(x),$$

$$-p_1(x)-p_2(x)=p_3(x).$$

故原方程至多有 8 个根.

第3节　超越方程

4·78　解方程$3^{x^2+1}+3^{x^2-1}-270=0$.

（基辅数学奥林匹克，1936年）

［解］　原方程即

$$3\cdot 3^{x^2}+\frac{1}{3}\cdot 3^{x^2}-270=0,$$

$$10\cdot 3^{x^2}=810,$$

$$3^{x^2}=3^4,$$

$$x^2=4,$$

$$x=\pm 2.$$

经检验，$x=\pm 2$是原方程的解.

4·79　解方程$\sqrt[x]{9}+\sqrt[x]{6}=\sqrt[x]{4}$.

（基辅数学奥林匹克，1936年）

［解］　原方程即

$$\left(\sqrt[x]{\frac{3}{2}}\right)^2+\sqrt[x]{\frac{3}{2}}-1=0.$$

令　$y=\sqrt[x]{\frac{3}{2}}$，则得$y^2+y-1=0$.

解之得　$y=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

$\because\ y>0$，$\therefore$ 取$y=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

即　$$\sqrt[x]{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

两边取对数，得　$x=\frac{\lg 3-\lg 2}{\lg\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

经检验是原方程的解.

4·80　解方程$4^{x^2-\sqrt{x^2-9}-20.75}=\sqrt{2}$.

(基辅数学奥林匹克,1935 年)

[解] 原方程可化为

$$2^{2(x^2-\sqrt{x^2-9}-20.75)}=2^{\frac{1}{2}}.$$

所以 $2(x^2-\sqrt{x^2-9}-20.75)=\frac{1}{2}$,

即 $x^2-9-\sqrt{x^2-9}-12=0.$

有 $\sqrt{x^2-9}=4$ 或 $\sqrt{x^2-9}=-3$ (舍)

由 $\sqrt{x^2-9}=4$ 得 $x=\pm 5.$

经检验,$x=\pm 5$ 是原方程的解.

4·81 在正有理数范围内解方程:

$$x^y=y^x\quad(x\neq y).$$

(第 11 届莫斯科数学奥林匹克,1948 年)

[解] 不妨设 $y>x$,且设 $y=kx$ (k 为大于1的有理数). 于是,由原方程可知

$$x^{kx}=(kx)^x,$$

从而有

$$x^k=kx,$$

$$x^{k-1}=k,$$

$$x=k^{\frac{1}{k-1}},$$

$$y=kx=k^{\frac{k}{k-1}}.$$

设 $\frac{1}{k-1}=\frac{p}{q}$,其中 p,q 为正整数,且 $(p,q)=1$.

则 $x=\left(\frac{p+q}{p}\right)^{\frac{p}{q}},y=\left(\frac{p+q}{p}\right)^{\frac{p+q}{q}}.$

由于 x 是有理数,且 $(p,p+q)=1$,因此

$$p^{\frac{1}{q}}\text{ 和 }(p+q)^{\frac{1}{q}}$$

都是正整数. 于是可设

$$p^{\frac{1}{q}}=n,$$

即 $p=n^q.$

如果 $q\geqslant 2$,那么

$$n^q<p+q<(n+1)^q,$$

此与$(p+q)^{\frac{1}{q}}$是正整数矛盾.因此 $q=1$.于是,我们有

$$\begin{cases} x=\left(\dfrac{p+1}{p}\right)^{p}, \\ y=\left(\dfrac{p+1}{p}\right)^{p+1}, \end{cases} p\text{ 为任意正整数.}$$

经检验知,它确是原方程的正有理数解,又由对称性可知,

$$\begin{cases} x=\left(\dfrac{p+1}{p}\right)^{p+1}, \\ y=\left(\dfrac{p+1}{p}\right)^{p}, \end{cases} p\text{ 为任意正整数.}$$

也是原方程的正有理数解.

4·82　解方程 $\log_3 x+\log_x 3-2\log_3 x\log_x 3=\dfrac{1}{2}$.

（基辅数学奥林匹克,1936 年）

[解]　原方程即

$$\log_3 x+\log_x 3-2=\frac{1}{2}.$$

把 $\log_x 3=\dfrac{1}{\log_3 x}$ 代入上述方程并整理,得

$$2\log_3^2 x-5\log_3 x+2=0,$$

所以　$\log_3 x=\dfrac{1}{2},\log_3 x=2.$

即　$x=\sqrt{3},x=9.$

经检验它们都是原方程的解.

4·83　解方程 $a^{\log_{\sqrt{b}}x}-5a^{\log_b a}+6=0$.

（基辅数学奥林匹克,1936 年）

[解]　原方程即

$$a^{2\log_b x}-5a^{\log_b a}+6=0.$$

设　$\log_b x=y$,则 $x=b^y$.代入方程并整理,得

$$a^{2y}-5a^y+6=0,$$

$$a^y=3,a^y=2.$$

所以　$y=\log_a 3,y=\log_a 2.$

即 $\qquad \log_b x = \log_a 3, \log_b x = \log_a 2.$

$\therefore \quad x = b^{\log_a 3}, x = b^{\log_a 2}.$

经检验,它们是原方程的解.

4·84　方程 $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 1$ 中设 A, B, C,都是锐角,试证:$\frac{\pi}{2} \leqslant A + B + C \leqslant \pi$.

(中国北京市数学竞赛,1957 年)

[**证**]　由题设

$$\begin{aligned}\sin^2 A &= 1 - \sin^2 B - \sin^2 C \\ &= \cos^2 B - \sin^2 C \\ &= \cos^2 B - \sin^2 C\cos^2 B + \sin^2 C\cos^2 B - \sin^2 C \\ &= \cos^2 B\cos^2 C - \sin^2 C\sin^2 B \\ &= (\cos B\cos C - \sin C\sin B)(\cos B\cos C + \sin C\sin B) \\ &= \cos(B + C)\cos(B - C).\end{aligned}$$

因 B 和 C 都是锐角,故 $\cos(B - C) > 0$,从而 $\cos(B + C) \geqslant 0$,即 $B + C$ 也是锐角,因此 $A + B + C \leqslant \pi$.

又因 B, C 是锐角,故有

$$\cos(B - C) \geqslant \cos(B + C),$$

即

$$\begin{aligned}\sin^2 A &= \cos(B + C)\cos(B - C) \geqslant \cos^2(B + C) \\ &= \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - B - C\right).\end{aligned}$$

由于 A 与 $B + C$ 都是锐角,从而有 $A \geqslant \frac{\pi}{2} - B - C$,即

$$A + B + C \geqslant \frac{\pi}{2}.$$

4·85　设方程 $x^4 + \frac{1}{3}\sin\alpha \cdot x^2 + \frac{1}{200}\cos\frac{\pi}{3} = 0$　的四个根成等差数列,其中 α 在 0 与 2π 之间,试求此 α 角,并求此四根之值.

(中国北京市数学竞赛,1957 年)

[**解**]　x^2 有两个解 b 与 c, $x = \pm\sqrt{b}, \pm\sqrt{c}$,因四根成等差数列,而它们的算术平均数等于零,若以正数 $2a$ 为它们的公差,则这四个数应该是 $-3a, -a, a, 3a$,这里 $\pm a$ 是 $\pm\sqrt{b}$ 与 $\pm\sqrt{c}$ 两对数中之绝对值较小的一对, $\pm 3a$ 是另一对.由四根之积

第四章 方程

$$9a^4=\frac{1}{200}\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{400},$$

得 $$a=\pm\frac{1}{2\sqrt{15}},\pm\frac{i}{2\sqrt{15}}.$$

比较根与系数关系，

$$\frac{1}{3}\sin\alpha=-(b+c)=-(9a^2+a^2)=-10a^2=\pm\frac{1}{6}.$$

所以 $\sin\alpha=\pm\frac{1}{2}$. 因为 $0\leqslant\alpha<2\pi$，故

$$\alpha=\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6};x=\pm\frac{i}{2\sqrt{15}},\pm\frac{3i}{2\sqrt{15}},$$

$$\alpha=\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6};x=\pm\frac{1}{2\sqrt{15}},\pm\frac{3}{2\sqrt{15}}.$$

4·86 解方程(1) $4\sin^2\alpha-\sin3\alpha=0$，

(2) $x^{\log_a x}=\frac{x^4\sqrt{x}}{a^2}$.

（中国上海市数学竞赛，1963年）

[解] (1) $4\sin^3\alpha+4\sin^2\alpha-3\sin\alpha=0$，

即 $\sin\alpha(2\sin\alpha-1)(2\sin\alpha+3)=0$，

因 $2\sin\alpha+3>0$，故有 $\sin\alpha=0$ 或 $2\sin\alpha-1=0$.

由 $\sin\alpha=0,\alpha=n\pi$（n 为整数），

由 $\sin\alpha=\frac{1}{2},\alpha=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$（$n$ 为整数）.

(2) 因 $x>0$，两边取对数得

$$(\log_a x)^2=\frac{9}{2}\log_a x-2,$$

即 $$2(\log_a x)^2-9\log_a x+4=0,$$

$$(\log_a x-4)(2\log_a x-1)=0,$$

故 $\log_a x=4$ 或 $\log_a x=\frac{1}{2}$.

所以 $x_1=a^4,x_2=a^{\frac{1}{2}}$.

4·87 解方程 $\log_x 3\cdot\log_{3x}3=\log_{9x}3$.

（中国上海市数学竞赛，1962年）

[解] 由对数定义知，$x>0$，且 $x\neq 1, x\neq \frac{1}{3}, x\neq \frac{1}{9}$，用换底公式，原方程改写为：

$$\frac{1}{\log_3 x}\cdot\frac{1}{\log_3 3x}=\frac{1}{\log_3 9x},$$

即 $\log_3 9x=\log_3 x\cdot\log_3 3x$，

$2+\log_3 x=\log_3 x(\log_3 x+1)$，

即 $(\log_3 x)^2=2$，故 $\log_3 x=\pm\sqrt{2}$，

所以 $x=3^{\pm\sqrt{2}}$.

4·88 (1) 试解不等式 $x^{\log_a x}>\frac{x^{\frac{9}{2}}}{a^2}$；

(2) 解方程 $(\sqrt{5+2\sqrt{6}})^x+(\sqrt{5-2\sqrt{6}})^x=10$.

（中国上海市数学竞赛，1958年）

[解] (1) 当 $a>1$ 时，$\log_a(x^{\log_a x})>\log_a\left(\frac{x^{\frac{9}{2}}}{a^2}\right)$，

即 $(\log_a x)^2>\frac{9}{2}\log_a x-2$，

$$(\log_a x-4)(\log_a x-\frac{1}{2})>0.$$

解得 $\log_a x>4$ 或 $\log_a x<\frac{1}{2}$，

所以 $x>a^4$ 或 $0<x<a^{\frac{1}{2}}$.

当 $0<a<1$ 时，$\log_a(x^{\log_a x})<\log_a\left(\frac{x^{\frac{9}{2}}}{a^2}\right)$，

即 $(\log_a x-4)\left(\log_a x-\frac{1}{2}\right)<0$，

解得 $\frac{1}{2}<\log_a x<4$，

所以 $a^4<x<a^{\frac{1}{2}}$.

(2) 原方程 $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^x+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^x=10$

两边同乘 $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^x$，得

$$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2x}-10(\sqrt{3}+\sqrt{2})^x+1=0,$$

所以　$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^x=5\pm2\sqrt{6}$,

即　$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^x=(\sqrt{3}\pm\sqrt{2})^2$,

当　$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^x=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$ 时,$x=2$.

当　$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^x=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$ 时,

也即当　$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^x=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{-2}$ 时,$x=-2$.

所以,方程的解为 $x=2$ 或 $x=-2$.

4・89　求方程 $\cos^2x+\cos^22x+\cos^23x=1$ 的所有解.

(第 4 届国际数学奥林匹克,1962 年)

[解]　由 $\cos^2x+\cos^22x+\cos^23x=1$

得
$$\frac{1+\cos2x}{2}+\cos^22x+\frac{1+\cos6x}{2}=1,$$
$$\cos2x+\cos6x+2\cos^22x=0,$$
$$2\cos4x\cdot\cos2x+2\cos^22x=0,$$
$$\cos2x(\cos4x+\cos2x)=0,$$
$$2\cos2x\cos3x\cos x=0.$$

所以有

$\cos x=0$ 或 $\cos2x=0$ 或 $\cos3x=0$.

由 $\cos x=0$ 得,$x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$(k 为整数),

由 $\cos2x=0$ 得,$x=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}$($k$ 为整数),

由 $\cos3x=0$ 得,$x=\dfrac{k\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}$($k$ 为整数).

由于 $\cos3x=\cos x(4\cos^2x-3)$,于是由 $\cos3x=0$ 得到的解

$x=\dfrac{k\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}$ 中包含了由 $\cos x=0$ 得到的解 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$.

于是原方程的解为

$$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\text{ 或 }\quad x=\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}(k\text{ 为整数}).$$

4・90　已知关于 $\cos x$ 的二次方程

$a\cos^2x+b\cos x+c=0$,其中 a,b,c 为已知实数. 求作一个以 $\cos2x$ 为根的二次方程. 在 $a=4,b=2,c=-1$ 的情况下,对已知方程

与作出的新方程进行比较.

（第 1 届国际数学奥林匹克,1959 年）

［解］ 将已知方程变形为

$$a\cos^2 x + c = -b\cos x.$$

两边平方得

$$a^2\cos^4 x + 2a\cos^2 x \cdot c + c^2 = b^2\cos^2 x,$$

$$a^2\cos^4 x + (2ac - b^2)\cos^2 x + c^2 = 0. \quad ①$$

用 $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ 对方程 ① 进行代换得

$$a^2\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 + (2ac - b^2)\cdot\frac{1+\cos 2x}{2} + c^2 = 0.$$

整理得

$$a^2\cos^2 2x + 2(a^2 + 2ac - b^2)\cos 2x + (a+2c)^2 - 2b^2 = 0.$$

这就是以 $\cos 2x$ 为根的一元二次方程.

在 $a = 4, b = 2, c = -1$ 的情况下,

已知方程为

$$4\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0$$

作的新方程为

$$4\cos^2 2x + 2\cos 2x - 1 = 0.$$

于是,这两个方程是系数完全相同的一元二次方程,其中第一个以 $\cos x$ 为未知数,第二个以 $\cos 2x$ 为未知数.

4·91 解方程 $\cos^n x - \sin^n x = 1$.这里 n 是任意给定的自然数.

（第 3 届国际数学奥林匹克,1961 年）

［解］ 对 n 分为奇数和偶数进行讨论.

(1) 当 n 是偶数时,设 $n = 2m$(m 为正整数),此时原方程化为

$$\cos^{2m} x = 1 + \sin^{2m} x.$$

由于 $\cos^{2m} x \leqslant 1 \leqslant 1 + \sin^{2m} x$,

则只能有 $\sin x = 0$,

于是 $\cos x = \pm 1$,

所以 $x = k\pi$(k 为整数).

(2) 当 n 是奇数时,将原方程化为

$$\cos^n x = 1 + \sin^n x.$$

由于 $\sin x \geqslant -1$,

所以 $\sin^n x \geqslant -1$,(n 为奇数)

于是 $\cos^n x = 1 + \sin^n x \geqslant 0$.

又由 n 是奇数得 $\cos x \geqslant 0$.

再由 $\cos x \leqslant 1$,

所以 $\cos^n x \leqslant 1$,

于是 $\sin^n x = \cos^n x - 1 \leqslant 0$,

从而 $\sin x \leqslant 0$.

若 $\sin x = 0$,代入原方程得

$$\cos^n x = 1,$$

有 $\cos x = 1$,

于是 $x = 2k\pi$(k 为整数).

若 $\sin x = -1$,代入原方程得

$$\cos^n x = 0,$$

有 $\cos x = 0$,

于是 $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$($k$ 为整数).

若 $-1 < \sin x < 0$,此时有

$$0 < \cos^n x < 1,$$

即 $0 < \cos x < 1$,

于是原方程可化为

$$|\cos x|^n + |\sin x|^n = 1.$$

由于 $n \geqslant 3$ 时,$|\cos x|^n < \cos^2 x$,$|\sin x|^n < \sin^2 x$.

所以 $|\cos x|^n + |\sin x|^n < \sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

即对 $n \geqslant 3$ 的奇数,方程没有适合 $-1 < \sin x < 0$ 的解. $n = 1$ 时,原方程即为

$$\cos x - \sin x = 1.$$

$$\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1, \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

得 $x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$,

于是 $x = 2k\pi$ 或 $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$($k$ 为整数).

但此两组解有 $\sin x=0$ 或 $\sin x=-1$ 均不适合 $-1<\sin x<0$. 于是原方程的解为

$$x=\begin{cases}k\pi & (n\text{ 为偶数时}),\\ 2k\pi\text{ 或 }2k\pi-\dfrac{\pi}{2} & (n\text{ 为奇数时}),\end{cases}$$

其中 k 为整数.

4·92　两个锐角 α 和 β 满足方程 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)$，证明　$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$.

（第 17 届全苏数学奥林匹克，1983 年）

[证]　由已知得

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

即

$$\sin\alpha(\sin\alpha-\cos\beta)=\sin\beta(\cos\alpha-\sin\beta). \qquad ①$$

如果 $\sin\alpha>\cos\beta$，那么由 ① 得 $\cos\alpha>\sin\beta$，将这两个不等式两端分别平方，再相加得

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha>\cos^2\beta+\sin^2\beta,$$

即　$1>1$，矛盾.

同样地，如果 $\sin\alpha<\cos\beta$，那么由 ① 得 $\cos\alpha<\sin\beta$，从而有

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha<\cos^2\beta+\sin^2\beta,$$

矛盾.

因此，我们有　$\sin\alpha=\cos\beta$，

即

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\beta,$$

故　$\dfrac{\pi}{2}-\alpha=\beta$，

即　$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$.

4·93　设 $F_r=x^r\sin(rA)+y^r\sin(rB)+z^r\sin(rC)$，式中 x、y、z、A、B、C 为实数，而 $A+B+C$ 为 π 的整数倍. 试证若 $F_1=F_2=0$，则对一切正整数 r，有 $Fr=0$.

（第 9 届美国数学奥林匹克，1980 年）

[证]　设复数 $\alpha=x(\cos A+i\sin A)$，$\beta=y(\cos B+i\sin B)$，$\gamma=z(\cos C+i\sin C)$，设 α,β,γ 是三次方程

$$u^3 - au^2 + bu - c = 0 \quad ①$$

的三个根,由韦达定理知:

$$a = \alpha + \beta + \gamma = x\cos A + y\cos B + z\cos C + iF_1 = \text{实数},$$

$$\begin{aligned} b &= \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \\ &= \frac{1}{2}[(\alpha + \beta + \gamma)^2 - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)] \\ &= \frac{1}{2}[a^2 - (x^2\cos 2A + y^2\cos 2B + z^2\cos 2C + iF_2)] \\ &= \frac{1}{2}[a^2 - x^2\cos 2A - y^2\cos 2B - z^2\cos 2C] = \text{实数}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c &= \alpha\beta\gamma = xyz[\cos(A + B + C) + i\sin(A + B + C)] \\ &= \pm xyz = \text{实数}, \end{aligned}$$

可见方程 ① 是以 α、β、γ 为根的实系数三次方程.

现设 $S_r = \alpha^r + \beta^r + \gamma^r$($r$ 为正整数),则欲证对一切正整数 r,有 $F_r = 0$,只需证对一切正整数 r,S_r 是实数就行了.以下用数学归纳法证明 S_r 是实数.

已知 $F_1 = F_2 = 0$,所以 $S_1 = \alpha + \beta + \gamma$,$S_2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ 均为实数,且 $S_0 = \alpha^0 + \beta^0 + \gamma^0 = 3$ 也是实数.若 S_{r-2}、S_{r-1}、S_r 均为实数,则对于 S_{r+1},由于 α、β、γ 满足方程 ①,故有等式

$$S_{r+1} - aS_r + bS_{r-1} - cS_{r-2} = 0$$

成立.即有 $S_{r+1} = aS_r - bS_{r-1} + cS_{r-2}$.

因为 a、b、c 均为实数,S_r、S_{r-1}、S_{r-2} 均为实数,由上式知 S_{r+1} 也是实数.

因此对一切正整数 r,有 $F_r = 0$.

4·94 解方程 $\mathrm{arctg}x + \mathrm{arctg}(1 - x) = 2\mathrm{arctg}\sqrt{x - x^2}$.

(基辅数学奥林匹克,1936 年)

[解] $\because \ x(1 - x) \geqslant 0$,$\therefore \ x \in [0,1]$ 且 $x(1 - x) \leqslant \frac{1}{4}$.方程两边取正切,得

$$\frac{x + (1 - x)}{1 - x(1 - x)} = \frac{2\sqrt{x(1 - x)}}{1 - x(1 - x)}.$$

因为 $x(1 - x) \neq 1$,所以得方程

$$\sqrt{x(1-x)}=\frac{1}{2},$$

由此得　$x=\frac{1}{2}$.

4·95　解方程 $\cos\cos\cos\cos x=\sin\sin\sin\sin x$.

（第21届俄罗斯数学奥林匹克决赛,1995年）

[解]　本方程无解.

我们来证明,对一切 $x\in R$,都有

$$\cos\cos\cos\cos x>\sin\sin\sin\sin x \qquad ①$$

事实上,若 $x\in[\pi,2\pi]$,则

$\cos\cos\cos\cos x>0$,$\sin\sin\sin\sin x\leqslant 0$,此时①式成立.

若 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,则

$\cos x$,$\sin x$,$\cos\cos x$,$\sin\sin x$,$\cos\cos\cos x$,$\sin\sin\sin x$ 都属于闭区间 $[0,1]$.又因为

$$\sin^2x+\cos^2x=1,$$

$$(\sin x+\cos x)^2\leqslant 2(\sin^2x+\cos^2x)=2,$$

$$\sin x+\cos x\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{\pi}{2},$$

$$0\leqslant\cos x<\frac{\pi}{2}-\sin x,$$

所以

$$\cos\cos x>\cos\left(\frac{\pi}{2}-\sin x\right)=\sin\sin x, \qquad ②$$

$$\sin\cos x<\sin\left(\frac{\pi}{2}-\sin x\right)=\cos\sin x. \qquad ③$$

由②得　$\cos\cos\cos x<\cos\sin\sin x$,

于是有

$$\begin{aligned}&\cos\cos\cos x+\sin\sin\sin x\\&<\cos(\sin\sin x)+\sin(\sin\sin x)\\&<\frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

即　$\cos\cos\cos x<\frac{\pi}{2}-\sin\sin\sin x$,

由上式得

$$\cos\cos\cos\cos x>\cos\left(\frac{\pi}{2}-\sin\sin\sin x\right)=\sin\sin\sin\sin x.$$

此时 ① 式成立.

若 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$,则令 $y = x - \frac{\pi}{2}$,从而 $y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos\sin y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,由 ② 式可得

$$\cos\cos(\cos\sin y) > \sin\sin(\cos\sin y) \quad ④$$

又由于函数

$$f(t) = \sin\sin t, t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

是增函数,因此由 ③ 式可得

$$\sin\sin(\cos\sin y) > \sin\sin(\sin\cos y), \quad ⑤$$

由 ④ 和 ⑤ 得

$$\cos\cos\cos\sin y > \sin\sin\sin\cos y,$$

即 $$\cos\cos\cos\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) > \sin\sin\sin\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right),$$

故得 $$\cos\cos\cos\cos x > \sin\sin\sin\sin x,$$

此时 ① 式也成立.

综上所述,当 $x \in [0, 2\pi]$ 时,① 式都成立.再由周期性可知,对一切 $x \in R$,① 式都成立.故原方程无解.

4·96 对实数 x,$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数部分.求使 $[\log_2 1] + [\log_2 2] + [\log_2 3] + \cdots + [\log_2 n] = 1994$ 成立的正整数 n.

(第 12 届美国数学邀请赛,1994 年)

[解] 令

$$Sn = [\log_2 1] + [\log_2 2] + [\log_2 3] + \cdots + [\log_2 n].$$

显然,对非负整数 k,有 2^k 个正整数

$$2^k, 2^k + 1, 2^k + 2, \cdots, 2^{k+1} - 1$$

使得当 x 等于这 2^k 个正整数的任一个时,都有$[\log_2 x] = k$.因此,对于任意的正整数 r,都有

$$S_{2^r-1} = 0 + (1+1) + (2+2+2+2) + \cdots + \underbrace{[(r-1) + (r-1) + \cdots + (r-1)]}_{2^{r-1}\text{个}}.$$

这个表达式的右边有

$2^r - 2^1$ 项不小于 1;

$2^r - 2^2$　项不小于 2；

$2^r - 2^3$　项不小于 3；

……

$2^r - 2^{r-2}$　项不小于 $r-2$；

$2^r - 2^{r-1}$　项不小于 $r-1$.

因此，

$$\begin{aligned} S_{2^r-1} &= (2^r - 2^1) + (2^r - 2^2) + \cdots + (2^r - 2^{r-2}) + (2^r - 2^{r-1}) \\ &= (r-1)\cdot 2^r - (2^r - 2) \\ &= (r-2)\cdot 2^r + 2. \end{aligned}$$

当 $r = 8$ 时，由上式得　$S_{255} = 1538 < 1994$.

当 $r = 9$ 时，由上式得　$S_{511} = 3586 > 1994$.

可见，如果 $S_n = 1994$，那么 $255 < n < 511$.

于是我们有

$$1994 = S_n = S_{255} + (n - 255)\cdot 8$$

即　$1994 = 8n - 502$

解得　$n = 312$.

4·97　实数 $p \geqslant \frac{1}{4}$. 求下述方程的所有正实数解 x：

$$\log_{\sqrt{2}}^2 x + 2\log_{\sqrt{2}} x + 2\log_{\sqrt{2}}(x^2 + p) + p + \frac{15}{4} = 0.$$

（保加利亚数学奥林匹克，1994 年）

［解］　当 $p > \frac{1}{4}$ 时，

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + p - \frac{1}{4} > 0,$$

即

$$x^2 + p > x.$$

由于 $\sqrt{2} > 1$，$x > 0$，因此有

$$\log_{\sqrt{2}}(x^2 + p) > \log_{\sqrt{2}} x,$$

从而有

$$原方程左端 > \log_{\sqrt{2}}^2 x + 2\log_{\sqrt{2}} x + 2\log_{\sqrt{2}} x + \frac{1}{4} + \frac{15}{4}$$

$$= \log_{\sqrt{2}}^2 x + 4\log_{\sqrt{2}} x + 4$$
$$= (\log_{\sqrt{2}} x + 2)^2$$
$$\geqslant 0,$$

所以 $p > \frac{1}{4}$ 时,原方程无解.

当 $p = \frac{1}{4}$ 时,由 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$,得

$$x^2 + \frac{1}{4} \geqslant x,$$

从而有

$$\log_{\sqrt{2}}\left(x^2 + \frac{1}{4}\right) \geqslant \log_{\sqrt{2}} x.$$

此时,

$$\text{方程左端} = \log_{\sqrt{2}}^2 x + 2\log_{\sqrt{2}} x + 2\log_{\sqrt{2}}\left(x^2 + \frac{1}{4}\right) + 4$$
$$\geqslant \log_{\sqrt{2}}^2 x + 2\log_{\sqrt{2}} x + 2\log_{\sqrt{2}} x + 4$$
$$= (\log_{\sqrt{2}} x + 2)^2$$
$$\geqslant 0.$$

所以原方程有正实数解的充分必要条件是

$$x - \frac{1}{2} = 0 \text{ 且 } \log_{\sqrt{2}} x + 2 = 0,$$

即 $$x = \frac{1}{2}.$$

综上所述,当 $p > \frac{1}{4}$ 时,原方程无正实数解;当 $p = \frac{1}{4}$ 时,原方程只有一个正实数解 $x = \frac{1}{2}$.

4·98 求下列方程的所有整数解:

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}(3x - \sqrt{9x^2 + 160x + 800})\right) = 1.$$

(保加利亚数学奥林匹克,1994 年)

[解] 设 x 是原方程的一个整数解,那么,一定存在整数 n,使得

$$\frac{\pi}{8}(3x - \sqrt{9x^2 + 160x + 800}) = 2n\pi,$$

即

$$9x^2 + 160x + 800 = (3x - 16n)^2,$$
$$x(3n + 5) = 8n^2 - 25,$$

但 $$8n^2 - 25 = \frac{8}{9}(3n + 5)(3n - 5) - \frac{25}{9},$$

因此 $$x(3n + 5) = \frac{8}{9}(3n + 5)(3n - 5) - \frac{25}{9},$$

$$8(3n + 5)(3n - 5) - 9x(3n + 5) = 25,$$
$$(3n + 5)(24n - 40 - 9x) = 25. \qquad ①$$
$$3n + 5 \in \{\pm 1, \pm 5, \pm 25\}$$

注意到 n 是整数,得

$$n \in \{-2, 0, -10\}$$

将 $n = -2$ 代入 ① 得 $x = -7$;

将 $n = 0$ 代入 ① 得 $x = -5$;

将 $n = -10$ 代入 ① 得 $x = -31$.

经检验,$x = -5$ 是增根.原方程的所有整数解为

$$x = -7 \text{ 或 } x = -31.$$

第 4 节　含两个方程的方程组

4·99　解方程组 $\begin{cases} x + y = 4, & ① \\ (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = 280. & ② \end{cases}$

(基辅数学奥林匹克,1935 年)

[解]　将 ① 代入 ② 得

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - xy) - 70 = 0 \qquad ③$$

由 ① 得 $x^2 + y^2 = 16 - 2xy$ 　④

将 ④ 代入 ③ 并整理得 $3x^2y^2 - 40xy + 93 = 0,$

所以 $xy = 3$ 或 $xy = \frac{31}{3}$.

与 ① 联立有

$$\begin{cases} x+y=4, \\ xy=3. \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x+y=4, \\ xy=\dfrac{31}{3}. \end{cases} \text{（无解）}$$

∴ 原方程组的解为

$$\begin{cases} x_1=3, \\ y_1=1; \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x_2=1, \\ y_2=3. \end{cases}$$

4·100 求方程组 $\begin{cases} x+y+z=0, & ① \\ x^3+y^3+z^3=-18. & ② \end{cases}$

的整数解.

（中国高中数学联赛，1978 年）

［解］ 由 ① 得 $z=-(x+y)$ ③

代入 ② 得 $x^3+y^3-(x+y)^3=-18$,

化简得 $xy(x+y)=6$.

由 ③ 得 $xyz=-6$,

因此 x,y,z 必须是 6 的约数.

由 ①、② 知，x,y,z 中有且只有一个负数，并且这个负数的绝对值应该大于其他两数的绝对值. 因此，这个负数必是 -3，另两个数分别是 1，2. 经检验，x,y,z 分别取 $-3,1,2$ 时，方程 ① 和 ② 都成立. 由对称性可知，给定方程组共有六组解：

$$\begin{cases} x=-3, \\ y=1, \\ z=2; \end{cases} \quad \begin{cases} x=-3, \\ y=2, \\ z=1; \end{cases} \quad \begin{cases} x=1, \\ y=-3, \\ z=2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2, \\ y=-3, \\ z=1. \end{cases} \quad \begin{cases} x=1, \\ y=2, \\ z=-3; \end{cases} \quad \begin{cases} x=2, \\ y=1, \\ z=-3. \end{cases}$$

4·101 证明：三个未知数两个方程的方程组

$$\begin{cases} x-y=2, \\ xy+z^2+1=0. \end{cases}$$

没有 $z \neq 0$ 的实数解.

（基辅数学奥林匹克，1940 年）

［证］ 把原方程组变形为

$$\begin{cases} x + (-y) = 2, \\ x(-y) = 1 + z^2. \end{cases}$$

由韦达定理的逆定理,数 x 与 $-y$ 是方程

$$m^2 - 2m + (1 + z^2) = 0$$

的两个根.

但 $\Delta = 4 - 4(1 + z^2) = -z^2$

当 $z \neq 0$ 时,$\Delta = -z^2 < 0$,方程没有实数根.

4・102 解方程组

$$\begin{cases} x(x + 1)(3x + 5y) = 144, & ① \\ x^2 + 4x + 5y = 24. & ② \end{cases}$$

(基辅数学奥林匹克,1946 年)

[解] 由②得 $x(x + 1) + (3x + 5y) = 24$ ③

把 $x(x + 1)$,$(3x + 5y)$ 看作方程 $a^2 - 24a + 144 = 0$ 的两个根,得

$$x(x + 1) = 12 \quad 且 \quad 3x + 5y = 12.$$

由 $x(x + 1) = 12$ 解得 $x_1 = -4, x_2 = 3$.

代入 $3x + 5y = 12$ 得, $y_1 = \frac{24}{5}, y_2 = \frac{3}{5}$.

∴ 原方程组有两组解$\left(-4, \frac{24}{5}\right), \left(3, \frac{3}{5}\right)$.

4・103 实数 α、β 满足方程组

$$\begin{cases} \alpha^3 - 3\alpha^2 + 5\alpha - 17 = 0, \\ \beta^3 - 3\beta^2 + 5\beta + 11 = 0. \end{cases}$$

求 $\alpha + \beta$.

(第 6 届爱尔兰数学奥林匹克,1993 年)

[解] 方程组变形为

$$(\alpha - 1)^3 + 2(\alpha - 1) - 14 = 0,$$
$$(\beta - 1)^3 + 2(\beta - 1) + 14 = 0.$$

两式相加得, $(\alpha - 1)^3 + (\beta - 1)^3 + 2(\alpha + \beta - 2) = 0$,

即 $(\alpha + \beta - 2)[(\alpha - 1)^2 + (\beta - 1)^2 - (\alpha - 1)(\beta - 1) + 2] = 0$.

但当 x, y 都为实数时,等式

$$x^2 + y^2 - xy + 2 = 0$$

不成立,否则 $x=\dfrac{y\pm\sqrt{-3y^2-8}}{2}$ 与 x 为实数矛盾.

所以 $\alpha+\beta-2=0$,

即 $\alpha+\beta=2$.

4·104 求方程组的整数解

$$\begin{cases}xz-2yt=3,\\xt+yz=1.\end{cases}$$

(第25届全苏数学奥林匹克,1991年)

[解] 由方程组可得

$$(xz-2yt)^2+2(xt+yz)^2=(x^2+2y^2)(z^2+2t^2)=11.$$

因而有 $x^2+2y^2=1$ 或 $z^2+2t^2=1$.

若 $x^2+2y^2=1$,则由此可得 $y=0,x=\pm1$,然后由第二个方程得知 $t=\pm1$,再由第一个方程得 $z=\pm3$.

若 $z^2+2t^2=1$,则由此得 $t=0,z=\pm1$,再得出 $y=\pm1,x=\pm3$.

经直接验证可知,所求得的4组解 (x,y,z,t) 都可满足原方程组,它们是 $(1,0,3,1),(-1,0,-3,-1),(3,1,1,0),(-3,-1,-1,0)$.

4·105 解方程组 $\begin{cases}x+xy+y=2+3\sqrt{2},\\x^2+y^2=6.\end{cases}$

(加拿大国家集训队训练题)

[解] 原方程组变形为

$$\begin{cases}(x+y)+xy=2+3\sqrt{2},\\(x+y)^2-2xy=6.\end{cases}$$

于是 $(x+y)^2+2(x+y)-10-6\sqrt{2}=0$,

有 $x+y=2+\sqrt{2},x+y=-4-\sqrt{2}$.

当 $x+y=2+\sqrt{2}$ 时,$xy=2\sqrt{2}$,此时

$$\begin{cases}x=2,\\y=\sqrt{2}.\end{cases}\qquad\begin{cases}x=\sqrt{2},\\y=2.\end{cases}$$

当 $x+y=-4-\sqrt{2}$ 时,$xy=6+4\sqrt{2}$,无实数解.

所以方程的解为 $\begin{cases}x_1=2,\\y_1=\sqrt{2};\end{cases}\qquad\begin{cases}x_2=\sqrt{2},\\y_2=2.\end{cases}$

4・106　解方程组

$$\begin{cases} xy^2-2y+3x^2=0, & ① \\ y^2+x^2y+2x=0. & ② \end{cases}$$

（第14届全俄数学奥林匹克，1988年）

[解]　当 $x=0$ 时，方程组有惟一的解为

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}.$$

当 $x\neq 0$ 时，由 ① − ② × x 得

$$-2y-x^3y+x^2=0,$$

即 $$(2+x^3)y=x^2,$$

由此知 $2+x^3\neq 0$，于是 $y=\dfrac{x^2}{2+x^3}$.

代入 ②，整理得 $3x^6+11x^3+8=0$.

记 $x^3=z$，解方程 $3z^2+11z+8=0$，得

$$z_1=-1, z_2=-\frac{8}{3}.$$

亦即 $$x_1=-1, x_2=-\frac{2}{\sqrt[3]{3}}.$$

因此，$y_1=1, y_2=-2\sqrt[3]{3}$. 这样已知方程组有三个解：

$$\begin{cases} x_1=-1, \\ y_1=1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=-\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}, \\ y_2=-2\sqrt[3]{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3=0, \\ y_3=0. \end{cases}$$

4・107　假设 x,y,z 都是实数，又知它们满足

$$\begin{cases} x+y+z=a, & ① \\ x^2+y^2+z^2=\dfrac{a^2}{2}(a>0). & ② \end{cases}$$

试证 x,y,z 都不能是负数，也都不能大于 $\dfrac{2}{3}a$.

（中国北京市数学竞赛，1957年）

[证]　将 $z=a-(x+y)$ 代入 ②，得

$$x^2+y^2+(x+y)^2-2a(x+y)+a^2=\frac{a^2}{2},$$

即 $y^2+(x-a)y+\left(x-\frac{a}{2}\right)^2=0.$

因为 y 是实数,所以有

$$(x-a)^2-4\left(x-\frac{a}{2}\right)^2\geqslant 0,$$

即 $x(2a-3x)\geqslant 0,$

从而 $0\leqslant x\leqslant \frac{2}{3}a.$

同理可证 $0\leqslant y\leqslant \frac{2}{3}a,\quad 0\leqslant z\leqslant \frac{2}{3}a.$

4·108 求方程组的实数解

$$\begin{cases} x+y=3, & ① \\ xy-y^2=1. & ② \end{cases}$$

(中国上海市数学竞赛,1963 年)

[解] 由 ①$x=3-y,$ ③

代入 ② $2y^2-3y+1=0,$

即 $(2y-1)(y-1)=0,$

故 $y_1=\frac{1}{2},x_1=\frac{5}{2},$

$y_2=1,x_2=2.$

得两组解

$$\begin{cases} x_1=\frac{5}{2}, \\ y_1=\frac{1}{2}; \end{cases}\qquad \begin{cases} x_2=2, \\ y_2=1. \end{cases}$$

4·109 试证对任意的整数 a 和 b,方程组

$$\begin{cases} x+y+2z+2t=a, \\ 2x-2y+z-t=b. \end{cases}$$

有整数解.

(匈牙利数学奥林匹克,1926 年)

[证] 将所给方程组对 x 和 z 解出,得

$$x=\frac{1}{3}(-a+2b+5y+4t)$$

$$= b + 2y + t - \frac{1}{3}(a + b + y - t),$$

$$z = \frac{1}{3}(2a - b - 4y - 5t)$$

$$= a - y - 2t - \frac{1}{3}(a + b + y - t).$$

任给整数 a 和 b，选取整数 y 和 t，使得数

$$\frac{1}{3}(a + b + y - t) = u$$

是整数，则 x 和 z 也是整数，因此原方程组对任何整数 a 和 b 都有整数解. 特别地，若取

$$t = a, y = -b,$$

则得一组特解

$$x = a - b, y = -b, z = -a + b, t = a.$$

4·110　求方程组

$$\begin{cases} y^2 = x^3 - 3x^2 + 2x, & ① \\ x^2 = y^3 - 3y^2 + 2y. & ② \end{cases}$$

的一切解.

（第 17 届全苏数学奥林匹克，1983 年）

［解］ ① - ② 得

$$y^2 - x^2 = (x^3 - 3x^2 + 2x) - (y^3 - 3y^2 + 2y),$$

即 $$y^3 - 2y^2 + 2y = x^3 - 2x^2 + 2x. \quad ③$$

令 $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x$，则 ③ 式化为

$$f(y) = f(x). \quad ④$$

因为

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 2,$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = -8 < 0,$$

所以，对所有实数 x，都有 $f'(x) > 0$，从而函数 $f(x)$ 为严格递增函数. 于是，我们由 ④ 可得

$$x = y. \quad ⑤$$

把 ⑤ 代入 ① 得

$$y^2 = y^3 - 3y^2 + 2y,$$

即 $$y^3 - 4y^2 + 2y = 0,$$

$$y(y^2-4y+2)=0,$$
$$y_1=0; y_{2,3}=2\pm\sqrt{2}.$$

又由 ⑤ 得原方程组的解

$$\begin{cases}x_1=0,\\ y_1=0;\end{cases}\quad \begin{cases}x_2=2+\sqrt{2},\\ y_2=2+\sqrt{2};\end{cases}\quad \begin{cases}x_3=2-\sqrt{2},\\ y_3=2-\sqrt{2}.\end{cases}$$

4·111　设 a,b,c,d 是使方程组

$$\begin{cases}ax+by=m,\\ cx+dy=n.\end{cases}$$

对所有的整数 m,n 都有整数解的整数.试证

$$ad-bc=\pm 1.$$

（匈牙利数学奥林匹克,1943 年）

［证］　显然,在 a,b,c,d 这四个数中不可能都等于0,于是不妨设 $a\neq 0$.

设 $D=ad-bc$.肯定 $D\neq 0$,否则,设 $\lambda=\frac{c}{a}=\frac{d}{b}$,则可推出原方程组仅当 $n=\lambda m$ 时有整数解,这与题设矛盾.因此 $D\neq 0$.

任给整数 m 和 n,原方程组有整数解

$$x=\frac{md-nb}{D},$$
$$y=\frac{na-mc}{D}.$$

所以当取 $m=1,n=0$,和 $m=0,n=1$,求得两组整数解

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{d}{D},\\ y_1=-\dfrac{c}{D};\end{cases}\quad \begin{cases}x_2=-\dfrac{b}{D},\\ y_2=\dfrac{a}{D}.\end{cases}$$

因此

$$x_1y_2-y_1x_2=\frac{ad-bc}{D^2}=\frac{1}{D}$$

是整数,而 D 为整数,所以 $D=\pm 1$.

4·112　给定方程组

$$\begin{cases}y-2x-a=0, & ①\\ y^2-xy+x^2-b=0. & ②\end{cases}$$

其中 a,b 是整数，x 和 y 是未知数.试证若有某一组有理数满足这个方程组，则它们应该是整数.

（匈牙利数学奥林匹克，1918 年）

［证］ 由方程 ① 得 $x=\dfrac{y-a}{2}$， ③

将 ③ 代入 ②，得

$$y^2-y\cdot\frac{y-a}{2}+\left(\frac{y-a}{2}\right)^2-b=0,$$

整理化简得 $3y^2=4b-a^2$，

即 $(3y)^2=3(4b-a^2)$. ④

若 x 和 y 是满足原方程组的有理数，则它们也满足方程 ④，因为方程 ④ 的右边是整数，而这个整数等于有理数 $3y$ 的平方，因此 $3y$ 是整数.又因方程 ④ 的右边能被 3 整除，因此左边 $3y$ 是能被 3 整除的整数，即 y 是整数.

由方程 ④ 还可推出：数 a 和 y 或同为偶数，或同为奇数，因此

$$x=\frac{y-a}{2}\text{ 是整数.}$$

4·113 试问方程组

$$\begin{cases}x+py=n, & ①\\ x+y=p^z. & ②\end{cases}$$

（其中 n 和 p 是给定的自然数）有正整数解 (x,y,z) 的充要条件是什么？再证明这样的解的个数不能大于 1.

（匈牙利数学奥林匹克，1908 年）

［解］ 若原方程组有正整数解 (x,y,z)，则由方程 ② 知 $p>1$，且有

$$x=\frac{p^{z+1}-n}{p-1}=\frac{p^{z+1}-1}{p-1}-\frac{n-1}{p-1}, \qquad ③$$

$$y=\frac{n-p^z}{p-1}=\frac{n-1}{p-1}-\frac{p^z-1}{p-1}. \qquad ④$$

因为对所有的正整数 z，

$$\frac{p^{z+1}-1}{p-1}=p^z+p^{z-1}+\cdots+1$$

及

$$\frac{p^z - 1}{p - 1} = p^{z-1} + \cdots + 1$$

都具有整数值,所以由关系式③和④可推出:数 $n-1$ 是 $p-1$ 的整数倍,且数 n 应该在数 p 的两个连续的乘幂之间,即

$$p^{z+1} > n > p^z. \qquad ⑤$$

于是若原方程组有正整数解(x, y, z),则它们应满足下列三个条件:

(1) $p > 1$;

(2) $n-1$ 是 $p-1$ 的倍数(因此 $n \geqslant p$);

(3) n 不等于数 p 或 p 的整数次幂.

反之,若以上三个条件都满足,则原方程组有且仅有一组解,这一组解的 z 由不等式⑤来确定,而 x 和 y 由关系式③和④确定.

4·114 试解方程组

$$\begin{cases} \lg x + \lg y = 1, & ① \\ x^2 + y^2 - 3x - 3y = 8. & ② \end{cases}$$

(中国北京市数学竞赛,1962 年)

[解] 由①得 $xy = 10.$ ③

②+2×③,并移项得

$$(x+y)^2 - 3(x+y) - 28 = 0,$$

所以 $x + y = 7$ 和 $x + y = -4.$ ④

把④与③结合起来,得下列二方程组:

$$\begin{cases} x + y = 7, \\ xy = 10; \end{cases} \qquad ⑤$$

$$\begin{cases} x + y = -4, \\ xy = 10. \end{cases} \qquad ⑥$$

由方程组⑤解得 $\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 5; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = 5, \\ y_2 = 2. \end{cases}$

将 x、y 的值代入原方程组,均满足,所以都是原方程组的解.

由原方程组中的①式知 x、y 必须为正数,因此方程组⑥的解不可能是原方程组的解.

4·115 解方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2+\dfrac{2xy}{x+y}=1, \\ \sqrt{x+y}=x^2-y. \end{cases}$$

(加拿大国家集训队训练题)

[解] 由 $x^2+y^2+\dfrac{2xy}{x+y}=1$ 得

$$(x+y-1)(x^2+y^2+x+y)=0$$

若 $x^2+y^2+x+y=0$,则

$$x+y=-(x^2+y^2)\leqslant 0.$$

又由原方程知 $x+y\geqslant 0$.

所以 $x+y=0$,但对原方程,$x+y=0$ 不能作分母.于是

$$x^2+y^2+x+y\neq 0.$$

从而 $x+y-1=0$.

解方程组 $\begin{cases} x+y=1, \\ x^2-y=1. \end{cases}$

可得 $\begin{cases} x_1=1, \\ y_1=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-2, \\ y_2=3. \end{cases}$

4·116 考虑方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0. \end{cases}$

其中系数 a_{ij} 为不全为 0 的整数,证明:在 $n\geqslant 2m$ 时,有一组整数解 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 满足 $0<\max|x_i|\leqslant n(\max|a_{ij}|)$.

(加拿大国家集训队训练题)

[证] 先设 $n=2m$,令 $A=\max|a_{ij}|$,$B=mA$,

$S=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_j$ 为整数并且 $|x_j|\leqslant B, 1\leqslant j\leqslant n\}$,

$T=\{(y_1,y_2,\cdots,y_m)\mid y_j$ 是整数并且 $|y_i|\leqslant nAB, 1\leqslant i\leqslant m\}$.

对每一$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in S$,令

$$y_i=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n, 1\leqslant i\leqslant m,$$

则由于 $|y_i|\leqslant n\cdot\max|a_{ij}|\cdot\max|x_i|\leqslant nAB$,

所以 $(y_1, y_2, \cdots, y_m) \in T$.

由于 $|S| = (2B+1)^n = (2mA+1)^{2m}$

$$= (4m^2A^2 + 4mA + 1)^m$$

$$> (2nAB+1)^m = |T|,$$

所以根据抽屉原则,S 中必有两个不同元素

$$(x'_1, x'_2, \cdots, x'_n) \neq (x''_1, x''_2, \cdots, x''_n)$$

对应于同一个$(y_1, y_2, \cdots, y_m)$.令

$$x_j = x'_j - x''_j, j = 1, 2, \cdots, n.$$

则所得的$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是原方程组的整数解,并且满足

$$0 < \max|x_j| \leqslant \max|x'_j| + \max|x''_j| \leqslant 2B = nA.$$

若 $n > 2m$,令 $x_{2m+1} = x_{2m+2} = \cdots = x_n = 0$,再考虑方程组

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1,2m}x_{2m} = 0,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2,2m}x_{2m} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{m,2m}x_{2m} = 0.$$

根据上面所证,有整数解$(x_1, x_2, \cdots, x_{2m})$满足

$$0 < \max|x_{ij}| \leqslant 2m \cdot \max|a_{ij}| < n \cdot \max|a_{ij}|,$$

所以解$(x_1, x_2, \cdots, x_{2m}, 0, 0, \cdots, 0)$满足题中所述要求.

4・117 解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{x - y\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{1 - x^2 + y^2}} = a, & ① \\ \dfrac{y - x\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{1 - x^2 + y^2}} = b. & ② \end{cases}$$

其中 a, b 为已知数.

(第 13 届全苏数学奥林匹克,1979 年)

[解] ① + ② 得

$$\frac{(x+y)(1 - \sqrt{x^2 - y^2})}{\sqrt{1 - x^2 + y^2}} = a + b, \qquad ③$$

① - ② 得

$$\frac{(x-y)(1 + \sqrt{x^2 - y^2})}{\sqrt{1 - x^2 + y^2}} = a - b, \qquad ④$$

③×④得

$$x^2-y^2=a^2-b^2. \qquad ⑤$$

将⑤代入③和④分别得

$$\begin{cases}\dfrac{(x+y)(1-\sqrt{a^2-b^2})}{\sqrt{1-a^2+b^2}}=a+b, & ⑥\\ \dfrac{(x-y)(1+\sqrt{a^2-b^2})}{\sqrt{1-a^2+b^2}}=a-b. & ⑦\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x=\dfrac{a+b\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{1-a^2+b^2}},\\ y=\dfrac{b+a\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{1-a^2+b^2}}.\end{cases} \qquad ⑧$$

经检验,当$0\leqslant a^2-b^2<1$时,⑧是原方程组的解;在其他情况下,原方程组在实数范围内无解.

4·118 解方程组

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x}{y}}-\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{7}{\sqrt{xy}}, & ①\\ \sqrt[4]{x^3y}-\sqrt[4]{xy^3}=\sqrt{12}. & ②\end{cases}$$

(基辅数学奥林匹克,1936年)

[解] 对$x>0$,则$y>0$.由①得 $x-y=7$, ③

由②得 $\sqrt[4]{xy}(\sqrt{x}-\sqrt{y})=\sqrt{12}$,

两边平方,得 $\sqrt{xy}(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2=12$. ④

由③得, $\sqrt{x}-\sqrt{y}=\dfrac{7}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$, ⑤

代入④并化简得

$$12x+12y-25\sqrt{xy}=0.$$

解之得 $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=\dfrac{4}{3}$, $\dfrac{x}{y}=\dfrac{16}{9}$.

或 $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=\dfrac{3}{4}$, $\dfrac{x}{y}=\dfrac{9}{16}$.

结合③解得

$$\begin{cases} x_1 = 16, \\ y_1 = 9. \end{cases}$$

经检验知原方程组解为 $\begin{cases} x = 16, \\ y = 9. \end{cases}$

同理对 $x < 0, y < 0$ 得另一组解 $\begin{cases} x = -16, \\ y = -9. \end{cases}$

4·119 解方程组 $\begin{cases} \cos x = 2\cos^3 y, \\ \sin x = 2\sin^3 y. \end{cases}$

（加拿大国家集训队训练题）

［解］ 两方程平方后相加，得

$$\begin{aligned} 1 &= 4(\cos^6 y + \sin^6 y) \\ &= 4(\cos^4 y - \cos^2 y\sin^2 y + \sin^4 y) \\ &= 4(1 - 3\sin^2 y\cos^2 y). \end{aligned}$$

所以 $\sin 2y = \pm 1, y = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}(k \in Z)$,

代入原方程组得 $x = 2l\pi + \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}(l, k \in Z)$.

所以方程组的解为

$$\begin{cases} x = 2l\pi + \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, \\ y = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}. \end{cases} \quad (l, k \in Z)$$

4·120 如果 $\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y = 25$，并且 $\operatorname{ctg}x + \operatorname{ctg}y = 30$. 求 $\operatorname{tg}(x + y)$.

（第4届美国数学邀请赛，1986年）

［解］ 由 $\operatorname{ctg}x + \operatorname{ctg}y = 30$ 得

$$\frac{1}{\operatorname{tg}x} + \frac{1}{\operatorname{tg}y} = 30,$$

则 $$\frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y}{\operatorname{tg}x \cdot \operatorname{tg}y} = 30,$$

即 $$\frac{25}{\operatorname{tg}x \cdot \operatorname{tg}y} = 30,$$

$$\text{tg}x \cdot \text{tg}y = \frac{5}{6}.$$

所以 $$\text{tg}(x+y) = \frac{\text{tg}x + \text{tg}y}{1 - \text{tg}x \cdot \text{tg}y} = \frac{25}{1 - \frac{5}{6}} = 150.$$

4・121 解方程组

$$\begin{cases} 2^{\lg x} + 3^{\lg y} = 5, \\ 2^{\lg x} \cdot 3^{\lg y} = 4. \end{cases}$$

（基辅数学奥林匹克，1936 年）

[解] 设 $2^{\lg x}, 3^{\lg y}$ 为方程 $a^2 - 5a + 4 = 0$ 的两个根，则有

$$\begin{cases} 2^{\lg x} = 4, \\ 3^{\lg y} = 1; \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} 2^{\lg x} = 1, \\ 3^{\lg y} = 4. \end{cases}$$

所以 $$\begin{cases} x_1 = 100, \\ y_1 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 1, \\ y_2 = 10^{\log_3 4}. \end{cases}$$

经检验，它们都是原方程组的解.

4・122 试解方程组 $\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{y-3} = \sqrt{x+y}, & ① \\ \lg(x-10) + \lg(y-6) = 1. & ② \end{cases}$

（中国北京市数学竞赛，1963 年）

[解] 原方程组可以化为方程组

$$\begin{cases} xy - 3x - y - 1 = 0, & ③ \\ xy - 6x - 10y + 50 = 0. & ④ \end{cases}$$

③ − ④，并化简得

$$x = 17 - 3y. \qquad ⑤$$

将 ⑤ 代入 ③，整理得

$$3y^2 - 25y + 52 = 0,$$

所以 $$y_1 = 4, y_2 = \frac{13}{3}.$$

将 y 的值代入 ⑤，得 $x_1 = 5, x_2 = 4$，所以方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = 5, \\ y_1 = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 4, \\ y_2 = \frac{13}{3}. \end{cases}$$

经验算，这两组数都不满足 ② 式，所以原方程组无解.

4・123 设 a, b, c 是给定的正实数，试确定满足方程组

$$\begin{cases} x+y+z=a+b+c, \\ 4xyz-(a^2x+b^2y+c^2z)=abc. \end{cases}$$

的全部正实数 x, y, z.

（第 36 届国际数学奥林匹克预选题，1995 年）

[解] 上述第二个方程等价于

$$\frac{a^2}{yz}+\frac{b^2}{xz}+\frac{c^2}{xy}+\frac{abc}{xyz}=4,$$

令 $x_1=\frac{a}{\sqrt{yz}}, y_1=\frac{b}{\sqrt{zx}}, z_1=\frac{c}{\sqrt{xy}}$，则

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2+x_1y_1z_1=4,$$

显然，$0<x_1<2, 0<y_1<2, 0<z_1<2$.

将上式化为关于 z_1 的二次方程的标准形式，得

$$z_1^2+x_1y_1z_1+(x_1^2+y_1^2-4)=0$$

判别式

$$\triangle=(x_1y_1)^2-4(x_1^2+y_1^2-4)=(4-x_1^2)(4-y_1^2).$$

令 $x_1=2\sin u, 0<u<\frac{\pi}{2}$; $y_1=2\sin v, 0<v<\frac{\pi}{2}$,

则 $\triangle=16\cos^2u\cdot\cos^2v$

$$z_1=-2\sin u\sin v\pm2\cos u\cos v.$$

由于 $z_1>0$，因此

$$z_1=-2\sin u\sin v+2\cos u\cos v=2\cos(u+v),$$

从而有

$$\begin{cases} 2\sin u\sqrt{yz}=a, \\ 2\sin v\sqrt{zx}=b, \\ 2\cos(u+v)\sqrt{xy}=c. \end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned} &(\sqrt{x}\cos v-\sqrt{y}\cos u)^2+(\sqrt{x}\sin v+\sqrt{y}\sin u-\sqrt{z})^2 \\ =&\ x+y+z-2\sqrt{xy}\cos u\cos v+2\sqrt{xy}\sin u\sin v-2\sqrt{zx}\sin v \\ &\ -2\sqrt{yz}\sin u \\ =&\ a+b+c-c-b-a \\ =&\ 0, \end{aligned}$$

因此得

$$\begin{aligned}\sqrt{z} &= \sqrt{x}\sin v + \sqrt{y}\sin u \\ &= \sqrt{x} \cdot \frac{b}{2\sqrt{zx}} + \sqrt{y} \cdot \frac{a}{2\sqrt{yz}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{z}} \cdot \frac{a+b}{2},\end{aligned}$$

$$z = \frac{a+b}{2}.$$

由原方程的对称性可得

$$x = \frac{b+c}{2}, y = \frac{c+a}{2}.$$

容易代入验证，三元数组$\left(\frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$满足题目所给的方程组.

故原方程组只有惟一的正实数解

$$x = \frac{b+c}{2}, \qquad y = \frac{c+a}{2}, \qquad z = \frac{a+b}{2}.$$

4·124　m, n 是两个不同的正整数，求方程

$$x^{m+1} - x^n + 1 = 0$$

和

$$x^{n+1} - x^m + 1 = 0$$

的公共复根.

（罗马尼亚数学奥林匹克，1994 年）

［解］　不妨设 $m > n$（如果 $m < n$，只要将下述证明中，m, n 互换一下即可）. 设 x 是题目中两个方程的公共复根. 将题目中两个方程相减，有

$$x^{m+1} - x^{n+1} - x^n + x^m = 0,$$

即

$$x^n(x+1)(x^{m-n} - 1) = 0.$$

因为 0 和 -1 都不是题目中方程的根，所以有

$$x^{m-n} - 1 = 0,$$

即

$$x^{m-n} = 1, 且 |x| = 1.$$

因此

$$x^m = x^n, 且 |x| = 1. \qquad ①$$

将上式代入题目中给出的第二个方程，得

$$x^{n+1} - x^n + 1 = 0,$$

即

$$x^n(x-1)=-1. \quad ②$$

由 $|x|=1$ 及上式可得

$$|x-1|=1.$$

设 $x=\cos\theta+i\sin\theta,\theta\in[0,2\pi)$.并将它代入上式得

$$1=|x-1|^2=(\cos-1)^2+\sin^2\theta=2(1-\cos\theta),$$

解方程,得

$$\cos\theta=\frac{1}{2},$$

$$\theta=\frac{\pi}{3} \quad 或 \quad \theta=\frac{5\pi}{3}.$$

于是,我们有

$$x=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3} \quad 或 \quad x=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3},$$

即

$$x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad 或 \quad x=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

这两个 x 值都满足关系式

$$x-1=x^2,$$

将这个关系式代入 ② 得

$$x^{n+2}=-1,$$

即

$$\left(\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{n+2}=-1,$$

$$\cos\frac{(n+2)\pi}{3}\pm i\sin\frac{(n+2)\pi}{3}=-1,$$

故有

$$\frac{(n+2)\pi}{3}=(2k+1)\pi,$$

这里 k 是任一非负整数.因此

$$n=6k+1.$$

类似地,将 ① 式代入题目中给出的第二个方程,得

$$x^{m+1}-x^m+1=0,$$

因此同样可以推出 $m=6k^*+1$,这里 k^* 是任一非负整数.

反过来,当 m 和 n 是两个不同的正整数,且 $m=6k^*+1$, $n=6k+1$,其中 k,k^* 是任意的非负整数时,容易验证

$$x=\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3}$$

是题目给出的两个方程的公共根.

事实上,我们只需注意 $x=\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3}$ 时, $x^3=1$ 且 $x^2-x+1=0$,于是,我们就有

$$\begin{aligned}x^{m+1}-x^n+1&=x^{6k^*+2}-x^{6k+1}+1\\&=x^2-x+1\\&=0,\\x^{n+1}-x^m+1&=x^{6k+2}-x^{6k^*+1}+1\\&=x^2-x+1\\&=0.\end{aligned}$$

综上所述,当 $m=6k^*+1$, $n=6k+1$,其中 k^* 和 k 是任意两个不同的非负整数时,题目给出的两个方程有两个公共复根.

$$x=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

在 m,n 取其他值时,题目给出的两个方程没有公共复根.

第5节　含三个以上方程的方程组

4・125　证明:不存在实数 x,y,z,使得方程组

$$\begin{cases}x^2+4yz+2z=0,\\x+2xy+2z^2=0,\\2xz+y^2+y+1=0.\end{cases}$$

成立.

(第32届乌克兰数学奥林匹克,1992年)

[证]　在第三个等式中,因为 $y^2+y+1>0$,所以

$$xz<0. \qquad ①$$

由第一个等式知,

$$2z(2y+1)<0. \quad ②$$

由第二个等式知，

$$x(2y+1)<0. \quad ③$$

② × ③ 得 $2xz(2y+1)^2>0$.

因此 $2xz>0$，与 ① 矛盾.

所以原命题成立.

4·126 解方程组

$$\begin{cases} x+y+z=a, & ① \\ x^2+y^2+z^2=b^2, & ② \\ xy=z^2. & ③ \end{cases}$$

其中 a、b 是已知数. 并指出 a、b 满足什么条件时，x、y、z 是互不相同的正数.

（第 3 届国际数学奥林匹克，1961 年）

[解] 由 $①^2-②$ 得 $xy+yz+zx=\frac{1}{2}(a^2-b^2)$，

即 $za=\frac{1}{2}(a^2-b^2)$.

所以解为

$$\begin{cases} x=\frac{1}{4a}(a^2+b^2\pm\sqrt{10a^2b^2-3a^4-3b^4}), \\ y=\frac{1}{4a}(a^2+b^2\mp\sqrt{10a^2b^2-3a^4-3b^4}), \\ z=\frac{1}{2a}(a^2-b^2). \end{cases}$$

当且仅当 $|b|<a<\sqrt{3}|b|$ 时，x、y、z 是互不相同的正数.

4·127 解方程组

$$\begin{cases} yz=3y+2z-8, \\ zx=4z+3x-8, \\ xy=2x+y-1. \end{cases}$$

（第 2 届友谊杯国际数学竞赛，1988 年）

[解] 将方程组的三个方程依次改写为

$$\begin{cases}(y-2)(z-3)=-2, & ①\\(z-3)(x-4)=4, & ②\\(x-1)(y-2)=1. & ③\end{cases}$$

由①、③,得$(z-3)=-2(x-1)$,

代入②,得 $(x-3)(x-2)=0$.

即 $x=2$ 或 $x=3$.

再代入②、③得

$$\begin{cases}x=2,\\y=3,\\z=1;\end{cases}\qquad\begin{cases}x=3,\\y=\dfrac{5}{2},\\z=-1.\end{cases}$$

4·128 求使方程组

$$\begin{cases}ax^2+bx+c=0,\\bx^2+cx+a=0,\\cx^2+ax+b=0.\end{cases}$$

有实数解时,系数 a,b,c 之间的关系.

(第15届全俄数学奥林匹克,1989年)

[解] 将方程组中的方程相加,得

$$(a+b+c)x^2+(a+b+c)x+(a+b+c)=0,$$

由此 $(a+b+c)(x^2+x+1)=0$.

因为对任意实数 x,$x^2+x+1\neq0$,所以方程组有解的必要条件是 $a+b+c=0$.

反过来,如果 $a+b+c=0$,则 $x=1$ 显然是方程组的解.

因此,$a+b+c=0$ 也是方程组有解的充分条件.

4·129 解方程组 $\begin{cases}x^2=6+(y-z)^2,\\y^2=2+(z-x)^2,\\z^2=3+(x-y)^2.\end{cases}$

(中国北京市数学竞赛,1956年)

[解] 改写原方程组为

$$\begin{cases}6=x^2-(y-z)^2=(x-y+z)(x+y-z), & ①\\2=y^2-(z-x)^2=(y-z+x)(y+z-x), & ②\\3=z^2-(x-y)^2=(z-x+y)(z+x-y). & ③\end{cases}$$

①×②×③得

$$36=(x-y+z)^2(y-z+x)^2(z-x+y)^2, \quad ④$$

故有 $(x-y+z)(y-z+x)(z-x+y)=\pm 6.$ ⑤

⑤÷①得 $z-x+y=\pm 1.$ ⑥

⑤÷②得 $x-y+z=\pm 3.$ ⑦

⑤÷③得 $y-z+x=\pm 2.$ ⑧

⑥+⑦+⑧得 $x+y+z=\pm 6.$ ⑨

⑨-⑥得 $2x=\pm 5, x=\pm\frac{5}{2},$

⑨-⑦得 $2y=\pm 3, y=\pm\frac{3}{2},$

⑨-⑧得 $2z=\pm 4, z=\pm 2.$

所以原方程组有两组解

$$x_1=\frac{5}{2}, y_1=\frac{3}{2}, z_1=2;$$

$$x_2=\frac{-5}{2}, y_2=\frac{-3}{2}, z_2=-2.$$

4·130 解方程组

$$\begin{cases} x^2=a+(y-z)^2, \\ y^2=b+(z-x)^2, \\ z^2=c+(x-y)^2. \end{cases}$$

(基辅数学奥林匹克,1949年)

[解] 将方程组中的变量都移到左边并分解因式,得

$$\begin{cases} (x-y+z)(x+y-z)=a, \\ (x+y-z)(-x+y+z)=b, \\ (-x+y+z)(x-y+z)=c. \end{cases}$$

若 $abc>0$ 以上三式相乘并开方,得

$$(x-y+z)(x+y-z)(-x+y+z)=\pm\sqrt{abc} \quad ①$$

用①式除以以上各方程得方程组的两组解为:

$$x=\pm\frac{b+c}{2bc}\sqrt{abc},$$

$$y=\pm\frac{a+c}{2ac}\sqrt{abc},$$

$$z=\pm\frac{a+b}{2ab}\sqrt{abc}.$$

分式中符号同时取正或同时取负.

若 $abc<0$ 或 $abc=0$,可作类似的讨论.

4·131 如果

$$\begin{cases}a^2+b^2=1, & ①\\ c^2+d^2=1, & ②\\ ac+bd=0. & ③\end{cases}$$

试求 $ab+cd$ 的值.

(匈牙利数学奥林匹克,1933 年)

[解] 将等式③的两边乘以 $ad+bc$,得

$$(ac+bd)(ad+bc)=0,$$

即 $$ab(c^2+d^2)+cd(a^2+b^2)=0.$$

由①、②得 $ab+cd=0$.

4·132 有三个未知数 x,y,z 满足下列方程

$$\begin{cases}x+y+z=a, & ①\\ x^2+y^2+z^2=b^2, & ②\\ x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}=c^{-1}. & ③\end{cases}$$

试确定 $x^3+y^3+z^3$ 的值.

(基辅数学奥林匹克,1954 年)

[解] ①^2 - ②得

$$xy+yz+zx=\frac{1}{2}(a^2-b^2).$$

由③得 $$xyz=c(xy+yz+zx)=\frac{c(a^2-b^2)}{2}.$$

所以 $$\begin{aligned}&x^3+y^3+z^3\\ &=(x+y+z)^3-3(x+y+z)(xy+yz+zx)+3xyz\\ &=a^3-3a\cdot\frac{1}{2}(a^2-b^2)+3\cdot\frac{c(a^2-b^2)}{2}\\ &=a^3+\frac{3}{2}(a^2-b^2)(c-a).\end{aligned}$$

4·133 设 $x_1,x_2,\cdots,x_7$ 是满足下列方程的实数:

$$\sum_{k=1}^{7} k^2 x_k = 1, \quad ①$$

$$\sum_{k=1}^{7} (k+1)^2 x_k = 12, \quad ②$$

$$\sum_{k=1}^{7} (k+2)^2 x_k = 123, \quad ③$$

求$\sum_{k=1}^{7}(k+3)^2 x_k$的值.

（第7届美国数学邀请赛,1989年）

[解] 设$a \cdot k^2 + b(k+1)^2 + c \cdot (k+2)^2 = (k+3)^2$.
由对应系数相等,得

$$\begin{cases} a+b+c=1, \\ 2b+4c=6, \\ b+4c=9. \end{cases}$$

解得 $a=1, b=-3, c=3$.
于是,① + ② × (−3) + ③ × 3 得

$$\sum_{k=1}^{7}(k+3)^2 x_k = 1 - 3 \times 12 + 3 \times 123 = 334.$$

4·134 给出方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0. \end{cases}$$

其系数满足下列条件:

(1)a_{11}, a_{22}和a_{33}是正的;

(2) 所有其他系数都是负的;

(3) 每一方程中系数之和是正的.

试证:$x_1 = x_2 = x_3 = 0$是已知方程组的惟一解.

（第7届国际数学奥林匹克,1965年）

[证] 设x_1, x_2, x_3为一组解,且$|x_1| \geqslant |x_2| \geqslant |x_3|$,则

$$\begin{aligned} & |a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3| \\ \geqslant & |a_{11}x_1| - |a_{12}x_2| - |a_{13}x_3| \\ \geqslant & a_{11}|x_1| + a_{12}|x_1| + a_{13}|x_1| \end{aligned}$$

$$= (a_{11} + a_{12} + a_{13}) | x_1 | \geqslant 0$$

等号仅在 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ 时成立.

4·135　求方程组

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3, \\ x^5 + y^5 + z^5 = 3. \end{cases}$$

的所有实根或复根.

（第 2 届美国数学奥林匹克,1973 年）

[解]　设 x、y、z 是三次方程 $r^3 - ar^2 + br - c = 0$ 的根,则由韦达定理得:$a = 3, b = 3$,且有 $x^{n+3} - ax^{n+2} + bx^{n+1} - cx^n = 0$($n$ 为自然数),同样对 y 和 z 也成立.即

$$x^{n+3} - ax^{n+2} + bx^{n+1} - cx^n = 0,$$
$$y^{n+3} - ay^{n+2} + by^{n+1} - cy^n = 0,$$
$$z^{n+3} - az^{n+2} + bz^{n+1} - cz^n = 0,$$

三式相加得

$$(x^{n+3} + y^{n+3} + z^{n+3}) - a(x^{n+2} + y^{n+2} + z^{n+2}) + b(x^{n+1} + y^{n+1} + z^{n+1}) - c(x^n + y^n + z^n)$$
$$= 0,$$

令 $n = 0,1,2$,分别得

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3c,$$
$$x^4 + y^4 + z^4 = 12c - 9,$$
$$x^5 + y^5 + z^5 = 30c - 27.$$

$\therefore$　$c = 1$,故有 $(r-1)^3 = 0$,由此即得方程组的所有根是

$$x = y = z = 1.$$

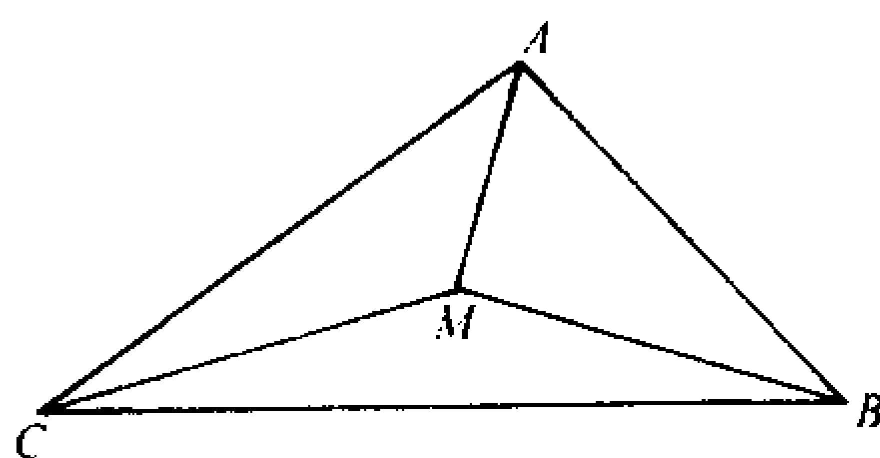
4·136　正数 x, y, z 满足方程组

$$\begin{cases} x^2 + xy + \dfrac{y^2}{3} = 25, \\ \dfrac{y^2}{3} + z^2 = 9, \\ z^2 + zx + x^2 = 16. \end{cases}$$

求 $xy + 2yz + 3zx$ 的值.

（第 18 届全苏数学奥林匹克,1984 年）

[解] 取点 M,并作线段 MA,MB,MC,使 $\angle AMB = 90°$,$\angle BMC = 150°$,$\angle CMA = 120°$.若



$MA = z$,

$MB = \frac{\sqrt{3}}{3}y$,

$MC = x$,

则由余弦定理得

$$AB = \sqrt{MA^2 + MB^2} = \sqrt{z^2 + \frac{y^2}{3}} = 3,$$

$$BC = \sqrt{MB^2 + MC^2 - 2MB \cdot MC\cos\angle BMC} = \sqrt{x^2 + xy + \frac{y^2}{3}} = 5,$$

$$AC = \sqrt{MA^2 + MC^2 - 2MA \cdot MC\cos\angle CMA} = \sqrt{z^2 + zx + x^2} = 4.$$

于是,$\triangle ABC$ 为直角三角形,且

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6. \qquad ①$$

另一方面,

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AMB} + S_{\triangle BMC} + S_{\triangle CMA}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot z \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}y + \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}y \cdot \sin150° + \frac{1}{2} \cdot xz \cdot \sin120°$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{12}(2yz + xy + 3xz) \qquad ②$$

由 ① 和 ② 得

$$\frac{\sqrt{3}}{12}(2yz + xy + 3xz) = 6,$$

故 $\quad xy + 2yz + 3zx = 24\sqrt{3}.$

4・137 解方程组

$$\begin{cases} x^3 - y^2 - y = \dfrac{1}{3}, \\ y^3 - z^2 - z = \dfrac{1}{3}, \\ z^3 - x^2 - x = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

（第 16 届全俄数学奥林匹克，1990 年）

［解］ 已知方程等价于下列方程组：

$$\begin{cases} x = f(y), \\ y = f(z), \\ z = f(x). \end{cases} \qquad ①$$

这里 $f(t) = \sqrt[3]{t^2 + t + \dfrac{1}{3}}$. 易知，对于任何实数值，函数 $f(t)$ 均为正，所以方程组的全部解 (x, y, z) 满足不等式 $x > 0, y > 0, z > 0$. 而 $t > 0$ 时，函数 $f(t)$ 显然是单调上升的.

如果 (x, y, z) 是方程组的解，并且 $x > y$，那么 $f(x) > f(y)$，于是由 ① 式得 $z > x$，由此又得 $z > y$ 且 $f(z) > f(y)$. 由 ① 式又得 $y > x$，出现矛盾. 同理 $x < y$，也会出现矛盾. 故 $x = y$，同理可证 $y = z$.

在 $x = y = z$ 的条件下，求出本题的解为 $x = y = z = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4} - 1}$.

4・138　解方程组
$$\begin{cases} x^2 + 2yz = x, & ① \\ y^2 + 2zx = z, & ② \\ z^2 + 2xy = y. & ③ \end{cases}$$

（加拿大国家集训队训练题）

［解］ 三式相加得 $(x + y + z)^2 = x + y + z$

因此　$x + y + z = 0$ 或 $x + y + z = 1$

若 $x + y + z = 0$，则　$x = -(y + z)$，　④

将 ④ 代入 ② 得　$y^2 - 2z(y + z) = z$，　⑤

将 ④ 代入 ③ 得　$z^2 - 2y(y + z) = y$，　⑥

⑤ − ⑥，得　$3(y^2 - z^2) = z - y$.

从而　$y = z$ 或 $y + z = -\dfrac{1}{3}$.

在 $y=z$ 时，由⑤得 $y^2-4y^2=y$，即 $y=0,-\frac{1}{3}$.

从而有 $z=0,-\frac{1}{3},x=0,\frac{2}{3}$.

在 $y+z=-\frac{1}{3}$ 时，由④得 $x=\frac{1}{3}$，代入①得 $yz=\frac{1}{9}$.

所以 $y=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{6},z=\frac{-1\mp\sqrt{3}i}{6}$.

若 $x+y+z=1$，则 $x=1-y-z$，代入②，③并化简得

$$y^2-2z^2-2yz+z=0 \quad ⑦$$

$$z^2-2y^2-2yz+y=0 \quad ⑧$$

⑦－⑧得 $3(y^2-z^2)=y-z$.

从而 $y=z$ 或 $y+z=\frac{1}{3}$.

在 $y=z$ 时，由⑦得 $3y^2=y$，即 $y=0,\frac{1}{3}$，

所以 $z=0,\frac{1}{3};x=1,\frac{1}{3}$.

在 $y+z=\frac{1}{3}$ 时，$x=\frac{2}{3}$，由①得 $yz=\frac{1}{9}$，

所以 $y=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{6},z=\frac{1\mp\sqrt{3}i}{6}$.

综上所述，本题的解为

$$\begin{cases} x=0,\frac{2}{3},\frac{1}{3},1,\frac{1}{3},\frac{2}{3}; \\ y=0,-\frac{1}{3},\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{6},0,\frac{1}{3},\frac{1\pm\sqrt{3}i}{6}; \\ z=0,-\frac{1}{3},\frac{-1\mp\sqrt{3}i}{6},0,\frac{1}{3},\frac{1\mp\sqrt{3}i}{6}. \end{cases}$$

4·139 求所有三数组 (x,y,z)，使得其中任何一数加上其他两数的积，结果都是2.

（第2届加拿大数学奥林匹克，1970年）

[解] 由已知条件得

$$\begin{cases} x + yz = 2, & ① \\ y + zx = 2, & ② \\ z + xy = 2. & ③ \end{cases}$$

① - ② 得 $(x-y)(1-z) = 0.$ ④

② - ③ 得 $(y-z)(1-x) = 0.$ ⑤

于是根据 ④ 和 ⑤ 可分四种情况讨论.

情况 1　$x - y = 0$ 且 $y - z = 0$. 此时有 $x = y = z$. 代入原方程得

$$x^2 + x - 2 = 0,$$

故 $x = 1$ 或 -2.

从而有 $x = y = z = 1$ 或 $x = y = z = -2$.

情况 2　$x - y = 0$ 且 $1 - x = 0$. 于是得 $x = y = z = 1$.

情况 3　$1 - z = 0$ 且 $y - z = 0$. 于是得 $x = y = z = 1$.

情况 4　$1 - z = 0$ 且 $1 - x = 0$. 于是得 $x = y = z = 1$.

综上所述,所求的三数组是(1,1,1) 和(-2, -2, -2).

4・140　解方程组

$$\begin{cases} xyz = x + y + z, & ① \\ yzt = y + z + t, & ② \\ ztx = z + t + x, & ③ \\ txy = t + x + y. & ④ \end{cases}$$

(第 13 届全俄数学奥林匹克,1987 年)

[解] ① - ② 得 $yz(x-t) = x - t$,

于是我们有 $yz = 1$ 或 $x = t$.

若 $yz = 1$,则由 ①,得 $x = x + y + z$,从而 $y + z = 0$,但方程组 $y \cdot z = 1$ 且 $y + z = 0$ 无实数解,所以只能是 $x = t$.

将 $x = t$ 代入 ③,得 $z = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$, ⑤

将 $x = t$ 代入 ④,得 $y = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$, ⑥

将 ⑤、⑥ 代入 ①,得

$$\frac{4x^3}{(x^2-1)^2} = x + \frac{4x}{x^2 - 1}.$$

$x=0$ 显然适合上方程，当 $x\neq 0$ 时，上方程可变为

$$x^4-2x^2-3=0,$$

$$x=\pm\sqrt{3}.$$

所以 $t=0$ 或 $t=\pm\sqrt{3}$.

同理可得 $y=z=0$ 或 $y=z=\pm\sqrt{3}$.

因此原方程组的解是

$(0,0,0,0),(\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{3}),(-\sqrt{3},-\sqrt{3},-\sqrt{3},-\sqrt{3})$.

4·141 解方程组

$$\begin{cases}x_5+x_2=yx_1,\\x_1+x_3=yx_2,\\x_2+x_4=yx_3,\\x_3+x_5=yx_4,\\x_4+x_1=yx_5.\end{cases}$$

其中 y 是参数.

（第5届国际数学奥林匹克，1963年）

[解]

$$\begin{cases}x_5+x_2=yx_1, & ①\\x_1+x_3=yx_2, & ②\\x_2+x_4=yx_3, & ③\\x_3+x_5=yx_4, & ④\\x_4+x_1=yx_5. & ⑤\end{cases}$$

显然对于任意的 y 值，

$$x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=0$$

是方程的一组解.

下面我们求方程组的“非平凡解”(即至少有一个 $x_i\neq 0, i=1,2,3,4,5$).

由①、⑤分别得

$$x_2=yx_1-x_5, \quad ⑥$$

$$x_4=yx_5-x_1, \quad ⑦$$

由②、④分别得

$$x_3=yx_2-x_1, \quad ⑧$$

$$x_3 = yx_4 - x_5, \quad ⑨$$

将⑥、⑦分别代入⑧、⑨得

$$x_3 = (y^2 - 1)x_1 - yx_5, \quad ⑩$$

$$x_3 = (y^2 - 1)x_5 - yx_1, \quad ⑪$$

由⑩、⑪得

$$(y^2 - 1)x_1 - yx_5 = (y^2 - 1)x_5 - yx_1,$$

即 $$(y^2 + y - 1)(x_1 - x_5) = 0, \quad ⑫$$

当 $y^2 + y - 1 \neq 0$ 时，必有 $x_1 = x_5$.

同样可以得到 $x_1 = x_2, x_2 = x_3, x_3 = x_4$ 等等. 于是，当 $y^2 + y - 1 \neq 0$ 时，有 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$.

将此结果代入方程①～⑤中的任意一个可得 $y = 2$，此时显然有 $y^2 + y - 1 \neq 0$.

于是当 $y = 2$ 时，$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$ 是方程组的非平凡解.

而当 $y^2 + y - 1 \neq 0$ 且 $y \neq 2$ 时，方程组只有平凡解.

当 $y^2 + y - 1 = 0$ 时，由 $y^2 - 1 = -y$，则由方程⑩得

$$x_3 = -y(x_1 + x_5),$$

又由方程⑥、⑦得 $x_2 = yx_1 - x_5, x_4 = yx_5 - x_1$.

综合以上，可得原方程组的解为

(i) 当 $y^2 + y - 1 \neq 0$ 且 $y \neq 2$ 时，方程组只有平凡解

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0.$$

(ii) 当 $y = 2$ 时，方程组有解 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = t$，$t$ 为任意实数.

(iii) 当 $y^2 + y - 1 = 0$ 时，方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = u, \\ x_5 = v, \\ x_2 = yu - v, \\ x_3 = -y(u + v), \\ x_4 = yv - u. \end{cases}$$

其中 u, v 为任意数，$y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

4·142 解方程组

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = x_1 + x_2 + x_3, \\ x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = x_2 + x_3 + x_4, \\ x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 = x_3 + x_4 + x_5, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{1985} \cdot x_{1986} \cdot x_{1987} = x_{1985} + x_{1986} + x_{1987}, \\ x_{1986} \cdot x_{1987} \cdot x_1 = x_{1986} + x_{1987} + x_1, \\ x_{1987} \cdot x_1 \cdot x_2 = x_{1987} + x_1 + x_2. \end{cases}$$

（第13届全俄数学奥林匹克，1987年）

[解] ① - ②，得 $x_2 \cdot x_3(x_1 - x_4) = x_1 - x_4$.

所以 $x_2 x_3 = 1$ 或 $x_1 = x_4$.

若 $x_2 \cdot x_3 = 1$，则由 ① 得 $x_1 = x_1 + x_2 + x_3$，从而 $x_2 + x_3 = 0$，但方程组 $x_2 \cdot x_3 = 1$ 且 $x_2 + x_3 = 0$ 无实数解. 因此，只能是 $x_1 = x_4$.

同理可得 $x_2 = x_5, x_3 = x_6, \cdots, x_{1985} = x_1, x_{1986} = x_2$，于是 $x_3 = x_6 = x_9 = \cdots = x_{1986} = x_2 = x_5 = x_8 = \cdots = x_{1985} = x_1 = x_4 = x_7 = \cdots = x_{1984} = x_{1987}$. 因此，原方程组的解形如$(x, x, \cdots, x)$其中 x 为某一实数，代入方程 ① 得 $x^3 = 3x$，解得 $x = 0$，或 $x = \pm\sqrt{3}$.

4·143 解方程组

$$\begin{cases} x - y + z = 1, & ① \\ y - z + u = 2, & ② \\ z - u + v = 3, & ③ \\ u - v + x = 4, & ④ \\ v - x + y = 5. & ⑤ \end{cases}$$

（中国高中数学联赛，1979年）

[解] ② + ③ - ⑤ 得 $x = 0$,

③ + ④ - ① 得 $y = 6$,

④ + ⑤ - ② 得 $z = 7$,

⑤ + ① - ③ 得 $u = 3$,

① + ② - ④ 得 $v = -1$.

经检验知，原方程组的解为

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 6, \\ z = 7, \\ u = 3, \\ v = -1. \end{cases}$$

4・144 如果 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 满足下列方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 24, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 48, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 96. \end{cases}$$

求 $3x_4 + 2x_5$ 的值.

（第 4 届美国数学邀请赛,1986 年）

［解］ 将给定方程组中五个方程加起来,再除以 6,得

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 31. \quad ①$$

用方程组中第四个方程减去 ① 得 $x_4 = 17.$

用方程组中第五个方程减去 ① 得 $x_5 = 65.$

所以 $3x_4 + 2x_5 = 3 \times 17 + 2 \times 65 = 181.$

4・145 解方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, & ① \\ x_2 + x_3 + x_4 = 9, & ② \\ x_3 + x_4 + x_5 = 3, & ③ \\ x_4 + x_5 + x_6 = -3, & ④ \\ x_5 + x_6 + x_7 = -9, & ⑤ \\ x_6 + x_7 + x_8 = -6, & ⑥ \\ x_7 + x_8 + x_1 = -2, & ⑦ \\ x_8 + x_1 + x_2 = 2. & ⑧ \end{cases}$$

（第 9 届莫斯科数学奥林匹克,1946 年）

［解］ 将 8 个方程全部相加,得

$$3(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_8) = 0,$$

⑨

$\therefore \quad x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_8 = 0.$

① + ④ + ⑦ − ⑨，得 $x_1 = 1$.

类似地可得 $x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4, x_5 = -4,$

$$x_6 = -3, x_7 = -2, x_8 = -1.$$

4·146 解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{yz}{y+z} = a, \\ \dfrac{xz}{x+z} = b, \\ \dfrac{xy}{x+y} = c. \end{cases}$$

（基辅数学奥林匹克，1936年）

[解] 设 $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$，注意到 $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$. 故原方程组可改写为

$$\begin{cases} \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a}, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{b}, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{c}. \end{cases} \quad ⊛$$

将三个方程相加，得 $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right).$

由最后一个方程与方程组⊛中的每一个方程比较得原方程组的解为

$$\begin{cases} x = \dfrac{2abc}{ac + ab - bc}, \\ y = \dfrac{2abc}{ab + bc - ac}, \\ z = \dfrac{2abc}{ac + bc - ab}. \end{cases}$$

4·147 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{x_2x_3x_4\cdots x_n}{x_1}=a_1,\\ \dfrac{x_1x_3x_4\cdots x_n}{x_2}=a_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{x_1x_2x_3\cdots x_{n-1}}{x_n}=a_n.\end{cases}$$

（基辅数学奥林匹克，1949 年）

[**解**]　先研究一切 $a_i>0$ 的情形：

(1) 若所有 $x_k(k=1,2,\cdots,n)$ 都大于 0.

将全部方程的左边与右边分别相乘，得

$$(x_1x_2x_3\cdots x_n)^{n-2}=a_1a_2a_3\cdots a_n,$$

于是

$$x_1x_2x_3\cdots x_n=\sqrt[n-2]{a_1a_2a_3\cdots a_n}. \quad ①$$

将第 k 个方程改写成

$$a_kx_k^2=x_1x_2x_3\cdots x_n.$$

由 ① 及一切 $x_i>0$，得

$$x_k=\sqrt{\frac{\sqrt[n-2]{a_1a_2\cdots a_n}}{a_k}},k=1,2,\cdots,n. \quad ②$$

(2) 若所有 $x_k(k=1,2,\cdots,n)$ 不全大于 0.

显然，将 ① 的解中的任意偶数个 x_k 变号，仍为原方程组的解.

再研究一切 $a_i<0$ 的情形：

将原方程组化为

$$\begin{cases}\dfrac{x_2x_3x_4\cdots x_n}{(-x_1)}=-a_1,\\ \dfrac{(-x_1)x_3x_4\cdots x_n}{x_2}=-a_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{(-x_1)\cdot x_2\cdot x_3\cdots x_{n-1}}{x_n}=-a_n.\end{cases}$$

于是由 ① 和 ② 可知，它的解是

$$x_1=-\sqrt{\frac{\sqrt[n-2]{(-1)^n a_1a_2\cdots a_n}}{-a_1}},$$

$$x_k=\sqrt{\frac{\sqrt[n-2]{(-1)^n a_1a_2\cdots a_n}}{-a_k}}(k=2,3,\cdots,n).$$

或者在 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中再任意改变其中偶数个值的符号.

注意到 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都与 $x_1x_2x_3\cdots x_n$ 同号,因此一切 a_i 都同号,并且不可能为零.也就是说,我们所作的关于方程组解的讨论已经完备了.

4·148 已知

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{2^2-1^2}+\dfrac{y^2}{2^2-3^2}+\dfrac{z^2}{2^2-5^2}+\dfrac{\omega^2}{2^2-7^2}=1,\\ \dfrac{x^2}{4^2-1^2}+\dfrac{y^2}{4^2-3^2}+\dfrac{z^2}{4^2-5^2}+\dfrac{\omega^2}{4^2-7^2}=1,\\ \dfrac{x^2}{6^2-1^2}+\dfrac{y^2}{6^2-3^2}+\dfrac{z^2}{6^2-5^2}+\dfrac{\omega^2}{6^2-7^2}=1,\\ \dfrac{x^2}{8^2-1^2}+\dfrac{y^2}{8^2-3^2}+\dfrac{z^2}{8^2-5^2}+\dfrac{\omega^2}{8^2-7^2}=1.\end{cases}$$

求 $x^2+y^2+z^2+\omega^2$ 的值.

(第 2 届美国数学邀请赛,1984 年)

[**解**] 首先,我们注意到:x,y,z,ω 满足给定的方程组等价于 $t=4,16,36,64$ 满足方程

$$\frac{x^2}{t-1}+\frac{y^2}{t-9}+\frac{z^2}{t-25}+\frac{\omega^2}{t-49}=1. \quad ①$$

去分母并移项得

$$(t-1)(t-9)(t-25)(t-49)-x^2(t-9)(t-25)(t-49)-y^2(t-1)(t-25)(t-49)-z^2(t-1)(t-9)(t-49)-\omega^2(t-1)(t-9)(t-25)=0 \quad ②$$

方程②是关于 t 的四次方程,$t=4,16,36,64$ 是这个方程的四个根.因此方程②等价于

$$(t-4)(t-16)(t-36)(t-64)=0 \quad ③$$

方程②、③的首项系数都是1,因此其他项的系数也应该相等.我们比较方程②和③的t^3项的系数,得

$$-1-9-25-49-x^2-y^2-z^2-\omega^2=-4-16-36-64,$$

即 $x^2+y^2+z^2+\omega^2=36.$

4·149 对实数a,b,c,且$a\neq 0$,给出关于$x_1,x_2,\cdots,x_n$的方程组

$$\begin{cases} ax_1^2+bx_1+C=x_2, \\ ax_2^2+bx_2+C=x_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ ax_{n-1}^2+bx_{n-1}+C=x_n, \\ ax_n^2+bx_n+C=x_1. \end{cases}$$

另外,$\Delta=(b-1)^2-4ac$,试证该方程组在实数范围内,

(1) 当$\Delta<0$时没有解;

(2) 当$\Delta=0$时只有一个解;

(3) 当$\Delta>0$时有多于一个解.

(第10届国际数学奥林匹克,1968年)

[解] $\because \sum\limits_{i=1}^{n}[ax_i^2+(b-1)x_i+C]=0,$

即

$$a\sum_{i=1}^{n}\left[\left(x_i+\frac{b-1}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=0.$$

$\therefore$ $\Delta<0$时,无实数解;

$\Delta=0$时,只有一个解,

$$x_i=-\frac{b-1}{2a};(i=1,2,\cdots,n)$$

$\Delta>0$时,显然有两组不同的解,

$$x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{-(b-1)+\sqrt{\Delta}}{2a},$$

$$x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{-(b-1)-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

4·150 解方程组

$$\begin{cases}|a_1 - a_2|x_2 + |a_1 - a_3|x_3 + |a_1 - a_4|x_4 = 1, \\ |a_2 - a_1|x_1 + |a_2 - a_3|x_3 + |a_2 - a_4|x_4 = 1, \\ |a_3 - a_1|x_1 + |a_3 - a_2|x_2 + |a_3 - a_4|x_4 = 1, \\ |a_4 - a_1|x_1 + |a_4 - a_2|x_2 + |a_4 - a_3|x_3 = 1.\end{cases}$$

其中 a_1, a_2, a_3, a_4 是已知的两两不等的实数.

（第 8 届国际数学奥林匹克,1966 年）

[解] 我们注意到,在方程组中,如果将下标 i 换成 j, j 换成 i,原方程组不变,所以,可以不失一般性地假设 $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$,这时原方程组化为:

$$\begin{cases}(a_1 - a_2)x_2 + (a_1 - a_3)x_3 + (a_1 - a_4)x_4 = 1, & ① \\ (a_1 - a_2)x_1 + (a_2 - a_3)x_3 + (a_2 - a_4)x_4 = 1, & ② \\ (a_1 - a_3)x_2 + (a_2 - a_3)x_2 + (a_3 - a_4)x_4 = 1, & ③ \\ (a_1 - a_4)x_1 + (a_2 - a_4)x_2 + (a_3 - a_4)x_3 = 1. & ④\end{cases}$$

① - ②,② - ③,③ - ④ 得

$$\begin{cases}(a_1 - a_2)(x_2 + x_3 + x_4 - x_1) = 0, \\ (a_2 - a_3)(-x_1 - x_2 + x_3 + x_4) = 0, \\ (a_3 - a_4)(-x_1 - x_2 - x_3 + x_4) = 0.\end{cases}$$

因为 $a_1 - a_2 \neq 0, a_2 - a_3 \neq 0, a_3 - a_4 \neq 0$,所以有

$$\begin{cases}x_2 + x_3 + x_4 - x_1 = 0, & ⑤ \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, & ⑥ \\ -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0. & ⑦\end{cases}$$

⑤ - ⑥,⑥ - ⑦ 得

$$x_2 = 0, x_3 = 0.$$

代入 ⑤ 得 $x_1 = x_4$.

再代入 ①、④ 得 $x_1 = x_4 = \dfrac{1}{a_1 - a_4}$.

经检验可知,当 $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$ 时,

$$x_1 = x_3 = 0, x_1 = x_4 = \frac{1}{a_1 - a_4}$$

是方程组的解.

一般地,当 $a_i > a_j > a_k > a_l$ 时,方程组的解为

$$x_j = x_k = 0, x_i = x_l = \frac{1}{a_i - a_l}.$$

4・151 n^2 个数 $x_{ij}(i,j = 1,2,\cdots,n)$ 满足下列 n^3 个方程：

$$x_{ij} + x_{jk} + x_{ki} = 0(i,j,k = 1,2,\cdots,n)$$

证明存在数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 使对任何 i,j，都有 $x_{ij} = a_i - a_j$.

（第 5 届全俄数学奥林匹克，1965 年）

[证] 令 $i = j = k$，则得 $3x_{ii} = 0$，

故 $\quad x_{ii} = 0(i = 1,2,\cdots,n)$.

令 $i = j$，则得 $x_{ii} + x_{ik} + x_{ki} = 0$，

故 $\quad x_{ik} = - x_{ki}(i,k = 1,2,\cdots,n)$.

现在固定 i,j，把 n 个方程

$$x_{ij} + x_{jk} + x_{ki} = 0,(k = 1,2,\cdots,n)$$

相加，我们得

$$nx_{ij} = S_i - S_j,$$

其中 S_i 是所有 $x_{ik}(k = 1,2,\cdots,n)$ 的和.

于是 $x_{ij} = \frac{S_i}{n} - \frac{S_j}{n}$.

这就是说，存在 n 个数

$$a_i = \frac{S_i}{n} = \frac{x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{in}}{n},$$

能使 $\quad x_{ij} = a_i - a_j$ 对任何 i,j 都成立.

4・152 已知含 $q = 2p$ 个未知数的 p 个方程组成的方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1q}x_q = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2q}x_q = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pq}x_q = 0. \end{cases} \quad ①$$

其中 $a_{ij} \in \{-1,0,1\}$，$i = 1,2,\cdots,p$；$j = 1,2,\cdots,q$. 试证方程组 ① 有一个具有下述性质的解 $(x_1,x_2,\cdots,x_q)$：

(1) x_i 都是整数 $(i = 1,2,\cdots,q)$；

(2) 至少有一个 $x_i(1 \leqslant i \leqslant q)$ 不等于零；

(3) $|x_i| \leqslant q(i = 1,2,\cdots,q)$.

（第 18 届国际数学奥林匹克，1976 年）

［证］ 如果对于每一个 i，x_i 的值都属于 $\{0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm p\}$，则有 $2p+1$ 种可能的取法．由乘法原理，满足上述条件的 n 元数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_q)$ 有 $(2p+1)^q$ 种取法．

如果 $a_{ij} \in \{-1,0,1\}$，$|x_i| \leqslant p$，那么

$$\left|\sum_{j=1}^{q} a_{ij}x_j\right| = |a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_q|$$
$$\leqslant |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_q|$$
$$\leqslant pq\,(i = 1,2,\cdots,p),$$

从而得 $\sum_{j=1}^{q} a_{ij}x_j \in \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm pq\}$.

这就是说，对于每一个 i，$\sum_{j=1}^{q} a_{ij}x_j$ 至多有 $2pq+1$ 种取值方法，因此，由乘法原理，p 元数组

$$\left(\sum_{j=1}^{q} a_{1j}x_j, \sum_{j=1}^{q} a_{2j}x_j, \cdots, \sum_{j=1}^{q} a_{pj}x_j\right)$$

至多有 $(2pq+1)^p$ 种取值方法．

因为 $(2p+1)^q = (2p+1)^{2p} = (4p^2+4p+1)^p$
$> (4p^2+1)^p = (2pq+1)^p$.

所以一定存在两个不同的 q 元数组

$(x'_1, x'_2 \cdots, x'_q)$ 和 $(x''_1, x''_2 \cdots, x''_q)$

其中 $|x'_i| \leqslant p$，$|x''_i| \leqslant p$，x'_i, x''_i 都是整数，$i = 1,2,\cdots,q$，使得

$$\left(\sum_{j=1}^{q} a_{1j}x'_j, \sum_{j=1}^{q} a_{2j}x'_j, \cdots, \sum_{j=1}^{q} a_{pj}x'_j\right)$$
$$= \left(\sum_{j=1}^{q} a_{1j}x''_j, \sum_{j=1}^{q} a_{2j}x''_j, \cdots, \sum_{j=1}^{q} a_{pj}x''_j\right),$$

因此 $\sum_{j=1}^{q} a_{ij}(x'_j - x''_j) = 0\,(i = 1,2,\cdots,p)$.

于是 $(x'_1 - x''_1, x'_2 - x''_2, \cdots, x'_q - x''_q)$ 就是满足题意的解．事实上，

(1) 由于 x'_i, x''_i 都是整数，因此 $x'_i - x''_i$ 是整数，$i = 1,2,\cdots,q$.

(2) 由于 $(x'_1, x'_2, \cdots, x'_q)$ 和 $(x''_1, x''_2, \cdots, x''_q)$ 不同，因此

$x'_i - x''_i$ 至少有一个不为零.

(3) 由于 $|x'_i| \leqslant p$, $|x''_i| \leqslant p$,因此

$$|x'_i - x''_i| \leqslant |x'_i| + |x''_i| \leqslant p + p = 2p = q.$$

4·153　解方程组

$$\begin{cases} \sin x + 2\sin(x+y+z) = 0, & ① \\ \sin y + 3\sin(x+y+z) = 0, & ② \\ \sin z + 4\sin(x+y+z) = 0. & ③ \end{cases}$$

(第14届全苏数学奥林匹克,1980年)

[解]　① + ② − ③ 得

$$\sin x + \sin y - \sin z + \sin(x+y+z) = 0,$$

和差化积得

$$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + 2\cos\left(\frac{x+y}{2}+z\right)\sin\frac{x+y}{2} = 0,$$

$$\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+z}{2}\cos\frac{y+z}{2} = 0.$$

于是得　$\sin\frac{x+y}{2} = 0$ 或 $\cos\frac{x+z}{2} = 0$ 或 $\cos\frac{y+z}{2} = 0$.

情形1　若 $\sin\frac{x+y}{2} = 0$,则

$$\frac{x+y}{2} = k\pi(k \text{ 为任意整数}),$$

即　　$x + y = 2k\pi.$

将④代入原方程组,得

$$\begin{cases} \sin x + 2\sin z = 0, & ⑤ \\ \sin y + 3\sin z = 0, & ⑥ \\ \sin z + 4\sin z = 0. & ⑦ \end{cases}$$

由⑦得　$\sin z = 0$,

因而　　$z = m\pi$(m 为任意整数).

代入⑤和⑥,得　$\begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin y = 0. \end{cases}$

因此　　$x = n\pi, y = l\pi$(n, l 为任意整数).

经检验,原方程组有解

$$\begin{cases} x = n\pi, \\ y = l\pi, \text{（}m, n, l \text{ 为任意整数）} \\ z = m\pi. \end{cases} \quad ⑧$$

情形 2　若 $\cos\dfrac{x+z}{2} = 0$，则类似地可得解 ⑧.

情形 3　若 $\cos\dfrac{y+z}{2} = 0$，则类似地可得解 ⑧.

综上所述，原方程组的解是 ⑧.

4・154　从方程组

$$\begin{cases} a = \cos u + \cos v + \cos w, \\ b = \sin u + \sin v + \sin w, \\ c = \cos 2u + \cos 2v + \cos w, \\ d = \sin 2u + \sin 2v + \sin 2w. \end{cases}$$

中消去 u、v、w.

（加拿大国家集训队训练题）

[解]　由方程组得

$a^2 + b^2 = 3 + 2[\cos(u - v) + \cos(v - w) + \cos(w - u)]$,

$a^2 - b^2 = C + 2[\cos(u + v) + \cos(v + w) + \cos(w + u)]$,

$2ab = d + 2[\sin(u + v) + \sin(v + w) + \sin(w + u)]$,

所以
$$\left(\frac{a^2 - b^2 - c}{2}\right)^2 + \left(\frac{2ab - d}{2}\right)^2$$
$$= 3 + 2[\cos(u - v) + \cos(v - w) + \cos(w - u)]$$
$$= a^2 + b^2.$$

即　$(a^2 - b^2 - c)^2 + (2ab - d)^2 = 4(a^2 + b^2)$.

4・155　试问要使下列方程组

$$\begin{cases} \sin x_1 + \sin x_2 + \cdots + \sin x_n = 0, & ① \\ \sin x_1 + 2\sin x_2 + \cdots + n\sin x_n = 100. & ② \end{cases}$$

有解，n 的最小值是多少？

（第 22 届全苏数学奥林匹克，1988 年）

[解]　如果 $n < 20$，那么我们用方程 ② 减去方程 ① 的十倍，得

$-9\sin x_1 - 8\sin x_2 - \cdots - \sin x_9 + \sin x_{11} + 2\sin x_{12} + \cdots + (n - 10)\sin x_n$

$= 100.$ ③

③ 式左端的绝对值不大于$(9+8+\cdots+1)\times 2=90$,因此 ③ 式不可能成立.故原方程组当 $n<20$ 时无解.

当 $n=20$ 时,我们可取 $x_1,x_2,\cdots,x_{20}$ 使

$$\sin x_i=-1,(i=1,2,\cdots,10);$$

$$\sin x_j=1,(j=11,12,\cdots,20).$$

这样取得的 $x_1,x_2,\cdots,x_{20}$ 显然是 $n=20$ 时原方程组的解.

故要使原方程组有解,n 的最小值是 20.

4·156 求出方程组

$$\begin{cases}\dfrac{4x^2}{1+4x^2}=y,\\ \dfrac{4y^2}{1+4y^2}=z,\\ \dfrac{4z^2}{1+4z^2}=x.\end{cases}$$

的所有实数解,并证明你的解答是正确的.

(第 28 届加拿大数学奥林匹克,1996 年)

[解] 若 $x=y$,则

$$\frac{4x^2}{1+4x^2}=x,$$

$$4x^2=x+4x^3,$$

$$x(4x^2-4x+1)=0,$$

$$x=0\text{ 或 }\frac{1}{2},$$

从而得 $x=y=z=0$ 或 $x=y=z=\dfrac{1}{2}$.

若 $x>y$,则

$$\frac{4z^2}{1+4z^2}>\frac{4x^2}{1+4x^2},$$

$$1-\frac{1}{1+4z^2}>1-\frac{1}{1+4x^2}.$$

注意到由原方程可得 $x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0$,因此由上式可得

$$z>x.$$

又由原方程组的轮换对称性可知,由 $z > x$ 可推得 $y > z$. 于是有

$$x > y > z > x,$$

矛盾.

若 $x < y$,则类似地可推出

$$x < y < z < x,$$

矛盾.

因此,原方程组仅有两组解:

$$(x,y,z) = (0,0,0) \text{ 和 } (x,y,z) = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

4・157 w,a,b,c 是两两不同的实数,已知存在实数 x,y,z,满足

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ xa^2 + yb^2 + zc^2 = w^2, \\ xa^3 + yb^3 + zc^3 = w^3, \\ xa^4 + yb^4 + zc^4 = w^4. \end{cases}$$

请用 a,b,c 表示 w.

(爱尔兰数学奥林匹克,1994 年)

[**解**] 由题目方程组的第一个方程知,x,y,z 不全为零,不妨设 $z \neq 0$.

由题目方程组的第一个方程得

$$x = 1 - (y + z).$$

将上式代入题目方程组的后三个方程,分别有

$$\begin{cases} y(b^2 - a^2) + z(c^2 - a^2) = w^2 - a^2, & ① \\ y(b^3 - a^3) + z(c^3 - a^3) = w^3 - a^3, & ② \\ y(b^4 - a^4) + z(c^4 - a^4) = w^4 - a^4. & ③ \end{cases}$$

①・$(b^2 + a^2)$ - ③,有

$$(c^2 - a^2)(b^2 - c^2)z = (w^2 - a^2)(b^2 - w^2). \quad ④$$

①・$(b^3 - a^3)$ - ②・$(b^2 - a^2)$,经化简,可以得到

$$(b - a)(b - c)(c - a)(ab + ac + bc)z$$
$$= (b - a)(b - w)(w - a)(ab + aw + bw),$$

由于 $a \neq b$,因此从上式可知

$$(b - c)(c - a)(ab + ac + bc)z$$

$$= (b - w)(w - a)(ab + aw + bw). \quad ⑤$$

由于 $a \neq c, b \neq c, z \neq 0, w \neq a, w \neq b$,因此:

当 $ab + ac + bc = 0$ 时,由⑤式,得

$$ab + aw + bw = 0,$$

即

$$(a + b)w = - ab,$$

易知 $a + b \neq 0$(否则,$a + b = 0$,由上式,有 $ab = 0$,从而有 $a = 0$ 或 $b = 0$,代入 $a + b = 0$ 中得 $a = b = 0$.与 $a \neq b$ 矛盾).所以

$$w = - \frac{ab}{a + b}.$$

当 $ab + ac + bc \neq 0$ 时,④÷⑤,有

$$\frac{(c + a)(b + c)}{ab + ac + bc} = \frac{(w + a)(b + w)}{ab + aw + bw},$$

上式两端都减去1,得

$$\frac{c^2}{ab + ac + bc} = \frac{w^2}{ab + aw + bw},$$

去分母,有

$$(ab + ac + bc)w^2 - (a + b)c^2w - abc^2 = 0,$$

即

$$(w - c)[(ab + ac + bc)w + abc] = 0,$$

由 $w \neq c$,得

$$(ab + ac + bc)w = - abc,$$

即

$$w = - \frac{abc}{ab + ac + bc}.$$

综上所述,我们有

$$w = \begin{cases} - \dfrac{ab}{a + b}, \text{当 } ab + ac + bc = 0 \text{ 时}, \\ - \dfrac{abc}{ab + ac + bc}, \text{当 } ab + ac + bc \neq 0 \text{ 时}. \end{cases}$$

第6节 在特集上解方程

4·158 试求下列方程组的整数解

$$\begin{cases} x^{x+y} = y^{60}, \\ y^{x+y} = x^{15}. \end{cases}$$

(中国北京市数学竞赛,1957年)

[解] 因为 $y^{(x+y)^2} = x^{15(x+y)} = (y^{60})^{15} = y^{900}$.
因此 $y = \pm 1$ 或者 $(x+y)^2 = 900$,即 $x + y = \pm 30$,以 $y = \pm 1$ 代入原方程组的第二式,有

$$(\pm 1)^{x\pm 1} = x^{15}, \mid x \mid = 1,$$

但 $x = -1$ 不是解,而 $x = 1, y = \pm 1$ 是两组整数解.

$x + y = -30$ 时,由原方程组的第一式得 $x = y^{-2}$,代入 $x + y = -30$,有 $y^3 + 30y^2 + 1 = 0$ 无整数解.

$x + y = 30$ 时,用 $x = y^2$ 代入可得 $y^2 + y - 30 = 0$,即有 $y = 5$ 及 $y = -6$,相应的 $x = 25$ 及 $x = 36$,又有两组整数解,所以原方程的整数解共有四组:

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ y = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 25, \\ y = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 36, \\ y = -6. \end{cases}$$

4·159 求方程 $x + y = x^2 - xy + y^2$ 的整数解.

(基辅数学奥林匹克,1947年)

[解] 把原方程变形为

$$y^2 - (x+1)y + x^2 - x = 0.$$

由于方程有实数根,所以

$$\Delta = -3(x-1)^2 + 4 \geqslant 0,$$

即 $$3(x-1)^2 \leqslant 4,$$

有 $$1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \leqslant x \leqslant 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

又 x 为整数,所以 $x = 0,1,2$.
所以原方程的整数解为

$$(0,0),(0,1),(1,0),(1,2),(2,1),(2,2).$$

4·160　求方程$7^x-3\cdot 2^y=1$的正整数解.

（第 16 届全俄数学奥林匹克,1990 年）

[解]　当$1\leqslant y\leqslant 4$时,可试得方程有两解(1,1)和(2,4).当$y\geqslant 5$时,有

$$7^x-1=(7-1)(7^{x-1}+7^{x-2}+\cdots+7+1)=3\cdot 2^y,$$

由此得　$7^{x-1}+7^{x-2}+\cdots+7+1=2^{y-1}$.所以$x$是偶数.

设　$x=2m$,则

$$7^{2m}-1=(7^2-1)(7^{2m-2}+7^{2m-4}+\cdots+7^2+1)$$
$$=48\cdot 2^{y-4}.$$

由此得m是偶数.设$x=4p$,则

$$7^x-1=7^{4p}-1=(7^4-1)(7^{4p-4}+7^{4p-8}+\cdots+7^4+1)$$

可被 5 整除,但$3,2^y$不能被 5 整除.因此$y\geqslant 5$时,方程无正整数解.

故原方程只有两解.

4·161　解方程　$2\sqrt{x}+\sqrt{2y}=\sqrt{32}$,$x,y$为整数.

（加拿大数学竞赛,1986 年）

[解]　易知　$x\geqslant 0,y\geqslant 0$.

由原方程得

$$\sqrt{2y}=\sqrt{32}-2\sqrt{x},$$

两端平方整理可得

$$y=16+2x-8\sqrt{2x},$$

于是$8\sqrt{2x}$应是整数,令其为a,于是又得

$$2x=\left(\frac{a}{8}\right)^2,$$

故a为 8 的倍数,令$a=8b$,代入又有$2x=b^2$,从而b^2为偶数,再令$b=2c$代入,又有$x=2c^2$.

由原式可知,若$y=0$,则$x=8$;若$y\neq 0$,便知$x<8$.于是$0\leqslant x\leqslant 8$,从而$0\leqslant c\leqslant 2$.容易算得c,x,y的取值如下表:

c	0	1	2
x	0	2	8
y	16	4	0

4·162　求满足方程　$xy=20-3x+y$ 的所有整数对(x,y).

（第13届全俄数学奥林匹克,1987年）

［解］　原方程可变形为

$$(x-1)(y+3)=17,$$

所以 $\begin{cases}x-1=1,\\y+3=17;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x-1=17,\\y+3=1;\end{cases}$

或 $\begin{cases}x-1=-1,\\y+3=-17;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x-1=-17,\\y+3=-1.\end{cases}$

解得满足方程的整数对为$(2,14)$,$(18,-2)$,$(0,-20)$,$(-16,-4)$.

4·163　求出任何一组满足方程 $x^2-51y^2=1$ 的正整数 x 和 y.

（第14届全俄数学奥林匹克,1988年）

［解］　原方程可变形为

$$x^2=(7y+1)^2+2y(y-7),$$

令　$y=7$,可得 $x=50$.

所以,$x=50$,$y=7$ 是原方程的一个正整数解.

4·164　解整数方程 $x^2y+xy^2=30$.

（第2届友谊杯国际数学竞赛,1988年）

［解］　原方程化为

$$xy(x+y)=2\times3\times5, \qquad ①$$

由对称性,不妨设 $|x|\leqslant|y|$,于是我们有 $|x|\leqslant5$.

令　$x=1$,则①式化为 $y(1+y)=30$.解得 $y=5$ 或 -6.

令 $x=2$,则①式化为 $2y(2+y)=30$,解得 $y=3$ 或 -5.

令 $x=3$,则①式化为 $3y(3+y)=30$,解得 $y=2$ 或 -5.

令 $x=5$,则①式化为 $5y(5+y)=30$,解得 $y=1$ 或 -6.

令 $x=-1$,则①式化为 $-y(y-1)=30$,无解.

令 $x=-2$,则①式化为 $-2y(y-2)=30$,无解.

令 $x=-3$,则①式化为 $-3y(y-3)=30$,无解.

令 $x=-5$,则①式化为 $-5y(y-5)=30$,解得

$y=2$ 或 $y=3$.

故原方程的整数解为　$\{(1,5);(5,1);(1,-6);(-6,1);(2,3);(3,2);(2,-5);(-5,2);(3,-5);(-5,3);(5,-6);(-6,5)\}$.

4·165 求方程 $\underbrace{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots+\sqrt{x}}}}}_{1964\text{个}}=y$的整数解.

（第4届全俄数学奥林匹克，1964年）

[解] 设x_0, y_0为满足该方程的整数.则

$$\underbrace{\sqrt{x_0+\sqrt{x_0+\sqrt{x_0+\cdots+\sqrt{x_0}}}}}_{1964\text{个}}=y_0.$$

平方再移项得

$$\underbrace{\sqrt{x_0+\sqrt{x_0+\cdots+\sqrt{x_0}}}}_{1963\text{个}}=y_0^2-x.$$

即 $$\underbrace{\sqrt{x_0+\sqrt{x_0+\cdots+\sqrt{x_0}}}}_{1963\text{个}}=m_1,$$

其中 $m_1=y_0^2-x_0$，它是一个整数.

对上式反复施行平方、移项可得

$$\sqrt{x_0+\sqrt{x_0}}=m,$$

及 $\sqrt{x_0}=k$，其中m和k都是整数.

于是，我们有 $x_0=k^2$,

即 $$k^2+k=m^2,$$

$$k(k+1)=m^2.$$

上式仅当 $k=0$时成立，故得

$$x_0=0, y_0=0.$$

即原方程有惟一解 $\begin{cases}x=0,\\y=0.\end{cases}$

4·166 求满足$x^2+x=y^4+y^3+y^2+y$的所有整数x,y.

（第1届全苏数学奥林匹克，1967年）

[解] 把方程两边同乘以4，再加1得

$$(2x+1)^2=(2y^2+y)^2+3y^2+4y+1,$$

即 $$(2x+1)^2=(2y^2+y+1)^2-(y^2-2y).$$

如果y是不同于$-1,0,1$和2的整数，那么

$$3y^2+4y+1>0 \quad 且 \quad y^2-2y>0.$$

此时有

$$(2y^2+y)^2<(2x+1)^2<(2y^2+y+1)^2,$$

因此,$2x+1$在整数$2y^2+y$和$2y^2+y+1$之间,$2x+1$不可能是整数,从而x不可能是整数.这就是说,y取不同于$-1,0,1,2$的整数时,原方程无整数解.

将 $y=-1, y=0, y=1, y=2$分别代入原方程,可得原方程的解

$$\begin{cases}x=0,\\y=-1;\end{cases}\quad\begin{cases}x=-1,\\y=-1;\end{cases}\quad\begin{cases}x=0,\\y=0;\end{cases}\quad\begin{cases}x=-1,\\y=0;\end{cases}\quad\begin{cases}x=5,\\y=2;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=-6,\\y=2.\end{cases}$$

4·167 求方程 $x^3-y^3=xy+61$的正整数解.

(第15届全苏数学奥林匹克,1981年)

[解] 显然 $x>y$.设$x=y+d(d\geqslant 1)$.

代入原方程得

$$(y+d)^3-y^3=(y+d)y+61,$$

$$(3d-1)y^2+(3d^2-d)y+d^3=61. \qquad ①$$

由①得 $d^3<61$,

因此 $d\leqslant 3$.

若$d=1$,则①式化为

$$2y^2+2y-60=0,$$

$$y^2+y-30=0,$$

$$(y+6)(y-5)=0,$$

于是得 $y=5, x=6$.

若 $d=2$,则①式化为

$$5y^2+10y-53=0,$$

此方程无正整数解.

若 $d=3$,则①式化为

$$8y^2+24y-34=0,$$

此方程也无正整数解.

综上所述,原方程只有一组正整数解.

$$\begin{cases} x = 6, \\ y = 5. \end{cases}$$

4·168　求方程的整数解

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1} = \left(1+\frac{1}{1988}\right)^{1988}.$$

（第22届全苏数学奥林匹克，1988年）

[解]　原方程可化为

$$\frac{(m+1)^{m+1}}{m^{m+1}} = \frac{1989^{1988}}{1988^{1988}} \quad ①$$

如果　$m>0$，那么①式两端都是既约分数，因此必有

$$m^{m+1} = 1988^{1988} \quad ②$$

注意到　$m \geqslant 1988$ 时，$m^{m+1} > 1988^{1988}$；

$0 < m < 1988$ 时，$m^{m+1} < 1988^{1988}$.

故②式不可能成立. 这说明 $m \leqslant 0$.

显然　$m \neq 0, m \neq -1$. 因此可设 $m \leqslant -2$.

令　$n = -(m+1)$，则 n 是正整数，并可把①式化为

$$\frac{(n+1)^{n}}{n^{n}} = \frac{1989^{1988}}{1988^{1988}} \quad ③$$

由于③式两端都是既约分数，因此必有

$$n^{n} = 1988^{1988}, \quad ④$$

显然　$n > 1988$ 时，$n^{n} > 1988^{1988}$；

$0 < n < 1988$ 时，$n^{n} < 1988^{1988}$；

故④式仅有惟一解　$n = 1988$. 经计算得

$$m = -1989.$$

经检验，原方程的整数解为　$m = -1989$.

4·169　在自然数范围内解方程

$$x^{y} = y^{x} (x \neq y).$$

（第11届莫斯科数学奥林匹克，1948年）

[解]　若 $x=1$，则 $y=1$，此与 $x \neq y$ 矛盾. 因此 $x \geqslant 2$ 且 $y \geqslant 2$.

设　$x^{y} = y^{x} = a^{d}$，其中 a, d 为自然数，并使 d 达到最大. 则 $a \neq 1$，即 $a \geqslant 2$，并且必存在 b, c，使

$$x=a^b, y=a^c.$$

代入原方程,得

$$a^{by}=a^{cx}.$$

从而有 $by=cx$.

不妨设 $y>x$,于是 $c>b$,且

$$\frac{c}{b}=\frac{y}{x}=\frac{a^c}{a^b}=a^{c-b},$$

设 $a^{c-b}=k$,则 $y=kx(k\geqslant 2)$.代入原方程得

$$x^{kx}=(kx)^x,$$

从而有 $x^k=kx$,

即 $x^{k-1}=k \quad (x\geqslant 2, k\geqslant 2)$.

于是必有 $x=2, k=2$.故 $y=kx=4$.经检验,$x=2, y=4$ 是原方程的解.又由对称性知,$x=4, y=2$ 也是原方程的解.

4・170 求满足 $w!=x!+y!+z!$的所有正整数 w, x, y, z.

(第 15 届加拿大数学奥林匹克,1983 年)

[解] 不妨设 $w>x\geqslant y\geqslant z$.

若 $y>z$,则以 $z!$除等式两边得

$$w(w-1)\cdots(z+1)$$
$$=x(x-1)\cdots(z+1)+y(y-1)\cdots(z+1)+1.$$

显然 $z+1$能整除等式左边,但不能整除等式右边.这个矛盾说明,必有 $y=z$.

若 $x>y=z$,则以 $z!$除等式两边得

$$w(w-1)\cdots(z+1)=x(x-1)\cdots(z+1)+2,$$

于是 $z+1$ 能整除 2,故 $z+1=2$.这样,上式又可约简为

$$w(w-1)\cdots 3=x(x-1)\cdots 3+1,$$

这是不可能的.因此必有 $x=y=z$.于是得

$$w!=3z!.$$

从而有 $w=3, x=y=z=2$.

4・171 求满足方程 $2a^2=3b^3$ 的所有的正整数对(a,b).

(第 10 届加拿大数学奥林匹克,1978 年)

[解] 设(x,y)是满足给定方程的正整数对.于是

$$2x^2=3y^3.$$

可见，x 是 3 的倍数. 我们设 $x = 3x_1$，代入并化简得

$$2 \cdot 3 \cdot x_1^2 = y^3.$$

同理可设 $y = 2 \cdot 3 \cdot y_1$. 代入并化简得

$$x_1^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot y_1^3.$$

再设 $x_1 = 2 \cdot 3 \cdot x_2$. 代入并化简得

$$x_2^2 = y_1^3.$$

令 $x_2^2 = y_1^3 = c$，则 c 是平方数，又是立方数，从而是 6 次方数. 设 $c = d^6$，于是得

$$x_2 = d^3, \quad y_1 = d^2$$

从而

$$x = 3x_1 = 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x_2 = 18d^3,$$

$$y = 2 \cdot 3 \cdot y_1 = 6d^2.$$

这就是说，形如 $(18d^3, 6d^2)$ 的正整数对，其中 d 是任何正整数，都满足给定的方程.

4・172 求方程

$$x^{2n+1} - y^{2n+1} = xyz + 2^{2n+1}$$

的满足条件 $n \geqslant 2, z \leqslant 5 \cdot 2^{2n}$ 的所有正整数解组 (x, y, z, n).

（第 6 届中国中学生数学冬令营，1991 年）

［解］ 由已知方程易知 $x - y > 0$ 且 x 与 y 有相同的奇偶性，所以 $x - y \geqslant 2$.

当 $y = 1, x = 3$ 时，从方程得到

$$z = 3^{2n} - \frac{1}{3}(1 + 2^{2n+1}). \qquad ①$$

为使 $z \leqslant 5 \cdot 2^{2n}$，应有

$$3^{2n} \leqslant 5 \cdot 2^{2n} + \frac{1}{3}(1 + 2^{2n+1})$$

$$= \left(5 + \frac{2}{3}\right)2^{2n} + \frac{1}{3} \leqslant 6 \cdot 2^{2n}.$$

由此解得 $n \leqslant 2$. 又因题中要求 $n \geqslant 2$，所以 $n = 2$.

将 $n = 2$ 代入 ① 式，得到 $z = 70$，于是得到原方程的一组解是：$(3, 1, 70, 2)$.

下面我们来证明方程的满足要求的解只此一组.

事实上,当 $y=1,x\geqslant 4$ 时,由于 $z\leqslant 5\cdot 2^{2n}$ 和 $n\geqslant 2$,我们有

$$\begin{aligned} x^{2n+1}-xyz &= x(x^{2n}-z)\\ &\geqslant 4(4^{2n}-5\cdot 2^{2n})\\ &= 2^{2n+2}(2^{2n}-5)\\ &> 2^{2n+1}+1\\ &= 2^{2n+1}+y^{2n+1}. \end{aligned}$$

可见,此时方程无解.

当 $y\geqslant 2$ 时,由于 $x-y\geqslant 2,z\leqslant 5\cdot 2^{2n},n\geqslant 2$.

故有

$$\begin{aligned} &x^{2n+1}-xyz\geqslant x[(y+2)^{2n}-yz]\\ &= x[y^{2n}+4ny^{2n-1}+4n(2n-1)y^{2n-2}+\cdots+2^{2n}-yz]\\ &> xy^{2n}+x\cdot 2^{2n}+y[4ny^{2n-2}+4n(2n-1)y^{2n-3}-5\cdot 2^{2n}]\\ &> y^{2n+1}+2^{2n+1}+2^{2n-3}y[8n+4n(2n-1)-40]\\ &\geqslant y^{2n+1}+2^{2n+1}. \end{aligned}$$

这意味着,$y\geqslant 2$ 时方程也无解.

综上所述,原方程惟一的满足要求的正整数解组就是 $(3,1,70,2)$.

4・173　关于 x,y,z 的方程 $x^2+y^3=z^4$ 有质数解吗?

(第 14 届全苏数学奥林匹克,1980 年)

[解]　将原方程化为

$$y^3=(z^2-x)(z^2+x).$$

因为 y 是质数,所以我们得到

$$\begin{cases} z^2-x=1,\\ z^2+x=y^3. \end{cases} \qquad ①$$

或

$$\begin{cases} z^2-x=y,\\ z^2+x=y^2. \end{cases} \qquad ②$$

由 ① 得　$x=(z-1)(z+1)$,

于是　$z-1=1,\quad z=2,$

从而　$x=3,\quad y^3=7,$

此与 y 是质数矛盾,所以方程组 ① 无质数解.

由 ② 得　$x=(y-z)(y+z)$,

于是　$y-z=1,\quad y=z+1,$

从而　　$x = 2z + 1.$

代入 ② 中第一个方程得

$$z^2 - 3z - 2 = 0,$$

此方程无质数解,所以方程组 ② 无质数解.

综上所述,原方程无质数解.

4・174　求如下方程的整数解

$$\left[\frac{x}{1!}\right] + \left[\frac{x}{2!}\right] + \cdots + \left[\frac{x}{10!}\right] = 1001.$$

(第 24 届全苏数学奥林匹克,1990 年)

[解]　由方程可知,x 是不超过 1001 的自然数,所以 $x < 6!$,因而对 $n \geqslant 6$ 时的加项 $\left[\frac{x}{n!}\right]$ 可以舍去.而每个 $x < 6!$ 均可惟一地表示成

$$x = a \cdot 5! + b \cdot 4! + c \cdot 3! + d \cdot 2! + k \cdot 1!,$$

其中 a,b,c,d,k 为非负整数,且有

$$a \leqslant 5, b \leqslant 4, c \leqslant 3, d \leqslant 2, k \leqslant 1.$$

将 x 的这一表达式代入方程,可得

$$206a + 41b + 10c + 3d + k = 1001.$$

由于　　$41b + 10c + 3d + k \leqslant 201$,由此可知

$$800 \leqslant 206a \leqslant 1001,$$

亦即　　$a = 4$,这就意味着有

$$41b + 10c + 3d + k = 177.$$

继续进行类似的讨论,我们得到

$$b = 4, c = d = 1, k = 0.$$

因此有　　$x = 4 \cdot 5! + 4 \cdot 4! + 3! + 2! = 584.$

4・175　求满足条件 $\dfrac{x+y}{x^2 - xy + y^2} = \dfrac{3}{7}$ 的整数 x,y 所有可能的值.

(第 12 届全俄数学奥林匹克,1986 年)

[解]　设整数 x,y 满足给定的条件,则有

$$7(x + y) = 3(x^2 - xy + y^2). \qquad ①$$

设　$p = x + y, q = x - y,$

则　　$x = \dfrac{p+q}{2}, y = \dfrac{p-q}{2}.$

代入①式得 $28p = 3(p^2 + 3q^2)$. ②

由此可得,$3 \mid p$,p 是非负整数,设 $p = 3k$,k 是非负整数,代入②,得

$$28k = 3(3k^2 + q^2). \quad ③$$

同样,$3 \mid k$.设 $k = 3m$ (m 是非负整数).代入③得

$$28m = 27m^2 + q^2,$$

即 $m(28 - 27m) = q^2$.

因为 $q^2 \geqslant 0$,

所以 $m(28 - 27m) \geqslant 0$,则 $m = 0$ 或 $m = 1$.

若 $m = 0$,则 $p = q = 0, x = y = 0$(舍去).

若 $m = 1$,则 $q = \pm 1, p = q, x = 4, y = 5$ 或 $x = 5, y = 4$.

故满足条件的数对(x, y)是$(5,4)$或$(4,5)$.

4·176 求出所有满足方程 $5(xy + yz + zx) = 4xyz$ 的正整数 x, y, z.

(新加坡中学生数学竞赛,1989年)

[解] 原方程变形为

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5}.$$

不妨设 $x \leqslant y \leqslant z$,于是,我们有

$$\frac{3}{x} \geqslant \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5},$$

由此得 $x < 4$.

又由 $\frac{1}{x} < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5}$,得 $x > 1$.

故 $1 < x < 4$.

下面分两种情况讨论:

情况1 当 $x = 2$ 时,我们有

$$\frac{2}{y} \geqslant \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3}{10}.$$

由此得 $3 < y < 7$.

若 $y = 4$, 则 $z = 20$;

若 $y = 5$, 则 $z = 10$;

若 $y = 6$, 则 z 不是整数.

情况2 当 $x = 3$ 时,仿照情况1的讨论可得

$$\frac{2}{y} \geqslant \frac{4}{5} - \frac{1}{3} = \frac{7}{15}\text{，且}\quad \frac{1}{y} < \frac{7}{15}.$$

因此 $2 < y < 5$.

当 $y = 3$ 或 $y = 4$ 时，z 都没有整数解.

因此原方程的解共有 12 组：

(2,4,20)；(2,20,4)；(4,2,20)；(20,2,4)；

(4,20,2)；(20,4,2)；(2,5,10)；(2,10,5)；

(5,2,10)；(10,2,5)；(5,10,2)；(10,5,2).

4·177 证明对每个自然数 n，方程

$(x + \sqrt{3}y)^n = \sqrt{1 + \sqrt{3}}$ 没有有理数解 x 和 y.

（第 14 届全俄数学奥林匹克，1988 年）

[证] 设存在有理数 x 和 y，满足等式

$$x + \sqrt{3}y = \sqrt{1 + \sqrt{3}},$$

于是 $(x + \sqrt{3}y)^2 = 1 + \sqrt{3}$，

即 $x^2 + 3y^2 - 1 = (1 - 2xy)\sqrt{3}$.

因为数 x 和 y 是有理数，而 $\sqrt{3}$ 不是有理数，故数 x 和 y 满足方程组

$$\begin{cases} 1 - 2xy = 0, & ① \\ x^2 + 3y^2 - 1 = 0. & ② \end{cases}$$

② × $4x^2$，得 $4x^4 + 12x^2y^2 - 4x^2 = 0$ ③

由 ① 得 $4x^2y^2 = 1$ ④

将 ④ 代入 ③ 得 $4x^4 - 4x^2 + 3 = 0$ 矛盾. 因此，当 $n = 1$ 时，本题的结论成立.

对于任意自然数 n 的情况，如果存在自然数 n 和有理数 x 和 y，使

$$(x + \sqrt{3}y)^n = \sqrt{1 + \sqrt{3}}$$

成立. 那么利用二项式定理将上式左端展开，就可以知道必存在有理数 x_1 和 y_1，使等式

$$x_1 + \sqrt{3}y_1 = \sqrt{1 + \sqrt{3}}$$

成立，这与已证的 $n = 1$ 的结论矛盾. 所以，问题的结论得证.

4·178 (a) 设 n 是一个正整数. 证明：存在不同的正整数 x, y, z，使得

$$x^{n-1}+y^{n}=z^{n+1}$$

(*b*) 设 a,b,c 是正整数，且 a 与 b 互素，c 或与 a 或与 b 互素. 证明：存在无限多个不同正整数 x,y,z 的三元数组，使得

$$x^{a}+y^{b}=z^{c}.$$

（第 38 届国际数学奥林匹克预选题，1997 年）

[证] (*a*) 注意到 $1+3=2^{2}$，于是我们可令

$$\begin{cases} x=2^{n^{2}}\cdot 3^{n+1}, \\ y=2^{n(n-1)}\cdot 3^{n}, \\ z=2^{n^{2}-2n+2}\cdot 3^{n-1}. \end{cases}$$

它们满足方程 $x^{n}+y^{n}=z^{n+1}$.

(*b*) 设 $P\in N, P\geqslant 3, Q=P^{c}-1>1$. 如果给定方程

$$x^{a}+y^{b}=z^{c}$$

有解

$$\begin{cases} x=Q^{m} \\ y=Q^{n} \\ z=PQ^{k}, \end{cases} \qquad ①$$

那么 $x^{a}+y^{b}=Q^{ma}+Q^{nb}$,

$$z^{c}=P^{c}\cdot Q^{kc}=(Q+1)Q^{kc}=Q^{kc+1}+Q^{kc},$$

于是有 $Q^{ma}+Q^{nb}=Q^{kc+1}+Q^{kc}$. ②

如果有 $\begin{cases} ma=kc+1, \\ nb=kc. \end{cases}$ ③

或 $\begin{cases} ma=kc, \\ nb=kc+1. \end{cases}$ ④

那么 ② 式成立，从而原方程有解.

由已知 $(a,b)=1$，且 c 与 a 或 b 互素，若 c 与 a 互素，则 $(a,bc)=1$，此时我们来证明方程组 ③ 有解. 事实上，若令 $k=bt$，代入 ③ 的第 2 个方程得 $n=ct$，再代入 ③ 的第一个方程得

$$ma=tbc+1,$$

由于 $(a,bc)=1$，因此存在大于 1 的正整数 m 和 t 使得上式成立，从而说明方程组 ② 有解，原方程有形如 ① 的解.

因为 $(kc,kc+1)=1$，所以 $m\neq n$，从而有 $x\neq y$. 因为 $(P,Q)=$

1,所以 $x \neq z, y \neq z$ 从而形如 ① 的解中 x, y, z 两两不同.

又因为 P 可以是任意的,所以原方程有无限多个形如 ① 的解.

故此时命题得证.

类似地,若 c 与 b 互素,则可证得 ④ 有解,从而原方程有无限多个形如 ① 的解.

故原命题在任何时候都成立.

4·179 对给定的正整数 m,求出一切正整数组(n, x, y),其中 m, n 互素,且满足

$$(x^2 + y^2)^m = (xy)^n.$$

(第 53 届美国普特南数学竞赛,1993 年)

[解] 我们来证明当 m 是奇数时,方程无解;当 m 是偶数时,仅有解

$$(n, x, y) = (m + 1, 2^{\frac{m}{2}}, 2^{\frac{m}{2}}).$$

事实上,若(n, x, y)是方程的解,则由算术-几何平均不等式可得

$$(xy)^n = (x^2 + y^2)^m \geqslant (2xy)^m,$$

因此 $n > m$.

设 x, y 中含素数 p 的最高幂次分别为 a, b. 那么 $(xy)^n$ 中含素数 p 的最高幂次为 $n(a + b)$.

若 $a < b$,则$(x^2 + y^2)^m$ 中含 p 的最高幂次为 $2am$,从而有 $n(a + b) = 2am$,此与 $n > m$ 矛盾.

同理,若 $a > b$,也可推出矛盾.

因此,对一切素数 p,都有 $a = b$. 故得

$$x = y.$$

于是原方程化为

$$(2x^2)^m = x^{2n},$$

即 $x^{2(n-m)} = 2^m$.

由上式可知,x 为 2 的整数次幂. 设 $x = 2^k$,则

$$2(n - m)k = m,$$

$$2nk = m(2k + 1).$$

因为 $(m, n) = 1, (2k, 2k + 1) = 1$,

所以 $m = 2k, n = 2k + 1$.

这就是说,m 必为偶数,$n = m+1, x = 2^{\frac{m}{2}}, y = 2^{\frac{m}{2}}$.故当 m 是奇数时,方程无解;当 m 是偶数时,仅有解

$$(n,x,y) = (m+1, 2^{\frac{m}{2}}, 2^{\frac{m}{2}}).$$

4·180　试确定所有的四元数组(p_1,p_2,p_3,p_4),其中 p_1,p_2,p_3,p_4 都是素数,且满足:

(1)$p_1 < p_2 < p_3 < p_4$;

(2)$p_1p_2 + p_2p_3 + p_3p_4 + p_4p_1 = 882$.

(澳大利亚 11 年级数学竞赛,1995 年)

[解]　将条件(2)改写成

$$(p_1+p_3)(p_2+p_4) = 2\times 3^2\times 7^2,$$

此式右端不能被 4 整除,因此左端必有一个因式是奇数,从而有

$$p_1 = 2, p_1+p_3 \text{ 是 882 的奇因子}.$$

又因为　$p_1+p_3 < p_2+p_4$.所以

$$p_1+p_3 < \sqrt{882} < 30,$$

从而　　$2+p_3 \in \{3,7,9,21\}$,

$$p_3 \in \{5,7,19\}.$$

若 $p_3 = 5$,则 $p_2 = 3, p_2+p_4 = 2\times 3^2\times 7$,

$p_4 = 2\times 3^2\times 7 - 3 = 3\times(2\times 3\times 7-1) = 3\times 41$ 不是素数,矛盾.

若 $p_3 = 7$,则　$p_2+p_4 = 2\times 7^2 = 98, p_2 = 3$ 或 $5, p_4 = 95$ 或 93 都不是素数,矛盾.

若 $p_3 = 19$,则 $p_2+p_4 = 2\times 3\times 7 = 42, 3\leqslant p_2\leqslant 17$.

当 $p_2 = 3$ 时,$p_4 = 39$ 不是素数,矛盾.

当 $p_2 = 5$ 时,$p_4 = 37$.

当 $p_2 = 7$ 时,$p_4 = 35$ 不是素数,矛盾.

当 $p_2 = 11$ 时,$p_4 = 31$.

当 $p_2 = 13$ 时,$p_4 = 29$.

当 $p_2 = 17$ 时,$p_4 = 25$ 不是素数,矛盾.

故符合条件的四元数组有

$$(2,5,19,37),(2,11,19,31),(2,13,19,29).$$

4·181　求所有的整数对(a,b),其中 $a\geqslant 1, b\geqslant 1$,且满足等式

$$a^{b^2} = b^a.$$

（第 38 届国际数学奥林匹克，1997 年）

[解] 若 $a = 1$，则由等式得 $b = 1$.

若 $b = 1$，则由等式得 $a = 1$.

若 a、b 都不小于 2，此时，我们令

$$t = \frac{b^2}{a}.$$

则由题中等式得

$$a^{at} = (at)^{\frac{a}{2}},$$

即
$$a^{2t} = at,$$
$$t = a^{2t-1}.$$

显然 $t > 0$. 如果 $2t - 1 \geqslant 1$，则

$$t = a^{2t-1} \geqslant (1+1)^{2t-1} \geqslant 1 + (2t-1) = 2t > t,$$

矛盾. 所以 $2t - 1 < 1$，于是有

$$0 < t < 1.$$

记 $k = \frac{1}{t}$，则 $k = \frac{a}{b^2} > 1$ 为有理数. 由题中等式得

$$a^{\frac{a}{k}} = b^a,$$

即
$$a = b^k,$$
$$b^2k = b^k,$$
$$k = b^{k-2}. \qquad ①$$

如果 $k \leqslant 2$，则 $k = b^{k-2} \leqslant 1$，与前面所证 $k > 1$ 矛盾. 因此 $k > 2$. 设

$$k = \frac{p}{q}, p, q \in N, (p, q) = 1, p > 2q.$$

由 ① 式可得

$$\left(\frac{p}{q}\right)^q = k^q = b^{p-2q}.$$

因为上式右端是整数，所以 $q = 1$，从而 k 是一个大于 2 的自然数，即有

$$k \geqslant 3.$$

若 $b = 2$，则由 ① 式得

$$k = 2^{k-2},$$

易见,此时 $k \neq 3$,从而有 $k \geqslant 4$.另一方面,由 ① 式可知

$$\begin{aligned} k &= (1+1)^{k-2} \geqslant C_{k-2}^{0} + C_{k-2}^{1} + C_{k-2}^{2} \\ &= 1 + (k-2) + \frac{(k-2)(k-3)}{2} \\ &= 1 + \frac{(k-1)(k-2)}{2} \geqslant 1 + (k-1) = k. \end{aligned}$$

由于上式中等号当且仅当 $k = 4$ 时成立,因此我们有 $k = 4$,

$$a = b^k = 2^4 = 16.$$

若 $b \geqslant 3$,则

$$k = b^{k-2} \geqslant (1+2)^{k-2} \geqslant 1 + 2(k-2) = 2k-3,$$

即 $k \leqslant 3$.

故此时必有 $k = 3$,代入 ① 得

$$b = 3,$$

$$a = b^k = 3^3 = 27.$$

综上所述,满足题目等式的所有正整数对为$(a,b) = (1,1),(16,2),(27,3)$.

4·182　试求如下方程的所有正整数解(x,y):

$$x^2 + y^2 - 5xy + 5 = 0.$$

(越南国家队选拔试题,1992 年)

[解]　显然 $x \neq y$.记

$$S = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 - 5xy + 5 = 0, x, y \in N, y > x\};$$

$$S' = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 - 5xy + 5 = 0, x, y \in N, x > y\}.$$

则 $S \cup S'$ 是原方程的正整数解的全体.

如果 $x = 1$,则 $y = 2$ 或 3.同样地,如果 $y = 1$,则 $x = 2$ 或 3.所以

$(1,2) \in S,(1,3) \in S;$

$(2,1) \in S',(3,1) \in S'.$

如果$(x,y) \in S$,且 $x > 1$.则由原方程得

$(y-x)^2 + 5 = 3xy \geqslant 3 \cdot 2 \cdot 3 = 18,$

$(y-x)^2 \geqslant 13,$

$y - x \geqslant 4.$

此时,若 $4x \geqslant y$,则有

$$5xy = x^2 + y^2 + 5 \leqslant x^2 + 4xy + 5,$$
$$x(y-x) \leqslant 5$$
$$4x \leqslant 5,$$
$$x = 1.$$
与 $x > 1$ 矛盾.因此,如果$(x,y) \in S$,且 $x > 1$,则有 $4x < y$.

由于 $\quad x^2 - 5xy + y^2 + 5$
$$= y^2 - 5y(5y-x) + (5y-x)^2 + 5$$
$$= x^2 - 5x(5x-y) + (5x-y)^2 + 5,$$
因此,如果$(x,y) \in S$,则$(y, 5y-x) \in S$;如果$(x,y) \in S$,且 $x > 1$,则$(5x-y, x) \in S$.

令映射 $f: R^2 \to R^2$, $f((x,y)) = (y, 5y-x)$;及映射 $g: R^2 \to R^2$, $g((x,y)) = (5x-y, x)$.

我们有 $f(g((x,y))) = f(5x-y, x) = (x,y)$,

所以 $\qquad g((x,y)) = f^{-1}((x,y))$.

由上面证得的结果易知,对一切 $n \geqslant 1$,
$$f^{[n]}(1,2) \in S, f^{[n]}(1,3) \in S$$
其中 $\quad f^{[n]} = \underbrace{f(f(\cdots f}_{n\text{个}f}\cdots))$.且如果$(x,y) \in S$, $x > 1$,则 $g((x,y)) \in S$.

由此可知,对于任意的$(x,y) \in S$, $x > 1$,必存在一个 $n \geqslant 1$,使得 $g^{[n]}((x,y)) = (1,2)$ 或 $(1,3)$,从而有 $(x,y) = f^{[n]}((1,2))$ 或 $f^{[n]}((1,3))$.因此
$$S = \{(1,2), (1,3), f^{[n]}((1,2)), f^{[n]}((1,3)), n \in N\},$$
$$S' = \{(2,1), (3,1), h(f^{[n]}((1,2))), h(f^{[n]}((1,3))), n \in N\},$$
其中 $h((x,y)) = (y,x)$.所求的全部正整数解为 $S \cup S'$(显然 S 中及 S' 中所写出的元素是两两不同的.)

4·183 求使方程组 $\begin{cases} ax + by = 1, \\ x^2 + y^2 = 50. \end{cases}$
至少有一解,且所有的解都是整数解的实数对(a,b)的个数.

(第 12 届美国数学邀请赛,1994 年)

[解] 方程 $x^2 + y^2 = 50$ 的图形是以$(0,0)$为圆心,以 $5\sqrt{2}$ 为半径的圆,$ax + by = 1$ 的图形是一条直线.题目等价于寻找和圆有交点

且每个交点都是整点的直线的条数.

在圆上只有 12 个整点:(1,7),(1,-7),(-1,7),(-1,-7),(5,5),(5,-5),(-5,5),(-5,-5),(7,1),(7,-1),(-7,1),(-7,-1).

过其中一个整点,并与圆相切的直线,共有 12 条;

过其中两个整点的直线共有 $C_{12}^2=66$ 条.

以上两类直线中,过原点的直线共有 6 条.因为过原点的直线不能写成 $ax+by=1$ 的形式.所以不包含在原方程组中.

综上所述,原方程组中 $ax+by=1$ 所表示的直线可以有

$$12+66-6=72(\text{条})$$

因此,符合题中条件的实数对 (a,b) 的个数等于 72.

4·184 对每三个正整数 x,y,z,设

$$f(x,y,z)=[1+2+3+\cdots+(x+y-2)]-z.$$

求所有正整数组 (a,b,c,d),满足

$$f(a,b,c)=f(c,d,a)=1993.$$

(韩国数学奥林匹克,1993 年)

[解] 设 (a,b,c,d) 是所求的正整数组,那么,由题意,我们有

$$\begin{cases}f(a,b,c)=1993,\\ f(c,d,a)=1993.\end{cases}$$

因为

$$f(x,y,z)=\frac{1}{2}(x+y-2)(x+y-1)-z,$$

所以

$$\begin{cases}\frac{1}{2}(a+b-2)(a+b-1)-c=1993,\\ \frac{1}{2}(c+d-2)(c+d-1)-a=1993.\end{cases} \quad ①$$

由以上两个式子,可得

$$(a+b-2)(a+b-1)-2c=(c+d-2)(c+d-1)-2a,$$

将上式变形为

$$(a+b-1)^2+(a-b+1)=(c+d-1)^2+(c-d+1),$$

移项得

$$(a+b-1)^2-(c+d-1)^2=(c-d+1)-(a-b+1),$$

即

$$(a+b+c+d-2)(a+b-c-d)=(c-a)+(b-d),$$

令

$$M=a+b+c+d,\quad M\geqslant 4.$$

将上式改写为

$$(a-c)(M-1)=(d-b)(M-3) \qquad ②$$

下面证明 $d=b$.

用反证法.若 $d\neq b$,不妨设 $b<d$.(当 $b>d$ 时,可完全类似地给出证明.)由 ② 得

$$a>c.$$

因为

$$(M-1)-(M-3)=2,$$

所以 $M-1$ 与 $M-3$ 的最大公约数只能是 1 或 2.

如果 $(M-1,M-3)=1$,那么由 ② 可知 $d-b$ 是 $M-1$ 的倍数,此与

$$M-1=a+b+c+d-1>b+c+d>d-b$$

矛盾,因此

$$(M-1,M-3)=2.$$

于是,$M-1$ 与 $M-3$ 都是偶数,并且 $\frac{1}{2}(M-1)$ 与 $\frac{1}{2}(M-3)$ 互质.由 ② 可得

$$(a-c)\cdot\frac{1}{2}(M-1)=(d-b)\cdot\frac{1}{2}(M-3),$$

由此可知 $d-b$ 是 $\frac{1}{2}(M-1)$ 的倍数,$a-c$ 是 $\frac{1}{2}(M-3)$ 的倍数,从而 $4(a-c)(d-b)$ 是 $(M-1)(M-3)$ 的倍数.但是

$$\begin{aligned}&(M-1)(M-3)-4(a-c)(d-b)\\&=(M^2-4M+3)-4(ad-cd-ab+bc)\\&=(a+b+c+d)^2-4(a+b+c+d)+3-4(ad-cd-ab\\&\quad+bc)\\&=(a^2+b^2+c^2+d^2+2ac+2bd-2ab-2ad-2bc-2cd)\\&\quad+8ab+8cd-4(a+b+c+d)+3\\&=(a-b+c-d)^2+4[a(b-1)+b(a-1)+c(d-1)\end{aligned}$$

$+ d(c-1)] + 3$

> 0,这又得到一个矛盾.

故必有 $b = d$,从而由 ② 得 $a = c$.

将这个结果代入 ① 得

$$\frac{1}{2}(a+b-2)(a+b-1) - a = 1993,$$

即

$$(a+b-2)(a+b-1) = 3986 + 2a, \quad ③$$

显然,

$$(a+b-2)(a+b-1) > 3986,$$

注意到 $a+b-2$ 和 $a+b-1$ 是两个连续的自然数,并且 $62 \times 63 = 3906, 63 \times 64 = 4032$,所以我们有

$$a + b - 2 \geqslant 63. \quad ④$$

另一方面,由 ③ 得

$$(a+b-3)(a+b-2) = 3986 + 2a - 2(a+b-2),$$

即

$$(a+b-3)(a+b-2) = 3990 - 2b,$$

显然

$$(a+b-3)(a+b-2) < 3990,$$

注意到 $62 \times 63 = 3906, 63 \times 64 = 4032$,所以我们有

$$a + b - 2 \leqslant 63. \quad ⑤$$

由 ④ 和 ⑤ 得

$$a + b - 2 = 63,$$

即

$$a + b = 65.$$

将这个结果代入 ③,得

$$63 \times 64 = 3986 + 2a,$$

于是,我们有

$$a = 23, b = 42 (a = c, b = d).$$

因此,本题所求的正整数组只有一个,它是(23,42,23,42).

4·185 n 是一个正整数.求方程 $x^n + y^n = 1994$

的全部整数解(x,y).

（保加利亚数学奥林匹克,1994 年）

[解]　当 $n=1$ 时,显然原方程的整数解为

$$\begin{cases} x=a, \\ y=1994-a, \end{cases} \quad a \text{ 是任意整数.}$$

当 $n=2$ 时,方程化为

$$x^2+y^2=1994.$$

因为奇数的平方除以 4 余数为 1,偶数的平方除以 4 余数为 0,1994 除以 4 余数为 2,所以 x 和 y 都是奇数.又因为完全平方数除以 5 余数只能是 0,1 或 4,$1994\equiv4(\text{mod}5)$,所以 x 和 y 中恰有一个除以 5 的余数是 0,不妨设 x 是 5 的倍数,y 不是 5 的倍数.记

$$x=5x_1,\quad x_1 \text{ 是整数.}$$

因为 x 是奇数,所以 x_1 也是奇数.于是,我们有

$$(5x_1)^2+y^2=1994,$$

$$25x_1^2<1994,$$

$$x_1^2<80,$$

$$|x_1|\leqslant8.$$

注意到 x_1 是奇数.因此

$$x_1\in\{\pm1,\pm3,\pm5,\pm7\}.$$

经计算可知,$x_1=\pm1,\pm3,\pm7$ 时,y 都不可能是整数,不合题意.仅当 $x_1=\pm5$,即 $x=\pm25$ 时,代入方程 $x^2+x^2=1994$ 可得 $y=\pm37$.因此当 $n=2$ 时,原方程的全部整数解有以下 8 组:

$$\begin{cases} x=25, \\ y=37; \end{cases} \begin{cases} x=25, \\ y=-37; \end{cases} \begin{cases} x=-25, \\ y=37; \end{cases} \begin{cases} x=-25, \\ y=-37; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=37, \\ y=25; \end{cases} \begin{cases} x=-37, \\ y=25; \end{cases} \begin{cases} x=37, \\ y=-25; \end{cases} \begin{cases} x=-37, \\ y=-25. \end{cases}$$

下面讨论 $n\geqslant3$ 的情况.

若 $n=2m\geqslant4$,则 $m\geqslant2$,此时原方程可化为

$$(x^m)^2+(y^m)^2=1994.$$

因此,由上面的讨论可知,x^m 和 y^m 等于 ±25 和 ±37,此与 37 是质数矛盾.故 $n=2m\geqslant4$ 时,原方程无整数解.

如果 n 为不小于3的奇数时,满足原方程的整数解(x,y)中的 x 和 y 都是正整数,则由

$$x^n + y^n = 1994,$$

可知

$$x \neq 1, y \neq 1,$$

(否则,我们有 $x = 1, y^n = 1993$,矛盾)

从而有 $x \geqslant 2, y \geqslant 2$.

又由 $n \geqslant 3$ 得

$$x^n + y^n \geqslant x^3 + y^3,$$

$$\frac{x^n + y^n}{x + y} \geqslant x^2 - xy + y^2 \geqslant xy \geqslant 4.$$

于是,我们有

$$(x + y) \cdot \frac{x^n + y^n}{x + y} = 1994 = 2 \times 997.$$

注意到 n 是奇数时,$\frac{x^n + y^n}{x + y}$ 是整数,且

$$x + y \geqslant 4, \frac{x^n + y^n}{x + y} \geqslant 4.$$

可见两个质数2与997的乘积等于两个大于或等于4的数的乘积,这显然是不可能的.因此,当 n 为不小于3的奇数时,原方程无正整数解.

如果 n 为不小于3的奇数时,满足原方程的整数解(x,y)中,有一个是零,则另一个的 n 次方等于1994,矛盾.因此,x 和 y 都不等于0.

如果 n 为不小于3的奇数时,满足原方程的整数解(x,y)中,有一个是负整数,则另一个必是正整数.不妨设 x 为正整数,y 为负整数.

令 $y = -y'$,则 y' 为正整数.由原方程得

$$x^n - y'^n = 1994,$$

$$(x - y')(x^{n-1} + x^{n-2}y' + \cdots + xy'^{n-2} + y'^{n-1}) = 2 \times 997,$$

显然,x 与 y' 的奇偶性相同,从而

$$x - y' \geqslant 2.$$

又易见

$$x^{n-1} + x^{n-2}y' + \cdots + xy'^{n-2} + y'^{n-1} \geqslant n \geqslant 3,$$

因此,我们有

$$\begin{cases} x - y' = 2, \\ x^{n-1} + x^{n-2}y' + \cdots + xy'^{n-2} + y'^{n-1} = 997. \end{cases}$$

代入原方程,得

$$(y' + 2)^n - y'^n = 1994.$$

如果此时 n 不是质数,那么必有

$$n = n_1 \cdot n_2, n_1, n_2 \text{ 都是大于 1 的奇数}.$$

于是,

$$(y' + 2)^{n_1 n_2} - y'^{n_1 n_2} = 2 \times 997,$$

即

$$[(y' + 2)^{n_1} - y'^{n_1}] \cdot \{[(y' + 2)^{n_1}]^{n_2 - 1} + [(y' + 2)^{n_1}]^{n_2 - 2} y'^{n_1} + \cdots + (y'^{n_1})^{n_2 - 1}\}$$
$$= 2 \times 997,$$

注意到 997 是质数,

$$(y' + 2)^{n_1} - y'^{n_1} \geqslant 2^{n_1} \geqslant 8,$$
$$[(y' + 2)^{n_1}]^{n_2 - 1} + [(y' + 2)^{n_1}]^{n_2 - 2} y'^{n_1} + \cdots + (y'^{n_1})^{n_2 - 1}$$
$$\geqslant [(y' + 2)^{n_1}]^{n_2 - 1} \geqslant (3^3)^{3-1} = 3^6.$$

因此,2×997 等于一个不小于 8 的数与一个不小于 3^6 的数的乘积,这显然是不可能的,所以 n 是质数.

由于 n 是奇质数,因此组合数 $C_n^j (j = 1, 2, \cdots, n-1)$ 都是 n 的倍数,从而存在正整数 k,使得

$$(y' + 2)^n - y'^n = (y'^n + nk + 2^n) - y'^n = nk + 2^n,$$

由费马小定理知

$$2^n \equiv 2 \pmod n,$$

所以

$$(y' + 2)^n - y'^n \equiv 2 \pmod n,$$
$$1994 \equiv 2 \pmod n,$$
$$1992 \equiv 0 \pmod n.$$

即 1992 是奇质数 n 的倍数.又因为

$$1992 = 2^3 \times 3 \times 83,$$

所以 $n = 3$ 或 $n = 83$.

若 $n = 3$,则

$$(y' + 2)^3 - y'^3 = 1994,$$

$$y'^2+2y'-331=0.$$

上述方程显然没有正整数解 y'. 因此, $n=3$ 时原方程无整数解.

若 $n=83$, 则

$$(y'+2)^{83}-y'^{83}=1994$$

但

$$(y'+2)^{83}-y'^{83}>2^{83}>1994,$$

所以 $n=83$ 时, 原方程也没有正整数解.

综上所述, 原方程的全部解为:

$n=1$ 时,

$$\begin{cases}x=a,\\y=1994-a,\end{cases}\quad a \text{ 为任意整数};$$

$n=2$ 时,

$$\begin{cases}x=25,\\y=37;\end{cases}\quad\begin{cases}x=25,\\y=-37;\end{cases}\quad\begin{cases}x=-25,\\y=37;\end{cases}\quad\begin{cases}x=-25,\\y=-37;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=37,\\y=25;\end{cases}\quad\begin{cases}x=-37,\\y=25;\end{cases}\quad\begin{cases}x=37,\\y=-25;\end{cases}\quad\begin{cases}x=-37,\\y=-25.\end{cases}$$

$n\geqslant 3$ 时,

无解.

4・186 p 为整数, 试证:

$$x^2-2x-(10p^2+10p+2)=0$$

无整数解.

(第 3 届澳门数学奥林匹克, 1993 年)

[解] 将原方程化为

$$x(x-2)=2[5p(p+1)+1].$$

易知, x 为偶数, 从而左边是 4 的倍数. 但右边不是 4 的倍数, 故原方程无整数解.

4・187 p 是一个质数, 求方程

$$x^p+y^p=p^z$$

的全部正整数解 (x,y,z,p).

(保加利亚数学奥林匹克, 1994 年)

[解] 如果 (x,y,z,p) 是一组满足题目条件的正整数解, 那么由于 p 是质数, 必有

$$(x, y) = p^k,$$

这里 k 是一个非负整数. 令

$$x = p^k x^*, y = p^k \cdot y^*,$$

这里 x^*, y^* 是两个互质的正整数. 代入原方程得

$$x^{*^p} + y^{*^p} = p^{z-kp},$$

显然上式左端不小于 2, 从而 $z - kp$ 是一个正整数. 令

$$z^* = z - kp,$$

代入得

$$x^{*^p} + y^{*^p} = p^{z^*}. \quad ①$$

上式的形式与原方程的形式完全一样, 只是上式多了一个辅助条件 x^*, y^* 互质.

由 ① 及 x^*, y^* 互质可以推出 x^* 不是 p 的倍数, y^* 也不是 p 的倍数.

当 $p = 2$ 时, 方程 ① 变为

$$x^{*^2} + y^{*^2} = 2^{z^*}.$$

由上面的讨论知, x^*, y^* 都是奇数. 于是, 有

$$x^{*^2} \equiv 1 \pmod 4, y^{*^2} \equiv 1 \pmod 4$$

因此

$$x^{*^2} + y^{*^2} \equiv 2 \pmod 4,$$

故得

$$z^* = 1.$$

代入得

$$x^{*^2} + y^{*^2} = 2,$$

从而有 $x^* = 1, y^* = 1$.

利用我们关于 x^*, y^*, z^* 的定义, 即得 $p = 2, x = 2^k, y = 2^k, z = 2k + 1, k$ 是非负整数.

当质数 $p > 2$ 时, 即 p 是奇质数时, 由于 $x^* + y^*$ 可以整除 $x^{*^p} + y^{*^p}$, 因此由方程 ① 知, $x^* + y^*$ 可以整除 p^{z^*}, 从而存在正整数 t^*, 使得

$$x^* + y^* = p^{t^*}, 1 \leqslant t^* \leqslant z^* - 1, \qquad ②$$

从而有

$$x^* + y^* \geqslant 3,$$

因此可知

$$x^{*p} + y^{*p} > x^* + y^*.$$

将②代入①,得

$$x^{*p} + (p^{t^*} - x^*)^p = p^{z^*},$$

展开上式左端第二项,并注意 p 是奇数,得

$$p^{pt^*} - C_p^1 \cdot p^{(p-1)t^*} x^* + \cdots - C_p^{p-2} p^{2t^*} x^{*p-2} + C_p^{p-1} p^{t^*} x^{*p-1} = p^{x^*}.$$

注意到 p 是奇质数,$C_p^i(i = 1,2,\cdots,p-2)$ 都是 p 的倍数,从而上式左端除了最后一项外,其余各项都是 p^{2t^*+1} 的倍数,而最后一项只是 p^{t^*+1} 的倍数,因此上式左端是 p^{t^*+1} 的倍数,但不是 p^{t^*+2} 的倍数,由上式即得

$$z^* = t^* + 1,$$

代入②得

$$x^* + y^* = p^{z^*-1}, \qquad ③$$

$$p^{z^*} = p(x^* + y^*).$$

代入①得

$$x^{*p} + y^{*p} = p(x^* + y^*). \qquad ④$$

用数学归纳法容易证明当 a 为不小于 2 的正整数时,对于任何不小于 3 的正整数 n,

$$a^{n-1} > n.$$

(事实上,$n = 3$ 时,$a^{3-1} = a^2 \geqslant 4 > 3$. 设对某个 n 有 $a^{n-1} > n$,于是 $a^{(n+1)-1} = a \cdot a^{n-1} > an \geqslant 2n > n + 1$).

由这个不等式可知,当 $x^* \geqslant 2$ 且 $y^* \geqslant 2$ 时,有

$$x^{*p-1} > p, y^{*p-1} > p,$$

因此

$$x^{*p} + y^{*p} = x^* \cdot x^{*p-1} + y^* \cdot y^{*p-1} > p(x^* + y^*)$$

此与④矛盾，所以，x^* 和 y^* 中至少有一个为1. 由方程④的对称性，不妨设

$$x^* = 1.$$

代入③和④得

$$\begin{cases} 1 + y^* = p^{z^*-1}, \\ 1 + y^{*p} = p(1 + y^*). \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} y^* = p^{z^*-1} - 1, & ⑤ \\ y^{*p} - py^* = p - 1. & ⑥ \end{cases}$$

由⑥可知，

$$y^* \mid p - 1,$$

结合⑤可得

$$z^* - 1 = 1,$$

因此

$$\begin{cases} z^* = 2, \\ y^* = p - 1. \end{cases}$$

代入⑥得

$$(p-1)^p - p(p-1) = p - 1,$$
$$(p-1)^p = (p-1)(p+1),$$
$$(p-1)^{p-1} = p + 1. \qquad ⑦$$

显然，$p = 3$ 是⑦式的一个解. 当 $p \geqslant 5$ 时，不难用数学归纳法证明

$$(p-1)^{p-1} > p + 1, p \geqslant 5 \text{ 时}.$$

(事实上，$4^4 > 6$. 若对某个 k 有 $(k-1)^{k-1} > k + 1$，则 $k^k > k \cdot (k-1)^{k-1} > k(k+1) > k + 2$).

因此必有

$$p = 3,$$
$$y^* = p - 1 = 2.$$

由我们关于 x^*, y^*, z^* 的定义及对称性，可得 $p = 3, x = 3^k, y = 2 \cdot 3^k, z = 3k + 2$，$k$ 是非负整数，或 $p = 3, x = 2.3^k, y = 3^k, z = 3k + 2$，$k$ 是非负整数.

经检验，我们在上面得到的解都适合原方程.

因此,原方程的所有解为

$$\begin{cases}x=2^k,\\y=2^k,\\z=2k+1,\\p=2;\end{cases}\quad\begin{cases}x=3^k,\\y=2.3^k,\\z=3k+2,\\p=3;\end{cases}\quad\begin{cases}x=2.3^k,\\y=3^k,\\z=3k+2,\\p=3.\end{cases}$$

其中 k 为任意非负整数.

第7节　应用题

4·188　求所有满足如下条件的三位数:它除以11所得的商等于它的各位数字的平方和.

(第2届国际数学奥林匹克,1960年)

[解]　设所求的三位数为

$$n=100a+10b+c$$

其中 $b,c\in\{0,1,2,3,\cdots,9\},a\in\{1,2,\cdots,9\}$.

n 能被11整除的充要条件是 $a-b+c$ 能被11整除,由于

$$-8\leqslant a-b+c\leqslant 18,$$

于是只有　$a-b+c=0,$　①

$a-b+c=11.$　②

又由题意　$100a+10b+c=11(a^2+b^2+c^2).$　③

分两种情况讨论:

情况1　解 $\begin{cases}a-b+c=0,\\100a+10b+c=11(a^2+b^2+c^2).\end{cases}$

由①得　$b=a+c,$

代入③,得　$100a+10(a+c)+c=11[a^2+(a+c)^2+c^2],$

$$11(10a+c)=11(2a^2+2ac+2c^2),$$

$$10a+c=2a^2+2ac+2c^2,$$

$$2a^2+2(c-5)a+2c^2-c=0.\qquad④$$

考虑判别式　$\Delta=4(c-5)^2-8(2c^2-c)\geqslant 0,$

得　$$\frac{-\sqrt{91}-4}{3}\leqslant c\leqslant\frac{\sqrt{91}-4}{3}.\qquad⑤$$

由于 c 是非负数,因此

$c=0$ 或 $c=1$.

但由 $\quad 10a+c=2a^2+2ac+2c^2$,

可知,c 为偶数,因此只有 $c=0$.

将 $c=0$ 代入④式,得

$$2a^2-10a=0.$$

但 $\quad a\neq 0$,故得 $a=5$.

又由 $\quad b=a+c$ 得 $b=5$

于是得到三位数 550.

情况 2 解 $\begin{cases} a-b+c=11, \\ 100a+10b+c=11(a^2+b^2+c^2). \end{cases}$

由②得 $\quad b=a+c-11$,

代入③得

$$100a+10(a+c-11)+c=11[a^2+(a+c-11)^2+c^2],$$

化简、整理得

$$2a^2+2(c-16)a+2c^2+131-23c=0. \quad ⑥$$

于是,判别式 $\quad \Delta=4(c-16)^2-8(2c^2+131-23c)\geqslant 0$,

即 $\quad -3c^2+14c-6\geqslant 0$,

故 $\quad \frac{7-\sqrt{31}}{3}\leqslant c\leqslant\frac{7+\sqrt{31}}{3}$.

由于 c 是非负整数,因此

$$c=1,c=2,c=3,c=4.$$

由⑥式可以看出,c 一定为奇数,所以 $c=1$ 或 $c=3$.

将 $c=1$ 代入⑥式,得 $\quad 2a^2-30a+110=0$,

即 $\quad a^2-15a+55=0$.

解得 $\quad a=\frac{15\pm\sqrt{5}}{2}$,与 a 是正整数矛盾.

将 $c=3$ 代入⑥式,得 $\quad a^2-13a+40=0$,

解得 $\quad a_1=8$ 或 $a_2=5$.

由 $b=a+c-11$ 得 $\quad b_1=0$ 或 $b_2=-3$(不合题意,舍去).

于是所求的三位数为 803.

综上所述,满足条件的三位数有两个:550 和 803.

4·189 有个不准的双盘天平,臂长不等,盘重不等.三个重量不

同的物体 A、B、C 逐个用它来称. 当把它们放在左盘时,各称得重量为 A_1, B_1, C_1;当把 A, B 放在右盘时,各称得重量为 A_2, B_2. 试用 A_1, B_1, C_1, A_2, B_2 的式子表示物体 C 的真实重量.

(第 9 届美国数学奥林匹克,1980 年)

[解] 设天平的左臂长 l_1,右臂长 l_2;天平的左盘重 m_1,右盘重 m_2. 据题意有

$$\begin{cases}(A+m_1)l_1=(A_1+m_2)l_2,\\(B+m_1)l_1=(B_1+m_2)l_2,\\(C+m_1)l_1=(C_1+m_2)l_2,\\(A_2+m_1)l_1=(A+m_2)l_2,\\(B_2+m_1)l_1=(B+m_2)l_2.\end{cases}$$

记 $m_2l_2-m_1l_1=k$,将上面方程组整理得

$$\begin{cases}Al_1=A_1l_2+k, & ①\\Bl_1=B_1l_2+k, & ②\\Cl_1=C_1l_2+k, & ③\\A_2l_1=Al_2+k, & ④\\B_2l_1=Bl_2+k. & ⑤\end{cases}$$

由 ① - ② 得 $(A-B)l_1=(A_1-B_1)l_2$,

由 ④ - ⑤ 得 $(A_2-B_2)l_1=(A-B)l_2$,

所以有(不妨设 $A>B$) $\dfrac{l_1}{l_2}=\sqrt{\dfrac{A_1-B_1}{A_2-B_2}}$. ⑥

由 ①、④ 得 $A=\dfrac{A_1l_2+A_2l_1}{l_1+l_2}=\dfrac{A_1+A_2\dfrac{l_1}{l_2}}{\dfrac{l_1}{l_2}+1}$.

将 ⑥ 式代入上式后整理得

$$A=\frac{A_1\sqrt{A_2-B_2}+A_2\sqrt{A_1-B_1}}{\sqrt{A_1-B_1}+\sqrt{A_2-B_2}}. \quad ⑦$$

由 ①、③ 得 $C=(C_1-A_1)\cdot\dfrac{l_2}{l_1}+A$.

将 ⑥、⑦ 代入上式即得

$$C=(C_1-A_1)\sqrt{\frac{A_2-B_2}{A_1-B_1}}+\frac{A_1\sqrt{A_2-B_2}+A_2\sqrt{A_1-B_1}}{\sqrt{A_1-B_1}+\sqrt{A_2-B_2}}.$$

4·190　求证:不存在这样的整数,把它的首位数字移到末位之后,得到的数是原数的两倍.

(第17届加拿大数学奥林匹克,1985年)

[证]　设存在这样的整数,它的首位数字是 a,其余数字组成的数是 x,x 有 k 位数字,并且

$$10x+a=2(a\times 10^k+x).$$

则 $$8x=a(2\times 10^k-1),$$

即 $$8x=\underbrace{199\cdots9}_{k\text{个}9}\cdot a.$$

可见 a 是8的倍数,故 $a=8$.于是

$$x=\underbrace{199\cdots9}_{k\text{个}9}.$$

此与 x 有 k 位数字矛盾,故原命题得证.

4·191　将两个整数的和、差、积及商相加得450,求这两数.

(基辅数学奥林匹克,1946年)

[解]　设这两个整数为 x,y,则

$$(x+y)+(x-y)+xy+\frac{x}{y}=450, \qquad ①$$

由①得 $\frac{x}{y}$ 为整数.

将方程①变形为 $\frac{x}{y}(y+1)^2=450.$ ②

注意到 $450=1\times2\times3\times3\times5\times5,$

于是由方程②可得未知数 x 与 y 为:

$(28,14),(100,2),(72,4),(-32,-16),(-200,-4),$
$(-108,-6),(-900,-2).$

4·192　求这样的三位数,它等于各位数字的阶乘的和.

(基辅数学奥林匹克,1952年)

[解]　设 $M=\overline{abc}=100a+10b+c$ 是所求的三位数.由题意,得

$$\overline{abc}=a!+b!+c! \qquad ①$$

对①的左右两边进行分析,考虑到

$$4! = 24, 5! = 120, 6! = 720, 7! = 5040,$$

可以断定M的三个数字中任何一个都不超过6.因此M不超过666.由此可知,M的每个数字都不超过5.由等式①,数$a!+b!+c!$应为三位数,所以a,b,c中至少有一个数等于5,否则$a!+b!+c! \leqslant 4!+4!+4! = 72$小于任何三位数.

从所得的a,b,c的范围可得

$$a!+b!+c! \leqslant 5!+5!+5! = 360.$$

此时,从等式①得所求的数$M = \overline{abc} \leqslant 360$.所以$a \leqslant 3$.

不难证明$a = 1$.事实上,当$a = 3$时,等式①左边的数大于$300(\overline{3bc} > 300)$因为$b$或$c$中有一个数字等于5,而右边的数不超过$3! + 5! + 5! = 246$,即小于300.因此当$a = 3$时,等式①不成立.

如果$a = 2$,那么要使等式①成立,必须有$b = c = 5$,因为在相反的情况下,等式①的右边的数

$$a!+b!+c! \leqslant 2!+5!+4! = 146 < \overline{2bc} = M.$$

经检验可知,对$a = 2, b = c = 5$,等式①不成立.因此$a = 1$.此时从等式①的右边可知,b,c中只有一个数字等于5,否则等式就不成立.因为

$$a!+b!+c! = 1!+5!+5! = 241 > \overline{1bc} = M.$$

数字b不可能等于5,因为在相反情况下,将有

$$a!+b!+c! \leqslant 1!+5!+4! = 145 < \overline{15c} = M.$$

因$a = 1, c = 5$.为了确定数字b,等式①化为 $\overline{1b5} = 1! + b! + 5!$即$\overline{1b5} = 121 + b!$

为了使该式成立,数$121 + b!$的末位数必须等于5,而这只有在$b = 4$时成立.

所以,所求的数$M = 145$.

4·193 设x,y,z是三个不同的自然数,按上升的次序排列,且它们的倒数之和仍然是整数,求x,y,z.

(匈牙利数学奥林匹克,1918年)

[解] 本题是求这样的正整数x,y,z,a,使得 $x < y < z$,

且
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = a. \quad ①$$

由于对任何x,y,z,都有

$$a=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=2,$$

因此 $a=1$.又由

$$\frac{1}{x}<a=1<\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}=\frac{3}{x},$$

可得 $1<x<3$,从而 $x=2$.

这时方程 ① 变成 $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$,

从而有 $\frac{1}{y}<\frac{1}{2}<\frac{2}{y}$,

$2<y<4$,因此 $y=3$.

最后,由方程

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{z}=1$$

可求得 $z=6$.

本题只有惟一解:$a=1,x=2,y=3,z=6$.

4·194 一本书的页号为 1 至 n,在把这本书的各页号累加起来的时候,有一个页号被错误地多加了一次,结果,所得到的错误的和为 1986,问这个被多加了一次的页号是几?

(第 4 届美国数学邀请赛,1986 年)

[解] 设 k 是被多加了一次的页数,则 $0<k<n+1$.

又
$$1+2+\cdots+n<1+2+\cdots+n+k<1+2+\cdots+n+(n+1),$$

即
$$\frac{n(n+1)}{2}<1986<\frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

所以
$$n(n+1)<3972<(n+1)(n+2).$$

显然,n 是稍大于 60 的数.

$n=61$ 时,$n(n+1)=61\times 62=3782<3972$,

$(n+1)(n+2)=62\times 63=3906<3972$,

所以 $n\neq 61$.

$n=62$ 时,$n(n+1)=62\times 63=3906<3972$,

$(n+1)(n+2)=63\times 64=4032>3972$,

于是 $n=62$.

因此 $k = 1986 - \frac{62 \times 63}{2} = 33$,

即多加了一次的页号为 33.

4・195 从高为 300 米的陡峭的峭壁上接连落下两滴水滴.当第一滴水滴下落了 0.001 毫米时,第二滴水滴开始下落.问当第一滴水滴到达峭壁的山脚时,两滴水滴之间的距离是多少(答案要求精确到 0.1 毫米;不计空气阻力)?

(匈牙利数学奥林匹克,1901 年)

[解] 设 d 是当第二滴水滴开始下落时两滴水滴之间的距离,s_1 和 s_2 分别是当第一滴水滴到达山脚时第一滴水滴和第二滴水滴所走过的距离.若距离 d, s_1 和 s_2 分别是水滴在时间 t, t_1 和 $t_1 - t$ 内走过的,则

$$d = \frac{gt^2}{2}, s_1 = \frac{gt_1^2}{2}, s_2 = \frac{g(t_1 - t)^2}{2}.$$

因此 $s_2 = \frac{g}{2}\left(\sqrt{\frac{2s_1}{g}} - \sqrt{\frac{2d}{g}}\right)^2 = s_1 - 2\sqrt{s_1 d} + d$

即 $s_1 - s_2 = 2\sqrt{s_1 d} - d$.

在本题中,$d = 0.001$ 毫米,$s_1 = 300000$ 毫米,所以 $s_1 - s_2 = 34.6$ 毫米

4・196 在水平面上,三个点和天线的基点相距 100 米,200 米,300 米.从这三点测得天线的视角的和为 90°,天线的高等于多少?

(匈牙利数学奥林匹克,1964 年)

[解] 设天线高 x 米.和天线基点相距 100 米,200 米和 300 米的点对天线的仰角分别为 α, β, γ.则

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{x}{100}, \mathrm{tg}\beta = \frac{x}{200}, \mathrm{tg}\gamma = \frac{x}{300}.$$

因为 $\alpha + \beta + \gamma = 90°$,所以

$$\begin{aligned}
\mathrm{tg}\gamma = \frac{x}{300} &= \mathrm{tg}[90° - (\alpha + \beta)] \\
&= \mathrm{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{1}{\mathrm{tg}(\alpha + \beta)} \\
&= \frac{1 - \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta} = \frac{1 - \frac{x}{100} \cdot \frac{x}{200}}{\frac{x}{100} + \frac{x}{200}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{100 \times 200 - x^2}{300x}.$$

因此 $2x^2 = 100 \times 200$,而 $x > 0$,所以 $x = 100$ 米.

4·197　试证:如果 a,b,c 是三角形的边长,α,β,γ 是它们所对的角,且

$a(1 - 2\cos\alpha) + b(1 - 2\cos\beta) + c(1 - 2\cos\gamma) = 0$,则这样的三角形是等边三角形.

(匈牙利数学奥林匹克,1974 年)

[证]　设 R 为三角形的外接圆半径,根据正弦定理

$$a = 2R\sin\alpha, b = 2R\sin\beta, c = 2R\sin\gamma.$$

题中条件所给的等式可以变成

$$\sin\alpha(1 - 2\cos\alpha) + \sin\beta(1 - 2\cos\beta) + \sin\gamma(1 - 2\cos\gamma) = 0,$$

即
$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \sin2\alpha + \sin2\beta + \sin2\gamma \qquad ①$$

利用 $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ 和 $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 2\pi$,① 式左右两边分别变为

$$\begin{aligned}
&\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \\
&= (\sin\alpha + \sin\beta) + \sin[\pi - (\alpha + \beta)] \\
&= (\sin\alpha + \sin\beta) + \sin(\alpha + \beta) \\
&= 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2} + 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha + \beta}{2} \\
&= 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha - \beta}{2} + \cos\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \\
&= 4\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} \\
&= 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2};
\end{aligned}$$

和
$$\begin{aligned}
&\sin2\alpha + \sin2\beta + \sin2\gamma \\
&= 2\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) + \sin2\gamma \\
&= 2\sin\gamma[\cos(\alpha - \beta) + \cos\gamma] \\
&= 2\sin\gamma[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \\
&= 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \\
&= 4 \times 8\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.
\end{aligned}$$

因为$\frac{\alpha}{2}$,$\frac{\beta}{2}$,$\frac{\gamma}{2}$是锐角,所以$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\neq 0$,因此等式①变成

$$\frac{1}{8}=\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \qquad ②$$

将②式看成是任一个半角的方程,例如看成是关于$\sin\frac{\gamma}{2}$的方程,因为

$$\begin{aligned}&\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\\&=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\frac{\gamma}{2}\\&=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\sin\frac{\gamma}{2}\right)\sin\frac{\gamma}{2}.\end{aligned}$$

所以②式变成二次方程

$$\sin^2\frac{\gamma}{2}-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{4}=0. \qquad ③$$

由于方程③的根应该是实数,因此它的判别式$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}-1\geqslant 0$,但余弦的绝对值不大于1,所以

$$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}=1,$$

由此得出$\alpha=\beta$和方程③有重根

$$\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2},$$

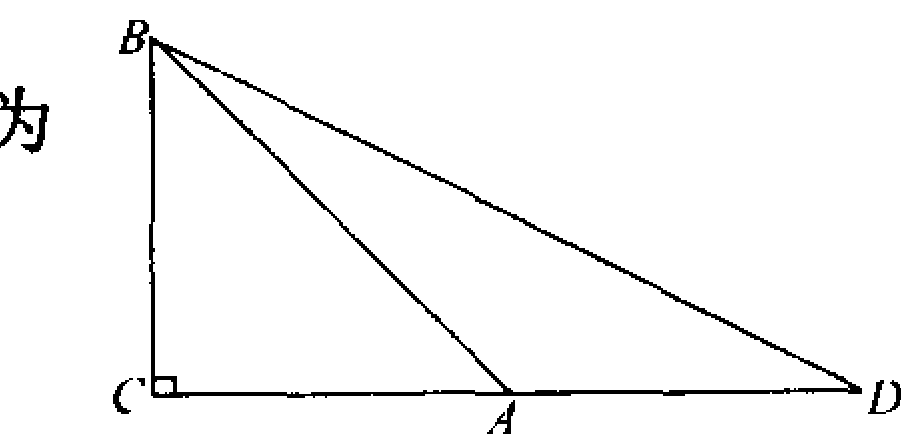
所以$\gamma=\frac{\pi}{3}$,于是可知$\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$.

4·198 试证数$u=\operatorname{ctg}22.5°$是二次方程的根,而数$v=\frac{1}{\sin 22.5°}$是4次方程的根,且两个方程的系数都是整数,最高次项的系数等于1.

(匈牙利数学奥林匹克,1901年)

[证] 角22.5°是直角的四分之一,可用下面的方法作出:在等腰直角三角形ABC的直角边CA的延长线上从顶点A往外作线段$AD=AB$,连接点D和B,在等腰三角形DAB中,$\angle D=\frac{1}{2}\angle BAC$.这就作出

了直角的四分之一.



若将 $\triangle ABC$ 的每一直角边的长度取为1,则

$$DA = AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{2},$$

$$DC = DA + AC = \sqrt{2} + 1,$$

且

$$DB = \sqrt{DC^2 + BC^2} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2 + 1} = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}.$$

由此即得

$$u = \operatorname{ctg}22.5^\circ = \frac{DC}{BC} = \sqrt{2} + 1,$$

$$v = \frac{1}{\sin 22.5^\circ} = \frac{DB}{BC} = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}.$$

因此 $(u-1)^2 = 2,$ ①

$v^2 = 4 + 2\sqrt{2}$,即$(v^2 - 4)^2 = 8.$ ②

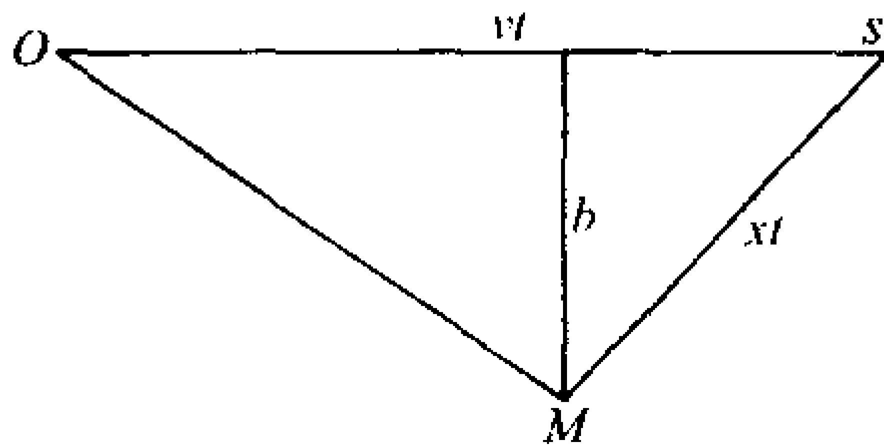
将①和②去掉括号化简,即得方程

$$u^2 - 2u - 1 = 0, v^4 - 8v^2 + 8 = 0.$$

4·199 一辆汽车从 O 点出发沿一条直线公路行驶,其速度 v 保持不变.汽车开动的同时,在距 O 点为 a、距公路线为 b 的地方有一个人骑自行车出发,想把一封信递送给这辆汽车的司机.问骑自行车的人至少必须以多大的速度行驶,才能实现他的愿望?

(波兰数学奥林匹克,1953 年)

[解] 我们设 $b > 0$.若 $b = 0$,说明骑自行车的人位于公路线上,问题的解答是显然的.



设 M 是骑自行车的人所在的点,S 是骑自行车者同汽车相遇之地,设 $\angle MOS = \alpha$,t 是骑自行车的人从出发到相遇所花的时间,x 表示自行车的速度.在 $\triangle MOS$ 中(见右图),$OS = vt$,$MS = xt$,$OM = a$,$\angle MOS = \alpha$.应用余弦定理得

$$x^2t^2 = a^2 + v^2t^2 - 2avt\cos\alpha,$$

$$x^2=\frac{a^2}{t^2}-2av\cos\alpha\cdot\frac{1}{t}+v^2.$$

设$\frac{1}{t}=S$,则

$$\begin{aligned}x^2&=a^2S^2-2av\cos\alpha\cdot S+v^2\\&=(aS-v\cos\alpha)^2+v^2-v^2\cos^2\alpha,\\&=(aS-v\cos\alpha)^2+v^2\sin^2\alpha.\end{aligned}\qquad ①$$

要求出正数 S 的值,使正数 x,即使 x^2 取最小值,分两种不同情形讨论:

情形1　$\cos\alpha>0$,也即 α 是锐角.由①式知,当 $aS-v\cos\alpha=0$ 时,也即为

$$S=\frac{v\cos\alpha}{a}$$

时,x 取最小值 $x_{\min}$,并且

$$x_{\min}^2=v^2\sin^2\alpha,x_{\min}=v\sin\alpha=\frac{vb}{a}.$$

情形2　$\cos\alpha\leqslant0$,也即 α 是直角或钝角.这时,不存在骑车人赶上汽车的最小速度,这是因为 S 越接近于零,也即 t 越大,则 $aS-v\cos\alpha$,因而 x^2 取值越小.当 t 无限增大时,S 趋于零,由①式可见,x 将趋于 v.

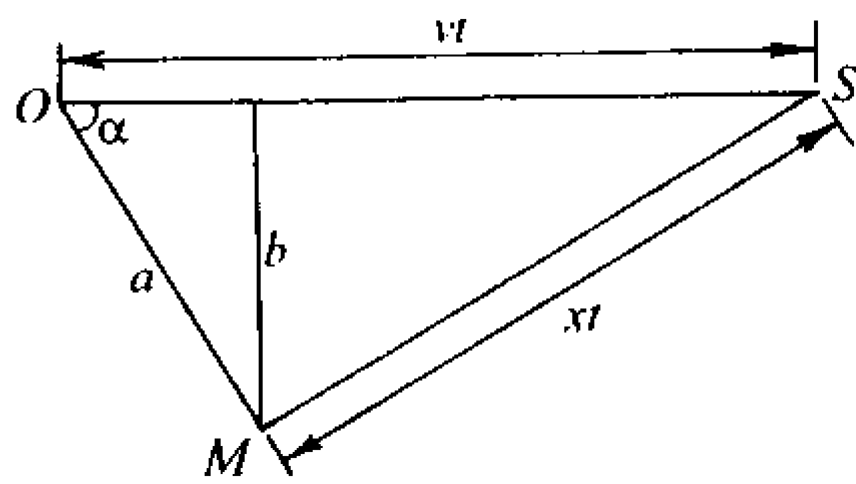


图 a

下面我们用图形来解释本题的结论.

当 $\alpha<90°$ 时(图 a),自行车最小速度 $v\sin\alpha$.骑自行车的人赶上汽车所用的时间是 $t=\frac{1}{S}=\frac{a}{v\cos\alpha}$.因此,骑车人赶上汽车所走过的距离 $MS=v\sin\alpha\cdot\frac{a}{v\cos\alpha}=a\operatorname{tg}\alpha$.这就是说,$\angle OMS=90°$,即骑车人必须沿与直线 OM 垂直的直线追赶汽车.

当 $\alpha\geqslant90°$ 时(图b),骑车人必须比汽车行驶更长的路程.因此,只有当骑车人的速度超过汽车速度时,他

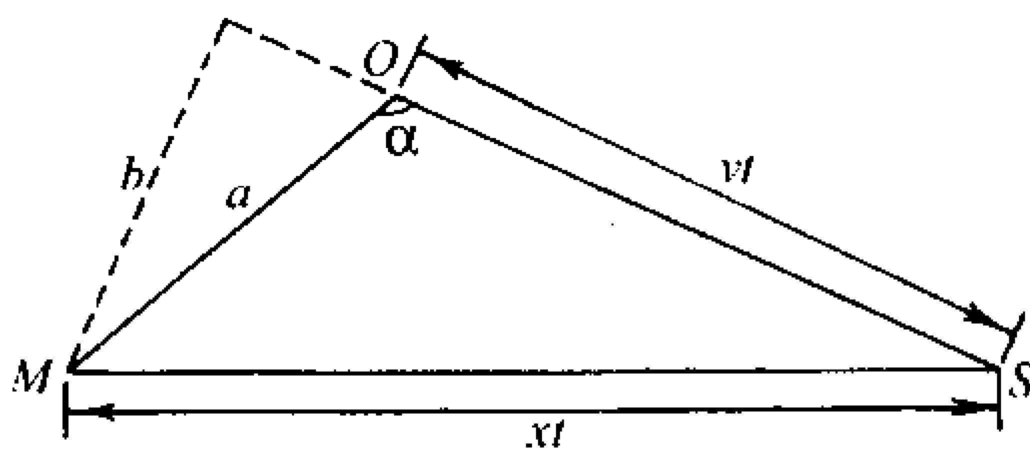


图 b

才可能赶上汽车. 但 $\angle OMS(\angle OMS = \beta)$ 越大,则自行车与汽车两者速度之差则越小. 如果骑车人的行车路线(直线) 与线段 OM 的夹角充分地接近 $180^\circ - \alpha$,那么这个速度差将充分小.

4·200 一场舞会有 42 人参加. 女士 A_1 与 7 个男舞伴跳过舞,女士 A_2 与 8 个男舞伴跳过舞……女士 A_n 与所有男舞伴跳过舞. 问舞会上有多少女士和男舞伴?

(波兰数学奥林匹克,1976 年)

[解] 设舞会中有 n 个女士,于是男舞伴的人数为 $42 - n$. 第 k 个 $(1 \leqslant k \leqslant n)$ 女士与 $k + 6$ 个男舞伴跳过舞. 因此第 n 个女士与 $n + 6$ 个男舞伴跳过舞. 据已知条件,男舞伴的人数为 $n + 6$. 于是 $n + 6 = 42 - n$. 解之得 $n = 18$. 故舞会中有 18 位女士和 $42 - 18 = 24$ 个男舞伴.

4·201 (1) 要加多少沸水到 a 升 t_1℃ 的水里,才能得到 t_2℃ 的水($t_1 < 100$℃)?

(2) 如果测量所得的近似数值为:

$a = 3.641$ 升, $t_1 = 36.7$℃, $t_2 = 57.4$℃, 那么要加多少升沸水?

(中国上海市数学竞赛,1961 年)

[解] (1) 设加沸水 x 升,

则有 $c \cdot x(100 - t_2) = c \cdot a(t_2 - t_1)$($c$ 为比热),

所以 $x = \dfrac{a(t_2 - t_1)}{100 - t_2}$.

(2) 当 $a = 3.641$ 升, $t_1 = 36.7$℃, $t_2 = 57.4$℃ 时,

$$x = \frac{3.641 \times (57.4 - 36.7)}{100 - 57.4} = 1.769(\text{升}).$$

4·202 甲城有 157 吨货物要运到乙城, 大卡车载重量为 5 吨,小卡车载重量为 2 吨,大卡车耗油量为 20 升,小卡车耗油量为 10 升,问各用多少辆大卡车、小卡车,耗油量最少?

(中国上海市数学竞赛,1960 年)

[解] 用大卡车运货耗油量是 4 升/吨,用小卡车运货耗油量是 5 升/吨, 故要使耗油量最少,就必须尽可能安排用大卡车运,

157 被 5 除,商是 31,余数是 2,所以用 31 辆大卡车,1 辆小卡车运货,耗油量最少.

4·203 有甲、乙两煤矿,甲煤矿每克煤燃烧时放出 4 卡热,乙煤

矿每克煤燃烧时放出6卡热，在产地每吨煤的价格为：甲煤矿为20元，乙煤矿为24元. 已知：甲矿煤运到N城，每吨运费为8元. 如果要把乙矿煤运到N城，每吨运费多少时比从甲矿运出去合算？

（中国上海市数学竞赛，1960年）

[解] 设乙煤矿到N城每吨运费为x元时，成本与甲煤矿一样. 依题意有：

$$(20+8):(24+x)=4:6,$$

即 $$24+x=\frac{28\times 6}{4},$$

$$x=42-24=18(\text{元})$$

每吨运费少于18元时，比从甲煤矿运出去合算.

4·204 汽车将甲镇的日用品运到乙村，它经过上坡路20千米，下坡路14千米，平路5千米. 然后再将乙村的粮食运往甲镇. 汽车往返所用的时间相差10分钟. 已知汽车上坡、下坡、走平路时，速度比为3：6：5. 试求：

(1) 汽车在上坡、下坡、走平路时的各个平均速度.

(2) 从甲镇到乙村，从乙村到甲镇，汽车各需用多少时间？

（中国上海市数学竞赛，1960年）

[解] (1) 按题意设汽车在上坡、下坡、走平路时的平均速度分别为$3v$、$6v$、$5v$(千米/小时).

因 $$\left(\frac{20}{3v}+\frac{14}{6v}+\frac{5}{5v}\right)-\left(\frac{20}{6v}+\frac{14}{3v}+\frac{5}{5v}\right)=\frac{1}{6},$$

即 $$\frac{6}{3v}-\frac{6}{6v}=\frac{1}{6},\text{故 } v=6.$$

所以上坡、下坡、走平路时的平均速度分别为18、36、30(千米/小时).

(2) 甲镇到乙村所需时间为：

$$\frac{20}{18}+\frac{14}{36}+\frac{5}{30}=\frac{1}{18}(20+7+3)$$

$$=\frac{30}{18}=1\frac{2}{3}(\text{小时}).$$

乙村到甲镇所需时间为

$$1\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=1\frac{1}{2}(\text{小时}).$$

4·205　设有铜锌混合物400克，它的体积为50立方厘米，已知铜的比重小于9克／立方厘米，大于8.8克／立方厘米，锌的比重小于7.2克／立方厘米，大于7.1克／立方厘米，试求混合物中，铜和锌的克数在什么范围?

（中国上海市数学竞赛，1960年）

[解]　设混合物中有铜x克、锌y克，并将铜与锌的比重分别记为D_1与D_2，

则有
$$\begin{cases} x+y=400, \\ \dfrac{x}{D_1}+\dfrac{y}{D_2}=50. \end{cases}$$

解此方程组得
$$\begin{cases} x=\dfrac{50D_1(8-D_2)}{D_1-D_2}, \\ y=\dfrac{50D_2(D_1-8)}{D_1-D_2}. \end{cases}$$

当D_2固定时，令$k_1=50(8-D_2)>0, k_2=50D_2>0$.

$$x-x'=k_1\left(\frac{D_1}{D_1-D_2}-\frac{D_1'}{D_1'-D_2}\right)=k_1\frac{D_2(D_1'-D_1)}{(D_1-D_2)(D_1'-D_2)},$$

由此可见D_1越大，x越小，D_1越小，x越大.

$$y-y'=k_2\left(\frac{D_1-8}{D_1-D_2}-\frac{D_1'-8}{D_1'-D_2}\right)=k_2\frac{(8-D_2)(D_1-D_1')}{(D_1-D_2)(D_1'-D_2)},$$

由此可见D_1越大，y越大，D_1越小，y越小.

又当D_1固定时，同理可知：

$$x-x''=k_3\left(\frac{8-D_2}{D_1-D_2}-\frac{8-D_2''}{D_1-D_2''}\right)=k_3\frac{(D_1-8)(D_2''-D_2)}{(D_1-D_2)(D_1-D_2'')},$$其中$k_3=50D_1>0$,

D_2越大，x越小，D_2越小，x越大.

$$y-y''=k_4\left(\frac{D_2}{D_1-D_2}-\frac{D_2''}{D_1''-D_2}\right)$$

$$= k_4 \frac{D_1(D_2 - D_2'')}{(D_1 - D_2)(D_1 - D_2'')}, \text{其中 } k_4 = 50(D_1 - 8)$$

$$> 0,$$

D_2 越大，y 越大，D_2 越小，y 越小.

综上所述，当 D_1 最大且 D_2 最大时，x 最小 y 最大；当 D_1 最小且 D_2 最小时，x 最大，y 最小.

故有 $\frac{50 \times 9(8 - 7.2)}{9 - 7.2} \leqslant x \leqslant \frac{50 \times 8.8(8 - 7.1)}{8.8 - 7.1}$,

$$\frac{50 \times 7.1(8.8 - 8)}{8.8 - 7.1} \leqslant y \leqslant \frac{50 \times 7.2(9 - 8)}{9 - 7.2}.$$

计算之，得 $200 \text{ 克} \leqslant x \leqslant 233 \text{ 克}$,

$167 \text{ 克} \leqslant y \leqslant 200 \text{ 克}$.

4·206　有两个力 f_1、f_2 作用于坐标轴的原点 O,

$$\vec{f_1} = \vec{OA} = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ),$$

$$\vec{f_2} = \vec{OB} = 2[\cos(-30^\circ) + i\sin(-30^\circ)].$$

(1) 求出它们的合力的大小和方向；

(2) 求出 A、B 两点间的距离(精确到 0.1).

（中国上海市数学竞赛，1960 年）

[解]　(1) 合力 $\vec{f} = \vec{f_1} + \vec{f_2}$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ) \\ &\quad + 2[\cos(-30^\circ) + i\sin(-30^\circ)] \\ &= 1 + i + \sqrt{3} - i \\ &= \sqrt{3} + 1 \\ &= (\sqrt{3} + 1)(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ). \end{aligned}$$

所以合力的大小为 $\sqrt{3} + 1$，方向和 x 轴相同.

(2) 因 $\vec{OA} = 1 + i$，故 A 点的直角坐标为 $(1,1)$，$\vec{OB} = \sqrt{3} - i$，故 B 点的直角坐标为 $(\sqrt{3}, -1)$.

故 $|AB| = \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2 + (-1 - 1)^2}$

$$= \sqrt{8 - 2\sqrt{3}} \approx 2.1.$$

4·207　甲车在乙车西面100米，现两车同时向东开出，如果甲车以50米/秒匀速前进，乙车以20米/秒^{2}加速前进，问经过几秒钟后，两车距离最近?这时两车距离多少米?

（中国上海市数学竞赛，1962年）

［解］　设t秒钟后，两车相距为S米.

此时，甲车离起点为$S_1 = vt = 50t$，乙车离甲车之起点为

$$S_2 = 100 + \frac{1}{2}at^2 = 100 + 10t^2,$$

故

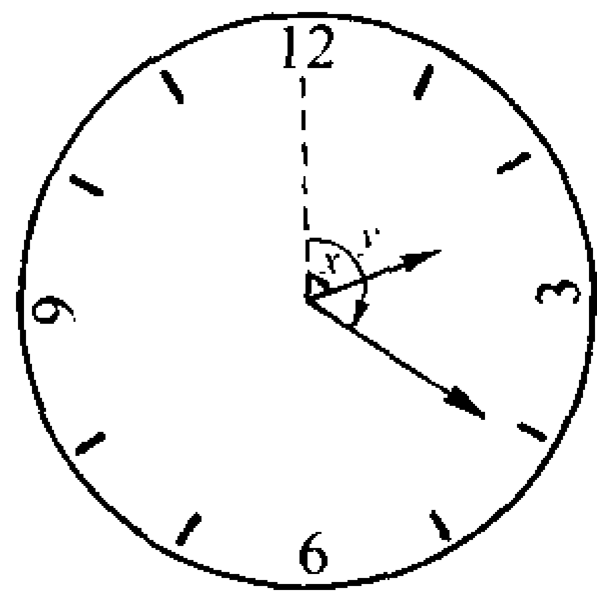
$$S = S_2 - S_1 = 100 + 10t^2 - 50t = 10\left(t - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{75}{2}.$$

所以当$t = \frac{5}{2}$(秒)时，S最小，此时，两车相距$\frac{75}{2}$米.

4·208　时钟在某一时间T_1时，短针指在2与3之间，长针指在4与5之间，过了某一段时间之后，到时间T_2时，长针指在原来短针所指的位置，而短针指在原来长针所指的位置. 试求原来时间T_1和现在时间T_2各为几点钟.

（中国上海市数学竞赛，1963年）

［解］　设x为T_1时短针的度数，y为T_1时长针的度数(如图).



因短针走过1°为2分，长针走过1°为$\frac{1}{6}$分，故得所求时间：

$$T_1 = 2\text{时}\frac{y}{6}\text{分}, T_2 = 4\text{时}\frac{x}{6}\text{分}.$$

并有

$$\begin{cases} 2(x - 60) = \frac{1}{6}\cdot y, \\ 2(y - 120) = \frac{1}{6}\cdot x. \end{cases}$$

解得　$x = \frac{10080}{143}, y = \frac{18000}{143}$.

故　$\frac{x}{6} = \frac{1680}{143} = 11\frac{107}{143}, \frac{y}{6} = \frac{3000}{143} = 20\frac{140}{143}$.

所以　$T_1 = 2$ 时 $20\frac{140}{143}$ 分，$T_2 = 4$ 时 $11\frac{107}{143}$ 分

(或约为 $T_1 = 2$ 时 20 分 59 秒，$T_2 = 4$ 时 11 分 45 秒).

4·209　有两小堆砖头，如果从第一堆中取出 100 块放到第二堆中去，那么，第二堆将比第一堆多一倍. 如果从第二堆中取出若干块放到第一堆中去，那么，第一堆将是第二堆的六倍，问第一堆中，砖头的最小数可能是多少？并确定此时在第二堆中的砖头数.

(第 14 届全俄数学奥林匹克，1988 年)

[解]　用 x 表示第一堆的砖头数，用 y 表示第二堆的砖头数. 设 z 是按问题的条件从第二堆中取出放入第一堆中的砖头数，此时，下列等式成立：

$$2(x-100) = y+100, \quad ①$$

$$x+z = 6(y-z), \quad ②$$

由 ① 得　$y = 2x - 300$.

代入 ② 得　$11x - 7z = 1800$.

即　$$4x + 7(x-z) = 1800. \quad ③$$

因此　$x - z$ 是 4 的倍数. 设 $x - z = 4t, t \in Z$，代入 ③ 得

$$x + 7t = 450, x = -7t + 450,$$

因此　$$y = 2x - 300 = -14t + 600,$$

$$z = x - 4t = -11t + 450.$$

数 x, y, z 都是自然数，因此，应该满足不等式：

$$\begin{cases} -7t + 450 > 0, \\ -14t + 600 > 0, \\ -11t + 450 > 0. \end{cases}$$

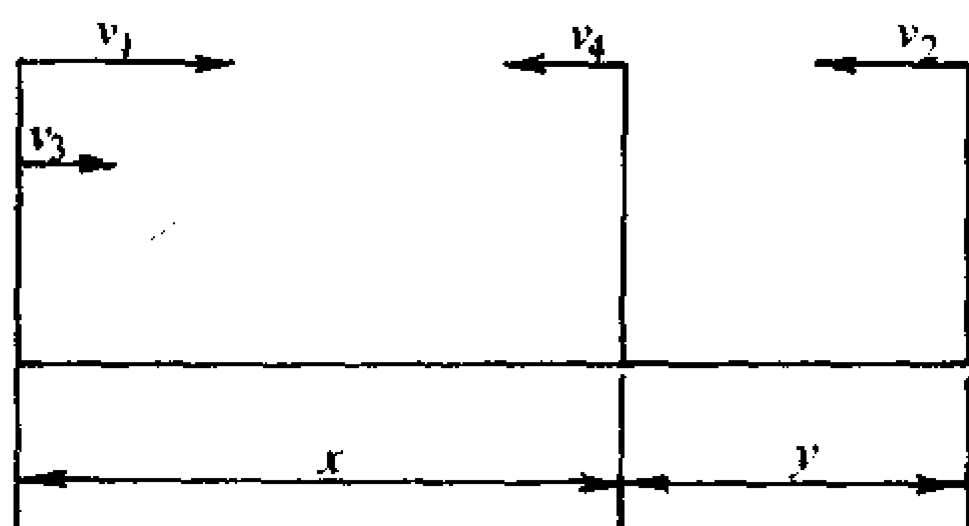
解这个不等式组，得 $t \leqslant 40$.

x 的值随着 t 的增大而减小，因此，当 t 是最大容许值时，x 可能取到最小值，也就是 $t = 40$ 时，$x = 170, y = 40, z = 10$；通过检验知道求得的 x, y, z 的值，满足问题的全部条件. 因此，在第一堆中，砖头的最小数是 170，此时在第二堆中的砖头数是 40.

4·210　在同一路线上有四个人：第一个人坐汽车，第二个人开摩托车，第三个人乘轻骑，第四个人骑自行车，各种车的速度是固定的，坐汽车的在 12 时追上乘轻骑的，14 时遇到骑自行车的，而与开摩托车

的相遇时是16时.开摩托车的遇到乘轻骑的是17时,并在18时追上了骑自行车的,问骑自行车的几时遇见乘轻骑的?

(第12届全俄数学奥林匹克,1986年)



[解] 设汽车,摩托车,轻骑,自行车的速度分别为 v_1, v_2, v_3, v_4, x, y 分别表示在12时时骑自行车的与坐汽车的、骑自行车的与开摩托车的之间的距离.依题意,得

$$x = 2(v_1 + v_4), \quad ①$$

$$x + y = 4(v_1 + v_2), \quad ②$$

$$x + y = 5(v_2 + v_3), \quad ③$$

$$y = 6(v_2 - v_4). \quad ④$$

(① + ③) × 2 − (② + ④),得

$$3x = 10(v_3 + v_4),$$

即 $$x = \frac{10(v_3 + v_4)}{3}.$$

设骑自行车的在 t 时遇见乘轻骑的,则

$$x = (t - 12)(v_3 + v_4),$$

即 $$t - 12 = \frac{10}{3},$$

故 $$t = 15\frac{1}{3}.$$

所以骑自行车的在15时20分遇见乘轻骑的.

4·211 7个精灵围坐在圆桌周围,在每个精灵面前有1个盛着牛奶的杯子.1个精灵把自己的奶都均分到其余的杯子中去,接着他右边的第一个邻居照样做一遍,然后下一个,等等,在第7个精灵把自己的奶分到其他杯子中后,在每一个杯子中还是最初的那么多奶,所有杯子中的奶共有3升.问:最初每个杯子中各有多少牛奶?

(第11届全苏数学奥林匹克,1977年)

[解] 最初每个杯子中各有奶 $\frac{6}{7}, \frac{5}{7}, \frac{4}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7}$, 0升.

事实上,每一个精灵把奶分倒给其他精灵后(给每个精灵各倒 $\frac{1}{7}$)

仍然能得到原先的分配方案，只是依次移动了一个位置，并且所有奶的总和$\frac{1+2+3+\cdots+6}{7}$正好等于3，符合题目的条件.

本题的解是惟一的.

事实上，我们可设在轮流倒奶期间当轮到某个精灵 A 分倒奶时它的奶最多，有 x 升. 因为可以把倒奶过程无限地进行下去，所以可以认为 A 第一个倒奶，在7个精灵依次轮流分倒后，由于其余6个精灵分倒给 A 的奶都不超过$\frac{x}{6}$升. 但倒给 A 的奶的总数是 x 升，因此，其余6个精灵都分给 A 正好$\frac{x}{6}$升，于是由已知条件知，每个精灵在轮到他分奶时都有奶 x 升，因而在他得到 k 份之后有$\frac{kx}{6}$升$(k=1,2,\cdots,6)$，又因为总量为3升，所以$\frac{x}{6}+\frac{2x}{6}+\cdots+\frac{6x}{6}=3$.

则 $x=\frac{6}{7}$.

于是就得到上面的解答.

惟一性得证.

4·212　河水是流动的，在 Q 点处流入静止的湖中，一游泳者在河中顺流从 P 到 Q，然后穿过湖到 R，共用3小时. 若他由 R 到 Q 再到 P，共需6小时. 如果湖水也是流动的，速度等于河水速度，那么，从 P 到 Q 再到 R 需$\frac{5}{2}$小时. 问在这样的条件下，从 R 到 Q 再到 P 需几小时？

（加拿大国家集训队训练题）

［解］　设游泳者的速度为1，水速为 y，$PQ=a$，$QR=b$，则

$$\begin{cases}\frac{a}{1+y}+b=3, & ①\\ \frac{a+b}{1+y}=\frac{5}{2}, & ②\\ \frac{a}{1-y}+b=6. & ③\end{cases}$$

①－②得　$\frac{by}{1+y}=\frac{1}{2}$，即 $b=\frac{1+y}{2y}$.　④

③ - ① 得 $\frac{a \cdot 2y}{1-y^2} = 3$,即 $a = \frac{3(1-y^2)}{2y}$. ⑤

由 ②、④、⑤ 得

$$\frac{5}{2}(1+y) = a + b = \frac{1+y}{2y} \cdot (4-3y).$$

即 $5y = 4 - 3y$.

于是 $y = \frac{1}{2}$,

$$\frac{a+b}{1-y} = \frac{a+b}{1+y} \times \frac{1+y}{1-y} = \frac{5}{2} \times \frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{15}{2}(\text{时}).$$

4·213 已知一个长方形盒子,可用单位立方体填满.如果改放尽可能多的体积为两个单位的立方体,而且使其与盒子的棱平行,则盒子的容积恰被填满 40%,试求出具有此种性质的长方形盒子的容积($\sqrt[3]{2} = 1.2599\cdots$).

(第 18 届国际数学奥林匹克,1976 年)

[**解**] 设 Q 为一具有所要求性质的长方形盒子,$a, b, c(a \leqslant b \leqslant c)$ 为符合条件的 Q 的边长,由于这个长方形盒子内可填满单位立方体,故 a, b, c 为自然数,现在放入体积为 2 的立方体,它的棱长为$\sqrt[3]{2}$,故知 $a \geqslant 2$.

我们知道,在长度为 n 的线段上用$\sqrt[3]{2}$ 的线段去量,只能量 $\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]$次,多余的部分不足$\sqrt[3]{2}$.这里$\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]$表示不超过$\frac{n}{\sqrt[3]{2}}$ 的最大整数.因此,这个箱子内共可放入

$$\left[\frac{a}{\sqrt[3]{2}}\right]\left[\frac{b}{\sqrt[3]{2}}\right]\left[\frac{c}{\sqrt[3]{2}}\right]$$

个体积为 2 的立方体,由于其体积为 abc 的 40%,

则得 $2 \cdot \left[\frac{a}{\sqrt[3]{2}}\right]\left[\frac{b}{\sqrt[3]{2}}\right]\left[\frac{c}{\sqrt[3]{2}}\right] = 0.4abc$.

所以 $\frac{a}{\left[\frac{a}{\sqrt[3]{2}}\right]} \cdot \frac{b}{\left[\frac{b}{\sqrt[3]{2}}\right]} \cdot \frac{c}{\left[\frac{c}{\sqrt[3]{2}}\right]} = 5$.

为求适合上式的自然数 a,b,c,可先考虑函数

$$g(n)=\frac{n}{\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]}\quad(n\geqslant 2).$$

列表如下:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
$\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]$	1	2	3	3	4	5	6	7	7	…
$g(n)$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{10}{7}$	…

上表中 $n\leqslant 10$ 的函数值 $g(n)$ 是通过具体计算得到的.而对于 $n>10$ 的估计可按下述方法进行:

$$\frac{\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]}{n}=\frac{\frac{n}{\sqrt[3]{2}}-\left\{\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right\}}{n}\ \left(\text{其中}\left\{\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right\}\text{表示}\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\text{的小数部分}\right).$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}-\frac{1}{n}\left\{\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right\}$$

$$>0.79-\frac{1}{n}\left\{\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right\}$$

$$>0.79-\frac{1}{10}$$

$$=0.69>\frac{2}{3}.$$

所以 $\frac{n}{\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]}<\frac{3}{2}$,即当 $n>10$ 的情况下 $g(n)<\frac{3}{2}$.

若 $a>2$,则

$$g(a)g(b)g(c)\leqslant\left(\frac{5}{3}\right)^3=\frac{125}{27}<5,$$

这与 $g(a)g(b)g(c)=5$ 矛盾.故 $a=2$.

因为 $a=2$,所以 $g(b)g(c)=\frac{5}{2}$. ①

如果 $g(b),g(c)$ 中有一个小于$\frac{3}{2}$,不妨设 $g(c)<\frac{3}{2}$,那么由 ①就有 $g(b)>\frac{5}{3}$,从而有 $g(b)=2,g(c)=\frac{5}{4}$,此与

$$g(n)>\frac{n}{\frac{n}{\sqrt[3]{2}}}=\sqrt[3]{2}>1.25$$

矛盾,因此 $g(b),g(c)$ 都不小于$\frac{3}{2}$,经逐个验证可知

$$g(b)=\frac{5}{3},g(c)=\frac{3}{2}.(\text{或 } g(b)=\frac{3}{2},g(c)=\frac{5}{3}.)$$

从而有

$$b=5,c=3\text{ 或 }6(\text{或者 }b=3\text{ 或 }6,c=5).$$

因此,箱子 Q 的内部尺寸的所有可能的值为(2,5,6) 或(2,3,5),它的容积为 60 或 30.

4·214 A、B、C 三人做游戏:在三张卡片上分别写上整数 p、q、$r(0<p<q<r)$. 把这三张卡片混合后分发给 A、B、C,每人各得一张,再按各人所得卡片上的数字,发给个人小弹子,然后,将卡片收回,弹子留给个人,如此进行了两轮以上(每轮包括混合卡片,发卡片,发弹子和收卡片),最后一轮结束后,A、B、C 分别得到的弹子总数是 20,10,9,已知 B 在最后一轮得到 r 粒弹子,问哪一个在第一轮得到 q 粒弹子?

(第 16 届国际数学奥林匹克,1974 年)

[解] 设游戏共进行了 n 轮,于是

$$n(p+q+r)=20+10+9=39,$$

因为 $0<p<q<r$,故 $p+q+r\geqslant 6$,又因 $n\geqslant 2$,而且 39 只能惟一地分解为 3×13,所以

$$n=3,p+q+r=13.$$

由题设,B 在最后一轮得到 r 粒弹子,而且总共得到的弹子数是 $10(<13)$,因此,B 在头两轮中得到的弹子只能是 p,于是

$$p+p+r=10.$$

因为 C 总共得到的弹子数是 $9(<10)$,所以 C 在每一轮都不能得到 r 粒弹子,从上面分析中已经知道,B 在第一轮和第二轮中都得到 p

粒弹子,因此,C 在第一轮和第二轮中得到 q 粒弹子.

故在第一、二轮中,A、B、C 分别得到的弹子数是 r、p、q.

又在最后一轮中,B 得到 r 粒弹子,C 得到的弹子只有两种可能:p 和 q.

若 C 得到 q 粒弹子,则 A 应得到 p 粒弹子,于是

$$2r+p=20, 2p+r=10, 3q=9;$$

并且 $p+q+r=13$,从而 $p=0, q=3, r=10$,这与 $p>0$ 相矛盾.故知 C 在最后一轮中得到的弹子数必定为 p,A 在最后一轮中得到的弹子数为 q,于是,我们有

$$2r+q=20, 2p+r=10, 2q+p=9.$$

解得 $\quad p=1, q=4, r=8.$

4·215 运动会连续开了 n 天,一共发了 m 枚奖章.第一天发一枚以及剩下$(m-1)$枚的$\frac{1}{7}$,第二天发2枚以及发后剩下的$\frac{1}{7}$,以后各天均按此规律发奖章,在最后一天即第 n 天发了剩下的 n 枚奖章.问运动会开了多少天?一共发了多少枚奖章?

(第9届国际数学奥林匹克,1967年)

[解] 设运动会开了 k 天之后,还剩下 a_k 枚奖章.其中 $k=0,1,2,\cdots,n$,并且 $a_0=m, a_n=0$.则在第 k 天发出的奖章数为:

$$k+\frac{1}{7}(a_{k-1}-k)=\frac{1}{7}a_{k-1}+\frac{6}{7}k.$$

所以
$$\begin{aligned} a_k &= a_{k-1}-\left(\frac{1}{7}a_{k-1}+\frac{6}{7}k\right) \\ &= a_{k-1}-\frac{1}{7}a_{k-1}-\frac{6}{7}k \\ &= \frac{6}{7}a_{k-1}-\frac{6}{7}k, \end{aligned}$$

即
$$a_{k-1}=k+\frac{7}{6}a_k.$$

于是,由此递推式得

$$\begin{aligned} m &= 1+\frac{7}{6}a_1 \\ &= 1+\frac{7}{6}\left(2+\frac{7}{6}a_2\right) \end{aligned}$$

$$= 1 + 2 \cdot \frac{7}{6} + \left(\frac{7}{6}\right)^2 a_2$$

$$= 1 + 2 \cdot \frac{7}{6} + \left(\frac{7}{6}\right)^2 \left(3 + \frac{7}{6} a_3\right)$$

$$= 1 + 2 \cdot \frac{7}{6} + 3 \cdot \left(\frac{7}{6}\right)^2 + \left(\frac{7}{6}\right)^3 a_3$$

……

$$= 1 + 2 \cdot \frac{7}{6} + 3 \cdot \left(\frac{7}{6}\right)^2 + \cdots + n \cdot \left(\frac{7}{6}\right)^{n-1} + \left(\frac{7}{6}\right)^n \cdot a_n.$$

因为 $a_n = 0$,所以得

$$m = 1 + 2 \cdot \frac{7}{6} + 3 \cdot \left(\frac{7}{6}\right)^2 + \cdots + n \cdot \left(\frac{7}{6}\right)^{n-1},$$

$$\frac{7}{6} m = \frac{7}{6} + 2 \cdot \left(\frac{7}{6}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{7}{6}\right)^3 + \cdots + n \cdot \left(\frac{7}{6}\right)^n.$$

二式相减,得

$$m - \frac{7}{6} m = 1 + \frac{7}{6} + \left(\frac{7}{6}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{7}{6}\right)^{n-1} - n \cdot \left(\frac{7}{6}\right)^n.$$

即
$$-\frac{1}{6} m = \frac{\left(\frac{7}{6}\right)^n - 1}{\frac{7}{6} - 1} - n \cdot \left(\frac{7}{6}\right)^n,$$

故
$$m = \frac{7^n(n-6)}{6^{n-1}} + 36.$$

对于 $n > 1$,显然有

$$|n - 6| < 6^{n-1}, (7^n, 6^{n-1}) = 1.$$

又由于 m 是整数,因此必有 $n - 6 = 0$.

即 $\quad n = 6, m = 36.$

这就是说,运动会共开了 6 天,发出了奖章 36 枚.

4·216　试求出所有这样的正整数的个数:它在 n 进位制的表示中数字各不相同,并且除去最左边的数字外,每一个数字均和在它左边的某个数字相差 ± 1(答案用 n 的简单的显函数形式表达),并证明你的结论.

(第 19 届美国数学奥林匹克,1990 年)

[解] 尽管 0 不能作第一个数字，但我们先不考虑第一数字是否为 0，规定 $F(n)$ 是 n 进位制中包括第一个数字为 0 的符合题设条件的正整数的个数. 例如，

$F(1)=1,[0]$,

$F(2)=4,[0,1,01,10]$,

$F(3)=11,[0,1,2,01,10,12,21,012,102,120,210]$.

现在建立 $F(n+1)$ 的递推式.

因为 $n+1$ 进位中的数字串最右边的数字只能是数字串中的最大数或最小数，所以我们把它们分成三类：

(1) 单一的数字：$0,1,2,\cdots,n$；

(2) 在每个 n 进位数字串右面接一个数字，它比原数字串中的最大数字多 1.

(3) 将每个 n 进位数字串的各位数字都加 1，然后在它右面再填一个数字，所填数字比左面数字中的最小数小 1.

于是有 $F(n+1)=n+1+2F(n)$,

即 $F(n+1)+(n+3)=2[F(n)+n+2]$,

从而有 $F(n+1)+(n+3)=2^n[F(1)+1+2]$.

因为 $F(1)=1$,

所以 $F(n+1)+n+3=2^{n+2}$.

由此得 $F(n)=2^{n+1}-n-2$.

由于以 0 作为第一个数字的数不合要求，这样的数，在 n 进制中有

$0,01,\cdots,012\cdots(n-1)$.

所以所求正整数的个数为：

$F(n)=2^{n+1}-2n-2$.

4·217 组装甲、乙、丙三种产品，需用 A、B、C 三种零件，每件甲需用 A、B 各 2 个；每件乙需用 B、C 各 1 个；每件丙需用 2 个 A 和 1 个 C. 用库存的 A、B、C 三种零件，如组装成 p 件甲产品，q 件乙产品和 r 件丙产品，则剩下 2 个 A 和 1 个 B，但 C 恰好用完，试证：无论怎样改变产品甲、乙、丙的件数，也不能把库存 A、B、C 三种零件都恰好用完.

（中国高中数学联赛，1981 年）

[证] 组装成 p 件甲，q 件乙和 r 件丙共需零件 A：$(2p+2r)$ 件，零件 B：$(2p+q)$ 件，零件 C：$(q+r)$ 件. 因此，加上剩余零件后，库存

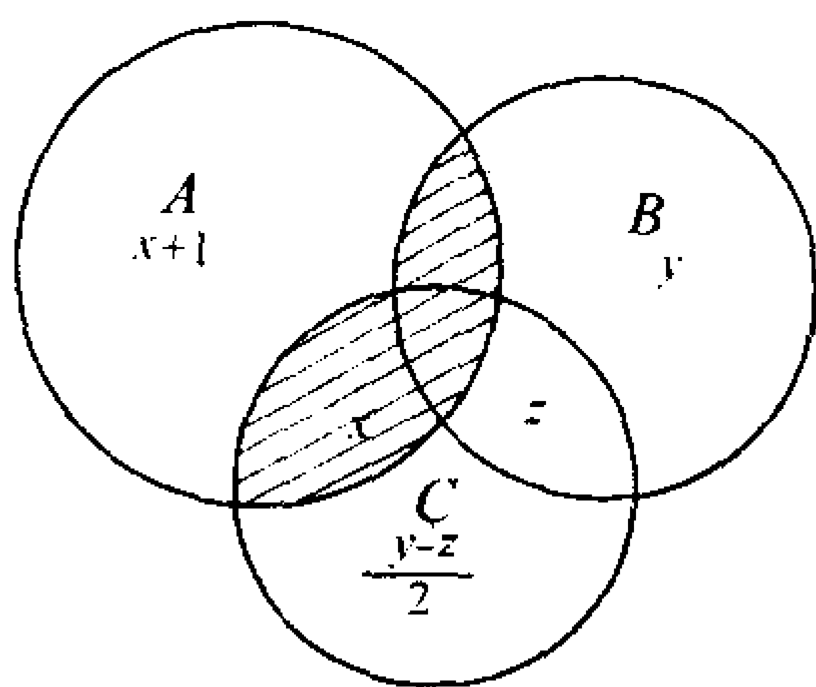
零件数 A 有 $2p+2r+2$ 件，B 有 $2p+q+1$ 件，c 有 $q+r$ 件.

如果甲、乙、丙的件数分别改变成 x,y,z，于是可以列出方程组：

$$\begin{cases}2x+2z=2p+2r+2,\\2x+y=2p+q+1,\\y+z=q+r.\end{cases}$$

解之得 $$x=p+\frac{2}{3},y=q-\frac{1}{3},z=r+\frac{1}{3}.$$

产品的件数应是非负整数，但解得的 x、y、z 都不是整数，由此说明，若要使 x、y、z 都取整数值，一定不能把库存的三种零件都恰好用完.



4·218　在一次中学数学竞赛中共出了 A、B、C 三题. 在所有 25 个参加竞赛的学生中，每个学生至少解出一题，在没有解出 A 的那些学生中，解出 B 的人数是解出 C 的人数的两倍. 只解出 A 的人数，比余下的学生中解出 A 的人数多 1. 只解出一题的学生中，有一半没有解出 A. 问多少学生只解出 B.

（第 8 届国际数学奥林匹克，1966 年）

［解］ 设不只解出 A 的为 x 人，仅解出 B 的为 y 人，没有解出 A 但解出 B 与 c 的为 z 人. 则（参看上页图）

$$\begin{cases}x+x+1+y+z+\dfrac{y-z}{2}=25, & ①\\[2ex] x+1=y+\dfrac{y-z}{2}. & ②\end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases}y=\dfrac{25-x}{3},\\[2ex] z=23-3x.\end{cases}$$

由 $y\geqslant z$ 知，$x\geqslant 6$，

并且只有 $x=7$ 时，y,z 都是正整数，

所以　$x=7,z=2,y=6$.

故只解出 B 的有 6 人.

4·219　试证：三个不同素数的立方根不可能是一个等差数列的三项（不一定相邻）．

（第2届美国数学奥林匹克，1973年）

［证］　若不然，则 $\sqrt[3]{p_1}=a$，$\sqrt[3]{p_2}=a+md$，$\sqrt[3]{p_3}=a+nd$，其中 m 和 n 是整数，消去 a，得

$$\frac{\sqrt[3]{p_2}-\sqrt[3]{p_1}}{\sqrt[3]{p_3}-\sqrt[3]{p_1}}=\frac{m}{n},$$

即　$$(m\sqrt[3]{p_3}-n\sqrt[3]{p_2})^3=(m-n)^3p_1.$$

展开且合并，再利用条件

$$m\sqrt[3]{p_3}-n\sqrt[3]{p_3}=(m-n)\sqrt[3]{p_1},$$

最后得到

$$m^3p_3-n^3p_2-(m-n)^3p_1=3mn(m-n)\sqrt[3]{P_1P_2P_3},$$

上式左端是有理式，右端是无理式，因此导致矛盾．

4·220　有一群儿童，他们的年龄之和是50岁，其中最大的是13岁，有一个是10岁；除去10岁的这个儿童之外，其余儿童的年龄恰好组成等差数列．问有几个儿童？每个儿童几岁？

（中国北京市数学竞赛，1956年）

［解］　将最大儿童的年龄记为 a，即 $a=13$．

设除去10岁的那个儿童之外，还有 $b+1$ 个儿童，并设他们的岁数的公差为 d，则这 $b+1$ 个儿童的岁数为

$$a,a-d,a-2d,\cdots,a-bd \qquad ①$$

于是　$$a+(a-d)+(a-2d)+\cdots+(a-bd)$$

$$=(b+1)a-\frac{b(b+1)}{2}d=50-10=40,$$

即　$$(b+1)(2a-bd)=80.$$

可见 $(b+1)$ 能整除80，但 $2a-bd=a+(a-bd)>13$，故 $b+1<\frac{80}{13}$，又 $2a-bd<2a=26$，故 $b+1>\frac{80}{26}$，综合这二方面考虑，就知道 $b+1$ 只能是4或5．

当 $b+1=4$ 时，$4(26-3d)=80$，故 $d=2$．将 b、d 之值代入①式得：13，11，10，9，7．所以一共有 $4+1=5$ 个儿童，他们的年龄分别为

13，11，10，9，7．

当 $b+1=5$ 时，$5(26-4d)=80$，这时 d 为非整数，所以这种情况不可能，于是解是惟一的.

4·221　试问对怎样的自然数 n 和 k，二项式系数 $C_n^{k-1}, C_n^k, C_n^{k+1}$ 成等差数列？

（匈牙利数学奥林匹克，1974 年）

［解］　三个二项式系数构成等差数列的充要条件是下面等式成立：

$$C_n^{k-1}-2C_n^k+C_n^{k+1}=0. \qquad ①$$

设 $k-1\geqslant 0$ 和 $k+1\leqslant n$，即 $1\leqslant k\leqslant n-1$. ②

在 ① 式两边乘以正数 $\dfrac{(k+1)!(n-k+1)!}{n!}$，得

$$k(k+1)-2(k+1)(n-k+1)+(n-k)(n-k+1)=0,$$

即
$$n^2-4nk+4k^2-n-2=0, \qquad ③$$

或
$$n=(n-2k)^2-2$$
$$=u^2-2.$$

其中 u 是满足关系式 $u=n-2k$（或 $u=2k-n$）的自然数，由此可得

$$k=k_1=\frac{n-u}{2}=\frac{u^2-u}{2}-1=C_u^2-1,$$

或
$$k=k_2=\frac{n+u}{2}=C_{u+1}^2-1.$$

为使 n 取正值，应有 $u\geqslant 2$. 但当 $u=2$ 时，值 k_1 和 k_2 不满足不等式 ②，当 $u\geqslant 3$ 时，得

$$k_1=C_u^2-1\geqslant 1，且\ k_1=\frac{n-u}{2}<n,$$

并且由 $k_1+k_2=n$ 和 $k_1<k_2$ 可得 k_1 和 k_2 都满足不等式 ②.

于是，从 ① 式出发得到了结果：当 $u>2$ 时，由 $n=u^2-2$ 和 $k=C_u^2-1$ 或 $k=C_{u+1}^2-1$ 确定的数对 n,k 满足 ①.

4·222　试证：如果一个直角三角形的三边之长成等差数列，那么它们的比是 $3:4:5$.

（中国北京市数学竞赛，1963 年）

［证］　设直角三角形三边之长分别为 $a-d, a, a+d$（其中 $a>d>0$），则

$$(a+d)^2=a^2+(a-d)^2,$$

化简得 $a^2 - 4ad = 0.$

因 $a \neq 0$,所以 $a - 4d = 0$,由此推出

$$a - d = 3d, a = 4d, a + d = 5d.$$

从而这个直角三角形三边之比为 $3d : 4d : 5d$,

即 $3 : 4 : 5.$

4·223 三角形的边构成公差为 d 的等差数列,三角形的面积等于 S,求三角形的边长和角.再对 $d = 1, S = 6$ 这个特殊情况,求解本题.

(匈牙利数学奥林匹克,1894 年)

[解] 将三角形的边表示成 $a = b - d, b, c = b + d (0 < d < b)$,将表达式

$$p = \frac{a + b + c}{2} = \frac{3b}{2}, p - a = \frac{b}{2} + d,$$

$$p - b = \frac{b}{2}, p - c = \frac{b}{2} - d,$$

代入海伦(*Heron*)公式

$$S^2 = p(p - a)(p - b)(p - c).$$

得到 $S^2 = \frac{3b^2}{4}\left(\frac{b^2}{4} - d^2\right).$

把它看成关于 b^2 的二次方程,解得

$$b^2 = 2\left(d^2 + \sqrt{d^4 + \frac{4s^2}{3}}\right),$$

所以 $$b = \sqrt{2\left(d^2 + \sqrt{d^4 + \frac{4s^2}{3}}\right)},$$

$$a = b - d,$$

$$c = b + d.$$

a 和 b 所对的角 α 和 β 必定是锐角,由

$$S = \frac{bc}{2}\sin\alpha, S = \frac{ac}{2}\sin\beta, \gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$$ 可求解得 α、β 和 γ.

如果 $d = 1, s = 6$,则有 $b = 4, a = 3, c = 5$,且 $\sin\alpha = \frac{3}{5}$,

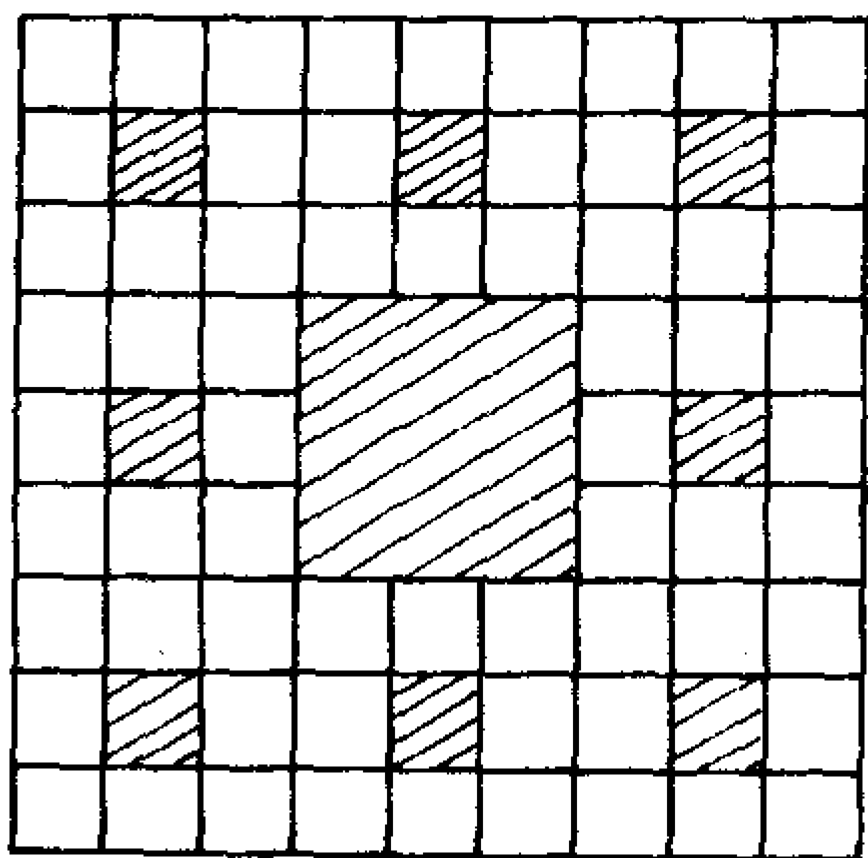
$\sin\beta=\frac{4}{5}$,可得 $\alpha=36°52'$,$\beta=90°-\alpha=53°8'$,$\gamma=90°$.

4·224 单位正方形被平行于边的直线分成相等的 9 部分,并且删去正中间的一部分.剩下的 8 个小正方形每一个也被平行于边的直线分成相等的 9 部分,正中间的部分也删去.然后,对剩下的每一个正方形进行类似的做法,若将这样的做法重复 n 次,试问:

(1) 边长为$\frac{1}{3^n}$ 的正方形有多少?

(2) 当 n 无限增加时,在 n 次之后所删去的正方形面积之和的极限等于什么?

(匈牙利数学奥林匹克,1908 年)



[解] (1) 在第一次划分并从所得到的 9 个正方形中删去一个正方形后,剩下 8 个边长为$\frac{1}{3}$ 的正方形;第二次划分后得到 8×9 个正方形,从中删去 8 个正方形,剩下 8^2 个边长为 $\frac{1}{3^2}$ 的正方形,……;如果这样重复 n 次,则在第 n 次划分及删去后,将剩下 8^n 个边长为$\frac{1}{3^n}$ 的正方形.如图.

(2) 在第 n 次之后所剩下的正方形的面积之和为

$$8^n\left(\frac{1}{3^n}\right)^2=\left(\frac{8}{9}\right)^n,$$

因此,所删去的正方形的面积之和为 $1-\left(\frac{8}{9}\right)^n$.

由于当 n 充分大时,$\left(\frac{8}{9}\right)^n$ 可为任意小、于是当 n 无限增大时,所删去的正方形的面积之和趋向于 1.

4·225 试证:由正整数组成的等差数列的所有的项不可能都是素数(除了蜕化的情形,即公差为零的数列,它所有的项可以等于同一素数).

(匈牙利数学奥林匹克,1923 年)

[证] 由条件知,数列的公差 d 是正整数,若 a_r 是它的通项,则

$$a_{r+s} = a_r + sd.$$

因为 $a_1 \geqslant 1$,而 $d > 0$,所以在这个数列中总可以找到这样的项 a_r,使得 $a_r > 1$ 和 $s = a_r$,这时

$$a_{r+s} = a_r + a_r d = a_r(1+d)$$

是一个合数.

4·226 若干个居民点都分别有道路与市区相连,但居民点之间没有道路相连.一卡车上装有需立即送往各居民点的所有货物,要从市区出发送给各点.运费的计算办法是:车上所装的货物重量乘以所跑的距离.假定每个居民点所需的货物重量都刚好等于它到市区的距离.证明无论卡车按怎样的顺序将货物送往各居民点,总的运费都一样.

(第 58 届莫斯科数学奥林匹克,1996 年)

[解] 只需证明改变任意两个居民点之间的先后顺序,总运费都不变.

为此,又只需证明改变任一居民点与紧接在它之后的那个居民点之间的先后顺序,总运费都不变.这是因为,任意两个居民点之间顺序的改变都可以通过一系列这种紧接着的居民点之间顺序的改变来实现.

设汽车原计划给居民点 N 送货后,紧接着给居民点 M 送货,并设居民点 N 和 M 所需货物的重量分别为 n 和 m.由已知,居民点 N 和 M 到市区的距离分别为 n 和 m.

如果将运送计划中居民点 N 与居民点 M 的先后顺序改变,仅仅影响"这 $n+m$ 重的货物从市区出发,往 N 和 M 之一先送货,再返回市区,又从市区往 N 和 M 中的另一点送货"这一部分的运费计算,而不影响其他货物在任意路段上的运费计算,也不影响这 $n+m$ 重的货物在其他路段上的运费计算.

而对于运费计算有影响的这一部分,按原计划计算,运费应为

$$(n+m)\cdot n + m\cdot n + m^2;$$

按照改变后的计划计算,运费应为

$$(n+m)m + n\cdot m + n^2.$$

显然,即使是运费计算有影响的这一部分,计算运费都是 $(m+n)^2$,即实际运费不变,所以原命题得证.

4·227　某人花了一枚硬币买了一块面包和一瓶克瓦斯(饮料).当物价上涨20%后,这枚硬币只够买半块面包和一瓶克瓦斯.试问:如果物价再上涨20%,那么这枚硬币够不够光买一瓶克瓦斯?

(第58届莫斯科数学奥林匹克,1996年)

[解]　设硬币币值为1.涨价前,一块面包的价格为x,一瓶克瓦斯的价格为y.由题意,

$$\begin{cases} x+y=1 \\ 1.2(0.5x+y)=1 \end{cases}$$

解得　$y=\frac{2}{3}$.

由于　$\frac{2}{3}\cdot 1.2\cdot 1.2=\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{5}=\frac{24}{25}<1$,

因此,物价再上涨20%后,这枚硬币还够买一瓶克瓦斯.

第8节　其他

4·228　如果值$x=\sin\alpha$,$y=\sin\beta$给定了,那么表达式

$$z=\sin(\alpha+\beta)$$

在一般情况下有四个不同的值.试写出联系x,y和z的方程,但不许包含根式和三角函数.并求使$z=\sin(\alpha+\beta)$有少于四个值的x和y的值.

(匈牙利数学奥林匹克,1903年)

[解]　由已知得

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-x^2},\cos\beta=\pm\sqrt{1-y^2},$$

因此　$z=\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

具有下面四个值

$$z_1=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2},$$

$$-z_1=-x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2},$$

$$z_2=x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2},$$

$$-z_2=-x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}.$$

方程

$$(z-z_1)(z+z_1)(z-z_2)(z+z_2)=0$$

的根是 $z_1,-z_1,z_2,-z_2$,去掉括号整理得

$$z^4-(z_1^2+z_2^2)z^2+z_1^2z_2^2=0, \qquad ①$$

其中 $z_1^2+z_2^2=2[(x\sqrt{1-y^2})^2+(y\sqrt{1-x^2})^2]$

$$=2(x^2-2x^2y^2+y^2),$$

$$z_1z_2=(x\sqrt{1-y^2})^2-(y\sqrt{1-x^2})^2$$

$$=x^2-y^2.$$

将这些式子代入方程 ①,即得所求方程为

$$z^4-2(x^2-2x^2y^2+y^2)z^2+(x^2-y^2)^2=0.$$

由于 $\Delta=(x^2-2x^2y^2+y^2)-(x^2-y^2)^2=4x^2y^2(1-x^2)(1-y^2)$,从而为使 $\sin(\alpha+\beta)$ 有少于四个值当且仅当 $x=0$ 或 $y=0$ 或 $|x|=1$ 或 $|y|=1$.

4·229 十进制的自然数 a 由 n 个相同的数字 x 组成,而数 b 由 n 个相同的数字 y 组成,数 c 由 $2n$ 个相同的数字 z 组成.对于任何 $n\geqslant 2$,求出使得 $a^2+b=c$ 成立的数字 x,y,z.

(第 20 届全苏数学奥林匹克,1986 年)

[解] 设 $a=\overline{\underbrace{xx\cdots x}_{n个}}=x\cdot\underbrace{11\cdots1}_{n个}$,

$$b=\overline{\underbrace{yy\cdots y}_{n个}}=y\cdot\underbrace{11\cdots1}_{n个},$$

$$c=\overline{\underbrace{zz\cdots z}_{}}=z\cdot\underbrace{11\cdots1}_{2n个}.$$

则 $$x^2\cdot\underbrace{11\cdots1}_{n个}{}^2+y\cdot\underbrace{11\cdots1}_{n个}=z\cdot\underbrace{11\cdots1}_{2n个},$$

即 $$x^2\cdot\underbrace{11\cdots1}_{n个}+y=z(10^n+1),$$

$$(x^2-9z)\underbrace{11\cdots1}_{n个}=2z-y.$$

故 $\begin{cases}x^2-9z=0,\\2z-y=0.\end{cases}$ 或 $\begin{cases}n=2,\\2z-y=11,\\x^2-9z=1.\end{cases}$

解之,得

$x=3,y=2,z=1,n\geqslant 2$;$x=6,y=8,z=4,n\geqslant 2$;
$x=8,y=3,z=7,n=2$.

4·230　如果整数 n 可以表示成

$$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k,$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是满足

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k} = 1$$

的正整数(不一定相异)，那么，我们称 n 是"好数".

已知整数33至73是"好数"，证明每一个不小于33的整数都是"好数".

(第7届美国数学奥林匹克，1978年)

[证]　若 $(a_1, a_2, \cdots, a_k)$ 是"好数" n 的一个分解，则有

$$\begin{cases} n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k, & ① \\ \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_k} = 1. & ② \end{cases}$$

将②乘以 $\frac{1}{2}$ 得

$$\frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + \cdots + \frac{1}{2a_k} = \frac{1}{2},$$

从而

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + \cdots + \frac{1}{2a_k} = 1.$$

又因为

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}, \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6},$$

则有

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + \cdots + \frac{1}{2a_k} = 1,$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + \cdots + \frac{1}{2a_k} = 1.$$

于是

$$2n + 8 = 4 + 4 + 2a_1 + 2a_2 + \cdots + 2a_k,$$

$$2n + 9 = 3 + 6 + 2a_1 + 2a_2 + \cdots + 2a_k.$$

这就是说，$2n + 8$ 和 $2n + 9$ 都是"好数".

于是，我们已经证明若 n 是一个"好数"，那么 $2n + 8$ 和 $2n + 9$ 都是"好数".

现在设 p_n 是这样的命题：

所有整数 $n, n + 1, \cdots, 2n + 7 (n \geqslant 33)$ 都是"好数".

我们用数学归纳法证明命题 p_n.

$n=33$时,$2n+7=73$,由题设从33到73之间的所有整数都是"好数",因此命题 p_{33} 成立.

假设 $n=k$时,命题成立,即 $k,k+1,\cdots,2k+7$是"好数",又由上面的证明:k 是"好数"时,$2k+8,2k+9$都是"好数",于是由命题 p_k 成立可以推出命题 p_{k+1} 成立.

因此,对 $n\geqslant 33$,命题 p_n 都成立.

所以,每一个 $\geqslant 33$ 的整数都是"好数".

4・231 求出所有的实数 a,使得有非负实数 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5 适合

$$\sum_{k=1}^{5} kx_k = a, \sum_{k=1}^{5} k^3 \cdot x_k = a^2, \sum_{k=1}^{5} k^5 x_k = a^3.$$

(第21届国际数学奥林匹克,1979年)

[解] 设有非负实数 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 适合要求,则由 *cauchy - schwarz* 不等式

$$a^4=\left(\sum_{k=1}^{5}k^3x_k\right)^2=\left[\sum_{k=1}^{5}\left(k^{\frac{1}{2}}x_k^{\frac{1}{2}}\right)\left(k^{\frac{5}{2}}x_k^{\frac{1}{2}}\right)\right]^2$$

$$\leqslant\left(\sum_{k=1}^{5}kx_k\right)\left(\sum_{k=1}^{5}k^5x_k\right)=a\cdot a^3=a^4,$$

于是 $$\frac{k^{\frac{5}{2}}\cdot x_k^{\frac{1}{2}}}{k^{\frac{1}{2}}\cdot x_k^{\frac{1}{2}}}=\frac{k^2\cdot x_k^{\frac{1}{2}}}{x_k^{\frac{1}{2}}}=\text{常数}.(k=1,2,3,4,5) \qquad ⊛$$

若 $x_1=x_2=\cdots=x_5=0$,则 $a=0$,若 $x_1,x_2,\cdots,x_5$ 中有两个或更多个不为0,则⊛不能成立.于是 $x_1,x_2,\cdots,x_5$ 中只能有一个不为0.设 $x_j\neq 0$,这时,

$jx_j=a, j^3x_j=a^2, j^5x_j=a^3$,

由前两式,得 $a=j^2$,而 $x_j=j$,其余各数为0,而 j 可为1,2,3,4,5,所以只有当 $a=0,1,4,9,16,25$时才能有非负实数 $x_1,x_2,\cdots,x_5$ 适合题目要求.

4・232 如果 a,b,c 是正整数,满足 $c=(a+bi)^3-107i$,求 c(其中 $i^2=-1$).

(第3届美国数学邀请赛,1985年)

[解] 由已知得

$$c=(a^3-3ab^2)+i(3a^2b-b^3-107).$$

因为 c 为正整数,所以

$$3a^2b-b^3-107=0,$$

即 $$b(3a^2-b^2)=107.$$

因为 a,b 是正整数,并且 107 是质数,所以只能有以下两种情形.

情形 1 $\begin{cases} b=107, \\ 3a^2-b^2=1. \end{cases}$

此时 $$3a^2=107^2+1.$$

但上式左边是3的倍数,右边不是3的倍数,因而上式不可能成立.也就是说,情形 1 不可能出现.

情形 2 $\begin{cases} b=1, \\ 3a^2-b^2=107. \end{cases}$

此时,$3a^2=108$,解得 $a=6$.

又 $$c=a^3-3ab^2=6^3-3\times6\times1^2=198.$$

4·233 设 a,b,c,d 为奇数,$0<a<b<c<d$,且 $ad=bc$.试证如果 $a+d=2^k,b+c=2^m$,其中 k、m 为整数,则 $a=1$.

(第 25 届国际数学奥林匹克,1984 年)

[证] 因为 $ad=bc$,所以

$$\begin{aligned} a[(a+d)-(b+c)] &= a^2+ad-ab-ac \\ &= a^2+bc-ab-ac \\ &= (a-b)(a-c) \\ &> 0, \end{aligned}$$

从而有 $$a+d>b+c,$$

即 $$2^k>2^m,$$

故 $$k>m.$$

又 $$\begin{aligned} b\cdot2^m-a\cdot2^k &= b(b+c)-a(a+d) \\ &= b^2+bc-a^2-ad \\ &= b^2-a^2, \end{aligned}$$

即 $$2^m(b-a\cdot2^{k-m})=(b-a)(b+a). \quad ①$$

因此 2^m 可整除$(b-a)(b+a)$.

但$(b-a)+(b+a)=2b$ 不是 4 的倍数,因此 $b-a,b+a$ 不能同时

被4整除.从而其中必有一个能被2^{m-1}整除.注意到

$$b-a<b+a<b+c=2^m,$$

因此$b-a,b+a$中必有一个等于2^{m-1}.但

$$b-a<b<\frac{1}{2}(b+c)=2^{m-1}.$$

故$b+a=2^{m-1}$

代入①式得

$$\begin{cases}b+a=2^{m-1},\\ b-a=2(b-a\cdot 2^{k-m}),\end{cases}$$

解得　$a=2^{2m-k-2}$,

因为a为正奇数,所以$a=1$.

4·234　如果$\log_8 a+\log_4 b^2=5$,并且$\log_8 b+\log_4 a^2=7$,求ab.

（第2届美国数学邀请赛,1984年）

[解]　将题设二式相加得

$$\log_8 a+\log_8 b+\log_4 b^2+\log_4 a^2=12,$$

利用对数性质得

$$\log_8(ab)+\log_4(ab)^2=12,$$

用换底公式得

$$\frac{\log_2(ab)}{3}+\log_2(ab)=12,$$

整理得　$\log_2(ab)=9$,

解得　$ab=2^9=512$.

4·235　设a,b,c,d是正整数,满足$a^5=b^4,c^3=d^2$,且$c-a=19$.求$d-b$.

（第3届美国数学邀请赛,1985年）

[解]　在$a^5=b^4$中,由于5与4互质,因此存在正整数m,使

$$a=m^4,b=m^5.$$

同样地,存在正整数n,使

$$c=n^2,d=n^3.$$

于是由$c-a=19$得

$$n^2-m^4=19,$$

即　$(n-m^2)(n+m^2)=19.$

注意到 19 是质数,且 $n - m^2 < n + m^2$,因此必有

$$\begin{cases} n - m^2 = 1, \\ n + m^2 = 19. \end{cases}$$

解得 $n = 10, m = 3$. 于是

$$d - b = n^3 - m^5 = 1000 - 243 = 757.$$

4·236　如果 $f(x) = x^2 + x$,证明:关于 a, b 的方程 $4f(a) = f(b)$ 没有正整数解.

(第 9 届加拿大数学奥林匹克,1977 年)

[证]　方程 $4f(a) = f(b)$ 就是方程

$$4(a^2 + a) = b^2 + b.$$

按 a 的降幂排列,得

$$4a^2 + 4a + (-b^2 - b) = 0.$$

于是 $$a = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 16b^2 + 16b}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{b^2 + b + 1}}{2}.$$

如果 a, b 是方程 $4f(a) = f(b)$ 的正整数解,那么 b 是正整数. 但由

$$b^2 < b^2 + b + 1 < (b + 1)^2$$

可知,$\sqrt{b^2 + b + 1}$ 是无理数,从而 a 不是正整数,矛盾. 故命题得证.

4·237　证明对于无穷多个素数 p,方程 $x^2 + x + 1 = py$ 有整数解 (x, y).

(第 2 届全苏数学奥林匹克,1968 年)

[证]　当 $x = 4$ 时,$4^2 + 4 + 1 = 3 \times 7$. 因此,当 $p = 3$ 或 7 时,原方程有整数解.

假设原方程只对有限多个质数 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 有整数解 (x, y),那么我们可取 $x = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_m$,这样

$$x^2 + x + 1 = (p_1, p_2, \cdots p_m)^2 + (p_1, p_2, \cdots p_m) + 1.$$

显然,它不能被 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 中的任何一个素数整除,因此,它必有一个不同于 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 的质因数 q,这就是说

$$x^2 + x + 1 = qy$$

有整数解. 此与我们所作的假设矛盾. 故原方程对无穷多个素数 p 有整数解.

4·238　设有理数 x, y 满足方程

$$x^5+y^5=2x^2y^2,$$

证明 $1-xy$ 是有理数的平方.

（第22届全苏数学奥林匹克，1988年）

［证］ 把已知方程两边同时平方，得

$$(x^5+y^5)^2=4x^4y^4, \quad ①$$

① 式两边同减 $4x^5y^5$，得

$$(x^5-y^5)^2=4x^4y^4(1-xy). \quad ②$$

若 $xy=0$，则 $1-xy=1$ 是有理数1的平方.

若 $xy\neq 0$，则将 ② 式化为

$$1-xy=\left(\frac{x^5-y^5}{2x^2y^2}\right)^2,$$

因此 $1-xy$ 也是有理数的平方.

4·239 若整数 x,y 使得 $y^2+3x^2y^2=30x^2+517$，求 $3x^2y^2$.

（第5届美国数学邀请赛，1987年）

［解］ 原方程化为

$$(3x^2+1)(y^2-10)=507=3\times 13^2.$$

因为 $3x^2+1$ 与3互质，所以它只可能是1或13或 13^2. 相应的 y^2-10 是 3×13^2 或 3×13 或3. 但只有 $y^2-10=3\times 13$ 时，$y^2=49$ 是平方数，并且相应的 $3x^2=13-1=12$. 所以

$$3x^2y^2=12\times 49=588.$$

4·240 求三个自然数 x,y,z 满足方程 $x^3+y^4=z^5$，问这个方程的解集在自然数集中是有限还是无限的?

（第14届全俄数学奥林匹克，1988年）

［解］ 因为 $2^{24}+2^{24}=2^{25}$，所以

$$(2^8)^3+(2^6)^4=(2^5)^5.$$

也就是 $x=2^8=256$；$y=2^6=64$，$z=2^5=32$ 是已知方程的一组解.

另一方面，若 (x_0,y_0,z_0) 是已知方程在自然数集中的一组解，则 $(k^{20}x_0,k^{15}y_0,k^{12}z_0)$ 也是它的解，其中 k 是任意的自然数.

因此，已知方程的解集在自然数集里是无限的.

4·241 已知 $2\lg(x-2y)=\lg x+\lg y$，试求 $x:y$.

（中国北京市数学竞赛，1963年）

[解]　所给等式可以化成$(x-2y)^2=xy$，

即　　$x^2-5xy+4y^2=0$，

或　　$(x-y)(x-4y)=0$.

由$x-y=0$，得$\frac{x}{y}=1$，又因x和y都应为正数，故此时$x-2y<0$，与题中所给等式矛盾.由$x-4y=0$，得$\frac{x}{y}=4$，可知只有$\frac{x}{y}=4$为所求.

4·242　设a、b为整数，问$\Delta=\begin{vmatrix}36 & b\\ 81 & a\end{vmatrix}$的最小正整数值$c$为多少?对满足$\Delta=c$的各组正整数解$(a,b)$中，要使$a+b$为最小的值，问$a$、$b$各为多少?

（中国上海市数学竞赛，1963年）

[解]　因$\Delta=36a-81b=9(4a-9b)$，

而a，b为整数，故$4a-9b$也是整数，因最小正整数为1，所以Δ的最小正整数值c不小于9.

因4与9是互质的，故由定理知，必存在整数a、b使得

$$4a-9b=1,$$

由$a=\frac{9b+1}{4}=2b+\frac{b+1}{4}$，

要使a是整数，只要$\frac{b+1}{4}$是整数即可，

令$t=\frac{b+1}{4}$，

故　$\begin{cases}b=4t-1,\\ a=2(4t-1)+t=9t-2.(t=0,\pm1,\pm2,\cdots)\end{cases}$

而当t取正整数1,2…时，即得所有的正整数解.

而$a+b=(4t-1)+(9t-2)=13t-3(t=1,2,\cdots)$

因此，只需取$t=1$即可使$a+b$为最小的值.

此时，$a=7$，$b=3$，$a+b=10$.

4·243　设a是任意给定的正整数.试证：总可以找到一对且仅一对正整数(x,y)，使得

$$x+\frac{(x+y-1)(x+y-2)}{2}=a \quad ①$$

(匈牙利数学奥林匹克,1936年)

[证] 设 $x+y-1=k$,则

$$\frac{(x+y-1)(x+y-2)}{2}=\frac{k(k-1)}{2},0<x\leqslant k.$$

对于任给的正整数 a,取 k 的值满足

$$\frac{k(k-1)}{2}<a\leqslant\frac{k(k-1)}{2}+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

这个不等式惟一地确定了 k 的值.从而惟一地确定了 x 和 y.

$$x=a-\frac{k(k-1)}{2},$$
$$y=k+1-x.$$

4·244 试证:若变量 x 和 y 的某一组值满足方程

$$x^2-3xy+2y^2+x-y=0 \quad ①$$

和 $$x^2-2xy+y^2-5x+7y=0, \quad ②$$

则这一组值也满足方程

$$xy-12x+15y=0. \quad ③$$

(匈牙利数学奥林匹克,1897年)

[证] 将方程①和②的两边分别乘以 $(x-y-9)$ 和 $(-x+2y+3)$,相加后整理,得

$$(x^2-3xy+2y^2+x-y)(x-y-9)+(x^2-2xy+y^2-5x+7y)(-x+2y+3)$$
$$=2(xy-12x+15y).$$

因此,若 x 和 y 的某一组值满足方程①和②,则上式的等号左边等于零,从而右边也等于零,即 x 和 y 满足方程③.

4·245 试证:当且仅当方程

$$y_1+2y_2+\cdots+ny_n=a-\frac{n(n+1)}{2}$$

没有非负整数解时,方程

$$x_1+2x_2+\cdots+nx_n=a$$

没有正整数解(a 是正整数).

(匈牙利数学奥林匹克,1908年)

[证]　数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 满足方程

$$x_1+2x_2+\cdots+nx_n=a \qquad ①$$

的充要条件是:数 $y_1=x_1-1,y_2=x_2-1,\cdots,y_n=x_n-1$ 满足方程

$$(y_1+1)+2(y_2+1)+\cdots+n(y_n+1)=a.$$

上式可变为如下形式

$$y_1+2y_2+\cdots+ny_n=a-\frac{n(n+1)}{2}. \qquad ②$$

因此,当且仅当方程②有非负整数解时,方程①有正整数解,即当且仅当方程②没有非负整数解时,方程①没有正整数解.

4·246　证明:方程 $6(6a^2+3b^2+c^2)=5n^2$ 除去 $a=b=c=n=0$ 无整数解.

(第1届亚太地区数学奥林匹克,1989年)

[证]　不妨设非零解 a,b,c,n 的最大公约数

$$(a,b,c,n)=1.$$

由方程 $6(6a^2+3b^2+c^2)=5n^2$　①

得 $6\mid n^2$,从而 $6\mid n,6^2\mid 6(6a^2+3b^2+c^2),3\mid c$.

令　$n=6m,c=3d$,其中 m,d 为整数,则

$$2a^2+b^2+3d^2=10m^2. \qquad ②$$

由于平方数 x^2 除以8时余数为1或0与4,因此②式右边除以8的余数为2或0.于是②式左边 b,d 的奇偶性必定相同.

在 b、d 均为奇数时,②式左边除以8后余数为 $2\times1+1+3=6$ 或 $0+1+3=4$,均与右边不同.所以 d,b 均为偶数,这时 a 必为奇数(否则,2是 a,b,c,n 的公约数,与 $(a,b,c,n)=1$ 矛盾).从而②式左边除以4余2,右边的 m 也必为奇数.

令 $b=2b_1,d=2d_1$,则

$$a^2+2b_1^2+6d_1^2=5m^2. \qquad ③$$

$5m^2-a^2$ 除以8时余数为 $5-1=4$,所以 $\frac{5m^2-a^2}{2}$ 除以4时余数为2.这样由③得 $b_1^2+3d_1^2$ 除以4时余数为2.但平方数除以4时余0或1,所以 $b_1^2+3d_1^2$ 除以4时余数应为0或1或3.矛盾.这表明原方程仅有一组整数解 $a=b=c=n=0$.

4·247　试找出所有的正整数 n,使得下列方程式有一个整数

解.

$$x^n+(2+x)^n+(2-x)^n=0.$$

(第5届亚太地区数学奥林匹克,1993年)

[解] 当 $n=1$ 时,得 $x+(2+x)+(2-x)=0, x=-4$ 为其整数解.

当 n 为偶数时,原式有整数解的充要条件为:

$$\begin{cases}x=0,\\2+x=0,\\2-x=0.\end{cases} \quad ①$$

但①为矛盾方程,故知 n 为偶数时,原方程式无整数解.

当 n 为大于1的奇数时,利用二项式定理展开左边再合并整理得到多项式 $p(x)$,它的最高次项系数为1,各项系数都是非负整数,常数项为 2^{n+1}. 由韦达定理知,$p(x)=0$ 的可能整数解可设为 -2^t,t 为非负整数:

若 $t=0$,则 $x=-1$,原式左式为3个奇数之和,故不可能为零.

若 $t=1$,则 $x=-2$,原式左式为 $(-2)^n+0+4^n$,亦不可能为0.

若 $t\geqslant 2$,设 $t=p+1, p\geqslant 1$,则原式的左式为

$$\begin{aligned}&2^n[-2^{pn}+(1-2^p)^n+(1+2^p)^n]\\&=2^n\left\{-2^{pn}+2\left[1+\binom{n}{2}2^{2p}+\binom{n}{4}2^{4p}+\cdots\right]\right\}.\end{aligned}$$

但 $n\geqslant 3$,上式大括弧内之值被4除余2,不可能为0,因此左式不可能为0.

故当 n 为大于或等于3的奇数时,原方程式无整数解.

综合上述,方程 $x^n+(2+x)^n+(2-x)^n=0$ 有整数解的充要条件为 $n=1$.

4·248 要使方程

$$\left[\frac{10^n}{x}\right]=1989$$

有整数解,正整数 n 最小取何值?

(第23届全苏数学奥林匹克,1989年)

[解] 由方程可得

$$1989\leqslant\frac{10^n}{x}<1990, \quad ①$$

由于 $x \leqslant 0$ 时，原方程无解，因此不妨设 $x > 0$. 这样，由 ① 可得

$$10^n \cdot \frac{1}{1990} < x \leqslant 10^n \cdot \frac{1}{1989},$$

即

$$10^n \cdot 0.0005025\cdots < x \leqslant 10^n \cdot 0.0005027\cdots \qquad ②$$

当 $n = 1,2,3,\cdots,6$ 时，满足 ② 式的整数 x 不存在，因此 $n < 7$ 时原方程无整数解.

当 $n = 7$ 时，② 式化为

$$5025.\cdots < x \leqslant 5027.\cdots,$$

$$x_1 = 5026 \quad 或 \quad x_2 = 5027.$$

经检验，它们确是原方程当 $n = 7$ 时的整数解.

因此，要使原方程有整数解，n 的最小值是 7.

4·249 证明：方程 $x - y + z = 1$ 具有无穷多组满足如下条件的正整数解：其中 x, y, z 两两不同，并且它们中任意两个数的乘积都可被第 3 个数整除.

（第 22 届全苏数学奥林匹克，1988 年）

[证] 设 x, y, z 为原方程符合题目要求的正整数解. 则 x, y, z 两两不同，并且存在正整数 u, v, w，使得

$$\begin{cases} xy = zu, & ① \\ yz = xv, & ② \\ zx = yw. & ③ \end{cases}$$

① × ② × ③ 得 $(xyz)^2 = (xyz)(uvw)$，

注意到 $xyz \neq 0$，于是，我们有

$$xyz = uvw. \qquad ④$$

将 ①、②、③ 分别代入 ④ 式左端，得

$$z^2u = x^2v = y^2w = xyz = uvw,$$

从而有

$$x^2 = uw, y^2 = uv, z^2 = vw,$$

即 $\quad x = \sqrt{uw}, y = \sqrt{uv}, z = \sqrt{vw}.$

令 $\quad n = \sqrt{u}, m = \sqrt{w}, k = \sqrt{v},$

则 $\quad x = nm, y = nk, z = mk. \qquad ⑤$

将 ⑤ 代入原方程，得

$$nm - nk + mk = 1,$$

即 $$n(k - m) = mk - 1.$$

取 $k - m = 1$,则

$$k = m + 1, \quad n = m^2 + m - 1 \qquad ⑥$$

把⑥代入⑤得

$x = m(m^2 + m - 1), y = (m + 1)(m^2 + m - 1), z = m(m + 1)$. 经验证,当 $m = 2,3,4,\cdots\cdots$ 时,上式给出了原方程的无穷多组符合要求的正整数解.

4·250 给定方程 $x^3 - 3xy^2 + y^3 = n$,其中 n 为正整数.试证:

(1) 如果方程有一组整数解 (x, y),则它至少有三组整数解;

(2) 当 $n = 2891$ 时,方程没有整数解.

(第 23 届国际数学奥林匹克,1982 年)

[证] (1) 由 $(y - x)^3 = y^3 - 3xy^2 + 3x^2y - x^3$ 可得

$$x^3 - 3xy^2 + y^3 = (y - x)^3 - 3x^2(y - x) - x^3,$$

即 $$x^3 - 3xy^2 + y^3 = (y - x)^3 - 3\cdot(y - x)\cdot(-x)^2 + (-x)^3.$$

因此,若 (x, y) 是方程

$$x^3 - 3xy^2 + y^3 = n \qquad ①$$

的整数解,则 $(y - x, -x)$ 也是方程①的整数解.同理 $(-x-(y-x), -(y-x)) = (-y, x-y)$ 也是方程①的整数解.

根据 x, y 不同时为零,我们不难用反证法证明,这三组解是两两不同的.

(2) 设方程①在 $n = 2891$ 时有一组整数解.(x, y),即.

$$x^3 - 3xy^2 + y^3 = 2891.$$

则 $$x^3 + y^3 = 3xy^2 + 3 \times 963 + 2, \qquad ②$$

从而有 $$x^3 + y^3 \equiv 2 \pmod 3.$$

于是,x, y 可能有三种情况:

(i) $\begin{cases} x \equiv 0 \pmod 3, \\ y \equiv 2 \pmod 3; \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3, \\ y \equiv 0 \pmod 3; \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 3, \\ y \equiv 1 \pmod 3. \end{cases}$

对于情况(i),我们令 $x = 3s, y = 3t + 2$,其中 s, t 都是整数.代入②式得

$$(3s)^3 + (3t+2)^3 = 9s(3t+2)^2 + 9\times 321 + 2,$$
上式左端模 9 等于 8，右端模 9 等于 2，矛盾．因此，情况(i) 不可能出现．

对于情况(ii)，我们令 $x = 3s+2, y = 3t$，
其中 s, t 都是整数．代入 ② 式得
$$(3s+2)^3 + (3t)^3 = 3\cdot(3s+2)\cdot(3t)^2 + 9\times 321 + 2,$$
上式左端模 9 等于 8，右端模 9 等于 2，矛盾．因此，情况(ii) 不可能出现．

对于情况(iii)，我们令 $x = 3s+1, y = 3t+1$，其中 s, t 都是整数．代入 ② 式得
$$(3s+1)^3 + (3t+1)^3 = 3\cdot(3s+1)(3t+1)^2 + 9\times 321 + 2 \quad ③$$
上式左端模 9 等于 2，上式右端的第一项
$$\begin{aligned}3(3s+1)(3t+1)^2 &= 3(3s+1)[3t(3t+2)+1]\\ &= 27st(3t+2) + 9s + 9t(3t+2) + 3\end{aligned}$$
可见 ③ 式右端模 9 等于 5，矛盾．因此，情况(iii) 也不可能出现．

故方程 ① 在 $n = 2891$ 时没有整数解．

4·251 设1987 可以在 b 进制中写出三位数 $\overline{xyz}$ 且 $x+y+z = 1+9+8+7$，试确定所有的 x, y, z 及 b．

（第 19 届加拿大数学奥林匹克，1987 年）

［**解**］ 由题设知
$$xb^2 + yb + z = 1987 (x \geqslant 1) \quad ①$$
且 $b^3 > 1987, b^2 < 1987$．于是
$$12 < b < 45.$$
又由题设知 $x + y + z = 25.$ ②

① − ② 得 $(b-1)(bx + x + y) = 1962.$

所以 $b-1$ 可以整除 1962．考虑到 $1962 = 2\times 9\times 109$，
且 $12 < b < 45$，
可知 $b = 19.$

于是 $1987 = 5\times 19^2 + 9\times 19 + 11$，
即 $x = 5, y = 9, z = 11, b = 19.$

4·252 (1) 求一切正整数，它的首位数码是 6，去掉这个 6，所成整数是原整数的 $\frac{1}{25}$．

(2) 证明:没有这样的正整数,它的首位数码是6,去掉这个6,所成整数是原整数的$\frac{1}{35}$.

(第2届加拿大数学奥林匹克,1970年)

[解] 设满足题设条件的正整数是

$6\cdot 10^n+m$,其中 $n\in N$ 且 $0\leqslant m\leqslant 10^n-1$.

(1) 由给定条件得

$$m=\frac{1}{25}(6\cdot 10^n+m),$$

化简为

$$m=2^{n-2}\cdot 5^n.$$

因此所求的数为

$$6\cdot 10^n+2^{n-2}\cdot 5^n=625\cdot 10^{n-2},$$

即 625,6250,62500,…

(2) 由给定条件得

$$m=\frac{1}{35}(6\cdot 10^n+m),$$

化简为 $17m=3\cdot 10^n$.

上式左端是17的整数倍,右端不能被17整除,这是一个矛盾.因此,满足给定条件的正整数不存在,从而命题得证.

4·253 已知正整数 a 和 b 使得 $ab+1$ 整除 a^2+b^2,求证:$(a^2+b^2)/(ab+1)$ 是某个正整数的平方.

(第29届国际数学奥林匹克,1988年)

[证] 设正整数 $k=(a^2+b^2)/(ab+1)$ 不是完全平方数,考虑不定方程

$$a^2+b^2-kab=k,k\text{ 为定数}. \qquad ①$$

显然,这个不定方程的解 (a,b) 不会使 $ab\leqslant 0$.设 (a_0,b_0) 是①的解中满足 $a>0,b>0$ 且使 $a+b$ 最小的解,不妨设 $a_0\geqslant b_0$.固定 k 与 b_0,把①视为 a 的二次方程.显然,它有一根 a_0,设另一根为 a'.于是由根与系数的关系知

$$\begin{cases}a_0+a'=kb_0, & ②\\ a_0\cdot a'=b_0^2-k. & ③\end{cases}$$

由 ② 知 a' 为整数,由 ③ 又知 $a' \neq 0$,否则 k 为完全平方数,与反证假设矛盾.由于(a',b_0)是不定方程 ① 的解且 $b_0>0$,故 $a'>0$.于是有

$$a'=\frac{b_0^2-k}{a_0}\leqslant\frac{b_0^2-1}{a_0}\leqslant\frac{a_0^2-1}{a_0}<a_0.$$

可见,(a',b_0) 为 ① 的解且 $a'>0, b_0>0$,但 $a'+b_0<a_0+b_0$,此与(a_0,b_0)的选法矛盾,所以 k 必为完全平方数.

4·254 证明:存在无穷多个数 B,使方程

$$[x^{\frac{3}{2}}]+[y^{\frac{3}{2}}]=B$$

至少有 1980 个自然数解 x、y(这里$[z]$表示不超过 z 的最大整数).

(第 14 届全苏数学奥林匹克,1980 年)

[证] 我们先证明一个引理:对任意的自然数 M,都存在数 B,使原方程至少有 $M+1$ 个自然数解.

事实上,如果存在一个定数 M,使对任意的数 B,原方程的自然数解的个数都不大于 M,那么对于任意的正整数 N,自然数对的集合

$$S=\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant N,1\leqslant y\leqslant N\}$$

中的所有(x,y)使表达式$[x^{\frac{3}{2}}]+[y^{\frac{3}{2}}]$取不少于$\left[\frac{N^2}{M}\right]$个值.因此存在$(x_0,y_0)\in S$,使

$$[x_0^{\frac{3}{2}}]+[y_0^{\frac{3}{2}}]\geqslant\frac{N^2}{M}.$$

另一方面,$[x_0^{\frac{3}{2}}]+[y_0^{\frac{3}{2}}]\leqslant 2[N^{\frac{3}{2}}]\leqslant 2N^{\frac{3}{2}}$,

故得 $$2N^{\frac{3}{2}}\geqslant\frac{N^2}{M},$$

即 $$N\leqslant 4M^2.$$

此与 N 的任意性矛盾,故引理成立.

根据引理,对于 $M_1=1979$,存在 $B=B_1$,使原方程有 x_1 个解,其中 $x_1\geqslant M_1+1>1980$.

对于 $M_2=x_1$,存在 $B=B_2$,使原方程有 x_2 个解,其中 $x_2\geqslant M_2+1>1980$.

对于 $M_3=x_2$,存在 $B=B_3$,使原方程有 x_3 个解,其中 $x_3\geqslant M_3+1=1980$.

…………

这个过程可以无限地进行下去.因此存在无限多个数 B(即 B_1, $B_2,B_3,\cdots$),使原方程至少有 1980 个自然数解.

4·255 设 m 是给定的整数,求证存在整数 a,b 和 k,其中 a,b 均不能被 2 整除,$k\geqslant 0$,使得

$$2m=a^{19}+b^{99}+k\cdot 2^{1999}.$$

(中国中学生数学冬令营,1999 年)

[证] 因为当 s,x,y 都是奇数时,

$$x^s-y^s=(x-y)(x^{s-1}+x^{s-2}y+\cdots+y^{s-1}),$$

并且其中 $x^{s-1}+x^{s-2}y+\cdots+y^{s-1}$ 是奇数,所以下列命题成立:

如果 x,y 是奇数,r 是正整数,并且

$$x\not\equiv y\pmod{2^r},$$

那么,对于任意奇数 s,都有

$$x^s\not\equiv y^s\pmod{2^r}.$$

由这个命题可知,当 t 取遍 mod 2^r 的既约剩余系时,t^s 也取遍 mod 2^r 的既约剩余系(又称缩剩余系).

因此,对于奇数 $2m-1$,必有奇数 a,使得

$$2m-1=a^{19}+q\cdot 2^{1999}.$$

令 $b=1$,那么由上式即得

$$2m=a^{19}+b^{99}+q\cdot 2^{1999}.$$

如果 $q\geqslant 0$,那么题目的结论已得证.

如果 $q<0$,那么,可分别用

$$\bar{a}=a-h\cdot 2^{1999},$$

$$\bar{q}=\frac{a^{19}-(a-h\cdot 2^{1999})^{19}}{2^{1999}}+q$$

代替 a 和 q,仍有

$$2m=\bar{a}^{19}+b^{99}+\bar{q}\cdot 2^{1999},$$

只要取 h 足够大,就有 $\bar{q}>0$,从而题目的结论也成立.

于是,原命题得证.

4·256 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 定义在绝对值不超过 100 的整数集合上.把适合 $f(x)=g(y)$ 的整数对 (x,y) 的数目记作 m,适合 $f(x)=f(y)$ 的整数对 (x,y) 的数目记作 n,适合 $g(x)=g(y)$ 的整数对

(x,y) 的数目记作 k. 证明:$2m \leqslant n+k$.

(第 20 届俄罗斯数学奥林匹克决赛,1994 年)

[证] 设 a 是任意给定的一个值,并设使得 $f(x)=a$ 的 x 的个数为 n_a,$g(x)=a$ 的 x 的个数为 k_a(个数可能为 0). 则满足

$$\begin{cases} f(x)=a \\ g(y)=a \end{cases}$$

的数对 (x,y) 有 $n_a \cdot k_a$ 个;满足

$$\begin{cases} f(x)=a \\ f(y)=a \end{cases}$$

的数对 (x,y) 有 n_a^2 个;满足

$$\begin{cases} g(x)=a \\ g(y)=a \end{cases}$$

的数对有 k_a^2 个.

设 D_f 是 $f(x)$ 的值域,D_g 是 $g(x)$ 的值域,则

$$m=\sum_{a\in D_f\cap D_g} n_a k_a,$$

$$n=\sum_{a\in D_f} n_a^2,$$

$$k=\sum_{a\in D_g} k_a^2.$$

于是,我们有

$$\begin{aligned} 2m &= \sum_{a\in D_f\cap D_g} 2n_a k_a \\ &\leqslant \sum_{a\in D_f\cap D_g} n_a^2+k_a^2 \\ &= \sum_{a\in D_f\cap D_g} n_a^2+\sum_{a\in D_f\cap D_g} k_a^2 \\ &\leqslant \sum_{a\in D_f} n_a^2+\sum_{a\in D_g} k_a^2 \\ &= n+k. \end{aligned}$$

4·257 考虑方程

$$x^2+y^2+z^2+t^2-nxyzt-n=0;$$

这里 n 是一个给定的正整数.

(1) 求证:存在无限多个正整数 n,使得上述方程有正整数解$(x,$

$y,z,t)$.

(2) 取 $n=4^k\cdot(8m+7)$,这里 k,m 是非负整数,求证此时题目中的方程没有正整数解.

(越南国家队选拔赛,1994 年)

[证] (1) 取 $n=a^2+b^2+c^2$,其中 a,b,c 为任意正整数,则方程有正整数解

$$x=a,y=b,z=c,t=nabc.$$

(2) 先证明:若 $n=4^k\cdot(8m+7)$,则 n 不能表示成三个整数的平方和.

用反证法.

若存在三个整数 a,b,c,使得

$$n=4^k(8m+7)=a^2+b^2+c^2 \qquad ①$$

当 $k=0$ 时,

$$8m+7=a^2+b^2+c^2, \qquad ②$$

因为 $8m+7$ 是奇数,所以 a,b,c 是一奇两偶或者三个都是奇数.注意到奇数的平方除以 8 的余数必为 1,偶数的平方除以 8 的余数为 0 或 4,因此

$$a^2+b^2+c^2\not\equiv 7 \pmod 8$$

与 ② 式矛盾.

当 $k\geqslant 1$ 时,

$$4^k(8m+7)=a^2+b^2+c^2, \qquad ③$$

因为 $4^k(8m+7)$ 是偶数,所以 a,b,c 是一偶两奇或者全是偶数.

若 a,b,c 是一偶两奇,则

$$a^2+b^2+c^2\equiv 2 \text{ 或 } 6 \pmod 8$$

从而 $a^2+b^2+c^2$ 不是 4 的倍数,与 ③ 矛盾.

若 a,b,c 都是偶数,则由 ③ 可得

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2=4^{k-1}(8m+7).$$

依此类推,显然可得

$$\left(\frac{a}{2^k}\right)^2+\left(\frac{b}{2^k}\right)^2+\left(\frac{c}{2^k}\right)^2=8m+7,$$

其中 $\frac{a}{2^k}^2,\frac{b}{2^k}^2,\frac{c}{2^k}^2$ 都是整数.但由前面的讨论可知,

$$\left(\frac{a}{2^k}\right)^2+\left(\frac{b}{2^k}\right)^2+\left(\frac{c}{2^k}\right)^2\not\equiv 7 \pmod 8$$

矛盾.

因此,当 $n=4^k(8m+7)$ 时,n 不能表示成三个整数的平方和.

下面用反证法来证明(2).

当 $n=4^k(8m+7)$,k,m 是非负整数时,若方程

$$x^2+y^2+z^2+t^2-nxyzt-n=0$$

有正整数解(x_0,y_0,z_0,t_0).

由对称性,不妨设 $x_0\leqslant y_0\leqslant z_0\leqslant t_0$.

显然 t_0 是方程

$$t^2-nx_0y_0z_0t+(x_0^2+y_0^2+z_0^2-n)=0$$

的一个根.设 t_1 是该方程的另一个根,则

$$t_1=nx_0y_0z_0-t_0\text{(显然 } t_1 \text{ 为整数)}.$$

下面证明 $t_1<t_0$.

事实上,若 $t_1\geqslant t_0$,则

$$2t_0\leqslant nx_0y_0z_0.$$

于是,

$$\begin{aligned}2t_0(1+x_0y_0z_0t_0)&\leqslant nx_0y_0z_0(1+x_0y_0z_0t_0)\\&=x_0y_0z_0(x_0^2+y_0^2+z_0^2+t_0^2).\end{aligned}$$

由上式即得

$$0<2t_0\leqslant x_0y_0z_0(x_0^2+y_0^2+z_0^2-t_0^2).$$

因此,利用上式及 $x_0\leqslant y_0\leqslant z_0$,有

$$t_0^2<x_0^2+y_0^2+z_0^2<3z_0^2.$$

由上式及 $z_0\leqslant t_0$,得

$$\begin{aligned}n+nx_0y_0z_0^2&\leqslant n(1+x_0y_0z_0t_0)\\&=x_0^2+y_0^2+z_0^2+t_0^2\\&<6z_0^2.\end{aligned}$$

另一方面,由 $n\geqslant 7$ 可得

$$n+nx_0y_0z_0^2>7z_0^2.$$

显然,上面两个式子是矛盾的.

所以,必有 $t_1<t_0$.

下面证明 $t_1>0$.

用反证法.

若 $t_1<0$. 由 t_1 的定义,有

$$t_1^2-nx_0y_0z_0t_1+(x_0^2+y_0^2+z_0^2-n)=0,$$

即

$$n(x_0y_0z_0t_1+1)=x_0^2+y_0^2+z_0^2+t_1^2.$$

上式右端大于 0,而左端小于或等于 0,故矛盾.

因此必有 $t_1\geqslant 0$.

综上所述,若(x_0,y_0,z_0,t_0)是原方程的一组正整数解,其中 $x_0\leqslant y_0\leqslant z_0\leqslant t_0$;则存在非负整数 $t_1<t_0$,使得(x_0,y_0,z_0,t_1)是原方程的一组非负整数解. 换句话说,若(x_0,y_0,z_0,t_0)是原方程的一组正整数解,则可以减小其中的一个变量的值,使新得的四元数组是原方程的非负整数解. 如果新得的四元数组中,每个数都不等于 0,那么仍然可以重复进行这个过程. 显然,经过有限步,就可以得到$(x^*,y^*,z^*,0)$是原方程的一组非负整数解. 从而有

$$n=x^{*2}+y^{*2}+z^{*2}$$

其中 x^*,y^*,z^* 是正整数. 此与"$4^k(8n+7)$不能表示成三个整数的平方和"矛盾.

故 $n=4^k(8n+7)$ 时,原方程无正整数解.

4·258 p,q,r 是两两不同的实数,满足方程组

$$\begin{cases}q=p(4-p),\\ r=q(4-q),\\ p=r(4-r).\end{cases}$$

求所有 $p+q+r$ 的可能的值.

(爱尔兰数学奥林匹克,1994 年)

[解] 由已知

$$p=r(4-r)=-(r-2)^2+4\leqslant 4,$$

同理可得

$$q\leqslant 4, r\leqslant 4.$$

下面证明 $p\geqslant 0$,用反证法.

若 $p<0$,则由 $4-p\geqslant 0$ 可得

$$q\leqslant 0.$$

再由 $4-q\geqslant 0$ 得

$$r\leqslant 0.$$

于是,有

$$p+q+r<0.$$

将题目中三个方程相加,得

$$p^2+q^2+r^2=3(p+q+r)$$

由以上两式得

$$p^2+q^2+r^2<0$$

矛盾.

因此有 $4\geqslant p\geqslant 0$.

同理可得

$$4\geqslant q\geqslant 0, 4\geqslant r\geqslant 0.$$

令

$$p=4\sin^2\theta, \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

将上式代入原方程组的第一个方程,得

$$q=4\sin^2 2\theta,$$

将上式代入原方程组的第二个方程,得

$$r=4\sin^2 4\theta.$$

将上式代入原方程组的第三个方程,得

$$p=4\sin^2 8\theta.$$

于是,我们有

$$\sin 8\theta=\pm\sin\theta.$$

由于 $0\leqslant 8\theta\leqslant 4\pi$,因此有以下 8 种可能:

$$8\theta=\theta, 8\theta=\pi-\theta, 8\theta=\pi+\theta, 8\theta=2\pi-\theta,$$

$$8\theta=2\pi+\theta, 8\theta=3\pi-\theta, 8\theta=3\pi+\theta, 8\theta=4\pi-\theta.$$

即 $\theta\in\left\{0,\frac{\pi}{9},\frac{\pi}{7},\frac{2\pi}{9},\frac{2\pi}{7},\frac{\pi}{3},\frac{3\pi}{7},\frac{4\pi}{9}\right\}$

当 $\theta=0$ 或 $\frac{\pi}{3}$ 时, $p=q=r=0$ 或 3,舍去.

当 $\theta=\frac{\pi}{9},\frac{2\pi}{9},\frac{4\pi}{9}$ 时,

$$p+q+r=4\left(\sin^2\frac{\pi}{9}+\sin^2\frac{2\pi}{9}+\sin^2\frac{4\pi}{9}\right)$$

$$= 6 - 2\left(\cos\frac{2\pi}{9} + \cos\frac{4\pi}{9} + \cos\frac{8\pi}{9}\right)$$

$$= 6 - 2\left(2\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{9} - \cos\frac{\pi}{9}\right)$$

$$= 6,$$

当 $\theta = \frac{\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}$ 时,

$$p + q + r = 4\left(\sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{2\pi}{7} + \sin^2\frac{4\pi}{7}\right)$$

$$= 6 - 2\left(\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7}\right)$$

$$= 6 - 2\left(2\cos\frac{3\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{\pi}{7}\right)$$

$$= 6 - 2\cos\frac{\pi}{7}\left(2\cos\frac{3\pi}{7} - 1\right)$$

$$= 6 - \frac{\sin\frac{2\pi}{7}\left(2\cos\frac{3\pi}{7} - 1\right)}{\sin\frac{\pi}{7}}$$

$$= 6 - \frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}}\cdot\left(\sin\frac{5\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} - \sin\frac{2\pi}{7}\right)$$

$$= 6 + 1 = 7.$$

因此,本题所求的 $p + q + r$ 的全部可能的值仅有两个:6 和 7.

4·259 对任何整数 k,求证方程

$$y^2 - k = x^3$$

不可能同时有下述 5 组整数解 (x_1, y_1), $(x_2, y_1 - 1)$, $(x_3, y_1 - 2)$, $(x_4, y_1 - 3)$ 和 $(x_5, y_1 - 4)$. 如果上述方程有下列 4 组整数解 (x_1, y_1), $(x_2, y_1 - 1)$, $(x_3, y_1 - 2)$ 和 $(x_4, y_1 - 3)$,求证:$k \equiv 17 \pmod{63}$.

(韩国数学奥林匹克,1994 年)

[证] 先证第一个结论,用反证法.

若方程 $y^2 - k = x^3$,即

$$x^3 + k = y^2$$

有题目中给定的 5 组整数解,那么

$$\begin{cases} x_1^3 + k = y_1^2, \\ x_2^3 + k = (y_1 - 1)^2, \\ x_3^3 + k = (y_1 - 2)^2, \\ x_4^3 + k = (y_1 - 3)^2, \\ x_5^3 + k = (y_1 - 4)^2. \end{cases}$$

将上面等式组的前四个等式中的每一个分别减去在它后面的一个等式,得

$$\begin{cases} x_1^3 - x_2^3 = 2y_1 - 1, \\ x_2^3 - x_3^3 = 2y_1 - 3, \\ x_3^3 - x_4^3 = 2y_1 - 5, \\ x_4^3 - x_5^3 = 2y_1 - 7. \end{cases}$$

将上面等式组前三个等式中的每一个减去在它后面的一个等式,得

$$\begin{cases} x_1^3 - 2x_2^3 + x_3^3 = 2, & ① \\ x_2^3 - 2x_3^3 + x_4^3 = 2, & ② \\ x_3^3 - 2x_4^3 + x_5^3 = 2. & ③ \end{cases}$$

由于每个整数 x 必为 $3k, 3k+1, 3k-1$ 之一,其中 k 是整数,并且

$$(3k)^3 \equiv 0 \pmod 9,$$

$$(3k+1)^3 = (3k)^3 + 3\cdot(3k)^2 + 3\cdot(3k) + 1 \equiv 1 \pmod 9,$$

$$(3k-1)^3 = (3k)^3 - 3\cdot(3k)^2 + 3\cdot(3k) - 1 \equiv -1 \pmod 9,$$

因此,对任意整数 x,有

$$x^3 \equiv 0, 1 \text{ 或 } -1 \pmod 9. \qquad ④$$

由 ① 和 ④ 可知,x_1, x_2, x_3 只有下述四种情况:

$x_1^3 \equiv 1, x_2^3 \equiv 0, x_3^3 \equiv 1, \pmod 9$;

$x_1^3 \equiv 1, x_2^3 \equiv -1, x_3^3 \equiv -1, \pmod 9$;

$x_1^3 \equiv 0, x_2^3 \equiv -1, x_3^3 \equiv 0, \pmod 9$;

$x_1^3 \equiv -1, x_2^3 \equiv -1, x_3^3 \equiv 1. \pmod 9$.

由 ② 和 ④ 可知,x_2, x_3, x_4 只有类似的四种情况:

$x_2^3 \equiv 1, x_3^3 \equiv 0, x_4^3 \equiv 1, \pmod 9$;

$x_2^3\equiv 1, x_3^3\equiv -1, x_4^3\equiv -1,\quad \pmod 9$;

$x_2^3\equiv 0, x_3^3\equiv -1, x_4^3\equiv 0,\quad \pmod 9$;

$x_2^3\equiv -1, x_3^3\equiv -1, x_4^3\equiv 1.\quad \pmod 9$.

因此,要使 ① 和 ② 同时成立,必有

$$x_1^3\equiv 1, x_2^3\equiv -1, x_3^3\equiv -1, x_4^3\equiv 1 \pmod 9 \qquad ⑤$$

同理,要使 ② 和 ③ 同时成立,必有

$$x_2^3\equiv 1, x_3^3\equiv -1, x_4^3\equiv -1, x_5^3\equiv 1 \pmod 9 \qquad ⑥$$

⑤ 和 ⑥ 显然矛盾.所以,题目的第一个结论得证.

现在证明题目的第二个结论.

如果原方程有4组整数解$(x_1,y_1),(x_2,y_1-1),(x_3,y_1-2),(x_4,y_1-3)$,那么用证明第一个结论时的同样的讨论可得 ⑤ 式,即

$$x_1^3\equiv 1, x_2^3\equiv -1, x_3^3\equiv -1, x_4^3\equiv 1 \pmod 9$$

因为

$0^3\equiv 0 \pmod 7, 1^3\equiv 1 \pmod 7, 2^3\equiv 1 \pmod 7, 3^3\equiv -1 \pmod 7, 4^3\equiv 1 \pmod 7, 5^3\equiv -1 \pmod 7, 6^3\equiv -1 \pmod 7$,

所以对于任意整数 x,有

$$x^3\equiv 0,1 \text{ 或 } -1 \pmod 7.$$

因此,只需将证明第一个结论时的 mod 9 改成 mod 7,就可以得到类似于 ⑤ 式的结论:

$$x_1^3\equiv 1, x_2^3\equiv -1, x_3^3\equiv -1, x_4^3\equiv 1 \pmod 7.$$

于是就有

$$x_1^3\equiv 1, x_2^3\equiv -1, x_3^3\equiv -1, x_4^3\equiv 1 \pmod{63},$$

由此得

$$x_1^3 - x_2^3\equiv 2 \pmod{63},$$

即

$$(y_1^2-k)-((y_1-1)^2-k)\equiv 2 \pmod{63},$$

化简,有

$$2y_1\equiv 3 \pmod{63},$$

于是,

$$y_1\equiv 33 \pmod{63},$$

所以

$$k = y_1^2 - x_1^2 \equiv 33^2 - 1 \pmod{63}.$$

注意到 $33^2 - 1 = 63 \cdot 17 + 17$,故得

$$k \equiv 17 \pmod{63}.$$

4·260　证明:方程

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^3 + y^3 + z^3$$

有无穷多组整数解.

(第57届莫斯科数学奥林匹克,1994年)

[证]　令

$$\begin{cases} x = n(4n^2 - 1) + 1, \\ y = 1 - n(4n^2 - 1), \qquad n = 1,2,\cdots \\ z = 1 - 4n^2. \end{cases}$$

于是,我们有

$$\begin{aligned} x^2(x - 1) &= [n(4n^2 - 1) + 1]^2 \cdot n(4n^2 - 1) \\ &= [n(4n^2 - 1) - 1]^2 \cdot n(4n^2 - 1) + (4n^2 - 1)^2 \cdot 4n^2 \\ &= y^2(1 - y) + z^2(1 - z), \end{aligned}$$

即　$x^3 + y^3 + z^3 = x^2 + y^2 + z^2.$

所以,原方程有无穷多组整数解.

4·261　寻找所有整数 k,使得存在一个整数 x,满足方程

$$\sqrt{39 - 6\sqrt{12}} + \sqrt{kx(kx + \sqrt{12}) + 3} = 2k.$$

(保加利亚数学奥林匹克,1994年)

[解]　易知

$$39 - 6\sqrt{12} = (6 - \sqrt{3})^2,$$

$$kx(kx + \sqrt{12}) + 3 = (kx + \sqrt{3})^2.$$

因此,原方程可化为

$$6 - \sqrt{3} + | kx + \sqrt{3} | = 2k,$$

即

$$| kx + \sqrt{3} | = 2k + \sqrt{3} - 6. \qquad ①$$

由①可知

$$2k + \sqrt{3} - 6 \geqslant 0,$$

$$k \geqslant 3 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

因为 k 是整数,所以

$$k \geqslant 3.$$

由于 k,x 都是整数,因此

$$kx+\sqrt{3} \neq 0.$$

如果 $kx+\sqrt{3}>0$,那么由 ① 得

$$kx+\sqrt{3}=2k+\sqrt{3}-6,$$

$$k(2-x)=6.$$

注意到 $k \geqslant 3$,且 k,x 都是整数,由上式即得

$$\begin{cases} k=3, \\ x=0; \end{cases} \text{或} \begin{cases} k=6, \\ x=1. \end{cases}$$

如果 $kx+\sqrt{3}<0$,那么由 ① 得

$$-(kx+\sqrt{3})=2k+\sqrt{3}-6,$$

即

$$(2+x)k+2\sqrt{3}-6=0.$$

上式中只有$\sqrt{3}$ 是无理数,其余都是整数.显然上式不可能成立.

综上所述,可知所求的所有整数 k 为$k=3$ 或 $k=6$.

第五章　多项式

第1节　多项式及其系数的值

5·1　已知多项式

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

中，系数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 皆为整数，并且 $f(2)$ 和 $f(3)$ 能被 6 整除. 试证：$f(5)$ 也能被 6 整除.

（中国上海市数学竞赛，1963 年）

[解]　$f(2) = a_02^n + a_12^{n-1} + \cdots + a_{n-1}2 + a_n$　①

$f(3) = a_03^n + a_13^{n-1} + \cdots + a_{n-1}3 + a_n$　②

因 $f(2)$ 能被 6 整除，故也能被 2 整除，由 ① 式知，a_n 能被 2 整除. 又因 $f(3)$ 能被 6 整除，故也能被 3 整除，由 ② 式知，a_n 能被 3 整除.

从而，a_n 能被 6 整除.

$$f(5) = a_0(2+3)^n + a_1(2+3)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(2+3)^2 + a_{n-1}(2+3) + a_n + a_n - a_n. \quad ③$$

按二项式定理展开，并由 ①，②，有

$$f(5) = f(2) + f(3) - a_n + a_0(C_n^12^{n-1}\cdot 3 + C_n^22^{n-2}\cdot 3^2 + \cdots + C_n^{n-1}2\cdot 3^{n-1}) + a_1(C_{n-1}^12^{n-2}\cdot 3 + C_{n-1}^22^{n-3}\cdot 3^2 + \cdots + C_{n-1}^{n-2}\cdot 2\cdot 3^{n-2}) + \cdots + a_{n-2}\cdot C_2^1\cdot 2\cdot 3,$$

由 ①、②、③ 以及上式后一段中每项都含有 6 的因子，所以 $f(5)$ 能被 6 整除.

代数卷

5·2　设　$P(x)=a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 式中各系数 $a_j(j=0,1,2,\cdots,k)$ 都是整数：今设有四个不同的整数 x_1,x_2,x_3,x_4 使 $p(x_i)(i=1,2,3,4)$ 都等于2，试证：对于任何整数 x，$p(x)$ 决不等于1,3,5,7,9中的任何一个.

（中国北京市数学竞赛，1963年）

［证］　根据余式定理，有

$$p(x)-2=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)Q(x) \quad ①$$

其中 $Q(x)$ 是一个整系数多项式，或者是一个整数，无论 x 等于什么整数，$x-x_1,x-x_2,x-x_3,x-x_4,Q(x)$ 总是整数，而且前四者各不相等.

所以①式右边至少有四个不同的因数.但是1,3,5,7,9减2分别为 $-1,1,3,5,7$；不可能是四个不同的因数的乘积，因此 $P(x)$ 不可能等于1,3,5,7,9.

5·3　试证：$n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-1$ 对任何正整数 n 都是整数，并且用3除时余2.

（中国北京市数学竞赛，1956年）

［证］

$$n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-1=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}-1=\frac{n(n+1)}{2}(2n+1)-1. \quad ①$$

因为对任何整数 n，$\frac{n(n+1)}{2}$ 为整数，故原式为整数.

①式末端又可以写成 $\frac{2n(2n+1)(2n+2)}{8}-1$，而 $2n,2n+1,2n+2$ 中至少有一个数是3的倍数，又3与8互质，所以 $\frac{2n(2n+1)(2n+2)}{8}$ 是能被3整除的整数.

于是原式等于3的整数倍减去1，因而用3除它时必余2.

5·4　对给定的数 $p,q\in R$，求多项式

$$p(x)=x^2+px+q$$

当 $x\in[-1,1]$ 时所有的值.

（罗马尼亚数学竞赛，1975年）

[解] 函数 $p(x)$ 在 x 轴上有一个最小值点 $x_0=-\frac{p}{2}$,当 $x<x_0$ 时,函数 $p(x)$ 递减,当 $x>x_0$ 时,函数 $p(x)$ 递增.因此函数 $p(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上所有的值的集合 A 为:如果 $p<-2$,则 $x_0>1$,且

$$A=[p(1),p(-1)]=[1+p+q,1-p+q].$$

如果 $-2\leqslant p\leqslant 2$,则 $-1\leqslant x_0\leqslant 1$,且

$$A=[p(x_0),\max\{p(-1),p(1)\}],$$

即当 $-2\leqslant p\leqslant 0$ 时,$A=[q-\frac{p^2}{4},1-p+q]$,

而 $0\leqslant p\leqslant 2$ 时,$A=[q-\frac{p^2}{4},1+p+q]$.

如果 $p>2$,则 $x_0<-1$,且

$$A=[p(-1),p(1)]=[1-p+q,1+p+q].$$

5·5 多项式 $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$,当 $x=-1,x=0,x=1,x=2$ 时取整数值.证明:这个多项式对所有整数 x,都取到整数值.

(第 14 届全俄数学奥林匹克,1988 年)

[解] 首先,我们有下列恒等式成立:

$$p(x)=6a\cdot\frac{(x-1)x(x+1)}{6}+2b\frac{x(x-1)}{2}+(a+b+c)x+d$$

因为 $d=p(0)$ 和 $a+b+c+d=p(1)$ 是整数,所以 $a+b+c$ 是整数;

因为 $p(-1)=2b-(a+b+c)+d$ 是整数,所以 $2b$ 是整数;

因为 $p(2)=6a+2b+2(a+b+c)+d$ 是整数,所以 $6a$ 是整数.

又因为对任意的整数 x,$\frac{(x-1)x(x+1)}{6}$ 和 $\frac{x(x-1)}{2}$ 是整数,所以对任何整数 x,$p(x)$ 的值都是整数.

5·6 如果 $p(x)$ 是一个 n 次多项式,且对 $k=0,1,2,\cdots,n$,有 $p(k)=\frac{k}{k+1}$,试确定 $p(n+1)$.

(第 4 届美国数学奥林匹克,1975 年)

[证] 设 $Q(x)=(x+1)p(x)-x$.由已知条件可知,$Q(x)$ 是

一个次数不大于 $n+1$ 的多项式，并且当 $x=0,1,2,\cdots,n$ 时，都有 $Q(x)=0$. 于是，我们有

$$Q(x)=ax(x-1)(x-2)\cdots(x-n),$$

其中 a 为常数. 即

$$(x+1)p(x)-x=ax(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$$

令 $x=-1$，得

$$1=a(-1)^{n+1}(n+1)!$$

$$a=\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

于是

$$p(x)=\frac{Q(x)+x}{x+1}=\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)+x}{x+1},$$

$$p(n+1)=\frac{(-1)^{n+1}+n+1}{n+2},$$

即

$$p(n+1)=\begin{cases}1, & n\text{ 为奇数;}\\ \frac{n}{n+2}, & n\text{ 为偶数.}\end{cases}$$

5·7　设 n 次多项式 $p(x)$ 满足 $p(k)=\frac{1}{C_n^k}$，其中 $k=0,1,2,\cdots,n$. 求 $p(n+1)$.

（第 24 届国际数学奥林匹克预选题，1983 年）

［解］　根据拉格朗日插值公式，得到

$$p(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{C_{n+1}^k}\prod_{\substack{i\neq k\\0\leqslant i\leqslant n}}\frac{x-i}{k-i}$$

但 $\prod\limits_{\substack{i\neq k\\0\leqslant i\leqslant n}}(k-i)=k(k-1)\cdots[k-(k-1)]\cdot[k-(k+1)]\cdots(k-n)$

$$=k!(-1)^{n-k}(n-k)!$$

故
$$p(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\prod\limits_{\substack{i\neq k\\0\leqslant i\leqslant n}}(x-i)}{C_{n+1}^{k}(-1)^{n-k}(n-k)!k!}$$
$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n+1-k}{(n+1)!}\prod_{\substack{i\neq k\\0\leqslant i\leqslant n}}(x-i),$$
$$p(n+1)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n+1-k}{(n+1)!}\prod_{\substack{i\neq k\\0\leqslant i\leqslant n}}(n+1-i)$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(n+1-i)$$
$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}.$$
因此,当 n 为奇数时,$p(n+1)=0$,当 n 为偶数时,$p(n+1)=1$.

5·8　证明:对任何整数 x 和 y,代数式
$$x^5+3x^4y-5x^3y^2-15x^2y^3+4xy^4+12y^5$$
的值不会等于 33.

(第 9 届莫斯科数学奥林匹克,1946 年)

[证]　将所给代数式分解因式得
$$(x-2y)(x-y)(x+y)(x+2y)(x+3y),$$
如果 $y=0$,那么这个代数式为 x^5.显然不可能存在整数 x,使 $x^5=33$.

如果 $y\neq 0$,那么这个代数式的五个因式的值两两不同,但 33 的因数只有 $-33,-11,-3,-1,1,3,11,33$.如果要把 33 分解成五个不同的因数的乘积,显然这五个因数中不能包含 ± 33,也不能包含 ± 11.由此可见,33 不可能分解成五个不同因数的乘积,故此时代数式的值不可能等于 33.

5·9　将表达式$(x^7+x^5+1)^{20}$展开并合并同类项,得一个多项式.求这个多项式的 x^{17} 和 x^{18} 的系数.

(第 10 届莫斯科数学奥林匹克,1947 年)

[解]　因为 $17=5\times 2+7\times 1$,所以 x^{17} 的系数为
$$\frac{20!}{2!(20-2-1)!}=\frac{20!}{2!\cdot 17!}=\frac{20\cdot 19\cdot 18}{2}=3420.$$
因为 18 不能表示成若干个 5 和 7 的和,所以这个多项式中不含有

x^{18} 的项,或者说,x^{18} 的系数为 0.

5·10　设 A 与 B 分别为 $(x+a)^n$ 的展开式中奇数项与偶数项之和,求 A^2-B^2.

(基辅数学奥林匹克,1936 年)

[解]　显然　$A+B=(x+a)^n$,

$A-B=(x-a)^n$,

所以　$A^2-B^2=(x+a)^n(x-a)^n$

$=(x^2-a^2)^n$.

5·11　a,b,c 取何值时,多项式 x^4+ax^2+bx+c 被 $(x-1)^3$ 除尽?

(基辅数学奥林匹克,1935 年)

[解]　多项式 x^4+ax^2+bx+c 除以 $x-1$ 得商式

$P_1(x)=x^3+x^2+(a+1)x+a+b+1$ 及余式

$Q_1(x)=a+b+c+1$.

由题意,$Q_1(x)=a+b+c+1=0$.　①

又　$P_1(x)$ 除以 $x-1$ 得商式

$P_2(x)=x^2+2x+(a+3)$ 及余式 $Q_2(x)=2a+b+4$.

由题意,$Q_2(x)=2a+b+4=0$.　②

又　$P_2(x)$ 除以 $x-1$ 得商式

$P_3(x)=x+3$ 及余式 $Q_3(x)=a+6$.

由题意,$Q_3(x)=a+6=0$,

所以　$a=-6$.

代入②得　$b=8$.

再代入①得　$c=-3$.

5·12　设多项式 $1-x+x^2-x^3+\cdots+x^{16}-x^{17}$ 可以写成 $a_0+a_1y+a_2y^2+a_3y^3+\cdots+a_{16}y^{16}+a_{17}y^{17}$,其中 $y=x+1$,并且每个 a_i 都是常数,求 a_2.

(第 4 届美国数学邀请赛,1986 年)

[解]　$1-x+x^2-x^3+\cdots+x^{16}-x^{17}$

$=\dfrac{1-x^{18}}{1+x}$

$$= \frac{1-(y-1)^{18}}{y}.$$

上式分子中 y^3 的系数是 C_{18}^3,所以

$$a_2 = C_{18}^3 = 816.$$

5・13　证明:不存在整数 a、b、c、d,使得表达式 ax^3+bx^2+cx+d 当 $x=19$ 时值为1,而当 $x=62$ 时值为2.

(第2届全俄数学奥林匹克,1962年)

[解]　设 $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$,则对任意整数 a,b,c 有

$$p(62)-p(19)=a(62^3-19^3)+b(62^2-19^2)+c(62-19)$$

能被43整除,从而不可能等于1.因此命题得证.

5・14　证明:多项式

$$p(x)=\frac{1}{630}x^9-\frac{1}{21}x^7+\frac{13}{20}x^5-\frac{82}{63}x^3+\frac{32}{35}x$$

对所有 $x\in Z$ 都取整数值.

(前民主德国数学竞赛,1983年)

[证]　原多项式可表示为

$$p(x)=\frac{1}{2\cdot5\cdot7\cdot9}(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4).$$

因为9个连续整数中总能找到被2,5,7,9整除的自然数,并且 $2\cdot5\cdot7\cdot9$ 是互素的乘积,因此对任意 $x\in Z$,乘积 $\prod\limits_{i=-4}^{4}(x+i)$ 被 $2\cdot5\cdot7\cdot9$ 整除,即 $p(x)$ 的值都是整数.

5・15　试证:若当自变数 x 取任意整数时,二次三项式 ax^2+bx+c 总取整数值,那么 $2a$,$a+b$,c 都是整数.并且反过来也正确.

(波兰数学奥林匹克,1957年)

[证]　首先假定,当 x 取整数时,$f(x)=ax^2+bx+c$ 也是整数.于是

(1)$f(0)=c$ 是整数;

(2)$f(1)=a+b+c$ 是整数,由此得 $a+b=f(1)-c$ 也是整数;

(3)$f(2)=4a+2b+c$ 是整数,由此得 $2a=f(2)-2(a+b)-c$ 也是整数.

反过来,若$2a,a+b,c$是整数,则对任何整数x,ax^2+bx+c都取整数值.事实上,

$$\begin{aligned}ax^2+bx+c&=ax^2-ax+ax+bx+c\\&=ax(x-1)+(a+b)x+c\\&=2a\frac{x(x-1)}{2}+(a+b)x+c.\end{aligned}$$

因为$x(x-1)$是两个连续整数的积,因而$x(x-1)/2$是整数.于是,ax^2+bx+c是三个整数的和,从而是整数.

5·16　设对任意$x\in Z$,整系数多项式

$$ax^3+bx^2+cx+d$$

都能被5整除.证明:系数a,b,c,d都能被5整除.

(第20届莫斯科数学奥林匹克,1957年)

[解]　令$x=0,1,-1,2$得

$$\begin{cases}d\equiv0(\text{mod}5) & ①\\a+b+c+d\equiv0(\text{mod}5) & ②\\-a+b-c+d\equiv0(\text{mod}5) & ③\\8a+4b+2c+d\equiv0(\text{mod}5) & ④\end{cases}$$

将①用于②,③,④得

$$a+b+c\equiv0(\text{mod}5) \quad ⑤$$

$$-a+b-c\equiv0(\text{mod}5) \quad ⑥$$

$$3a+4b+2c\equiv0(\text{mod}5) \quad ⑦$$

⑤+⑥　$2b\equiv0(\text{mod}5),b\equiv0(\text{mod}5)$.

于是　$a+c\equiv0(\text{mod}5)$　⑧

$3a+2c\equiv0(\text{mod}5)$　⑨

⑧×(-2)+⑨得　$a\equiv0(\text{mod}5)$,于是$c\equiv0(\text{mod}5)$.

5·17　设$a<b<c<d$.如果变量x,y,z,t是数a,b,c,d的某一排列,试问表达式

$$n=(x-y)^2+(y-z)^2+(z-t)^2+(t-x)^2$$

可以取多少种不同的值?

(匈牙利数学奥林匹克,1943年)

[解]　设$n(x,y,z,t)=(x-y)^2+(y-z)^2+(z-t)^2+(t-x)^2$,因为表达式

$$n(x,y,z,t)+(x-z)^2+(y-z)^2$$
$$=n(x,y,z,t)+(x^2+y^2+z^2+t^2)-2(xz+yt)$$
与选取数 a,b,c,d 的哪一种排列作为自变量的值是无关的，且 $x^2+y^2+z^2+t^2$ 对自变量的值 a,b,c,d 的任一排列也取同一个值，因此 n 的值仅与 $V=xz+yt$ 取怎样的值有关，且和它一起达到最大值和最小值.

V 一共可以取三个不同的值：

$$V_1=ab+cd,V_2=ac+bd,V_3=ad+bc.$$

且满足不等式 $V_1>V_2>V_3$，这是因为

$$V_1-V_2=(d-a)(c-b)>0,$$
$$V_2-V_3=(b-a)(d-c)>0.$$

因此，n 所取的值可以按大小排列如下：

$$n(a,c,b,d)>n(a,b,c,d)>n(a,b,d,c).$$

5·18 试证(1) 具有给定的常数系数的任一二次三项式 Ax^2+Bx+C，可以表示成

$$k\frac{x(x-1)}{1\cdot2}+lx+m$$

的形式，其中 k,l 和 m 有完全确定的数值.

(2) 二次三项式 Ax^2+Bx+C 对所有的整数 x 都取整数值当且仅当：如果把它表示成

$$k\frac{x(x-1)}{1\cdot2}+lx+m$$

的形式时，系数 k,l 和 m 是整数.

（匈牙利数学奥林匹克，1903 年）

［证］ (1) 因为 $x^2=2\frac{x(x-1)}{2}+x$，

所以二次三项式

$$Q=Ax^2+Bx+C$$

可以变为

$$Q=k\frac{x(x-1)}{2}+lx+m,$$

其中 $k=2A,l=A+B,m=C$.

(2) 若二次三项式 Q 对所有的整数 x 都取整数值，则当 x 等于 0，

1,2 时,得到二次三式相应的值

$$r=m, s=l+m, t=k+2l+m,$$

它们都是整数,因此 m, l 和 k 也是整数.

反之,若 k, l 和 m 都是整数,则对任意的整数 x, $\frac{x(x-1)}{2}$ 也是整数,因此 Q 的所有三项都取整数值,从而 Q 本身也取整数值.

5·19 设多项式

$$P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+1$$

有 n 个根,并且系数 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ 都是非负的.证明:$P(2)\geqslant 3^n$.

(匈牙利数学奥林匹克,1983 年)

[证] 因为多项式 $P(x)$ 的所有系数都是非负的,所以它的根 α_1, $\alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 都是负数.于是

$$P(x)=(x+\beta_1)(x+\beta_2)\cdots(x+\beta_n),$$

其中 $\beta_i=-\alpha_i>0, i=1,2,\cdots,n$.

根据平均定理,有

$$2+\beta_i=1+1+\beta_i\geqslant 3\sqrt[3]{1\cdot 1\cdot \beta_i}=3\sqrt[3]{\beta_i}(i=1,2,\cdots,n).$$

注意,由韦达定理,$\beta_1\beta_2\cdots\beta_n=1$,于是得到

$$\begin{aligned}P(2)&=(2+\beta_1)(2+\beta_2)\cdots(2+\beta_n)\\&\geqslant 3^n\cdot\sqrt[3]{\beta_1\beta_2\cdots\beta_n}=3^n.\end{aligned}$$

这就是所要证明的.

5·20 设 $P(x)$ 是某个 n 次多项式,数 $a<b$ 满足

$$P(a)<0, -P'(a)\leqslant 0, P''(a)\leqslant 0, \cdots, (-1)^nP^{(n)}(a)\leqslant 0,$$

$$P(b)>0, P'(b)\geqslant 0, P''(b)\geqslant 0, \cdots, P^{(n)}(b)\geqslant 0.$$

证明:多项式 $P(x)$ 所有实根都在区间 (a,b) 内.

(新加坡中学数学竞赛,1978 年)

[证] 考虑多项式

$$Q(x)=P(a-x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0,$$

则有

$$a_0=Q(0)=P(a)<0,$$

$$a_1=Q'(0)=-P'(a)\leqslant 0,$$

$$a_2=\frac{Q''(0)}{2}=\frac{(-1)^2P''(a)}{2}\leqslant 0,$$

……

$$a_n=\frac{Q^{(n)}(0)}{n!}=\frac{(-1)^nP^{(n)}(a)}{n!}\leqslant 0.$$

因此,对所有 $x\geqslant 0$,有

$$Q(x)<0.$$

即多项多 $P(x)$ 在 $x\in(-\infty,a]$ 上没有根.

同理,对多项式

$$R(x)=P(b+x)=b_nx^n+\cdots+b_1x+b_0$$

有

$$b_0=R(0)=P(b)>0,$$

$$b_1=R'(0)=P'(b)\geqslant 0,$$

$$b_2=\frac{R''(0)}{2}=\frac{P''(b)}{2}\geqslant 0,$$

……

$$b_n=\frac{R^{(n)}(0)}{n!}=\frac{P^{(n)}(b)}{n!}\geqslant 0.$$

因此,当 $x\geqslant 0$ 时,有

$$R(x)>0.$$

从而多项式 $P(x)$ 在 $x\in[b,+\infty)$ 上没有根.这就证明,多项式 $P(x)$ 所有实根都在 (a,b) 上.

5·21 求所有的 $x\in Z$,使得多项式

$$2x^2-x-36$$

的值是某个素数的平方.

(前捷克斯洛伐克数学奥林匹克,1962年)

[解] 设 $2x^2-x-36=p^2$,p 是素数,则

$$p^2=(x+4)(2x-9)=ab,$$

其中 $a=x+4,b=2x-9,a,b\in Z,2a-b=17.$

因为 a 是整数,而且整除 p^2,所以只有如下6种情况:

(1) $a=p^2,b=1$,则 $2p^2-1=17$,即 $p=3$,因此

$$x=a-4=p^2-4=5.$$

(2) $a=p,b=p$,则 $2p-p=17$,即 $p=17$.因此

$$x=a-4=p-4=13.$$

(3)$a=1,b=p^2$,则$2-p^2=17$,即$p^2=-15$,不可能.

(4)$a=-p^2,b=-1$,则$-2p^2+1=17$,即$p^2=-8$,不可能.

(5)$a=-p,b=-p$,则$-2p+p=17$,即$p=-17$,则$x=a-4=-p-4=13$.

(6)$a=-1,b=-p^2$,则$-2+p^2=17$,即$p^2=19$,不可能.

于是,所求的值是$x=5$和$x=13$.

5·22　给定实系数多项式$p_0(x),p_1(x),\cdots,p_n(x)$和实数$a_1,\cdots,a_n$.证明:如果函数

$$f(x)=p_0(x)+\sum_{K=1}^{n}a_k\mid p_k(x)\mid$$

在R中不同的点上取不同的值,则它的值域为R.

(罗马尼亚数学奥林匹克,1982年)

[证]　不妨设所有的多项式$p_1(x),\cdots,p_n(x)$都是非零的,取这样的数x^+,它大于上述多项式的所有实根,则当$x\geqslant x^+$时,函数$f(x)$与多项式

$$p^+(x)=p_0(x)+\sum_{k=1}^{n}a_k(\text{sign}\,p_k(x^+))p_k(x)$$

是一致的.因为每个多项式$p_1(x),\cdots,p_n(x)$在区间$[x^+,+\infty)$上都有固定的符号.同理可取这样的数x^-,使得$x\leqslant x^-$时函数$f(x)$与某个多项式$p^-(x)$一致.因为函数$f(x)$的每个值都不取两次,所以多项式$p^+(x)$与$p^-(x)$都不是常数.因此

$$\lim_{x\to+\infty}\mid f(x)\mid=\lim_{x\to-\infty}\mid f(x)\mid=\infty.$$

由函数$f(x)$的性质可知,只有如下两种可能:

要么　$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$;$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$;

要么　$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

在这两种情况下,函数$f(x)$都可取绝对值任意大的正值和负值,我们证明,函数$f(x)$可取任意的$C\in R$.事实上,由上面的几个极限式知,存在这样的点x_1,使得$f(x_1)>C$,也存在这样的x_2,使得$f(x_2)<C$.因为$f(x)$是连续函数,所以根据介值定理,在点x_1与x_2之间存在点x,使得$f(x)=C$.证毕.

5·23　对整数p和q应当加上什么限制,才能使得

(1) 对所有 $x \in Z$,多项式 $P(x) = x^2 + px + q$ 都取偶数(奇数)值?

(2) 对所有 $x \in Z$,多项式 $Q(x) = x^3 + px + q$ 的值都能被 3 整除?

(罗马尼亚数学奥林匹克,1962 年)

[解] (1)$P(0) = q$.

$P(1) = p + q + 1$.

要使 $x \in Z$ 时,$P(x)$ 为偶数 $\Leftrightarrow P(0)$,$P(1)$ 为偶数 $\Leftrightarrow q$ 为偶数,p 为奇数.

要使 $x \in Z$ 时,$P(x)$ 为奇数 $\Leftrightarrow P(0)$,$P(1)$ 为奇数 $\Leftrightarrow q$ 为奇数,p 为奇数.

(2) $Q(0) = q$,

$Q(1) = 1 + p + q$,

$Q(2) = 8 + 2p + q \equiv 2 + 2p + q \pmod 3$.

要使 $x \in Z$ 时,$Q(x)$ 被 3 整除 $\Leftrightarrow 3 \mid q, 3 \mid 1 + p + q$,

$3 \mid 2 + 2p + q \Leftrightarrow q \equiv 0, p \equiv 2 \pmod 3$.

5·24 设 M 是所有形如

$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, a, b, c, d \in R$,且当 $x \in [-1,1]$ 时满足 $|P(x)| \leqslant 1$ 的多项式的集合.证明:必有某个数 k,使得对所有 $P(x) \in M$,都有 $|a| \leqslant k$,并求最小的 k.

(前捷克斯洛伐克数学奥林匹克,1974 年)

[证] 因为多项式 $P_0(x) = 4x^3 - 3x$ 满足 $P_0(-1) = -1, P_0(1) = 1$,并且在它的极值点上有

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 1, P\left(\frac{1}{2}\right) = -1,$$

所以 $P_0(x) \in M$.现在证明,对任意 $P(x) \in M$,有 $|a| \leqslant 4$.否则,设存在多项式

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in M,$$

且 $|a| > 4$,则非零多项式

$$Q(x) = P_0(x) - \frac{4}{a}P(x)$$

的次数不超过 2.由于当 $|x| \leqslant 1$ 时,

$$\left|\frac{4}{a}P(x)\right| < 1,\text{所以}$$

$$Q(-1) < 0, Q\left(-\frac{1}{2}\right) > 0,$$

$$Q\left(\frac{1}{2}\right) < 0, Q(1) > 0.$$

从而,多项式至少有 3 个根,矛盾.于是所求的 k 等于 4.

5·25　设给定整数 $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$.证明:多项式 $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ 在点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 取的值当中,存在这样一个数,其绝对值不小于 $\frac{n!}{2^n}$.

(越南数学奥林匹克,1977 年)

[证]　根据拉格朗日插值公式,多项式

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$$

可表示为　$$P(x) = \sum_{j=0}^{n}\left(\prod_{\substack{i\neq j\\0\leqslant i\leqslant n}}\frac{x - x_i}{x_j - x_i}\right)P(x_j).$$

用反证法.设题中结论不成立,即当 $j = 0, 1, \cdots, n$ 时,

$$|P(x_j)| < \frac{n!}{2^n}.$$

则多项式 $P(x)$ 的首项系数 1 应等于乘积 $\prod\limits_{\substack{i\neq j\\0\leqslant i\leqslant n}}\frac{x - x_i}{x_j - x_i}P(x_j)$ 的首项系数之和,且其模不超过

$$\left|\sum_{j=0}^{n}P(x_j)\prod_{\substack{i\neq j\\0\leqslant i\leqslant n}}\frac{1}{x_j - x_i}\right| < \sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{2^n}\prod_{\substack{i\neq j\\0\leqslant i\leqslant n}}\frac{1}{|x_j - x_i|}.$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{2^n}\frac{1}{\prod\limits_{0\leqslant i<j}(j - i)}\cdot\frac{1}{\prod\limits_{n\geqslant i>j}(i - j)}$$

$$= \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{j!(n - j)!}$$

$$= \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{n}C_n^j$$

$$= 1.$$

矛盾.假设不成立,故结论成立.

5·26 设$\{a_n\}$是斐波那契数列,其定义如下:$a_1 = a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, n \in N$. 证明:如果990次多项式$P(x)$满足:当$k = 992 \cdots, 1982$时,$P(k) = a_k$,则$P(1983) = a_{1983} - 1$.

(罗马尼亚数学奥林匹克,1983年)

[证] 对$n \in N$用归纳法证明更一般的结论:如果n次多项式满足,当

$$k = n+2, n+3, \cdots, 2n+2$$

时,$P(k) = a_k$,则$P(2n+3) = a_{2n+3} - 1$,当$n = 1$时,有$P(3) = 2$, $P(4) = 3$,从而$P(x) \equiv x - 1$,且

$$P(5) = 4 = a_5 - 1.$$

现在设结论对$n-1$成立.下面证明它对n也成立.设多项式$P(x)$的次数为n,且当$k = n+2, k = n+3, \cdots, 2n+2$时,有

$$P(k) = a_k.$$

考虑多项式

$$Q(x) = P(x+2) - P(x+1).$$

显然它的次数不大于$n-1$,因为当$k = n+1, n+2, \cdots, 2n$时,

$$\begin{aligned} Q(k) &= P(k+2) - P(k+1) \\ &= a_{k+2} - a_{k+1} \\ &= a_k. \end{aligned}$$

所以$Q(x)$满足,当$k = n+1, n+2, \cdots, 2n$时,$Q(k) = a_k$.由归纳法假设,有

$$Q(2n+1) = a_{2n+1} - 1,$$

但是

$$Q(2n+1) = P(2n+3) - P(2n+2),$$

因此

$$\begin{aligned} P(2n+3) &= P(2n+2) + Q(2n+1) \\ &= a_{2n+2} + a_{2n+1} - 1 \\ &= a_{2n+3} - 1. \end{aligned}$$

5·27 证明:非零的复系数多项式P和Q的根相同(重数也相同)的必要且充分条件为,函数$f(z) = |P(z)| - |Q(z)|$在所有非零

的 $z \in C$ 处的值的符号相同.

(罗马尼亚数学奥林匹克,1978 年)

[证] 设多项式 P 和 Q 的根(连同它们的重数)是相同的,则有

$$P(z) = a(z - z_1)^{n_1}(z - z_2)^{n_2}\cdots(z - z_k)^{n_k},$$

$$Q(z) = b(z - z_1)^{n_1}(z - z_2)^{n_2}\cdots(z - z_k)^{n_k}.$$

其中 a、b 是非零复数,$n_1, n_2, \cdots, n_k \in N$,因此,函数

$$\begin{aligned} f(z) &= |P(z)| - |Q(z)| \\ &= (|a| - |b|)|(z - z_1)^{n_1}\cdots(z_1 - z_k)^{n_k}| \end{aligned}$$

不能取符号不同的值.现在证明充分性.为确定起见,设 $f(z)$ 不取负值,则 $\deg P \geqslant \deg Q$,否则对模充分大的 z 有 $|P(z)| < |Q(z)|$,即 $f(z) < 0$,矛盾.其次,设

$$P(z) = (z - z_0)^{n_0}P_0(z),$$

其中 $z_0 \in C, n_0 \in N, P_0(z)$ 为多项式,并且 $P_0(z_0) \neq 0$.又设

$$Q(z) = (z - z_0)^{m_0}Q_0(z),$$

其中 $m_0 \in z^+, Q_0(z)$ 为多项式,并且 $Q_0(z_0) \neq 0$.下面证明,$m_0 \geqslant n_0$,否则 $0 \leqslant m_0 < n_0$,则对距点 z_0 足够近的 z 有

$$f(z) = |z - z_0|^{m_0}(|(z - z_0)^{n_0 - m_0}P_0(z_0)| - |Q_0(z_0)|)$$

将是负数.因此,如果多项式 P 有根 $z_1, z_2, \cdots, z_k$,其重数分别为 $n_1, n_2, \cdots, n_k$,则多项式 Q 也有这些根,而且其重数 $m_1, m_2, \cdots, m_k$ 依次不小于 $n_1, n_2, \cdots, n_k$.最后,由

$$n_1 \leqslant m_1, n_2 \leqslant m_2, \cdots, n_k \leqslant m_k,$$

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k \geqslant m_1 + m_2 + \cdots + m_k.$$

得到 $n_1 = m_1, \cdots, n_k = m_k$,即 $\deg P = \deg Q$,而且除 $z_1, z_2, \cdots, z_k$ 外,多项式没有其他的根.因此多项式 P 和 Q 的根相同.

5・28 给出一个集合 M,它由 7 个连续的自然数组成,而且存在一个 5 次多项式 $P(x)$,使得:(1) 多项式 $P(x)$ 的每个系数都是整数;

(2) 在 M 中有包含它的最大数和最小数在内的 5 个数 k 满足 $P(k) = k$;

(3) 存在 $k \in M$ 满足 $P(k) = 0$.

(英国数学奥林匹克,1980 年)

[解] 设 7 个连续数为 $a, a + 1, a + 2, \cdots, a + 6$.构造

$$P(x)=x+(x-a)(x-a-6)(x-b_1)(x_2-b_2)(x_2-b_3) \quad ①$$

其中　$b_1,b_2,b_3\in\{a+1,a+2,\cdots,a+5\}$.

满足 $P(k)=0$ 的 $k\in\{a+1,a+2,\cdots,a+5\}$.

若 $k=a+1$,则由 ①

$a+1+1\cdot(-5)\cdot c_1\cdot c_2\cdot c_3=0$,其中 c_1,c_2,c_3 为 $-1,-2,-3,-4$ 中的三个.

令　$c_1=-1,c_2=-2,c_3=-3$.

则　$a+1+1\cdot(-5)\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)=0,a<0$,矛盾.

同理,$\{c_1,c_2,c_3\}\subset\{-1,-2,-3,-4\}$ 时都有 $a<0$,矛盾.

若 $k=a+2$,则由 ①

$$a+2+2\cdot(-4)\cdot c_1\cdot c_2\cdot c_3=0,\text{其中}$$
$$\{c_1,c_2,c_3\}\subset\{1,-1,-2,-3\}.$$

取 $c_1=1,c_2=-1,c_3=-2$,

则　$$a+2+2\cdot(-4)\cdot1\cdot(-1)\cdot(-2)=0.$$

$a=14$,7 个数为 14,15,16,17,18,19,20.

故　$P(x)=x+(x-14)(x-20)(x-15)(x-17)(x-18)$

满足　$P(16)=16+2\cdot(-4)\cdot1\cdot(-1)\cdot(-2)=0$,

$P(14)=14,P(20)=20,P(15)=15$,

$P(17)=17,P(18)=18$.

5·29　将表达式

$$((\cdots(((x-2)^2-2)^2-2)^2-\cdots-2)^2-2)^2,$$

其中共有 k 重括号,去括号并合并同类项之后得到一个多项式.求这个多项式中的 x^2 的系数.

（第 10 届莫斯科数学奥林匹克,1947 年）

[解]　令所得的多项式为 $P_k(x)$,并设

$$P_k(x)=A_k+B_kx+C_kx^2+\cdots.$$

因为

$$P_k(0)=((\cdots(((0-2)^2-2)^2-2)^2-\cdots-2)^2-2)^2$$
$$=4,$$

所以

$$P_k(x) = 4 + B_k x + C_k x^2 + \cdots$$

下面,我们用数学归纳法证明:

$$B_k = -4^k, C_k = 4^{k-1} \cdot \frac{4^k - 1}{4 - 1}.$$

事实上,当 $k = 1$ 时,

$$P_1(x) = (x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4,$$

因此　$B_1 = -4, C_1 = 1.$

设 $k = m$ 时,我们有

$$B_m = -4^m, C_m = 4^{m-1} \cdot \frac{4^m - 1}{4 - 1}.$$

于是

$$\begin{aligned} P_{m+1}(x) &= ((4 + B_m x + C_m x^2 + \cdots) - 2)^2 \\ &= (2 + B_m x + C_m x^2 + \cdots)^2 \\ &= 4 + 4B_m x + (B_m^2 + 4C_m)x^2 + \cdots \end{aligned}$$

因此

$$B_{m+1} = 4B_m = 4 \cdot (-4^m) = -4^{m+1}.$$

$$\begin{aligned} C_{m+1} &= (-4^m)^2 + 4 \cdot \left(4^{m-1} \cdot \frac{4^m - 1}{4 - 1}\right) \\ &= 4^m \cdot \frac{4^{m+1} - 1}{4 - 1}. \end{aligned}$$

根据数学归纳原理,对于任意自然数 k,都有

$$C_k = 4^{k-1} \cdot \frac{4^k - 1}{4 - 1}.$$

而所求的 x^2 的系数就是 C_k.

5·30　试决定所有的正整数对(m,n),使得$(1 + x^n + x^{2n} + \cdots + x^{mn})$能被$(1 + x + x^2 + \cdots + x^m)$整除.

（第6届美国数学奥林匹克,1977年）

[解]　$1 + x + x^2 + \cdots + x^m = 0$ 的 m 个根是

$$x_k = \cos\frac{2k\pi}{m+1} + i\sin\frac{2k\pi}{m+1} (k = 1,2,\cdots,m),$$

所以　$1 + x + x^2 + \cdots + x^m = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_m).$

因此　$f(x) = 1 + x^n + x^{2n} + \cdots + x^{mn}$ 能被 $1 + x + \cdots + x^m$ 整除

的充要条件是对一切 $x_k(k=1,2,\cdots,m)$，都有 $f(x_k)=0$.

由于 $f(x)=\dfrac{x^{n(m+1)}-1}{x^n-1}$，所以前述关于整除性的充要条件等价于

$$x_k^{n(m+1)}-1=0, \qquad ①$$

且

$$x_k^n\neq 1. \qquad ②$$

① 式是显然成立的，② 式相当于

$$\cos\frac{2kn\pi}{m+1}+i\sin\frac{2kn\pi}{m+1}\neq 1, k=1,2,\cdots,m.$$

因此，所求正整数对 (m,n) 是由一切满足条件"$m+1$ 和 n 互质"的那些正整数 m,n 所组成.

5・31　试证：如果 k 是自然数，那么对于任何 x，

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2k})$$
$$=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^m,$$

这里 m 是与 k 有关的自然数，并求出 m.

（波兰数学奥林匹克，1958 年）

[证]　表达式

$$P_k=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^k})$$

是 $k+1$ 个二项式之积. 去括号后，得 2^{k+1} 个加项之和. 在各括号中取出一项，然后作出它们的积，就能得到各个加项. 因此把 P_k 看成是变量 x 的 2^{k+1} 个不同的幂的和，其中次数最低的幂由乘积 $1\cdot 1\cdot\cdots\cdot 1=x^0$ 产生，任何其他的幂都是下列形式的积：

$$x^{2^{k_1}}\cdot x^{2^{k_2}}\cdot\cdots\cdot x^{2^{k_r}}=x^{2^{k_1}+2^{k_2}+\cdots+2^{k_r}}.$$

不失一般性，可以假定 $k_1<k_2<\cdots<k_r$.

我们来研究多项式 P_{k-1} 中的两个项的幂指数. 它们有下列形式：

$$2^{k_1}+2^{k_2}+\cdots+2^{k_r} \text{ 及 } 2^{l_1}+2^{l_2}+\cdots+2^{l_s},$$

其中

$$k_1<k_2<\cdots<k_r, l_1<l_2<\cdots<l_s,$$

并且自然数组 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 与 $l_1,l_2,\cdots,l_s$ 不相重合. 我们证明，这两项的幂指数不相等.

用反证法. 设

$$2^{k_1}+2^{k_2}+\cdots+2^{k_r}=2^{l_1}+2^{l_2}+\cdots+2^{l_s}, \qquad ①$$

则

$$2^{k_1}(1+2^{k_2-k_1}+\cdots+2^{k_r-k_1})=2^{l_1}(1+2^{l_2-l_1}+\cdots+2^{l_s-l_1}).$$ ②

代数卷

因为数 $k_2-k_1,\cdots,k_r-k_1,l_2-l_1,\cdots,l_s-l_1$ 皆为正数,因此 ② 式两端括号中的数是奇数,所以由 ② 得

$$2^{k_1}=2^{l_1}.$$

由此,$k_1=l_1$. 于是在等式 ① 的两边可以消去第一项,结果得到缩短了的等式

$$2^{k_2}+\cdots+2^{k_r}=2^{l_2}+\cdots+2^{l_s}.$$ ③

对等式 ③ 重复前面的论证得

$$k_2=l_2.$$

继续缩短初始等式 ①,最终得到:如果 ① 成立,那么 $r=s$,且对 $i=1,2,\cdots,r$,$k_i=l_i$,也即指数组 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 与指数组 $l_1,l_2,\cdots,l_s$ 重合. 但对于 P_k 的两个不同的项来说,这是不可能的. 因此多项式 P_k 的任何两项都是 x 的不同的幂. 因为 P_k 的最低项等于乘积 $1\cdot1\cdot\cdots\cdot1=x^0$,它的最高次项等于 $x\cdot x^2\cdot x^4\cdot\cdots\cdot x^{2^k}=x^{2^{k+1}-1}$,而且 P_k 共有 2^{k+1} 个项,因此,多项式 P_k 是 x 的所有从 0 次到 $2^{k+1}-1$ 次幂的和,即

$$P_k=1+x+x^2+\cdots+x^{2^{k+1}-1}.$$

可见 $m=2^{k+1}-1$.

5·32　已知有整系数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的多项式

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n.$$

又已知存在四个不同的整数 a,b,c,d,使得

$$f(a)=f(b)=f(c)=f(d)=5.$$

证明没有整数 k,使得 $f(k)=8$.

(第 2 届加拿大数学奥林匹克,1970 年)

[证]　由已知条件知,多项式

$$f(x)-5$$

有四个不同的整数根 a,b,c,d. 因此可设

$$f(x)-5=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\cdot g(x),$$

其中 $g(x)=x^m+b_2x^{m-1}+\cdots+b_m$,且 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 是整数.

如果存在整数 k,使 $f(k)=8$,那么

$$(k-a)(k-b)(k-c)(k-d)\cdot g(k)=3.$$

于是,四个整数 $k-a,k-b,k-c,k-d$ 中至少有三个的绝对值都等于1,因而至少有两个相等.此与条件"a,b,c,d 为四个不同的整数"矛盾.故命题得证.

5·33 如果 a,b 是整数,且 x^2-x-1 是 $ax^{17}+bx^{16}+1$ 的因式,试求 a 的值.

(第6届美国数学邀请赛,1988年)

[解] 方程 $x^2-x-1=0$ 的根为

$$p=\frac{1+\sqrt{5}}{2},q=\frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

并且 $p+q=1,pq=-1$.

由题设可知,p,q 也是方程

$$ax^{17}+bx^{16}+1=0$$

的根.因此

$$ap^{17}+bp^{16}+1=0 \quad ①$$

$$aq^{17}+bq^{16}+1=0 \quad ②$$

①$\times q^{16}$,得 $ap^{17}q^{16}+bp^{16}q^{16}+q^{16}=0$

利用 $pq=-1$,得

$$ap+b=-q^{16} \quad ③$$

类似地,②$\times p^{16}$,并利用 $pq=-1$,可得

$$aq+b=-p^{16} \quad ④$$

③-④得

$$a(p-q)=p^{16}-q^{16},$$

$$a=\frac{p^{16}-q^{16}}{p-q}$$

$$=(p^8+q^8)(p^4+q^4)(p^2+q^2)(p+q).$$

由于 $p+q=1$,

$$p^2+q^2=(p+q)^2-2pq=1+2=3,$$

$$p^4+q^4=(p^2+q^2)^2-2(pq)^2=9-2=7,$$

$$p^8+q^8=(p^4+q^4)^2-2(pq)^4=49-2=47,$$

因此 $a=47\times7\times3\times1=987.$

5·34 多项式

$(1-z)^{b_1}(1-z^2)^{b_2}(1-z^3)^{b_3}\cdots(1-z^{32})^{b_{32}}$

中,b_i 为正整数($i=1,2,\cdots,32$),并且该多项式具有下列奇妙的性质:把它乘开之后,删去 z 的高于 32 次的那些项,恰留下 $1-2z$. 试决定 b_{32}(答案可以表示为两个 2 的方幂之差).

(第 17 届美国数学奥林匹克,1988 年)

[解] 设 $f(z)=(1-z)^{b_1}(1-z^2)^{b_2}(1-z^3)^{b_3}\cdots(1-z^{32})^{b_{32}}$
$=1-2z+g(z)$,

其中 $g(z)$ 的每一项都高于 32 次.

比较两边 z 的系数,得 $b_1=2$.

$$f(-z)=(1+z)^{b_1}(1-z^2)^{b_2}(1+z^3)^{b_3}\cdots(1-z^{32})^{b_{32}}=1+2z+g(-z).$$

$$f(z)\cdot f(-z)=(1-z^2)^{b_1+2b_2}\cdot(1-z^4)^{2b_4}\cdot(1-z^6)^{b_3+2b_6}\cdot(1-z^8)^{2b_8}\cdot(1-z^{10})^{b_5+2b_{10}}\cdot\cdots\cdot(1-z^{30})^{b_{15}+2b_{30}}\cdot(1-z^{32})^{2b_{32}}\cdot\cdots\cdot$$
$$=1-4z^2+g_1(z),$$

其中 $g_1(z)$ 的每一项的次数都高于 32,并且都是偶数.

令 $w=z^2, f_1(w)=f(z)\cdot f(-z)$,则

$$f_1(w)=(1-w)^{b_1+2b_2}(1-w^2)^{2b_4}(1-w^3)^{b_3+2b_6}(1-w^4)^{2b_8}(1-w^5)^{b_5+2b_{10}}\cdots(1-w^{15})^{b_{15}+2b_{30}}(1-w^{16})^{2b_{32}}\cdots$$
$$=1-4w+g_2(w),$$

其中 $g_2(w)$ 的每一项关于 w 的次数都高于 16.

比较上式两边 w 的系数,得

$$b_1+2b_2=4,$$

因而 $b_2=1$.

再重复以上步骤. 设 $r=w^2, f_2(r)=f_1(w)f_1(-w)$,

可得

$$f_2(r)=(1-r)^{b_1+2b_2+4b_4}\cdot(1-r^2)^{4b_8}\cdot(1-r^3)^{b_3+2b_6+4b_{12}}\cdot(1-r^4)^{4b_{16}}(1-r^5)^{b_5+2b_{10}+4b_{20}}\cdot(1-r^6)^{4b_{24}}\cdot(1-r^7)^{b_7+2b_{14}+4b_{28}}(1-r^8)^{4b_{32}}\cdots$$
$$=1-16r+g_3(r),$$

其中 $g_3(r)$ 的每一项关于 r 的次数都高于 8.

比较两边 r 的系数,得

$$b_1+2b_2+4b_4=16.$$

由 $b_1=2, b_2=1$ 得 $b_4=3$.

继续上面的过程,可依次得 $b_8=30, b_{16}=2^{12}-2^4=4080$.最后由

$$b_1+2b_2+4b_4+8b_8+16b_{16}+32b_{32}=2^{32},$$

得 $$b_{32}=\frac{2^{32}-2^{16}}{32}=2^{27}-2^{11}.$$

5·35 (1) 求多项式 $P(x,y)=4+x^2y^4+x^4y^2-3x^2y^2$ 的可能的最小值.

(2) 证明:这个多项式不可能表示成关于变量 x、y 的多项式的平方和形式.

(第15届全苏数学奥林匹克,1981年)

[解] (1) 由算术平均——几何平均不等式可得

$$1+x^2y^4+x^4y^2\geqslant 3x^2y^2,$$

并且当 $x=y=1$ 时等号成立.因此我们有

$$\begin{aligned}P(x,y)&=3+(1+x^2y^4+x^4y^2-3x^2y^2)\\&\geqslant 3,\end{aligned}$$

并且当 $x=y=1$ 时,$P(x,y)=3$.故所求的最小值为3.

(2) 设 $p(x,y)=g_1^2(x,y)+g_2^2(x,y)+\cdots+g_n^2(x,y)$,其中 $g_i(x,y)$ 是多项式,$i=1,2,\cdots,n$.

因为 $p(x,0)=p(0,y)=4$,所以多项式 $g_i(x,y)$ 不可能有形如 ax^k 和 by^l 的单项式,从而 $p(x,y)$ 中 x^2y^2 项的系数应该为正,此与已知条件矛盾.故 $P(x,y)$ 不可能表示成关于变量 x、y 的多项式的平方和形式.

5·36 试求出3个互不相等的非零整数 a,b,c,使得代数式

$$x(x-a)(x-b)(x-c)+1$$

可以表示成两个整系数多项式的乘积式.

(第8届莫斯科数学奥林匹克,1945年)

[解] (1) 若 d,e,f,g 为整数,并且

$$x(x-a)(x-b)(x-c)+1=(x+d)(x^3+ex^2+fx+g) \quad ①$$

则令 $x=0$,得 $dg=1, d=\pm 1$.依次令 $x=a,b,c$,可得

$$\begin{cases} a+d=\pm 1, \\ b+d=\pm 1, \\ c+d=\pm 1. \end{cases}$$

若 $d=1$,则非零整数 $a=b=c=-2$,与已知条件 a,b,c 互不相等矛盾;若 $d=-1$,则 $a=b=c=2$,仍然矛盾.故①式不可能成立.

(2) 若 d,e,f,g 为整数,并且

$$x(x-a)(x-b)(x-c)+1=(x^2+dx+e)(x^2+fx+g) \quad ②$$

则令 $x=0$,得 $eg=1$.

(i) 若 $e=g=1$,则②式化为

$$x(x-a)(x-b)(x-c)+1=(x^2+dx+1)(x^2+fx+1) \quad ③$$

依次令 $x=a,b,c$ 可得

$$\begin{cases} a^2+da+1=\pm 1, \\ b^2+db+1=\pm 1, \\ c^2+dc+1=\pm 1. \end{cases} \quad ④$$

如果 $a^2+da+1=1$,那么 $a=-d$.又由 $b\neq a,c\neq a$,可得

$$\begin{cases} b^2+db+1=-1, \\ c^2+dc+1=-1. \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} b(b+d)=-2, \\ c(c+d)=-2, \\ a=-d. \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} b=1, \\ a=3, \\ c=2; \end{cases} \begin{cases} b=-1, \\ a=-3, \\ c=-2; \end{cases} \begin{cases} b=2, \\ a=3, \\ c=1; \end{cases} \begin{cases} b=-2, \\ a=-3, \\ c=-1. \end{cases}$$

由此可知,当方程组④的左边至少有一个为 $+1$ 时,可解得

$(a,b,c)=(1,2,3)$ 的任意一个排列,

或 $(a,b,c)=(-1,-2,-3)$ 的任意一个排列.

如果方程组④的左边都等于 -1;那么方程两两相减,得

$$\begin{cases} a^2-b^2+d(a-b)=0, \\ b^2-c^2+d(b-c)=0, \\ c^2-a^2+d(c-a)=0. \end{cases}$$

由 $a-b\neq 0, b-c\neq 0, c-a\neq 0$,得

$$\begin{cases} a+b=-d, \\ b+c=-d, \\ c+a=-d. \end{cases}$$

从而有 $a=b=c=-\dfrac{d}{2}$,此与 a,b,c 互不相等矛盾.

(ii) 若 $e=g=-1$,则②式化为

$$x(x-a)(x-b)(x-c)+1=(x^2+dx-1)(x^2+fx-1) \quad ⑤$$

依次令 $x=a,b,c$ 可得

$$\begin{cases} a^2+da-1=\pm 1, \\ b^2+db-1=\pm 1, \\ c^2+dc-1=\pm 1. \end{cases}$$

类似地可解得

$(a,b,c)=(1,-1,2)$ 的任意一个排列,

或 $(a,b,c)=(1,-1,-2)$ 的任意一个排列.

经检验知,

$$x(x-1)(x-2)(x-3)+1=(x^2-3x+1)^2,$$
$$x(x+1)(x+2)(x+3)+1=(x^2+3x+1)^2,$$
$$x(x-1)(x+1)(x-2)+1=(x^2-x-1)^2,$$
$$x(x-1)(x+1)(x+2)+1=(x^2+x-1)^2.$$

故所求的 (a,b,c) 为 $(1,2,3)$, $(-1,-2,-3)$, $(1,-1,2)$, $(1,-1,-2)$ 的任意一个排列.

5·37 求实数 a,b,p,q,使等式

$$(2x-1)^{20}-(ax+b)^{20}=(x^2+px+q)^{10}$$

对任何 x 都成立.

(第3届全俄数学奥林匹克,1963年)

[解] 令 $x=\dfrac{1}{2}$,得

$$\left(\frac{a}{2}+b\right)^{20}+\left(\frac{1}{4}+\frac{p}{2}+q\right)^{10}=0.$$

由此得到

$$\frac{a}{2}+b=0,$$

即 $a=-2b.$

于是原等式可化为

$$(2x-1)^{20}-(-2bx+b)^{20}=(x^2+px+q)^{10},$$

即 $$2^{20}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{20}-(2b)^{20}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{20}=(x^2+px+q)^{10},$$

$$[2^{20}-(2b)^{20}]\left(x-\frac{1}{2}\right)^{20}=(x^2+px+q)^{10}.$$

对照上式两端 x^{20} 项的系数,得

$$2^{20}-(2b)^{20}=1, \qquad ①$$

因此得

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^{20}=(x^2+px+q)^{10},$$

即 $$\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2}=x^2+px+q,$$

故 $p=-1,q=\frac{1}{4}.$

同时,又可以 ① 式解得

$$b=\pm\frac{1}{2}\cdot\sqrt[20]{2^{20}-1}$$

故 $a=\mp\sqrt[20]{2^{20}-1}.$

5·38 $P(x)$ 是 $3n$ 次多项式,使得

$$P(0)=P(3)=\cdots=P(3n)=2,$$
$$P(1)=P(4)=\cdots=P(3n-2)=1,$$
$$P(2)=P(5)=\cdots=P(3n-1)=0,$$
$$P(3n+1)=730.$$

试确定 n.

(第 13 届美国数学奥林匹克,1984 年)

[解] 注意到当 x 分别取 $0,1,2,\cdots,3n$ 时,$P(x)-1$ 循环地取值 $1,0,-1,1,0,-1,\cdots,1$.因此可以考虑数列

$$\{w^n\}=\{1,w,w^2,1,w,w^2,\cdots\}.$$

其中 $w=\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$ 为 1 的立方根.用 $\mathrm{Im}(w^n)$ 表示 w^n 中 i 的

系数,则

$$\{2\mathrm{Im}(w^n)/\sqrt{3}\}$$
$$=\{0,1,-1,0,1,-1,\cdots\},$$
$$\{2\mathrm{Im}(w^{2n+1})/\sqrt{3}\}$$
$$=\{1,0,-1,1,0,-1,\cdots\}.$$

因此当 $x=0,1,2,\cdots,3n$ 时,有

$$P(x)-1=2\mathrm{Im}(w^{2x+1})/\sqrt{3}. \quad ①$$

为了求得关于 x 的多项式.由二项式定理有

$$w^{2x}=[1+(w^2-1)]^x=\sum_{k=0}^{x}C_x^k(w^2-1)^k,$$

故 ① 式右边又可写成

$$2\mathrm{Im}(w\sum_{k=0}^{x}C_x^k(w^2-1)^k)/\sqrt{3}.$$

这里 $C_x^k=x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)$ 可展开为 x 的 k 次多项式,且当 x 取小于 k 的非负整数值时,$C_x^k=0$.

考虑多项式

$$Q(x)=2\mathrm{Im}[w\sum_{k=0}^{3n}C_x^k(w^2-1)^k]/\sqrt{3},$$

它的次数显然为 $3n$,且当 x 取 $3n+1$ 个值 $0,1,2,\cdots,3n$ 时,它和 ① 式相等,所以有恒等式

$$P(x)-1\equiv Q(x),$$

于是 $P(3n+1)-1=Q(3n+1)$

$$=2\mathrm{Im}[w\sum_{k=0}^{3n}C_{3n+1}^k(w^2-1)^k]/\sqrt{3}]$$
$$=2\mathrm{Im}[w\sum_{k=0}^{3n+1}C_{3n+1}^k(w^2-1)^k-wC_{3n+1}^{3n+1}(w^2-1)^{3n+1}]/\sqrt{3}$$
$$=2\mathrm{Im}[w(1+w^2-1)^{3n+1}-w(w^2-1)^{3n+1}]/\sqrt{3}$$
$$=2\mathrm{Im}[w^{6n+3}-w(iw\sqrt{3})^{3n+1}]/\sqrt{3}$$
$$=-2\mathrm{Im}[iw^2(i\sqrt{3})^{3n}]$$
$$=\begin{cases}(-1)^k3^{3k} & \text{当 } n=2k,\\ (-1)^k3^{3k+2} & \text{当 } n=2k+1.\end{cases}$$

已知 $P(3n+1)-1=730-1=729$,即 $(-1)^k3^{3k}=3^6$,所以 $k=2$,

$n=4$.

5·39 可以证明,对于任意给定的正整数 n,每一个形如 $r+si$(r,s 都是整数)的复数都可以表示成$(-n+i)$的多项式,并且多项式的系数都属于$\{0,1,2,\cdots,n^2\}$.

代数卷

也就是说,等式

$$r+si=a_m(-n+i)^m+a_{m-1}(-n+i)^{m-1}+\cdots+a_1(-n+i)+a_0$$

成立,其中 m 是惟一确定的非负整数,而 $a_0,a_1,\cdots,a_m$ 是从$\{0,1,2,\cdots,n^2\}$中选定的惟一的一组数,且 $a_m\neq 0$.

我们称这个等式为 $r+si$ 以 $-n+i$ 为基的展开式,并简写成

$$r+si=(a_ma_{m-1}\cdots a_1a_0)_{-n+i}.$$

已知,只有有限个整数 $k+0i$ 可以展开成

$$k=(a_3a_2a_1a_0)_{-3+i},a_3\neq 0.$$

试求所有这样的 k 的和.

(第7届美国数学邀请赛,1989年)

[解] 由题设知

$$\begin{aligned}k&=a_3(-3+i)^3+a_2(-3+i)^2+a_1(-3+i)+a_0\\&=(-18a_3+8a_2-3a_1+a_0)+(26a_3-6a_2+a_1)i,\end{aligned}$$

其中 a_1,a_2,a_3 都选自$\{0,1,2,\cdots,9\}$.

对照上式两端的虚部,得

$$26a_3-6a_2+a_1=0,$$

$$a_1=2(3a_2-13a_3). \quad ①$$

因此 a_1 是偶数.

若 $a_1=0$,则 $3a_2-13a_3=0$.故 a_2 是13的倍数,只有取 $a_2=0$,于是又得 $a_3=0$,矛盾.

若 $a_1=2$,则 $3a_2-13a_3=1$,解得 $a_2=9,a_3=2$.此时 a_0 可取0,1,2,…,9中的任意值.

若 $a_1=4$,则 $3a_2-13a_3=2$.解得 $a_2=5,a_3=1$.此时 a_0 也可取0,1,2,…,9中的任意值.

若 $a_1=6$,则 $3a_2-13a_3=3$,它在$\{0,1,2,\cdots,9\}$内无解.

若 $a_1=8$,则 $3a_2-13a_3=4$,它在$\{0,1,2,\cdots,9\}$内也无解.

把这20组解分别代入

$$k = -18a_3 + 8a_2 - 3a_1 + a_0$$

中,再求和,得

$$\begin{aligned}\sum k &= 10[(-18)\times 2 + 8\times 9 - 3\times 2] + (0+1+2+\cdots+9)\\ &\quad + 10[(-18)\times 1 + 8\times 5 - 3\times 4] + (0+1+2+\cdots+9)\\ &= 490.\end{aligned}$$

故所有这样的 k 的和为 490.

5·40 设 n 是正整数,求多项式 $P_n(x) = (x^2+x+1)^n$ 的奇系数的个数.

(保加利亚数学竞赛,1988 年)

[解] 设 $P(x)$,$Q(x)$ 是整系数多项式,如果 $P(x) - Q(x)$ 的所有系数都是偶数,则记为 $P \sim Q$.如果 $P \sim Q$,则 $P(x)$ 与 $Q(x)$ 的奇系数的个数相同下面分几种情况讨论.以 $\beta(P(x))$ 表示 $P(x)$ 的奇系数个数.

(1)$n = 2^q, q \in Z^+$,此时用归纳法易证

$$P_{2^q}(x) = (x^2+x+1)^{2^q} \sim x^{2^{q+1}} + x^{2^q} + 1,$$

所以 $\beta(P_{2^q}(x)) = 3.$

(2)$n = 2^m - 1, m \in N$,先设 $m = 2k+1, k \in N$,则 $n = 2^m - 1 \equiv 1(\mathrm{mod}3)$,考虑多项式

$$\begin{aligned}R(x) &= (x+1)(x^{2n-1} + x^{2n-4} + \cdots + x^{n+6} + x^{n+3}) + x^{n+1}\\ &\quad + x^n + x^{n-1} + (x+1)\times(x^{n-4} + x^{n-7} + \cdots + x^3 + 1).\end{aligned}$$

显然有 $\beta(R(x)) = 2\times\left(\dfrac{n-4}{3}+1\right) + 3 + \left(\dfrac{n-4}{3}+1\right)\times 2 = \dfrac{4n+5}{3}$

$$= \frac{1}{3}(2^{m+2}+1),\text{而且}$$

$$\begin{aligned}R(x)(x^2+x+1) &\sim (x+1)(x^{2n+1} + x^{2n} + x^{2n-1} + \cdots + x^{n+4}\\ &\quad + x^{n+3}) + x^{n-1}(x^4 + x^2 + 1) + (x+1)(x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x + 1)\\ &\sim (x^{2n+2} + x^{n+3}) + (x^{n+3} + x^{n+1} + x^{n-1}) + (x^{n-1} + 1)\\ &\sim x^{2n+2} + x^{n+1} + 1,\end{aligned}$$

由(1)的证明,又有

$$P_n(x)(x^2+x+1)\sim x^{2n+2}+x^{n+1}+1,$$

因此 $\quad\beta(P_n(x))=\beta(R(x))=\dfrac{1}{3}(2^{m+2}+1).$

再设 $m=2k$,则 $n\equiv 0(\bmod 3)$,考虑多项式

$$Q(x)=(x+1)(x^{2n-1}+x^{2n-4}+\cdots+x^{n+5}+x^{n+2})$$
$$+x^n+(x+1)(x^{n-3}+x^{n-6}+\cdots+x^3+1).$$

同理可得

$$\beta(P_n(x))=\beta(Q(x))=\frac{1}{3}(2^{m+2}-1).$$

总之,有

$$\beta(P_{2^m-1}(x))=\frac{1}{3}(2^{m+2}-(-1)^m).$$

(3) 把 $n\in N$ 用二进制表示为

$$n=\underset{a_k\uparrow}{\underline{11\cdots1}}\underset{b_k\uparrow}{\underline{00\cdots0}}\underset{a_{k-1}\uparrow}{\underline{11\cdots1}}\underset{b_{k-1}\uparrow}{\underline{00\cdots0}}\cdots\underset{a_1\uparrow}{\underline{11\cdots1}}\underset{b_1\uparrow}{\underline{00\cdots0}}.$$

其中对每个 $i\geqslant 1,a_i>0$,对每个 $i\geqslant 2,b_i>0,b\geqslant 0$.

令 $\quad s_1=b_1,$

$s_2=b_1+a_1+b_2,$

……

$s_k=b_1+a_1+b_2+a_2+\cdots+a_{k-1}+b_k.$

于是 $\quad n=\sum\limits_{i=1}^{k}2^{S_i}(2^{a_i}-1),$

从而 $\quad P_n(x)=\prod\limits_{i=1}^{k}(x^2+x+1)^{2^{S_i}(2^{a_i}-1)}$

$$\sim\prod_{i=1}^{k}(x^{2^{S_i+1}}+x^{2^{s_i}}+1)^{2^{a_i}-1}.$$

并利用前面已经证明的结果,可以得到

$$\beta(P_n(x))=\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{3}(2^{a_i+2}-(-1)^{a_i}).$$

5·41 设 $p(x)$ 是实系数多项式函数

$$p(x)=ax^3+bx^2+cx+d.$$

证明如果对于任何 $|x|<1$,均有 $|p(x)|\leqslant 1$,则

$$|a|+|b|+|c|+|d|\leqslant 7.$$

(第 37 届国际数学奥林匹克预选题,1996 年)

[证] 由于 $p(x)$ 是连续函数,因此由已知条件可知,当 $|x|\leqslant 1$ 时,均有 $|p(x)|\leqslant 1$.

令 $x=\lambda$,其中 $\lambda=\pm 1$,得

$$|\lambda a+b+\lambda c+d|\leqslant 1 \quad ①$$

再令 $x=\frac{1}{2}\lambda$,得

$$\left|\frac{\lambda}{8}a+\frac{1}{4}b+\frac{\lambda}{2}c+d\right|\leqslant 1 \quad ②$$

由 ① 和 ② 可得

$$\begin{aligned}
&|\lambda a+b|\\
&=\left|\frac{4}{3}(\lambda a+b+\lambda c+d)-2\left(\frac{\lambda}{8}a+\frac{1}{4}b+\frac{\lambda}{2}c+d\right)\right.\\
&\quad\left.+\frac{2}{3}\left(-\frac{\lambda}{8}a+\frac{1}{4}b-\frac{\lambda}{2}c+d\right)\right|\\
&\leqslant\frac{4}{3}|\lambda a+b+\lambda c+d|+2\left|\frac{\lambda}{8}a+\frac{1}{4}b+\frac{\lambda}{2}c+d\right|+\\
&\quad\frac{2}{3}\left|-\frac{\lambda}{8}a+\frac{1}{4}b-\frac{\lambda}{2}c+d\right|\\
&\leqslant\frac{4}{3}+2+\frac{2}{3}\\
&=4,
\end{aligned}$$

因此 $|a|+|b|=\max\{|a+b|;|-a+b|\}\leqslant 4$.

同样地,$|\lambda c+d|$

$$\begin{aligned}
&=\left|-\frac{1}{3}(\lambda a+b+\lambda c+d)+2\left(\frac{\lambda}{8}a+\frac{1}{4}b+\frac{\lambda}{2}c+d\right)\right.\\
&\quad\left.-\frac{2}{3}\left(-\frac{\lambda}{8}a+\frac{1}{4}b-\frac{\lambda}{2}c+d\right)\right|\\
&\leqslant\frac{1}{3}|\lambda a+b+\lambda c+d|+2\left|\frac{\lambda}{8}a+\frac{1}{4}b+\frac{\lambda}{2}c+d\right|+\\
&\quad\frac{2}{3}\left|-\frac{\lambda}{8}a+\frac{1}{4}b-\frac{\lambda}{2}c+d\right|\\
&\leqslant\frac{1}{3}+2+\frac{2}{3}\\
&=3.
\end{aligned}$$

因此 $|c|+|d|=\max\{|c+d|,|-c+d|\}\leqslant 3.$

故得 $|a|+|b|+|c|+|d|\leqslant 4+3=7.$

5·42 是否存在这样的实系数多项式 $p(x)$：它具有负系数，而对于 $n>1$，$p^n(x)$ 的系数全是正的?

（第57届莫斯科数学奥林匹克，1995年）

[解] 存在.

例如实系数多项式

$$\begin{aligned}p(x)&=10(x^3+1)(x+1)-x^2\\&=10x^4+10x^3-x^2+10x+10\end{aligned}$$

是具有负系数的多项式.但是

$$\begin{aligned}p^2(x)&=100(x^3+1)^2(x+1)^2-20x^2(x^3+1)(x+1)+x^4\\&=20(x^3+1)(5x^5+10x^4+4x^3+4x^2+10x+5)+x^4\end{aligned}$$

的系数全是正的;

$$\begin{aligned}p^3(x)&=1000(x^3+1)^3(x+1)^3-300x^2(x^3+1)^2(x+1)^2\\&\quad+30x^4(x^3+1)(x+1)-x^6\\&=100(x^3+1)^2(x+1)[10(x^3+1)(x+1)^2-3x^2(x+1)]\\&\quad+30x^4(x^3+1)(x+1)-x^6\\&=100(x^3+1)^2(x+1)(10x^5+20x^4+7x^3+7x^2+20x+\\&\quad 1)+30x^4(x^3+1)(x+1)-x^6.\end{aligned}$$

注意到上式 x^6 的系数不小于999，因此 $p^3(x)$ 的系数全是正的.

于是，由

$$\begin{cases}P^{2k}(x)=(p^2(x))^k\\p^{2k+1}(x)=(p^2(x))^{k-1}\cdot p^3(x)\end{cases}$$

可知，对一切自然数 $n>1$，$p^n(x)$ 的系数全是正的.

5·43 设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0,$$

$$g(x)=c_{n+1}x^{n+1}+c_nx^n+\cdots+c_0,$$

是两个实系数非零多项式，且存在实数 r，使

$$g(x)=(x-r)f(x).$$

记 $a=\max\{|a_n|,|a_{n-1}|,\cdots,|a_0|\}$,

$c=\max\{|c_{n+1}|,|c_n|,\cdots,|c_0|\}.$

求证：$\frac{a}{c} \leqslant n+1$.

（中国上海市高中数学竞赛，1998年）

［证］ 由已知 $c_{n+1}x^{n+1}+c_nx^n+\cdots+c_0=(x-r)(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0)$， ①

得

$$\begin{cases} c_{n+1}=a_n, \\ c_n=a_{n-1}-ra_n, \\ c_{n-1}=a_{n-2}-ra_{n-1}, \\ \cdots\cdots \\ c_1=a_0-ra_1, \\ c_0=-ra_0. \end{cases}$$

于是，我们有

$$\begin{cases} a_n=c_{n+1}, \\ a_{n-1}=c_n+rc_{n+1}, \\ a_{n-2}=c_{n-1}+rc_n+r^2c_{n+1}, \\ \cdots\cdots \\ a_0=c_1+rc_2+r^2c_3+\cdots+r^nc_{n+1}. \end{cases}$$

若 $|r| \leqslant 1$，则

$$\begin{cases} |a_n|=|c_{n+1}| \leqslant c, \\ |a_{n-1}| \leqslant |c_n|+|\gamma||c_{n+1}| \leqslant 2c, \\ \cdots\cdots \\ |a_0| \leqslant |c_1|+|r|\cdot|c_2|+|r|^2\cdot|c_3|+\cdots+|r|^n\cdot|c_{n+1}| \\ \qquad \leqslant (n+1)c. \end{cases}$$

由此可见，$a \leqslant (n+1)c$.

若 $|r|>1$，则在①两边同除以 $-rx^{n+1}$，并令 $y=\frac{1}{x}$，得

$$-\frac{c_0}{r}y^{n+1}-\frac{c_1}{r}y^n-\cdots-\frac{c_{n+1}}{r}$$
$$=\left(y-\frac{1}{r}\right)(a_0y^n+a_1y^{n-1}+\cdots+a_n),$$

和前面一样,我们可以得到

$$a \leqslant (n+1)\cdot\frac{c}{|r|} < (n+1)c.$$

故命题得证.

5·44　设 $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$,其中 a,b,c,d 为常数,且 $P(1)=1993, P(2)=3986, P(3)=5979$.

试计算 $\frac{1}{4}[P(11)+P(-7)]$.

(第3届澳门数学奥林匹克,1993年)

[解]　令　$Q(x)=P(x)-1993x$,

则　$Q(1)=Q(2)=Q(3)=0$,

故　$Q(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-r)$.

于是,由　$P(x)=Q(x)+1993x$　可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}[P(11)+P(-7)]\\=&\frac{1}{4}[Q(11)+1993\times 11+Q(-7)+1993\times(-7)]\\=&\frac{1}{4}[Q(11)+Q(-7)]+1993,\end{aligned}$$

但　$Q(11)=10\times 9\times 8\times(11-r)$

$Q(-7)=(-8)\times(-9)\times(-10)\times(-7-r)$,

所以　$Q(11)+Q(-7)=10\times 9\times 8\times 18=12960$,

$$\frac{1}{4}[P(11)+P(-7)]=3240+1993=5233.$$

5·45　给定非常数多项式 $P(x)$ 和 $Q(x)$,它们的首项系数都是1. 证明:多项式 $P(x)\cdot Q(x)$ 的各项系数的平方和不小于多项式 $P(x)$ 与 $Q(x)$ 的常数项的平方和.

(第21届俄罗斯数学奥林匹克决赛,1995年)

[证]　对任意多项式

$$R(x)=c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_1x+c_0,$$

定义其范数为

$$\|R\|=\sqrt{c_n^2+c_{n-1}^2+\cdots+c_1^2+c_0^2},$$

定义其共轭为

$R^*(x) = c_0x^n + c_1x^{n-1} + \cdots + c_{n-1}x + c_n$.

我们先证明如下引理:

引理　对任意两个多项式 $P(x)$ 与 $Q(x)$,有

$$\| PQ \| = \| PQ^* \|.$$

事实上,设

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0,$$

$$Q(x) = b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1x + b_0,$$

于是 $P(x) \cdot Q(x)$ 为 $n+m$ 次多项式,且

x^{n+m} 的系数为 a_nb_m;

x^{n+m-1} 的系数为 $a_nb_{m-1} + a_{n-1}b_m$;

x^{n+m-2} 的系数为 $a_nb_{m-2} + a_{n-1}b_{m-1} + a_{n-2}b_m$;

……

一般地,x^k 的系数为下表中相应的对角线上的各数之和(对角线的走向为左下右上):

x^{n+m}　x^{n+m-1}　x^{n+m-2}　x^{n+m-3}

a_nb_m	a_nb_{m-1}	a_nb_{m-2}	a_nb_{m-3}	……	a_nb_0
$a_{n-1}b_m$	$a_{n-1}b_{m-1}$	$a_{n-1}b_{m-2}$	$a_{n-1}b_{m-3}$	……	$a_{n-1}b_0$
$a_{n-2}b_m$	$a_{n-2}b_{m-1}$	$a_{n-2}b_{m-2}$	$a_{n-2}b_{m-3}$	……	$a_{n-2}b_0$
$a_{n-3}b_m$	$a_{n-3}b_{m-1}$	$a_{n-3}b_{m-2}$	$a_{n-3}b_{m-3}$	……	$a_{n-3}b_0$
……	……	……	……	……	……
a_0b_m	a_0b_{m-1}	a_0b_{m-2}	a_0b_{m-3}	……	a_0b_0

因此,$\| PQ \|^2$ 就是所有这些"对角线和"的平方和.

对于 $P(x) \cdot R^*(x)$,也可以列出一张类似的表.显然,该表的第1列恰好是上表的最后1列;第2列是上表的倒数第2列,……,最后1列是上表的第1列.因此,现在的 x^k 的系数是上表中走向为右下左上的对角线上的各数之和,而 $\| PQ^* \|$ 则为所有这种"对角线和"的平方和.

由此可见,$\| PQ \|^2$ 与 $\| PQ^* \|^2$ 都是表中所有各数的平方和再

加上一些交叉项.要证

$$\| PQ \| = \| PQ^* \|,$$

只需证明这些交叉项的和相等.

若 $a_{n-i}b_{m-j}$ 与 $a_{n-l}b_{m-k}$ 在表中位于同一条左下右上的对角线上，则 $a_{n-l}b_{m-j}$ 与 $a_{n-i}b_{m-k}$ 在表中位于同一条右下左上的对角线上.因此，若交叉项 $2 \cdot a_{n-i}b_{m-j} \cdot a_{n-l}b_{m-k}$ 出现在 $\| PQ \|$ 中，那么同样的交叉项 $2 \cdot a_{n-l}b_{m-j} \cdot a_{n-i}b_{m-k}$ 必出现在 $\| PQ^* \|$ 中，反过来也一样.故必有

$$\| PQ \| = \| PQ^* \|,$$

下面来证明原题：先设

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

$$Q(x) = x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0,$$

它们的首项系数都是1.于是

$$Q^*(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + 1$$

$$P(x) \cdot Q^*(x) = b_0 x^{n+m} + \cdots + (a_1 + a_0 b_{m-1})x + a_0$$

根据引理可得

$$\| P(x) \cdot Q(x) \|^2 = \| P(x) \cdot Q^*(x) \|^2 \geqslant a_0^2 + b_0^2.$$

故原命题得证.

第2节　多项式的根

5·46　求一个整系数多项式，使得 $\alpha = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$ 是它的根.

（第12届全俄数学奥林匹克，1986年）

[解]　因为 $\alpha^3 = (\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3})^3$

$$= 5 + 3 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot (\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3})$$

$$= 5 + 3\sqrt[3]{6}\alpha,$$

所以　$(\alpha^3 - 5)^3 = (3\sqrt[3]{6}\alpha)^3 = 162\alpha^3,$

即　$\alpha^9 - 15\alpha^6 - 87\alpha^3 - 125 = 0.$

则　$p(x) = x^9 - 15x^6 - 87x^3 - 125$ 就是满足条件的一个多项式，$p(x)$ 乘以任意一个多项式 $f(x)$，则 $p(x)f(x)$ 仍满足条件.

5·47　$P(x)$ 和 $Q(x)$ 是两个多项式，它们对于所有的实数 x，均满足恒等式 $P(Q(x)) = Q(P(x))$.若方程 $P(x) = Q(x)$ 无实数解，试证方程

$$P(P(x)) = Q(Q(x))$$
也无实数解.

（第 13 届加拿大数学奥林匹克,1981 年）

［证］ 由已知,多项式 $P(x)-Q(x)$ 对于任意的实数 x 都不等于 0,因此函数 $y = P(x) - Q(x)$ 的图像恒在 x 轴上方或者恒在 x 轴下方.我们不妨设在 x 轴上方,即

$$P(x) - Q(x) > 0.$$

如果 $P(P(x)) = Q(Q(x))$ 有实根 x_0,那么

$$P(Q(x_0)) > Q(Q(x_0)) = P(P(x_0)) > Q(P(x_0))$$

此与条件"$P(Q(x)) = Q(P(x))$ 为恒等式"矛盾.故方程 $P(P(x)) = Q(Q(x))$ 无实数解.

5·48 确定这样的实数 a,它使多项式

$$x^2 + ax + 1 \text{ 和 } x^2 + x + a$$

至少有一个公共根.

（第 3 届加拿大数学奥林匹克,1971 年）

［解］ 设 x 是一个公共根,则得

$$\begin{cases} x^2 + ax + 1 = 0 & ① \\ x^2 + x + a = 0 & ② \end{cases}$$

① - ② 得

$$(a-1)(x-1) = 0.$$

若 $a = 1$,则方程 ① 和 ② 相同,此时两个多项式有公共根.

若 $a \neq 1$,则公共根 $x = 1$,代入 ①,② 都得 $a = -2$.

因此,当 $a = 1$ 或 -2 时,$x^2 + ax + 1$ 和 $x^2 + x + a$ 至少有一个公共根.

5·49 设 $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$,其中系数 a_i 是整数.如果 $P(0)$ 和 $P(1)$ 都是奇数,那么 $P(x)$ 没有整数根.

（第 3 届加拿大数学奥林匹克,1971 年）

［证］ 当 x 是奇数时,$P(x)$ 与 $P(1)$ 的奇偶性相同;当 x 是偶数时,$P(x)$ 与 $P(0)$ 的奇偶性相同.由已知 $P(0)$ 和 $P(1)$ 都是奇数,因此不管 n 取什么整数,$P(x)$ 始终是奇数,从而 $P(x) \neq 0$,所以,$P(x)$ 没有整数根.

5·50 设 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ 为 n 次整系数多项式,

若 a_n、a_0 和 $f(1)$ 都为奇数，证明：$f(x)=0$ 无有理根.

（新加坡中学数学竞赛，1987 年）

代数卷

［解］ 假设 $\frac{p}{q}$ 是它的有理根，其中 p,q 为整数且最大公约数$(p,q)=1$，于是有

$$a_0q^n+a_1q^{n-1}p+\cdots+a_np^n=0. \quad ①$$

由此知 p 整除 a_0，q 整除 a_n，于是 p、q 都为奇数，从 $a_kq^{n-k}p^k$ 为奇数当且仅当 a_k 为奇数. 由 ① 式左端是偶数，得 $a_0+a_1+\cdots+a_n$ 是偶数，这与 $f(1)$ 为奇数矛盾，故命题得证.

5·51 证明：如果多项式 x^2+px+1 的根为 α 和 β，而多项式 x^2+qx+1 的根为 γ 和 δ，则有

$$(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\delta)=q^2-p^2.$$

（英国数学奥林匹克，1967 年）

［证］ 根据韦达定理，有

$$\alpha+\beta=-p,\alpha\beta=1,\gamma+\delta=-q,\gamma\delta=1,$$

由此得到

$$\begin{aligned}&(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\delta)\\=&[\alpha\beta-(\alpha+\beta)\gamma+\gamma^2][\alpha\beta+(\alpha+\beta)\delta+\delta^2]\\=&(1+p\gamma+\gamma^2)(1-p\delta+\delta^2)\\=&(\gamma^2+1+\gamma^2\delta^2+\delta^2)+p(\gamma-\delta-\delta\gamma^2+\gamma\delta^2)-p^2\gamma\delta\\=&(\gamma+\delta)^2+p(\gamma-\delta)(1-\delta\gamma)-p^2\\=&q^2-p^2.\end{aligned}$$

这就是所要证明的.

5·52 证明：对任意非零的 α,β，多项式

$$\alpha x^3-\alpha x^2+\beta x+\beta$$

的根 x_1,x_2,x_3 满足

$$(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=-1$$

（前民主德国数学竞赛，1970 年）

［证］ 根据韦达定理，对多项式 $\alpha x^3-\alpha x^2+\beta x+\beta$ 的根 x_1,x_2,x_3，有

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = \dfrac{\beta}{\alpha}, \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{\beta}{\alpha}. \end{cases}$$

因此,

$$\begin{aligned} &(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2}{x_1x_2x_3}\right) \\ &= 1 \cdot \frac{\beta}{\alpha} \cdot \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1} \\ &= -1. \end{aligned}$$

5・53　证明:多项式

$$x^2 + px - \frac{1}{2p^2}, p \in R, p \neq 0$$

的根 x_1, x_2 满足

$$x_1^4 + x_2^4 \geqslant 2 + \sqrt{2}.$$

(保加利亚数学竞赛,1980 年)

[证]　根据韦达定理

$$x_1 + x_2 = -p, x_1x_2 = -\frac{1}{2p^2},$$

以及两个数的算术平均值与几何平均值之间的不等式,得到

$$\begin{aligned} x_1^4 + x_2^4 &= (x_1 + x_2)^4 - 2x_1x_2[2(x_1 + x_2)^2 - x_1x_2] \\ &= p^4 + \frac{1}{p^2}\left(2p^2 + \frac{1}{2p^2}\right) \\ &= p^4 + 2 + \frac{1}{2p^4} \\ &\geqslant 2 + 2\sqrt{p^4 \cdot \frac{1}{2p^4}} \\ &= 2 + \sqrt{2}, \end{aligned}$$

这就是所要证明的.

5・54　求所有以有理数 a, b, c 为根的三次多项式

$$x^3 + ax^2 + bx + c.$$

（土耳其数学竞赛，1985 年）

代数卷

[解]　根据韦达定理，a，b，c 应满足

(1)$a + b + c = -a$，

(2)$ab + bc + ca = b$，

(3)$abc = -c$.

如果 $a = 0$（或 $b = 0$），由(3)得 $c = 0$，由(1)得 $b = 0$（或 $a = 0$）.因此可以假设 $a \neq 0, b \neq 0$.

如果 $c = 0$，由(2)得 $a = 1$，再由(1)得 $b = -2$. 显然，1，-2，0是方程 $x^3 + x^2 - 2x = 0$ 的根.

如果 $c \neq 0$，则由(3)，$b = -\frac{1}{a}$，由(1)和(2)消去 c 后得　$b^4 + b^3 - 2b^2 + 2 = 0$，这个方程仅有的有理根是 $b = -1$，并且 $a = 1, c = -1$.事实上，方程

$$x^3 + x^2 - x - 1 = 0$$

有 1，-1，-1 作它的根.

5·55　设多项式

$$ax^n - ax^{n-1} + c_2x^{n-2} + \cdots + c_{n-2}x^2 - n^2bx + b$$

恰有 n 个正根.证明：它所有的根都相等.

（保加利亚数学竞赛，1984 年）

[解]　因为原多项式有 n 个正根 $x_1, x_2, \cdots, x_n$. 所以它的次数不小于 n.因此 $a \neq 0$，并且由韦达定理，有

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1,$$

$$(-1)^n\left(\sum_{i=2}^{n} x_1x_2\cdots x_{i-1}x_{i+1}\cdots x_n + x_2x_3\cdots x_n\right) = n^2\frac{b}{a},$$

$$(-1)^n x_1x_2\cdots x_n = \frac{b}{a}.$$

由此得到 $b \neq 0$. 由平均值定理得到

$$n^2 = 1 \cdot \frac{(-1)^n n^2 \cdot \frac{b}{a}}{(-1)^n \frac{b}{a}}$$

$$= (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)$$

$$\geqslant (n\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n})\left(n \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{x_1x_2\cdots x_n}}\right) = n^2$$

这表明,只能有

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{1}{n}.$$

5·56　证明:复数 a 和 b 满足 $a^2 = 2b \neq 0$ 当且仅当多项式 $x^2 + ax + b$ 的根是复平面上一个等腰直角三角形的两个顶点,且这个三角形的直角顶点是坐标原点.

（前捷克斯洛伐克数学奥林匹克,1954 年）

[证]　设 x_1, x_2 是多项式 $x^2 + ax + b$ 的根,则点 x_1, x_2, O 组成题中所说三角形的三个顶点的必要且充分条件是 $x_1 \neq 0$,并且 $\frac{x_2}{x_1}$ 等于 i 或 $-i$(因为 x_1 和 x_2 的模相等,而它们的幅角相差 $\frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in Z$).这说明,要么 $x_2 = ix_1$,要么 $x_1 = ix_2$,即原方程的根为 x_0, ix_0,并且 $x_0 \neq 0$.根据韦达定理,有

$$\begin{cases}(1 + i)x_0 = -a, \\ ix_0^2 = b, \\ x_0 \neq 0.\end{cases}$$

该方程组当且仅当 $a^2 = 2b \neq 0$ 时是相容的(因为 $2(ix_0^2) = [(1 + i)x_0]^2$).

5·57　$a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ 是实数, $n \geqslant 1$, $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$,且 $|f(0)| = f(1)$, f 的每一根 α 都是实数并满足 $0 < \alpha < 1$.证明: $f(x)$ 的所有根之积不超过 $\frac{1}{2^n}$.

（第 6 届爱尔兰数学奥林匹克,1993 年）

[证]　若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 都是 f 的根,那么

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_n).$$

则

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \cdots \cdot \alpha_n = |f(0)| = f(1) = (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)\cdots(1 - \alpha_n).$$

因为　　$0 < \alpha_i < 1 \quad (i = 1,2,\cdots,n)$

所以,由算术-几何平均不等式,得

$$\begin{aligned}&(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n)^2\\&= \alpha_1(1-\alpha_1)\alpha_2(1-\alpha_2)\cdots\alpha_n(1-\alpha_n)\\&\leqslant \left[\frac{\alpha_1+1-\alpha_1+\alpha_2+1-\alpha_2+\cdots+\alpha_n+1-\alpha_n}{2n}\right]^{2n}\\&= \frac{1}{2^{2n}},\end{aligned}$$

即　　$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot \cdots \cdot \alpha_n \leqslant \frac{1}{2^n}.$

5·58　老师在黑板上写下二次三项式 $x^2+10x+20$,然后每个学生依次上去将一次项系数或常数项(两者不能同时)增加或减少 1. 结果在黑板上得到二次三项式 $x^2+20x+10$. 试问:黑板上是否出现过有整数根的二次三项式?

(第 18 届全苏数学奥林匹克,1984 年)

[解]　设 $f(x)=x^2+10x+20, g(x)=x^2+20x+10$.

则　　$f(-1)=11, g(-1)=-9$.

当学生将一次项系数或常数项增加或减少 1 时,相应的二次三项式当 $x=-1$ 时的值也只能增加或减少 1. 因此,将一个当 $x=-1$ 时其值为 11 的二次三项式 $f(x)$ 用这种方法一步步地变为一个当 $x=-1$ 时其值为 -9 的二次三项式 $g(x)$,中间必有一个时刻,黑板上的二次三项式当 $x=-1$ 时其值为零,即有整数根 -1.

5·59　两人按如下法则进行游戏:甲先给出 3 个不同的非零数字,乙则将它们分别填在如下的二次三项式中带星号的位置上:

$$*x^2+*x+* \quad \text{(哪个数填在哪个位置上由乙选择)}.$$

如果所得的二次三项式具有两个不同的有理根,则甲获胜. 证明:甲可以使自己获胜.

(第 24 届全苏数学奥林匹克,1990 年)

[证]　甲只要说出数字 1,2 和 -3,即可获胜,一般地,甲可以说出任意 3 个和数为 0 的两两不同的非零有理数,此时所得的方程 $ax^2+bx+c=0$ 必有根 $x_1=1$,再由韦达定理知其另一根为 $x_2=\frac{c}{a}\neq 1$.

5・60　试证:若当 x 取三个不同的整数值时,变量 x 的整系数多项式的值的绝对值都是1,那么这个多项式没有整数根.

(波兰数学奥林匹克,1968年)

[证]　若 $f(x)$ 是变量 x 的整系数多项式,并且

$$|f(a)|=|f(b)|=|f(c)|=1, \quad ①$$

这里 a,b,c 是三个不相等的整数.

假定多项式 $f(x)$ 有整数根 x_0,那么对任何 x,

$$f(x)=(x-x_0)\varphi(x), \quad ②$$

这里 $\varphi(x)$ 是整系数多项式(参看下面的注).

由①,②知

$$|a-x_0||\varphi(a)|=1.$$

由于 $|\varphi(a)|$ 是整数,所以 $|a-x_0|$ 是能整除1的正整数,因而

$$|a-x_0|=1.$$

同理可证　$|b-x_0|=1,\ |c-x_0|=1.$

所得到的三个等式表明三个数 $a-x_0,b-x_0,c-x_0$ 中有两个相等.因而 a,b,c 中有某两个数相等.这同 a,b,c 三个数彼此不等的条件矛盾.因此 $f(x)$ 不可能有整数根.

注　若整系数多项式 $f(x)$ 有整数根 x_0,则

$$f(x)=(x-x_0)\varphi(x),$$

且 $\varphi(x)$ 也是整系数多项式.事实上,设

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,$$

$$\varphi(x)=c_0x^{n-1}+c_1x^{n-2}+\cdots+c_{n-2}x+c_{n-1}.$$

将它们代入上式,并令两端同次幂的系数相等,得

$$a_0=c_0,a_k=c_k-x_0c_{k-1}\quad(k=1,2,\cdots,n-1).$$

由此得

$$c_0=a_0,c_k=a_k+x_0c_{k-1}.$$

因此 c_0 是整数,并且若 c_{k-1} 是整数,则 c_k 也是整数($k=1,2,\cdots,n-1$).故所有的数 $c_0,c_1,\cdots,c_{n-1}$ 都是整数.

5・61　设多项式

$$P(x)=x^3+ax^2+bx+c,a,b,c\in Z$$

的一个根等于其他两根之乘积,证明:$2P(-1)$ 被

$$P(1)+P(-1)-2(1+P(0))$$

整除.

(加拿大数学奥林匹克,1982 年)

[证] 根据韦达定理,多项式 $P(x)$ 的根 u, v 和 uv 满足

$$u + v + uv = -a,$$
$$uv(1 + u + v) = b,$$
$$u^2v^2 = -c.$$

由此得到,当 $a \neq 1$ 时,

$$b - c = uv(1 + u + v + uv) = uv(1 - a),$$

即 uv 是有理数.因为 $u^2v^2 = -c$ 是整数,故 uv 也是整数.因此

$1 - a \mid b - c$,从而有

$$a - 1 \mid a - 1 - (b - c).$$

但
$$P(1) + P(-1) - 2(1 + P(0))$$
$$= (1 + a + b + c) + (-1 + a - b + c) - 2(1 + c)$$
$$= 2(a - 1),$$
$$2P(-1) = 2(-1 + a - b + c).$$

故 $P(1) + P(-1) - 2(1 + P(0))$ 整除 $2P(-1)$.

当 $a = 1$ 时,有 $b = c$.

因此有一个根为 -1,即 $2P(-1) = 0$ 能被任何整数整除.

5・62 证明:如果数 p_1, p_2, q_1, q_2 满足不等式

$$(q_1 - q_2)^2 + (p_1 - p_2)(p_1q_2 - p_2q_1) < 0,$$

那么二次三项式 $x^2 + p_1x + q_1$ 与 $x^2 + p_2x + q_2$ 都有两个实根,而且在每一个多项式的两个根之间有另一个多项式的根.

(第 5 届全苏数学奥林匹克,1971 年)

[证] 设
$$f(x) = x^2 + p_1x + q_1, \quad ①$$
$$g(x) = x^2 + p_2x + q_2. \quad ②$$

若
$$f(x) = g(x),$$

则
$$x^2 + p_1x + q_1 = x^2 + p_2x + q_2,$$
$$x = \frac{-(q_1 - q_2)}{p_1 - p_2}.$$

此时,

$$f(x) = \left(\frac{q_1 - q_2}{p_1 - p_2}\right)^2 - p_1 \cdot \frac{q_1 - q_2}{p_1 - p_2} + q_1$$

$$= \frac{(q_1 - q_2)^2 - p_1 \cdot (q_1 - q_2)(p_1 - p_2) + q_1(p_1 - p_2)^2}{(p_1 - p_2)^2}$$

$$= \frac{(q_1 - q_2)^2 + (p_1 - p_2)(p_1q_2 - p_2q_1)}{(p_1 - p_2)^2}$$

$$< 0.$$

这就是说,在直角坐标系中,两条开口向上的抛物线 ① 和 ② 的交点在横轴的下方,因此,这两条抛物线与横轴各有两个交点,并且每一条抛物线与横轴的两个交点之间,必有另一条抛物线与横轴的一个交点.因此二次三项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都有两个实根,并且在每一个多项式的两个根之间有另一个多项式的根.

5·63　已知 m、n、p、q 是实数.为使二次三项式

$$x^2 + mx + n \text{ 及 } x^2 + px + q$$

都有实根,并且其中任一个多项式的两个根被另一个多项式的根分隔开来,系数 m、n、p、q 应满足什么条件?

(波兰数学奥林匹克,1951 年)

[解]　设 x_1、x_2 是二次三项式 $x^2 + mx + n$ 的根,x_3、x_4 是二次三项式 $x^2 + px + q$ 的根.

若这两对根是互相分隔的,也就是说,x_1、x_2、x_3、x_4 是实数,并且 x_3、x_4 中有一个在区间(x_1, x_2)内,另一个在这区间外.

于是有下列两种可能情形:或者差 $x_3 - x_1$, $x_3 - x_2$ 同号,而差 $x_4 - x_1$, $x_4 - x_2$ 异号;或者差 $x_3 - x_1$, $x_3 - x_2$ 异号,而差 $x_4 - x_1$, $x_4 - x_2$ 同号.在这两种情形下都有

$$(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_1)(x_4 - x_2) < 0. \quad ①$$

因为　$x_1 + x_2 = -m$, $x_1x_2 = n$,所以

$$\begin{aligned}(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) &= x_3^2 - (x_1 + x_2)x_3 + x_1x_2 \\ &= x_3^2 + mx_3 + n, \\ (x_4 - x_1)(x_4 - x_2) &= x_4^2 - (x_1 + x_2)x_4 + x_1x_2 \\ &= x_4^2 + mx_4 + n.\end{aligned}$$

因而不等式 ① 可改写为

$$(x_3^2 + mx_3 + n)(x_4^2 + mx_4 + n) < 0. \quad ②$$

把不等式的左端展开,注意到

$$x_3 + x_4 = -p, x_3x_4 = q \quad \text{以及}$$

$$x_3^2 + x_4^2 = (x_3 + x_4)^2 - 2x_3x_4 = p^2 - 2q,$$

我们有

$$\begin{aligned}&(x_3^2 + mx_3 + n)(x_4^2 + mx_4 + n)\\ =& x_3^2x_4^2 + mx_3x_4(x_3 + x_4) + m^2x_3x_4 + n(x_3^2 + x_4^2) + mn(x_3 + x_4) + n^2\\ =& q^2 - mpq + m^2q + n(p^2 - 2q) - mnp + n^2\\ =& (n - q)^2 + mq(m - p) + np(p - m)\\ =& (n - q)^2 + (m - p)(mq - np).\end{aligned}$$

因此,不等式 ② 可以写作

$$(n - q)^2 + (m - p)(mq - np) < 0. \qquad ③$$

这就是说,二次三项式 $x^2 + mx + n$ 和$x^2 + px + q$ 的根互相分隔,那么这些二次三项式的系数满足条件 ③.

5・64 设 $P(z)$ 是 1992 次复系数多项式,它的根各不相同. 证明:存在复数 $a_1, a_2, \cdots, a_{1992}$,使得 $P(z)$ 整除多项式

$$\{\cdots[(z - a_1)^2 - a_2]^2 - \cdots - a_{1991}\}^2 - a_{1992}.$$

(第 21 届美国数学奥林匹克,1992 年)

[证] 令 $n = 1992, r_1, r_2, \cdots, r_n$ 是$P(z)$ 的 n 个互不相同的根. 归纳地定义非空集 S_i 与复数a_i 如下:设

$$S_0 = \{r_1, r_2, \cdots, r_n\}.$$

对 $i = 1,2,\cdots,n$,定义 a_i 为S_{i-1} 中任取两个数的平均数(若 S_{i-1} 只含一个数,则定义 a_i 为该数). 又定义 $S_i = \{(z - a_i)^2 \mid z \in S_{i-1}\}$.

若 S_{i-1} 中至少含有两个数,如令 $z_1, z_2 \in S_{i-1}$,且不妨设 $a_i = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$. 于是,$(z_1 - a_i)^2 = (z_2 - a_i)^2$.所以 $|S_i| < |S_{i-1}|$.于是,至多经 $n - 1$ 次后 S_i 只含有一个元,从而 $S_n = \{0\}$.令

$$Q(z) = \{\cdots[(z - a_1)^2 - a_2]^2 - \cdots - a_{n-1}\}^2 - a_n$$

由上述构造方式可见,有 $Q(r_k) = 0(k = 1,2,\cdots,n)$,所以 $P(z) \mid Q(z)$.

5・65 设 $p(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ 与$g(x) = x^n + b_1x_{n-1} + \cdots + b_{n-1}x + b_n$ 为两个复系数多项式. $g(x)$ 的根是 $p(x)$

的根的平方. 若 $a_1+a_3+a_5+\cdots$ 与 $a_2+a_4+a_6+\cdots$ 是实数. 证明 $b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n$ 也是实数.

(加拿大国家集训队训练题)

[证] 设 $p(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$, 则

$$g(x)=(x-x_1^2)(x-x_2^2)\cdots(x-x_n^2).$$

由此得
$$\begin{aligned}g(1)&=(1-x_1^2)(1-x_2^2)\cdots(1-x_n^2)\\&=(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\\&=(-1)^n p(1)\cdot p(-1).\end{aligned}$$

另一方面
$$p(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,$$
$$g(x)=x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n,$$

所以
$$p(1)=1+a_1+a_2+\cdots+a_n,$$
$$(-1)^n p(-1)=1-a_1+\cdots+(-1)^n a_n,$$
$$g(1)=1+b_1+b_2+\cdots+b_n.$$

由已知 $p(1), p(-1)$ 为实数, 所以 $g(1)=(-1)^n p(1)p(-1)$ 为实数, 从而 $b_1+b_2+\cdots+b_n$ 为实数.

5·66 多项式 x^5-x-1 和 $x^2+ax+b, (a,b\in Q)$ 能否有公共的根?其中 Q 是有理数集.

(保加利亚数学竞赛, 1983 年)

[解] 设 α 是两个给定的多项式的公共根, 即

$$\alpha^5=\alpha+1, \alpha^2=-a\alpha-b.$$

则
$$\begin{aligned}\alpha+1=\alpha^5&=\alpha(\alpha^2)^2\\&=\alpha(-a\alpha-b)^2\\&=\alpha[a^2(-a\alpha-b)+2ab\alpha+b^2]\\&=(2ab-a^3)(-a\alpha-b)+(b^2-a^2b)\alpha\\&=(a^4-3a^2b+b^2)\alpha+(a^3b-2ab^2).\end{aligned}$$

因此得到

$$(a^4-3a^2b+b^2-1)\alpha=-a^3b+2ab^2+1 \qquad ①$$

我们知道, 如果既约分数 $\frac{p}{q}, (p,q)=1$, 是整系数多项式 $a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ 的根, 那么 p 可以整除 a_0, q 可以整除 a_n. 根据这个性质, 多项式 x^5-x-1 没有有理根. 因此 α 不是有理数. 于是由 ① 式可得

$$a^4-3a^2b+b^2-1=0,$$
$$-a^3b+2ab^2+1=0.$$

由上述两个等式可得 $a\neq 0$,且

$$b=\frac{2a^5-2a-1}{5a^3}.$$

从而有

$$a^{10}+3a^6-11a^5-4a^2-4a-1=0.$$

这就是说,a 是多项式$x^{10}+3x^6-11x^5-4x^2-4x-1$的根.根据同样的性质可知,这个多项式没有有理根,与已知 $a\in Q$ 矛盾.因此当 $a,b\in Q$ 时,多项式 x^5-x-1 和 x^2+ax+b 不可能有公共根.

5·67 设 $p(x)$ 是实系数多项式,它的所有的根都是纯虚数.证明:多项式 $p'(x)$ 的所有的根除了一个之外也都是纯虚数.

(美国纽约数学竞赛,1975 年)

[证] 因为实系数多项式只能有偶数个纯虚根,而且它们两两共轭成对出现,所以多项式 $p(x)$ 可以表示为:

$$\begin{aligned}p(x)&=a(x-ia_1)\cdots(x-ia_{2n})\\&=a(x^2+a_1^2)\cdots(x^2+a_n^2).\end{aligned}$$

其中 $a,a_1,\cdots,a_{2n}$ 是非零实数,并且 $a_{n+k}=-a_k,k=1,2,\cdots,n$.因此多项式 $p(x)$ 中 x^2 的系数不为零,而 x 的系数为零.这就是说,多项式 $p'(x)$ 恰好有一个根 $x=0$.现在证明,其他$2n-2$个根都是纯虚数.设 $p'(b+ic)=0$,其中 $b^2+c^2\neq 0$.如果 $p(b+ic)=0$,则 $b+ic$ 是原多项式的根.即是纯虚数.如果 $p(b+ic)\neq 0$,则由

$$\frac{p'(x)}{p(x)}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{x-ia_k}.$$

得到

$$\begin{aligned}0&=\frac{p'(b+ic)}{p(b+ic)}\\&=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{b+i(c-a_k)}\\&=\sum_{k=1}^{2n}\frac{b-i(c-a_k)}{b^2+(c-a_k)^2}.\end{aligned}$$

因此,$\dfrac{p'(b+ic)}{p(b+ic)}$ 的实部为

$$b\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{b^2+(c-a_k)^2}=0,$$

故 $\quad b=0.$

5·68 求所有的二次三项式 $p(x)$，它在 $x=\frac{1}{2}$ 处取到极小值 $-\frac{49}{4}$，且它的两个根的四次方之和为 337.

(中国安徽省数学竞赛，1978 年)

[解] 由已知可设

$$p(x)=a\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{49}{4}\quad(a>0),$$

即 $$p(x)=ax^2-ax+\frac{a-49}{4}.$$

再设 $p(x)$ 的两根为 x_1,x_2，则

$$\begin{cases}x_1+x_2=1,\\ x_1x_2=\dfrac{a-49}{4a}.\end{cases}$$

但
$$\begin{aligned}&x_1^4+x_2^4\\ =&(x_1+x_2)^4-4x_1x_1(x_1^2+x_2^2)-6x_1^2x_2^2\\ =&(x_1+x_2)^4-4x_1x_2[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]-6x_1^2x_2^2,\end{aligned}$$

$\therefore$
$$337=1^4-\frac{a-49}{a}\cdot\left(1-\frac{a-49}{2a}\right)-6\cdot\frac{(a-49)^2}{16a^2},$$

$$336=-\frac{a-49}{a}+\frac{(a-49)^2}{2a^2}-\frac{3(a-49)^2}{8a^2},$$

$$336=-\frac{a-49}{a}+\frac{(a-49)^2}{8a^2}.$$

则 $\quad 8\times336a^2=-8a(a-49)+(a-49)^2,$

整理得 $\quad 2695a^2-294a-2401=0.$

所以 $\quad a_1=1,a_2=-\frac{2401}{2695}\quad$ (舍去)

故 $\quad p(x)=x^2-x-12.$

5·69 证明：如果多项式 $P(x)$ 的次数 $n>1$，并且有 n 个不同的实根 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，则

$$\frac{1}{P'(x_1)}+\frac{1}{P'(x_2)}+\cdots+\frac{1}{P'(x_n)}=0.$$

（波兰数学奥林匹克，1979 年）

［证］ 将原多项式分解为因式的乘积：

$$P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n),$$

则 $$P'(x)=P_1(x)+P_2(x)+\cdots+P_n(x),$$

其中 $P_k(x)$ 是 $n-1\geqslant 1$ 次多项式，并满足

$$(x-x_k)P_k(x)\equiv P(x),k=1,2,\cdots,n.$$

注意，当 $k\neq i$ 时，$P_k(x_i)=0$. 因此 $P'(x_i)=P_i(x_i)\neq 0$. 考虑多项式

$$F(x)=-1+\frac{P_1(x)}{P'(x_1)}+\frac{P_2(x)}{P'(x_2)}+\cdots+\frac{P_n(x)}{P'(x_n)}.$$

如果 $F(x)\neq 0$，则它的次数不大于 $n-1$，且对每个 $i=1,2,\cdots n$，有

$$F(x_i)=\sum_{j=1}^{n}\frac{P_j(x_i)}{P'(x_j)}-1=\frac{P_i(x_i)}{P'(x_i)}-1=0,$$

即多项式 $F(x)$ 有 n 个不同的根. 因此 $F(x)\equiv 0$. 因为多项式 $P_k(x)$ 的最高次项系数都是 a，$k=1,2,\cdots,n$. 所以多项式 $F(x)$ 中项 x^{n-1} 的系数为

$$\frac{a}{P'(x_1)}+\frac{a}{P'(x_2)}+\cdots+\frac{a}{P'(x_n)},$$

而这个系数恰好是 0，由此便得到题中的结论.

5·70 证明：如果 n 次多项式 $p(x)$ 没有实根，则对任意 $\alpha\in R$，多项式

$$Q(x)=P(x)+\alpha P'(x)+\cdots+\alpha^n P^{(n)}(x)$$

也没有实根.

（前民主德国数学竞赛，1971 年）

［证］ 首先，因为 $P^{(n+1)}(x)=0$，所以

$$Q'(x)=P'(x)+\alpha P''(x)+\cdots+\alpha^{n-1}P^{(n)}(x).$$

因此 $$Q(x)-\alpha Q'(x)=P(x).$$

不妨设多项式最高次项的系数是正的. 因为 $P(x)$ 没有实根，所以它的次数是偶数，并且对所有 $x\in R$，有 $P(x)>0$. 设多项式 $Q(x)$ 有实根 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_k$.

如果 $\alpha\geqslant 0$，则因为多项式 $Q(x)$ 的最高次项系数等于多项式

$P(x)$ 的最高次项系数，且是正数，所以

$$\lim_{x \to +\infty} Q(x) = +\infty.$$

由此得到，当 $x > x_k$ 时，$Q(x) > 0$，因此 $Q'(x) \geqslant 0$，

并且 $\qquad Q'(x_k) \geqslant 0$，

所以 $\qquad P(x_k) = Q(x_k) - \alpha Q'(x_k) \leqslant 0$. 矛盾.

如果 $\alpha < 0$，则当 $x < x_1$ 时，$Q(x) > 0$(因为 $\deg Q(x) = n$ 是偶数). 从而 $Q'(x_1) \leqslant 0$，并且

$$P(x_1) = Q(x_1) - \alpha Q'(x_1) \leqslant 0.$$

总之，都与 $P(x) > 0$ 相矛盾. 因此多项式 $Q(x)$ 没有实根.

5・71　证明：对任意 $n \in Z^+$，多项式

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

至多有一个实根.

（前民主德国数学竞赛，1970 年）

［证］　用归纳法. 当 n 为偶数时，多项式 $P_n(x)$ 对所有 $x \in R$ 都取正值(因此它不能有实根)，而当 n 为奇数时，多项式 $P_n(x)$ 恰有一个实根. 当 $n = 0$ 时，显然对所有 x，$P_0(x) = 1 > 0$. 设结论对小于 n 的数都成立，现在证明它对 n 成立.

(1) 设 n 为奇数，则由归纳假设，对所有 $x \in R$，$P'_n(x) = P_{n-1}(x) > 0$，因此，函数 $P_n(x)$ 是递增的，从而至多有一个零点. 因为 $P_n(0) = 1 > 0$，并且 $\lim\limits_{x \to -\infty} P_n(x) = -\infty$(即是说，函数 $P_n(x)$ 至少在一个点取负值)，所以连续函数 $P_n(x)$ 至少有一次取值为 O.

(2) 设 n 为偶数，则多项式 $P'_n(x) = P_{n-1}(x)$ 恰有一个实根 $x_0 \neq 0$. 因为对所有 $x \in R$，

$$P''_n(x) = P_{n-2}(x) > 0,$$

所以当 $x > x_0$ 时，$P'_n(x) > 0$，而当 $x <_0$ 时，$P'_n(x) < 0$，因此对所有 $x \in R$，有 $P_n(x) \geqslant P_{n-1}(x_0) + \dfrac{x_0^n}{n!} = \dfrac{x_0^n}{n!} > 0$.

5・72　设 a, b, c 是多项式 $x^4 - ax^3 - bx + c$ 四个根中的三个根，求所有这样的三个数 a, b, c.

（前捷克斯洛伐克数学奥林匹克，1967 年）

[解] 设 $c=0$,则 c 是方程 $x^4-ax^3-bx=0$ 的根.因此,余下的是要求出所有形如 x^3-ax^2-b 的多项式,使得 a 和 b 是它的根.如果记这个多项式的第三个根为 d,则由韦达定理,有 $a+b+d=a$ 即 $d=-b$,其次,

$$ab+ad+bd=ab-b(a+b)=-b^2=0,$$

即 $b=0$.最后,经验证可知,所有形如 $(a,0,0)$ 的三个数满足题中的条件.现在设 $c\neq 0$,则多项式 x^4-ax^3-bx+c 的4个根 a、b、c、d 没有一个为0.由韦达定理,有 $a+b+c+d=a$,即

$$d=-(b+c). \quad ①$$

其次

$$\begin{aligned}&ab+ac+bc+ad+bd+cd\\=&ab+ac+bc-(a+b+c)(b+c)\\=&-b^2-bc-c^2\\=&0.\end{aligned} \quad ②$$

又

$$\begin{aligned}&abc+abd+acd+bcd\\=&abc-(ab+ac+bc)(b+c)\\=&-a(b^2+bc+c^2)-b^2c-bc^2\\=&-bc(b+c)\\=&b.\end{aligned} \quad ③$$

即 $\quad -c(b+c)=1, c^2+bc+1=0.$

最后,$abcd=-abc(b+c)=ab=c,$ ④

即 $\quad a=\dfrac{c}{b}.$

因此,a,b,c 只可能有四组:

$$b_{1,2}=1,\quad c_{1,2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2},\quad a_{1,2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2};$$

$$b_{3,4}=-1,\quad c_{3,4}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2},\quad a_{3,4}=\frac{-1\mp i\sqrt{3}}{2}.$$

每一组都满足题中条件,因此,三数组 (a,b,c) 要么有形式 $(a,0,0)$,其中 a 是任意复数;要么是下面的三数组之一:

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},1,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right),\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2},1,\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right),$$

$\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2},-1,\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right),\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},-1,\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)$.

5・73 设 $a,b,c\in Z,a>0$,且多项式 ax^2+bx+c 在区间 $(0,1)$ 中有两个不同的根,证明:$a\geqslant 5$.再对 $a=5$ 给出一组 b,c,使 ax^2+bx+c 满足前面的条件.

(前南斯拉夫数学奥林匹克,1981 年)

[证] 因为多项式 $P(x)=ax^2+bx+c(a>0)$ 有两个不同的根 $0<x_1<x_2<1$,所以 $b^2>4ac$.又由韦达定理 $0<\frac{c}{a}<1,\frac{b}{a}<0$,即 $a>c>0,b<0$.其次 $P(1)=a+b+c>0$,因此 $a+c>-b$.将后一不等式两端(都是正的)平方,得到 $a^2+2ac+c^2>b^2$,因此有 $(a-c)^2>b^2-4ac>0$.由此可得 $a-c\geqslant 2$.如果 $a\leqslant 4$,则整系数 a、c 只可能有三组:

$$a_1=4,c_1=2;a_2=3,c_2=1;$$
$$a_3=4,c_3=1.$$

而系数 b 应当满足相应的三个条件:

$$4>b_1^2-32>0;$$
$$4>b_2^2-12>0;$$
$$9>b_3^2-16>0.$$

但是没有一个整数能满足这三个条件中的任何一个.因此 $a\geqslant 5$.最后,方程 $5x^2-5x+1=0$ 有两个根 $\frac{5+\sqrt{5}}{10}$ 和 $\frac{5-\sqrt{5}}{10}$,它们都落在区间 $(0,1)$ 上.

5・74 求所有的实数 p,q,使得多项式 x^4+px^2+q 具有 4 个组成算术级数的实根.

(保加利亚数学竞赛,1961 年)

[解] 当且仅当多项式 y^2+py+q(其中 $y=x^2$)有两个非负实根,即 p 与 q 满足 $p^2\geqslant 4q,q\geqslant 0,p\leqslant 0$ 时,多项式 x^4+px^2+q 有 4 个实根,如果多项式有 4 个实根(记作 $-x_1,-x_2,x_1,x_2$,不妨设 $x_1\geqslant x_2\geqslant 0$),则

$$\begin{cases}-2x_2=-x_1+x_2 & ①\\ x_1^2+x_2^2=-p & ②\\ x_1^2x_2^2=q & ③\end{cases}$$

由① $x_1 = 3x_2$

代入②、③得 $\begin{cases} 10x_2^2 = -p & ④ \\ 9x_2^4 = q & ⑤ \end{cases}$

由④ $100x_2^4 = p^2$ ⑥

由⑤、⑥得 $\dfrac{p^2}{100} = \dfrac{q}{9}$,

即 $q = 0.09p^2$ 时,它们组成算术级数.因此,所求数对 p,q 应当满足 $p \leqslant 0, q = 0.09p^2$(由后一等式可以得到 $p^2 \geqslant 4q$ 和 $q \geqslant 0$).

5·75 求所有的值 a,使得多项式

$$x^3 - 6x^2 + ax + a$$

的根 x_1, x_2, x_3 满足

$$(x_1 - 3)^3 + (x_2 - 3)^3 + (x_3 - 3)^3 = 0.$$

(奥地利数学奥林匹克,1983年)

[解] 作变量代换 $y = x - 3$,则 $y_1 = x_1 - 3, y_2 = x_2 - 3$ 和 $y_3 = x_3 - 3$ 是多项式

$$(y+3)^3 - 6(y+3)^2 + a(y+3) + a$$
$$= y^3 + 3y^2 + (a-9)y + 4a - 27$$

的根.由韦达定理,有

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = -3, \\ y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = a - 9, \\ y_1y_2y_3 = 27 - 4a. \end{cases}$$

此时,由假设还有

$$y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 = 0.$$

不难验证下列恒等式成立:

$$y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 \equiv (y_1 + y_2 + y_3)^3 - 3(y_1y_2 + y_2y_3 + y_1y_3)(y_1 + y_2 + y_3) + 3y_1y_2y_3.$$

由此得到,a 合乎题目要求的必要且充分条件为

$$0 = (-3)^3 - 3(a-9)(-3) + 3(27 - 4a)$$
$$= -27 - 3a,$$

所以 $a = -9$.

5·76 学生按题号顺序解一组二次方程的练习:当一道方程有

两个不等根时,下一道方程按下述方式构成:常数项是其较大的根,一次项的系数是较小的根,而二次项 x^2 的系数都等于 1. 证明,这组练习题不可能继续无限地编下去,并求出至多有多少个二次三项式满足题目的条件.

(第 17 届全苏数学奥林匹克,1983 年)

[证] 设开始的二次方程为 $x^2 + px + q = 0$,而以后的方程为

$$f_j(x) = x^2 + p_jx + q_j = 0, p_j < q_j, j = 1,2,\cdots.$$

现分别讨论如下:

(1) 若 $j \geqslant 2, p_j \leqslant 0, q_j \geqslant 0$,且方程 $f_j(x) = 0$ 不是最后一个,则有

$$p_j^2 - 4q_j > 0.$$

由韦达定理:

$$p_j + q_j = -p_{j-1},$$

$$p_jq_j = q_{j-1}.$$

因此,由已知 $p_{j-1} < q_{j-1}$ 得

$$p_j + q_j + p_jq_j > 0.$$

上式可变为下面不等式

$$0 \leqslant -p_j(1 + q_j) < q_j.$$

利用第一个不等式,上式可得

$$q_j^2 > p_j^2(1 + q_j)^2 > 4q_j(1 + q_j)^2,$$

或 $\quad q_j(4q_j^2 + 7q_j + 4) < 0.$

因为 $q_j \geqslant 0$,所以上式不可能,从而情况(1) 不可能.

(2) 如果 $j \geqslant 3, 0 < p_j < q_j$,则可知,此时 $p_{j-1} < 0, q_{j-1} > 0$,于是 $f_{j-1}(x) = 0$ 满足情况(1) 的规定,所以情况(2) 也不可能.

(3) 如果 $j \geqslant 4, p_j < 0, q_j < 0$,则可知,此时 $p_{j-1} > 0, q_{j-1} > 0$,于是方程 $f_{j-1}(x) = 0$ 满足情况(2),所以情况(3) 也不可能.

考察方程 $f_4(x) = 0$. 如果它存在,由于情况(3) 不可能,因此只有 $q_4 > 0$,由情况(2) 不可能,可知 $p_4 \leqslant 0$,但由于情况(1) 不可能,因此方程 $f_4(x) = 0$ 只可能是最后一个. 这就是说按题意作出的方程最多只有 5 个,满足题意的五个方程是存在的,例如

$$f_4(x) = x^2 - \frac{1}{2}x + 4,$$

$$f_3(x)=x^2-\frac{7}{2}x-2,$$

$$f_2(x)=x^2+\frac{11}{2}x+7,$$

$$f_1(x)=x^2-\frac{25}{2}x+\frac{77}{2},$$

$$f(x)=x^2-26x-\frac{1925}{4}.$$

写出这组方程应该先写 $f_4(x)$，而其余的均按韦达定理依次写出.

5·77 有一多项式 $x^{10}+*x^9+*x^8+\cdots+*x^2+*x+1$. 两个人做游戏，首先第一个人用某个数替代任何一个小星星，接着第二个人用一个数替代剩余小星星中的任何一个，然后第一个人再用一个数替代一个小星星，等等，共做了9步，如果所得多项式没有实根，那么第一个人就赢了，如果有实根，第二个人就赢.

问无论第一个人用什么数代替 *，第二个人都能赢吗?

（第11届全苏数学奥林匹克，1977年）

[解] 第二个人能赢.

第二个人赢的战略：设法使第一个人走到最后一步时，剩下的小星星在奇次幂 x^{2l+1} 之前. 例如，当第一个人用数取代奇数幂前的小星星时，第二个人接着就用数取代偶数幂前的小星星；而当第一个人用数取代偶数幂前的小星星时，第二个人就用数取代奇数幂前的小星星. 因为奇数幂前的小星星个数比偶数幂前小星星个数多1，因此剩下的最后一个小星星一定在奇数幂之前.

下面，我们来证明第二个人的战略是必胜的.

事实上，假设在第二个人的第4步之前有多项式 $P(x)+*x^m+*x^{2l+1}$，其中 $P(x)$ 为已知的实系数多项式.

我们挑选数 u 和 $c>0$，使多项式

$$F(x)=P(x)+ux^m+\lambda x^{2l+1}$$

当 λ 取任何值时有

$$cF(1)+F(-2)=0.$$

即 $$cP(1)+P(-2)+u[c+(-2)^m]+\lambda[c+(-2)^{2l+1}]=0.$$

为此，我们可以取

$$c = 2^{2l+1}, \quad u = -\frac{P(-2) + cP(1)}{c + (-2)^m},$$

这样,不管最后一步取什么样的 λ 值,$F(x)$ 在$[-2,1]$上都有根.因此第二个人必胜.

5·78 是否存在这样一个有限非0实数集 M,使得对任何一个自然数 n,总存在以 M 中的数为系数且次数不低于 n 的多项式,它的所有根都属于 M?证明你的结论.

(第22届俄罗斯数学奥林匹克决赛,1996年)

[**解**] 不存在.

事实上,如果存在满足题设条件的有限非0实数集 $M = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$.我们记

$$m = \min\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_n|\},$$

$$M = \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_n|\}.$$

显然有 $\quad M \geqslant m > 0.$

考察多项式

$$p(x) = b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \cdots + b_1 x + b_0,$$

设它的所有系数 $b_k, b_{k-1}, \cdots, b_1, b_0$ 和根 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 都属于集合 M.

由韦达定理,我们有

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = -\frac{b_{k-1}}{b_k},$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_k + x_2x_3 + \cdots + x_{k-1}x_k = \frac{b_{k-2}}{b_k}.$$

因此

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2 = \left(-\frac{b_{k-1}}{b_k}\right)^2 - \frac{2b_{k-2}}{b_k}.$$

于是,我们有

$$km^2 \leqslant \frac{M^2}{m^2} + \frac{2M}{m},$$

$$k \leqslant \frac{M^2}{m^4} + \frac{2M}{m^3}.$$

这就是说,多项式的次数 k 不能超过$\frac{M^2}{m^4} + \frac{2M}{m^3}$.此与题设的条件矛盾.

故满足题设条件的集合 M 不存在.

5·79 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是非负实数，且不全为零.

(a) 证明：方程 $x^n-a_1x^{n-1}-\cdots-a_{n-1}x-a_n=0$ 恰有一个正实根；

(b) 令 $A=\sum\limits_{j=1}^{n}a_j$，$B=\sum\limits_{j=1}^{n}ja_j$，并设 R 是上述方程的正实根，证明：$A^A\leqslant R^B$.

（第37届国际数学奥林匹克预选题，1996年）

[证] (a) 当 $x>0$ 时，

$$x^n-a_1x^{n-1}-\cdots-a_{n-1}x-a_n=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{a_n}{x^n}+\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\cdots+\frac{a_1}{x}=1.$$

记 $f(y)=a_ny^n+a_{n-1}y^{n-1}+\cdots+a_1y$.

由于 $y\geqslant0$ 时，$f(y)$ 连续且严格单调上升，又

$$f(0)=0,f\left(a_k^{-\frac{1}{k}}\right)\geqslant1\quad（其中 a_k>0），$$

因此存在惟一的正数 y_0，使 $f(y_0)=1$. 于是，方程 $x^n-a_1x^{n-1}-\cdots-a_{n-1}x-a_n=0$ 恰有一个正实根 $R=\dfrac{1}{y_0}$.

(b) 由于 $g(y)=\ln y$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续且上凸，故由琴生不等式，对于任意非负实数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$（不全为零）和任意正数 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 有

$$\ln\frac{\lambda_1y_1+\lambda_2y_2+\cdots+\lambda_ny_n}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}\geqslant\frac{\lambda_1\ln y_1+\lambda_2\ln y_2+\cdots+\lambda_n\ln y_n}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}$$

即
$$\frac{\lambda_1y_1+\lambda_2y_2+\cdots+\lambda_ny_n}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}\geqslant(y_1^{\lambda_1}y_2^{\lambda_2}\cdots y_n^{\lambda_n})^{\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}}.$$

取 $\lambda_k=a_k$，$y_k=y_0^k$，$1\leqslant k\leqslant n$，则

$$\frac{a_1y_0+a_2y_0^2+\cdots+a_ny_0^n}{A}\geqslant(y_0^B)^{\frac{1}{A}}$$

由于 $f(y_0)=a_ny_0^n+a_{n-1}y_0^{n-1}+\cdots+a_1y_0=1$，因此

$$\frac{1}{A}\geqslant y_0^{\frac{B}{A}},$$

即
$$\frac{1}{A^A}\geqslant y_0^B$$

$$A^A \leqslant \frac{1}{{y_0}^B} = \left(\frac{1}{y_0}\right)^B = R^B.$$

5·80　甲、乙二人对一个至少 4 次的多项式

$$x^{2n} + \square\, x^{2n-1} + \square\, x^{2n-2} + \cdots + \square\, x + 1$$

玩填系数的游戏:二人轮流选定上式中的一个空格填写一个实数作为该项的系数,直到填完为止.若所得多项式无实根,甲胜;否则,乙胜.问:若甲先,谁有必胜策略?试说明理由.

(中国国家队选拔赛,1995 年)

[解]　乙有必胜策略.具体做法如下:

待填的系数共有 $2n-1$ 个.约定甲、乙各填写一次,叫做一轮.每轮中,只要可能,乙都尽量填写偶次项系数.到 $n-2$ 轮之后,至多还有一个偶次项系数未填,至少还有两个奇次项系数未填.不论接下来甲填什么,在总共 $2n-3$ 次填写之后,至少还剩有一个奇次项系数未填.此时可将多项式写成

$$f(x) = g(x) + \square\, x^s + \square\, x^t,$$

其中 $g(x)$ 的系数已确定,t 是奇数,且 $s \neq t$.乙接着可在 x^s 前面填写系数

$$a = -\frac{\frac{1}{2^t}g(2) + g(-1)}{2^{s-t} + (-1)^s}.$$

显然由 $s \neq t$ 可知 $2^{s-t} + (-1)^s \neq 0$,从而 a 是存在的.并且,不论甲最后在 x^t 前填写怎样的 b,我们都有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2^t}f(2) + f(-1)\\
&= \frac{1}{2^t}(g(2) + a\cdot 2^s + b\cdot 2^t) + (g(-1) + a\cdot(-1)^s + b(-1)^t)\\
&= \left(\frac{1}{2^t}g(2) + g(-1)\right) + a\cdot(2^{s-t} + (-1)^s)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

由上式可知,$f(2)$ 与 $f(-1)$ 或者都是 0,或者符号相反.如果是前者,那么 $f(x)$ 有实根 2 和 -1;如果是后者,那么 $f(x)$ 在 $(-1,2)$ 上至少有

一个实根.因此乙得胜.

5·81　求一切实数 P,使得三次方程

$$5x^3-5(p+1)x^2+(71p-1)x+1=66p$$

的三个根均为自然数.

(中国高中数学联赛,1995年)

[解]　由观察可知,$x=1$ 为给定三次方程的一个正整数根.

由综合除法将原三次方程降次为二次方程

$$5x^2-5px+66p-1=0 \quad ①$$

显然,原三次方程的三个根均为自然数的充要条件是二次方程 ① 的两个根均为自然数.

设方程 ① 的两个自然数根为 u 和 $v(u\leqslant v)$.则由韦达定理得

$$\begin{cases}u+v=p, & ②\\ uv=\dfrac{1}{5}(66p-1). & ③\end{cases}$$

把 ② 代入 ③,消去 p,得

$$5uv=66(u+v)-1. \quad ④$$

上式表明,u 和 v 都不是 2,3,11 的倍数.

由 ④ 得

$$v=\frac{66u-1}{5u-66}.$$

因为 u,v 均为自然数,所以由上式可知

$$5u-66>0,$$

$$u\geqslant 14.$$

又因为 u 不是 2 和 3 的倍数,所以

$$u\geqslant 17.$$

由 $u\leqslant v$ 得

$$u\leqslant\frac{66u-1}{5u-66},$$

$$5u^2-132u+1\leqslant 0,$$

$$u\leqslant\frac{66+\sqrt{66^2-5}}{5}<\frac{132}{5},$$

因此　$17\leqslant u\leqslant 26.$

再由 $2\nmid u$ 且 $3\nmid u$ 可知，$u\in\{17,19,23,25\}$.

若 $u=17$,则 $v=\frac{1121}{19}=59$.

若 $u=19,23$ 或 25,则 v 都不是自然数.

所以,仅当 $p=u+v=17+59=76$ 时,方程 ① 的两根均为自然数,从而原方程的三个根均为自然数.

第3节　多项式的性质

5·82　证明:对任意 $n\in z^{+}$,多项式 $(x+1)^{2n+1}+x^{n+2}$ 被多项式 x^2+x+1 整除.

（美国纽约数学竞赛,1973年）

[证]　设 $x^2+x+1=0$ 的根为 w,w^2,其中 $w=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$,

令　$f(x)=(x+1)^{2n+1}+x^{n+2}$,

则
$$\begin{aligned}f(w)&=(w+1)^{2n+1}+w^{n+2}\\&=(-w^2)^{2n+1}+w^{n+2}\\&=-w^{4n+2}+w^{n+2}\\&=w^{n+2}(-w^{3n}+1),\end{aligned}$$

但　$w^3=1$,

所以　$f(w)=0$.

同理可验证　$f(w^2)=0$.

故 $f(x)$ 有因式　$(x-w)(x-w^2)=x^2+x+1$.

5·83　证明:多项式 $x^{200}y^{200}+1$ 不能表示成一个 x 的多项式 $f(x)$ 与一个 y 的多项式 $g(y)$ 的乘积 $f(x)g(y)$ 的形式.

（莫斯科数学奥林匹克,1953年）

[证]　设存在多项式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$

和　$g(y)=b_0y^m+b_1y^{m-1}+\cdots+b_m$,

使得　$f(x)g(y)=x^{200}y^{200}+1$.

令 $x=0$,则得:对任意的 y,$g(y)=\frac{1}{a_n}$;令 $y=0$,则得:对任意的 x,

$f(x)=\dfrac{1}{b_m}$. 再令 $x=y=0$,则有 $f(0)\cdot g(0)=1$,于是 $a_nb_m=1$,

这表明,对任意的 x,y,都有

$$f(x)\cdot g(y)=\frac{1}{a_n}\cdot\frac{1}{b_m}=\frac{1}{a_nb_m}=1.$$

它显然不恒等于 $x^{200}y^{200}+1$.

5·84 (1) 证明:不存在多项式 $P(x)$,使得对所有 $x\in R$,都有 (i)$P'(x)>P''(x)$;(ii)$P(x)>P''(x)$.

(2) 如果(i) 换为(i′)$P(x)>P'(x)$,(i) 中的结论还成立吗?

(前民主德国数学竞赛,1974 年)

[证] (1) 如果 $P(x)$ 是常数,则 $P'(x)\equiv P''(x)\equiv 0$,且式(i) 不成立.设 $\deg P(x)=n\geqslant 1$,则当 n 为奇数时,$\deg(P(x)-P''(x))=n$ 为奇数,从而至少有一个点 $x\in R$,使得 $P(x)-P''(x)\leqslant 0$. 当 n 为偶数时,$\deg(P'(x)-P''(x))=n-1$,因而至少有一个点 $x\in R$,使得 $P'(x)-P''(x)\leqslant 0$. 于是对任意多项式 $P(x)$,式(i) 与(ii) 不能同时成立.结论(1) 证毕.

(2) 设 $P(x)=x^2+3$,则对所有 $x\in R$,有

$$P(x)-P'(x)\equiv x^2-2x+3>0,$$

$$P(x)-P''(x)\equiv x^2+1>0.$$

即问题(2) 的答案是否定的.

5·85 如果一个多项式的所有系数等于 0,1,2,或 3,就称该多项式为相容的.对于给定的自然数 n,求满足条件 $p(2)=n$ 的所有相容多项式的个数.

(第 20 届全苏数学奥林匹克,1986 年)

[解] 设 $0\leqslant m\leqslant\left[\dfrac{n}{2}\right]$,且

$$n-2m=a_0+a_1\cdot 2+a_2\cdot 2^2+\cdots+a_n\cdot 2^n,$$

$$m=b_0+b_1\cdot 2+b_2\cdot 2^2+\cdots+b_n\cdot 2^n.$$

其中 a_i,b_i 都属于$\{0,1\}$.于是对应于每个值 $m=0,1,2,\cdots,\left[\dfrac{n}{2}\right]$都有一个多项式 $p_m(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}(a_i+2b_i)x^i$ 与之对应,显然,$p_m(x)$ 中的每

个多项式都是相容的.

反之,每个相容的多项式都与 $p_m(x)$ 中的某多项式相同.

因此,满足条件的所有相容多项式的个数为 $\left[\frac{n}{2}\right]+1$.

5·86 设 n 为大于1的正整数,$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 n 个相异的整数,证明:多项式 $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)-1$ 不能被任一次数为正且小于 n 的最高项系数为1的整系数多项式整除.

(北欧数学竞赛,1992 年)

[证] 假设 $f(x)$ 有一个真因式 $g(x)\in Z[x]$(所有次数为 m,最高项系数为1的整系数多项式的全体),则

$$f(x)=g(x)h(x),h(x)\in Z[x].$$

且 $h(x)$ 的次数介于0与 n 之间.显然,若 x 为一个整数,则 $g(x)$,$h(x)$ 也为整数.

因为 $g(a_i)h(a_i)=-1,(i=1,2,\cdots,n)$

所以 $g(a_i)+h(a_i)=0.(i=1,2,\cdots,n)$

因此 $g(x)+h(x)$ 有 n 个不同的根,此与 $g(x)+h(x)$ 的次数小于 n 矛盾.

故命题得证.

5·87 设 $P(x),Q(x),R(x)$ 和 $S(x)$ 都是多项式,且使 $P(x^5)+xQ(x^5)+x^2R(x^5)=(x^4+x^3+x^2+x+1)S(x)$ 成立,试证:$x-1$ 是 $P(x)$ 的一个因子.

(第5届美国数学奥林匹克,1976 年)

[证] 设 $S(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+\cdots$ 将原式两边同乘以 $(x-1)$,得恒等式

$$(x-1)P(x^5)+x(x-1)Q(x^5)+x^2(x-1)R(x^5)$$
$$=(x^5-1)S(x),$$

所以

$$(x-1)P(x^5)+x(x-1)Q(x^5)+x^2(x-1)R(x^5)$$
$$=(x^5-1)(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+\cdots).$$

取出其中所有指数为5的倍数的项,得

$$-P(x^5)=(x^5-1)(a_0+a_5x^5+a_{10}x^{10}+\cdots).$$

因此有 $P(x)=-(x-1)(a_0+a_5x+a_{10}x^2+\cdots)$,

可见 $(x-1)$ 是 $P(x)$ 的一个因子.

5·88　试证：存在这样的整系数多项式 $P(x)$，对于区间 $\left[\frac{1}{10},\frac{9}{10}\right]$ 中的一切 x 值，它适合不等式

$$\left|p(x)-\frac{1}{2}\right|<1/1000.$$

（波兰数学奥林匹克，1972 年）

［证］　考察多项式 $f_n(x)=\frac{1}{2}[(2x-1)^n+1]$，这里 n 是自然数。因为多项式 $(2x-1)^n+1$ 的系数都是偶数，所以 $f_n(x)$ 是整系数多项式。

当 $\frac{1}{10}\leqslant x\leqslant\frac{9}{10}$ 时，二项式 $2x-1$ 适合不等式 $-0.8\leqslant 2x-1\leqslant 0.8$，所以

$$\left|f_n(x)-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}|2x-1|^n\leqslant\frac{1}{2}\times 0.8^n.$$

欲使　$\frac{1}{2}\times 0.8^n<1/1000$，只需取自然数 n 使

$$n\lg 0.8<\lg 0.002,$$

即

$$n>\frac{\lg 0.002}{\lg 0.8}=27.8\cdots$$

因此当 $n\geqslant 28$ 时，取 $P(x)=f_n(x)$ 就满足问题的要求。

5·89　证明：把乘积

$$(1-x+x^2-x^3+\cdots-x^{99}+x^{100})(1+x+x^2+\cdots+x^{99}+x^{100})$$

展开并合并同类项之后，式中不含有 x 的奇数次方的项。

（第 9 届莫斯科数学奥林匹克，1946 年）

［证］　设乘积式为多项式 $f(x)$，显然，我们有恒等式

$$f(x)=f(-x),$$

故 $f(x)$ 中不含有 x 的奇数次方的项。

5·90　$a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$ 为 $2n$ 个实数，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 互不相同。假设存在一实数 α 对所有的 $i(i=1,2,\cdots,n)$，$(a_i+b_1)(a_i+b_2)\cdots(a_i+b_n)$ 的值均为 α。证明存在一实数 β，使对所有的 $j(j=1,2,\cdots,n)$，

$$(a_1+b_j)(a_2+b_j)\cdots(a_n+b_j)$$

的值均为 β.

（第 6 届爱尔兰数学奥林匹克，1993 年）

［证］　因为$(a_i+b_1)(a_i+b_2)\cdots(a_i+b_n)=\alpha,(i=1,2,\cdots,n)$. 所以多项式$(x+b_1)(x+b_2)\cdots(x+b_n)-\alpha$的次数为$n$且有$n$个互不相等的根 $a_1,a_2,\cdots,a_n$.

故　$(x+b_1)(x+b_2)\cdots(x+b_n)-\alpha=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$

代入　$x=-bj$ 得到

$$-\alpha=(-b_j-a_1)(-b_j-a_2)\cdots(-b_j-a_n),$$

故　$\beta=(-1)^{n-1}\alpha=(b_j+a_1)(b_j+a_2)\cdots(b_j+a_n)(j=1,2,\cdots,n)$.

5·91　试证：四次多项式 x^4+2x^2+2x+2 不可能分解成两个具有整系数 a,b,c,d 的二次三项式x^2+ax+b和x^2+cx+d的乘积.

（匈牙利数学奥林匹克，1923 年）

［证］　若所给四次多项式能分解成两个整系数二次三项式 x^2+ax+b 和x^2+cx+d 的乘积，注意到这两个二次三项式的乘积可以化简成

$$x^4+(a+c)x^3+(b+ac+d)x^2+(bc+ad)x+bd,$$

则有

$$a+c=0 \quad ①$$

$$b+ac+d=2 \quad ②$$

$$bc+ad=2 \quad ③$$

$$bd=2 \quad ④$$

由 ④ 式可得，b 和d 中一个为奇数（等于 ±1），而另一个为偶数（等于 ±2），不妨设 b 为奇数，而 d 为偶数. 则由 ③ 式可得，bc 为偶数，因 b 为奇数，故 c 为偶数，所以 $ac+d$ 为偶数，由 ② 式可得 b 又为偶数，与 b 为奇数矛盾. 于是，命题得证.

5·92　已知多项式 x^3+bx^2+cx+d 的系数都是整数，并且 $bd+cd$ 是奇数，试证：这个多项式不能分解为两个整系数多项式的乘积.

（中国北京市数学竞赛，1963 年）

［证］　设 $\varphi(x)=x^3+bx^2+cx+d$，因为 $bd+cd$ 是奇数，即$(b+c)d$ 是奇数，所以 $b+c$ 和d 分别都是奇数. 由此可进一步推出 b、c 两

数是一奇一偶.

若 $\varphi(x)$ 能分解成两个整系数多项式的乘积,则一定有一个一次因子.由于 $\varphi(x)$ 的首项系数是 1,故不妨设

$$\varphi(x)=(x+p)(x^2+qx+r),$$

比较常数项可知 $pr=d$.

因为 d 是奇数,故 p 必然也是个奇数.用$(x+p)$除 $\varphi(x)$,根据余式定理,余数是

$$\varphi(-p)=-p^3+bp^2-cp+d.$$

不论 b、c 两数中哪个是奇数,哪个是偶数(但总是一奇一偶),余数中总有三项是奇数,一项是偶数,从而余数必然不等于零.故 $\varphi(x)$ 不能分解为两个整系数多项式之乘积.

5·93 证明:如果三次实系数多项式 $P(x)$,$Q(x)$ 和 $R(x)$ 对所有 $x\in R$ 都满足$P(x)\leqslant Q(x)\leqslant R(x)$,并且至少有一个点 $x_0\in R$,使得 $P(x_0)=R(x_0)$,则存在 $R\in[0,1]$,使得

$$Q(x)\equiv kP(x)+(1-k)R(x),x\in R$$

对四次实系数多项式相应的结论是否成立.

(罗马尼亚数学奥林匹克,1978 年)

[证] 注意,如果次数不大于 3 的多项式 $S(x)$ 满足:对所有 $x\in R$,$S(x)\geqslant 0$,且 $S(x_0)=0$,

则

$$S(x)=a(x-x_0)^2,$$

其中 $a\geqslant 0$.因此

$$\begin{aligned}R(x)&\equiv P(x)+a(x-x_0)^2,\\Q(x)&\equiv P(x)+b(x-x_0)^2\\&\equiv\frac{a-b}{a}P(x)+\frac{b}{a}(P(x)+a(x-x_0)^2)\\&\equiv kP(x)+(1-k)R(x).\end{aligned}$$

其中 $a\geqslant b\geqslant 0,k=1-\dfrac{b}{a}\in[0,1]$,

而当 $a=0$时,$R(x)\equiv Q(x)\equiv P(x)$,因此,如取 $k=1$,题中的恒等式也成立.对 4 次多项式,相应的结论并不成立.例如多项式

$$P(x)=x^4,Q(x)=x^4+x^2,$$

$$R(x)=2x^4+x^2.$$

满足对 $x\in R, P(x)\leqslant Q(x)\leqslant R(x)$.

并且　$P(0)=R(0)$.但恒等式

$$x^4+x^2\equiv kx^4+(1-k)(2x^4+x^2)$$

对所有 $k\in[0,1]$ 都不成立.因为对固定的 k,得到两个矛盾的等式

$$1=k+2(1-k) \text{ 和 } 1=1-k.$$

5·94　给定多项式 $P(x)=ax^2+bx+c, a\neq 0$.证明:对每个 $n\in N$,至多有一个 n 次多项式 $Q(x)$.使得

$$Q(P(x))\equiv P(Q(x)), x\in R.$$

（匈牙利数学奥林匹克,1979 年）

[证]　设多项式 $Q(x)=q_nx^n+\cdots+q_1x+q_0$ 满足条件:$q\neq 0$,并且 $Q(P(x))\equiv P(Q(x))$,则比较多项式 $Q(P(x))$ 与 $P(Q(x))$ 的 $2n$ 次项系数,得到 $q_na^n=aq_n{}^2$,即　$q_n=a^{n-1}$.如果题中结论不成立,即对某个 n 与多项式 $P(x)$,存在两个不同的 n 次多项式 $Q_1(x)$ 与 $Q_2(x)$ 满足题中恒等式,则因为 $Q_1(x)$ 和 $Q_2(x)$ 的首项系数都是 a^{n-1},所以多项式 $R(x)=Q_1(x)-Q_2(x)$ 的次数 $k<n$,且满足

$$\begin{aligned}R(P(x))&\equiv Q_1(P(x))-Q_2(P(x))\\&\equiv P(Q_1(x))-P(Q_2(x))\\&\equiv a(Q_1^2(x)-Q_2^2(x))+b(Q_1(x)-Q_2(x))\\&\equiv(Q_1(x)-Q_2(x))(a(Q_1(x)+Q_2(x))+b)\\&\equiv R(x)T(x).\end{aligned}$$

其中　$T(x)=aQ_1(x)+aQ_2(x)+b$,

因此
$$\begin{aligned}2k&=\deg R(P(x))\\&=\deg(R(x)T(x))\\&=k+n.\end{aligned}$$

与 $k<n$ 矛盾,结论证毕.

5·95　证明:多项式 $P(z)$ 是关于 $z\in C$ 的偶函数的必要且充分条件是,存在多项式 $Q(z)$,使得

$$P(z)\equiv Q(z)Q(-z), z\in c.$$

（罗马尼亚数学奥林匹克,1979 年）

[证]　如果 $P(z)\equiv Q(z)Q(-z)$,

则　$P(-z)\equiv Q(-z)Q(z)\equiv P(z)$.

代数卷

即 $P(z)$ 是偶函数.反之,如果 $P(z)\equiv 0$,则取 $Q(z)\equiv 0$,于是 $P(z)\equiv Q(z)Q(-z)$.现在设非零多项式 $P(z)$ 为偶函数,对多项式 $P(z)$ 的非零根的个数 m 用归纳法证明,存在多项式 $Q(z)$,使得

$$P(z)\equiv Q(z)Q(-z).$$

当 $m=0$ 时,多项式 $P(z)$ 有形式 $P(z)=az^n,a\neq 0$.由于 $P(z)$ 是偶函数,所以 $n=2k,k\in Z^+$.取多项式 $Q(z)=bz^k$,其中 $b^2=(-1)^k a$.因为 $az^n=bz^k\cdot b(-z)^k$,所以多项式 $Q(z)$ 满足所说的恒等式.设结论对所有小于 m 的正整数成立,下面证明结论对 m 成立.事实上,如果 α 是多项式的非零根,则

$$p(-\alpha)=p(\alpha)=0,$$

因此 $$P(z)=(z-\alpha)(z+\alpha)R(z).$$

其中 $R(z)$ 是偶函数,这是因为

$$R(-z)((-z)^2-\alpha^2)\equiv P(-z)\equiv P(z)$$
$$\equiv R(z)(z^2-\alpha^2),$$

由归纳假设,存在多项式 $S(z)$,使得

$$R(z)\equiv S(z)S(-z),$$

取 $$Q(z)=i(z-\alpha)S(z),$$ 则

$$P(z)\equiv i(z-\alpha)S(z)\cdot i(-z-\alpha)S(-z)$$
$$\equiv Q(z)Q(-z).$$

结论证毕.

5·96 设多项式 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 的次数都大于 0,记

$$P_{(C)}=\{z\in c\mid P(z)=c\},$$
$$Q_{(C)}=\{z\in c\mid Q(z)=c\}.$$

证明:如果 $P_0=Q_0,P_1=Q_1$,则 $P(x)\equiv Q(x),x\in R$.

(第 22 届国际数学奥林匹克预选题,1981 年)

[证] 如果多项式 $P(x)$ 的根是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$,其重数分别为 $k_1,\cdots,k_s$,则由于 $P_0=Q_0$,所以多项式 $Q(x)$ 也有相同的根(但重数可能不同).同理,如果多项式 $P(x)-1$ 的根是 $\beta_1,\cdots,\beta_r$,其重数分别为 $l_l,\cdots,l_r$,则由于 $P_1=Q_1$,所以多项式 $Q(x)-1$ 也有相同的根.因此,在不同的数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_r$ 中,每个数都是多项式 $P(x)-Q(x)$ 的根,设 $P(x)-Q(x)\not\equiv 0$,则

$$\deg[P(x)-Q(x)]\geqslant s+r.$$

不妨设 $\deg P(x) \geqslant \deg Q(x) \geqslant 1$，因而

$$\deg P(x) = \deg[P(x)-1] \geqslant \deg[P(x)-Q(x)].$$

其次，如果多项式 $P(x)-c$ 的根 r 的重数为 $m>1$，则多项式 $P'(x)$ 有 $m-1$ 重根 r，因此有

$$\begin{aligned}\deg P'(x) &\geqslant (k_1-1)+\cdots+(k_s-1)+(l_1-1)+\cdots+(l_r-1)\\ &= (k_1+\cdots+k_s)+(l_1+\cdots+l_r)-(s+r)\\ &\geqslant \deg P(x)+\deg[P(x)-1]-\deg[P(x)-Q(x)]\\ &\geqslant \deg P(x),\end{aligned}$$

与 $\deg P'(x) < \deg P(x)$ 矛盾．因此 $P(x) \equiv Q(x)$.

5・97　设坐标平面上的曲线 L 是某个多项式

$P(x) = x^4+px^3+qx^2+rx+s \quad (p,q,r,s \in R)$ 的图像，如果平面上的一条直线平行于 OX 轴，并且和曲线 L 相交于四个点 A,B,C,D（它们自左到右排列），则称此直线为水平线．此外，如果其中的线段 AB，AC 和 AD 的长度还能构成某个三角形的三条边长，则称此直线为三角形水平线．证明：只有下列的两种情形：要么所有的水平线都是三角形水平线，要么所有的直线都不是三角形水平线．

（芬兰数学竞赛，1980 年）

［证］　设水平线 $y=y_0$ 交曲线 L 于四个点 A,B,C,D，它们的横坐标依次为 $x_1<x_2<x_3<x_4$．则当且仅当 $|AB|+|AC|>|AD|$，

即　　$(x_2-x_1)+(x_3-x_1) > x_4-x_1$

时，也即当且仅当

$$x_2-x_1 > x_4-x_3$$

即　　$|AB|>|CD|$，

时，直线 $y=y_0$ 是三角形水平线．

若题中结论不成立，即存在两条水平线，它们分别交曲线于 A_1，B_1，C_1，D_1 和 A_2，B_2，C_2，D_2，使得

$$|A_1B_1|>|C_1D_1| \quad 且 \quad |A_2B_2|<|C_2D_2|.$$

由四次多项式的性质可知，任意一条平行于这两条水平线并且介于它们之间的直线也和该曲线相交于四个点．于是，这些直线中至少有一条，它与曲线的四个交点 A,B,C,D 满足 $|AB|=|CD|$．设线段 BC 的中点 E（也即线段 AD 的中点）的坐标为 (x_0,y_0)，则在坐标系 $u=x-x_0$，$v=y-y_0$ 中，以给定曲线为图像的多项式 $Q(u)$ 有四个根 u_1，

u_2, u_3, u_4,它们依次是点 A,B,C,D 在新坐标系中的横坐标,并且 $u_1 = -u_4, u_2 = -u_3$.这样,给定的曲线在新坐标系中的方程为

$$v = (u - u_1)(u - u_2)(u - u_3)(u - u_4),$$

即 $$v = (u^2 - u_1^2)(u^2 - u_2^2).$$

于是 $Q(u) = Q(-u)$,即曲线关于纵横是对称的.所以每一条水平线与曲线的四个交点 A,B,C,D 都应满足 $|AB| = |CD|$,矛盾.

若 $|A_1B_1| > |C_1D_1|$ 且 $|A_2B_2| = |C_2D_2|$,

则取 A,B,C,D 为 A_2,B_2,C_2,D_2,同理导出矛盾.故题中结论成立.

5·98　设 $Q(x)$ 是非零多项式.证明:对每个 $n \in Z^+$,多项式

$$P(x) = (x-1)^n Q(x)$$

至少有 $n+1$ 个非零系数.

(波兰数学奥林匹克,1977 年)

[证]　对 $n \in Z^+$ 用归纳法.当 $n = 0$ 时,因为 $Q(x) \neq 0$,所以 $P(x) = Q(x)$ 至少有一个系数不等于零.

设结论对某个 $n(n \geqslant 0)$ 成立.我们来证明结论对 $n+1$ 也成立.

事实上,若结论对 $n+1$ 不成立,则存在某个非零多项式

$$Q(x) = x^r \cdot Q_0(x),$$

其中 $r \in Z^+, Q_0(0) \neq 0$,使得多项式

$$P(x) = (x-1)^{n+1} \cdot Q(x) = (x-1)^{n+1} \cdot x^r \cdot Q_0(x)$$

至多有 $n+1$ 个非零系数.于是,多项式

$$P_0(x) = (x-1)^{n+1} \cdot Q_0(x)$$

也至多有 $n+1$ 个非零系数,因此它的导数 $P'_0(x)$ 至多有 n 个非零系数.但是

$$\begin{aligned} P'_0(x) &= (x-1)^{n+1}Q'_0(x) + (n+1)(x-1)^n Q_0(x) \\ &= (x-1)^n R(x), \end{aligned}$$

因 $P_0(x)$ 不是常数,所以 $R(x) \neq 0$.但由归纳假设,$P'_0(x)$ 至少有 $n+1$ 个非零系数.矛盾.故结论对 $n+1$ 也成立.

5·99　证明:如果次数小于 $m \in N$ 的多项式 $P(x,y), Q(x,y), R(x,y)$ 满足

$$x^{2m}P(x,y) + y^{2m}Q(x,y) \equiv (x+y)^{2m}R(x,y), x, y \in R,$$

则　　$P(x,y) \equiv Q(x,y) \equiv R(x,y) \equiv 0.$

（波兰数学奥林匹克，1978年）

[证]　设多项式 P、Q、R 满足题中条件，但其中至少有一个不恒为0，则不妨设存在 x_0 与 $y_0 \neq 0$，使得 $P(x_0,y_0)$，$Q(x_0,y_0)$，$R(x_0,y_0)$ 中至少有一个不为0. 考虑一元多项式

$$P_1(x) = P(x,y_0), Q_1(x) = y_0^{2m} Q(x,y_0), R_1(x) = R(x,y_0),$$

由题中条件，有

$$x^{2m}P_1(x) + Q_1(x) \equiv (x+y_0)^{2m}R_1(x).$$

并且多项式 $P_1(x)$，$Q_1(x)$ 与 $R_1(x)$ 的次数都小于 m，记

$$U(x) = x^{2m}P_1(x),$$

$$T(x) = U(x) + Q_1(x) \equiv (x+y_0)^{2m}R_1(x),$$

$$S(x) = T^{(m)}(x).$$

因为多项式 $U(x)$ 被 x^{2m} 整除，所以0是它的根，其重数至少是 $2m$，因此

$$U^{(m)}(0) = U^{(m+1)}(0) = \cdots = U^{(2m-1)}(0) = 0.$$

因为 $\deg Q_1(x) < m$，所以

$$Q_1^{(m)}(0) = Q_1^{(m+1)}(0) = \cdots = 0,$$

因此，$T^{(m)}(0) = T^{(m+1)}(0) = \cdots = T^{(2m-1)}(0) = 0,$

即　　$S(0) = S'(0) = \cdots = S^{(m-1)}(0) = 0.$

由于 $-y_0$ 是多项式 $T(x) = (x+y_0)^{2m}R_1(x)$ 的根，其重数至少是 $2m$，所以

$$T^{(m)}(-y_0) = T^{(m+1)}(-y_0) = \cdots = T^{(2m-1)}(-y_0) = 0.$$

也就是说

$$S(-y_0) = S'(-y_0) = \cdots = S^{m-1}(-y_0) = 0,$$

于是，0和 $-y_0 \neq 0$ 是多项式 $S(x)$ 的根，它们的重数都至少为 m，因此多项式 $S(x)$ 被 $2m$ 次多项式 $x^m(x+y_0)^m$ 整除，但 $\deg T(x) < 3m$，即 $\deg S(x) < 2m$，因此，$S(x) \equiv 0$. 由此得到，多项式 $T(x)$ 的次数小于 m，但它又被多项式 $(x+x_0)^{2m}$ 整除，因而 $T(x) \equiv 0$，从而 $R_1(x) \equiv 0$. 由

$$x^{2m}P_1(x) + Q_1(x) \equiv T(x) \equiv 0$$

以及 $\deg Q_1(x) < m$ 得到，$P_1(x) \equiv Q_1(x) \equiv 0$，因此

$$P_1(x_0)=Q_1(x_0)=R_1(x_0)=0,$$

与 x_0 和 y_0 的选取相矛盾. 于是题中结论证毕.

5·100　设多项式 $P(x)$ 的次数最多是 $2n$,且对每个整数 $k\in[-n,n]$,都有 $|P(k)|\leqslant 1$. 证明:对每个 $x\in[-n,n]$,$P(x)\leqslant 2^{2n}$.

(匈牙利数学奥林匹克,1979 年)

[证]　根据拉格朗日插值公式,有

$$P(x)=\sum_{k=-n}^{n}P(k)\prod_{\substack{i\neq k\\-n\leqslant i\leqslant n}}\frac{x-i}{k-i}.$$

因为当 $k=-n,-n+1,\cdots,n$ 时,$|P(k)|\leqslant 1$,所以

$$|P(x)|\leqslant\sum_{k=-n}^{n}|P(k)|\prod_{\substack{i\neq k\\-n\leqslant i\leqslant n}}\frac{|x-i|}{|k-i|}$$
$$\leqslant\sum_{k=-n}^{n}\prod_{\substack{i\neq k\\-n\leqslant i\leqslant n}}\frac{|x-i|}{|k-i|}.$$

可以证明对每个实数 $x\in[-n,n]$,有

$$\prod_{\substack{i\neq k\\-n\leqslant i\leqslant n}}|x-i|\leqslant(2n)!$$

事实上,当 $x\geqslant k$ 时,有

$$\prod_{\substack{i\neq k\\-n\leqslant i\leqslant n}}|x-i|=[|x-(k+1)|\cdots|x-n||x-(k-1)|\cdots|x+n|]$$
$$\leqslant(n-k)![(n-k+1)\cdots(2n)]$$
$$=(2n)!.$$

同理可证 $x<k$ 的情形. 于是得到

$$\prod_{\substack{i\neq k\\-n\leqslant i\leqslant n}}\frac{|x-i|}{|k-i|}\leqslant(2n)!\prod_{\substack{i\neq k\\-n\leqslant i\leqslant n}}\frac{1}{|k-i|}$$
$$\leqslant(2n)!\frac{1}{(k+n)!(n-k)!},$$

$$|P(x)|\leqslant\sum_{k=-n}^{n}\frac{(2n)!}{(k+n)!(n-k)!}$$
$$=\sum_{k=0}^{2n}\frac{(2n)!}{k!(2n-k)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^{k}$$
$$= 2^{2n}.$$

5・101 设 p 和 q 是任意的自然数，证明：存在整系数多项式 $p(x)$，使得对 x 轴上长为 $\frac{1}{q}$ 的某个区间中的每一个点 x，都有

$$\left| p(x) - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

（芬兰数学竞赛，1983 年）

[证] 如果 $q = 1$，则令 $p(x) \equiv p$. 如果 $q > 1$，则考虑长为 $\frac{1}{q}$ 的区间 $I = \left(\frac{1}{2q}, \frac{3}{2q}\right)$. 由于

$$\frac{3}{2q} < 1,$$

所以存在 $m \in N$，使得 $\left(\frac{3}{2q}\right)^m < \frac{1}{q}$.

记 $$a = 1 - \left(\frac{1}{2q}\right)^m.$$

则对每个 $x \in I$，有

$$0 < 1 - qx^m < a < 1.$$

取充分大的 $n \in N$，使得 $a^n < \frac{1}{pq}$.

记 $$p(x) = \frac{p}{q}[1 - (1 - qx^m)^n].$$

因为

$$p(x) \equiv \frac{p}{q}[1 - (1 - qx^m)]Q(x)$$
$$\equiv px^m Q(x),$$

且多项式 $Q(x)$ 的系数是整数，所以多项式 $p(x)$ 也是整系数，而且当 $x \in I$ 时，

$$\left| p(x) - \frac{p}{q} \right| = \frac{p}{q} \mid (1 - qx^m)^n \mid$$
$$< \frac{p}{q} a^n < \frac{1}{q^2}.$$

5・102　证明：(1) 对任意 $n\in N$，存在 n 次整系数多项式 $P_n(x)$，使得 $2\cos nt=P_n(2\cos t)$，$t\in R$.

(2) 对任意 $\alpha\in Q$，数 $\cos\alpha\pi$ 要么等于零，$\pm\frac{1}{2}$ 或 ± 1，要么是无理数.

(英国数学奥林匹克，1978 年)

[证]　(1) 记 $x\equiv 2\cos t$，$t\in R$，则

$$2\cos(0\cdot t)\equiv 2\equiv P_0(x),$$

$$2\cos(1\cdot t)\equiv 2\cos t\equiv P_1(x).$$

在公式
$$2\cos nt\equiv -2\cos(n-2)t+(2\cos t)[2\cos(n-1)t]$$
$$\equiv -P_{n-2}(x)+xP_{n-1}(x).$$
中，设 n 依次为 2,3，等等，则依次得到多项式 $P_2(x)$，$P_3(x)$ 等等. 注意，当 $n\in N$ 时，多项式 $P_n(x)$ 的首项系数都是 1.

(2) 设 $\alpha=\frac{m}{n}$，$m\in Z$，$n\in N$，且分数 $\frac{m}{n}$ 是即约的，则

$$2\cos n\alpha\pi=2\cos m\pi,$$

要么等于 2，要么等于 -2. 由上面证明的结论，$2\cos nt$ 可表示为 $x=2\cos t$ 的整系数多项式 $P_n(x)$. 于是 $x_0=2\cos\alpha\pi$ 是多项式

$$Q(x)=P_n(x)-2\cos m\pi$$

的根. 其中 $Q(x)$ 的所有系数都是整数，且首项系数为 1. 因此 $2\cos\alpha\pi$ 要么是整数，要么是无理数. 设 $2\cos\alpha\pi$ 是整数，由于 $|2\cos\alpha\pi|\leqslant 2$，所以它只能取 0，$\pm 1$ 或 ± 2. 于是 $\cos\alpha\pi$ 是有理数时 ($\alpha\in Q$)，它一定是 0，± 1 或 $\pm\frac{1}{2}$.

5・103　一个关于 x,y,z 的多项式 $P_m(x,y,z)$，$m=0,1,2,\cdots$ 序列定义如下：

$$P_0(x,y,z)=1,$$

$$P_m(x,y,z)=(x+z)(y+z)P_{m-1}(x,y,z+1)-z^2P_{m-1}(x,y,z),\ m>0.$$

证明：每一 $P_m(x,y,z)$ 是对称的，即对 x,y,z 的任意排列，它的值不变.

(英国数学奥林匹克，1985 年)

[证] 对 m 用数学归纳法. 当 $m=0$ 时结论显然成立. 设 $m=n-1$ 时, $P_m(x,y,z)$ 是对称的, 并且

$$(x+y)P_m(x,z,y+1)-(x+z)P_m(x,y,z+1)$$
$$=(y-z)P_m(x,y,z) \qquad ①$$

成立. 现在证明 $m=n$ 时也成立. 从 $P_{m-1}(x,y,z)$ 的对称性容易看出

$$P_n(x,y,z)=P_n(y,x,z),$$

我们只需证明

$$P_n(x,y,z)=P_n(x,z,y)$$

就够了. 由 ① 和已知递推式, 得

$$P_n(x,z,y)-P_n(x,y,z)$$
$$=(y+z)\{(x+y)P_{n-1}(x,z,y+1)-(x+z)P_{n-1}(x,y,z+1)\}-(y^2-z^2)P_{n-1}(x,y,z)$$
$$=(y+z)(y-z)P_{n-1}(x,y,z)-(y^2-z^2)P_{n-1}(x,y,z)$$
$$=0.$$

为了证明 ① 式对 $m=n$ 时成立, 要利用已建立的 P_n 的对称性.

$$(x+y)P_n(x,z,y+1)-(x+z)P_n(x,y,z+1)$$
$$=(x+y)P_n(y+1,z,x)-(x+z)P_n(z+1,y,x)$$
$$=(x+y)\{(y+x+1)(z+x)P_{n-1}(y+1,z,x+1)-x^2P_{n-1}(y+1,z,x)\}-(x+z)\{(z+x+1)(y+x)P_{n-1}(z+1,y,x+1)-x^2P_{n-1}(z+1,y,x)\}$$
$$=(x+y)(x+z)[(y+x+1)P_{n-1}(x+1,z,y+1)-(z+x+1)P_{n-1}(x+1,y,z+1)]-x^2[(x+y)P_{n-1}(x,z,y+1)-(x+z)P_{n-1}(x,y,z+1)]$$
$$=(x+y)(x+z)(y-z)P_{n-1}(x+1,y,z)-x^2(y-z)\cdot P_{n-1}(x,y,z)$$
$$=(y-z)[(y+x)(z+x)P_{n-1}(z,y,x+1)-x^2P_{n-1}(z,y,x)]$$
$$=(y-z)P_n(z,y,x)$$
$$=(y-z)P_n(x,y,z).$$

即 ① 成立.

5・104 设 $A(n)$ 是所有多项式

$$P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

的集合,其中 $0\leqslant a_0=a_n\leqslant a_1=a_{n-1}\leqslant\cdots\leqslant a\left[\frac{n}{2}\right]=a\left[\frac{n+1}{2}\right]$.

证明:如果 $P(x)\in A(n),Q(x)\in A(m)$,则多项式

$$P(x)Q(x)\in A(m+n).$$

(前民主德国数学竞赛,1983年)

[证] 记 $R_{n,i}(x)=x^i+x^{i+1}+\cdots+x^{n-i}$,其中 $i=0,1,\cdots,\left[\frac{n}{2}\right]$,则任意多项式 $P(x)\in A(n)$ 都可表示为

$$\begin{aligned}P(x)&=a_0R_{n,0}(x)+(a_1-a_0)R_{n,1}(x)+\cdots+\\&\quad\left(a\left[\frac{n}{2}\right]-a\left[\frac{n}{2}\right]-1\right)R_{n,\left[\frac{n}{2}\right]}(x)\\&=\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}b_iR_{n,i}(x),\end{aligned}$$

其中 $b_0=a_0,b_i=a_i-a_{i-1}$ 是非负实数,

$$i=1,\cdots,\left[\frac{n}{2}\right].$$

同样,如果 $Q(x)\in A(m)$,则

$$Q(x)=\sum_{j=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}c_jR_{m,j}(x),$$

其中 $c_j\geqslant 0,j=0,1,\cdots,\left[\frac{m}{2}\right]$.

最后,如果 $P(x)\in A(n),Q(x)\in A(m)$,则多项式

$$P(x)\cdot Q(x)=\sum_{i\cdot j}b_ic_jR_{n,i}R_{m,j}(x),$$

属于集合 $A(n+m)$. 为证明这一结论,只需证明对所有 $i\leqslant\frac{n}{2}$, $j\leqslant\frac{m}{2}$, $R_{n,i}(x)R_{m,j}(x)\in A(n+m)$.

事实上,记 $p=n-2i,q=m-2j$,并且为确定起见,设 $p\leqslant q$,则多项式

$$\begin{aligned}&R_{n,i}(x)R_{m,j}(x)\\&\equiv x^i(1+x+\cdots+x^p)x^j(1+x+\cdots+x^q)\\&\equiv x^{i+j}[R_{p+q,0}(x)+R_{p+q,1}(x)+\cdots+R_{p+q,p}(x)]\end{aligned}$$

$$\equiv R_{m+n,j+i}(x) + R_{m+n,j+i+1}(x) + \cdots + R_{m+n,j+n-i}(x).$$

属于集合 $A(m+n)$.

5・105 对所有 $x>0$,实系数多项式 $P(x)$ 满足 $P(x)>0$. 证明:存在非负系数多项式 $Q(x)$ 和 $R(x)$,使得

$$P(x) = \frac{Q(x)}{R(x)}.$$

(匈牙利数学奥林匹克,1976 年)

[证] 将多项式 $P(x)$ 表示为

$$P(x) = aF_1(x)\cdots F_m(x)G_1(x)\cdots G_k(x),$$

其中 $F_i(x)$ 和 $G_j(x)$ 为

$$F_i(x) = x - \alpha_i; \alpha_i \leqslant 0, i = 1,2,\cdots,m.$$

$$G_j(x) = (x-\beta_j)(x-\overline{\beta_j}), \beta_j \in C \setminus R, j = 1,2,\cdots,k.$$

并且 $a>0$. 注意,系数非负的多项式的乘积仍是系数非负的多项式. 因此只需证明,每个多项式 $F_i(x)$ 和 $G_j(x)$ 都可表示为系数非负的多项式的商 $\frac{Q(x)}{R(x)}$ 即可. 对多项式 $F(x) = x - \alpha, \alpha \leqslant 0$,取

$$Q(x) = F(x) = x + |\alpha|, R(x) = 1.$$

其次,如果 $\mathrm{Re}\beta \leqslant 0$,则对多项式

$$G(x) = (x-\beta)(x-\overline{\beta}),$$

令 $$Q(x) = G(x) = x^2 + 2|\mathrm{Re}\beta|x + |\beta|^2, R(x) = 1;$$

如果 $\mathrm{Re}\beta > 0$,则不妨设 $\arg\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,取 $n \in N$,使得

$$2^n \arg\beta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right),$$

并且当 $S = 0,1,\cdots,n-1$ 时,

$$2^S \arg\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

因为 $$\arg(\beta^{2^r}) = 2^r \arg\beta \quad (0 \leqslant r \leqslant n),$$

所以 $\mathrm{Re}(\beta^{2^n}) \leqslant 0$;并且当 $S = 0,1,\cdots,n-1$ 时,$\mathrm{Re}(\beta^{2^s}) > 0$,于是有

$$\begin{aligned} G(x) &\equiv (x-\beta)(x-\overline{\beta}) \\ &\equiv \frac{(x^2-\beta^2)(x^2-\overline{\beta}^2)}{(x+\beta)(x+\overline{\beta})} \end{aligned}$$

$$\equiv \frac{(x^4-\beta^4)(x^4-\overline{\beta}^4)}{(x+\beta)(x+\overline{\beta})(x^2+\beta^2)(x^2+\overline{\beta}^2)}$$
$$\equiv \cdots$$
$$\equiv \frac{(x^{2^n}-\beta^{2^n})(x^{2^n}-\overline{\beta}^{2^n})}{(x+\beta)(x+\overline{\beta})\cdots(x^{2^{n-1}}+\beta^{2^{n-1}})(x^{2^{n-1}}+\overline{\beta}^{2^{n-1}})}$$
$$\equiv \frac{Q(x)}{R(x)},$$

其中 $Q(x)=(x^{2^n}-\beta^{2^n})(x^{2^n}-\overline{\beta}^{2^n})$,

$$R(x)=(x+\beta)(x+\overline{\beta})\cdots(x^{2^{n-1}}+\beta^{2^{n-1}})(x^{2^{n-1}}+\overline{\beta}^{2^{n-1}})$$

是系数非负的多项式,这是因为所有多项式

$$(x^l+\gamma)(x^l+\overline{\gamma})$$
$$\equiv x^{2l}+(2\mathrm{Re}\gamma)x^l+|r|^2, l\in N, \mathrm{Re}r>0.$$

的系数都是非负的.

5·106 证明:如果实系数多项式 $P(x)$ 对所有 $x\in R$ 只取非负的值,则它可表示为

$$P(x)=[Q_1(x)]^2+\cdots+[Q_n(x)]^2,$$

其中 $Q_1(x),\cdots,Q_n(x)$ 是实系数多项式.

(匈牙利数学奥林匹克,1979 年)

[证] 对非零多项式 $P(x)$ 的非实根的个数 m 用归纳法证明题中的结论成立(如果 $P(x)\equiv 0$,则取 $n=1$ 与 $Q_1(x)\equiv 0$).设 $m=0$,并且多项式 $P(x)$ 满足题中条件,则它的根都是实的,而且重数都是偶数(如果 $P(x)=(x-\alpha)^lR(x)$, $\alpha\in R$,并且 l 是奇数,则当 $x>\alpha$ 时,$R(x)\geqslant 0$,当 $x<\alpha$ 时,$R(x)\leqslant 0$.因此 α 是多项式 $R(x)$ 的根.矛盾),所以

$$P(x)\equiv a(x-\alpha_1)^{2l_1}(x-\alpha_2)^{2l_2}\cdots(x-\alpha_k)^{2l_k}$$

其中 $a>0, \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\in R, l_1,l_2,\cdots,l_k\in Z^+$,

取 $n=1$,且令

$Q_1(x)=\sqrt{a}(x-\alpha_1)^{l_1}(x-\alpha_2)^{l_2}\cdots(x-\alpha_k)^{l_k}$,则 $P(x)\equiv(Q_1(x))^2$,现在设结论对所有小于 m 的正整数成立,下面证明它对 m 也成立.事实上,如果满足题中条件的多项式 $P(x)$ 有 m 个非实数根,则它可表示为

$$P(x)=(x^2+2px+q)R(x),$$

其中 $p^2<q$,也即对所有 $x\in R$,

$$x^2+2px+q=(x+p)^2+(q-p^2)>0.$$

但由归纳假设,多项式 $R(x)$ 可以写成

$$R(x)\equiv(Q_1(x))^2+\cdots+(Q_n(x))^2,$$

其中 $Q_1(x),\cdots,Q_n(x)$ 是实系数多项式,于是

$$P(x)\equiv((x+p)^2+c^2)((Q_1(x))^2+\cdots+(Q_n(x))^2).$$

其中 $c=\sqrt{q-p^2}$,从而多项式 $P(x)$ 可表示为若干个实系数多项式的平方和.

5・107 证明:对任意多项式 $P(x)\not\equiv x$ 和任意 $n\in N$,多项式

$$Q_n(x)=\overbrace{P(P(\cdots P}^{n个P}(x)\cdots))-x$$

被多项式 $Q_1(x)=P(x)-x$ 整除.

(罗马尼亚数学奥林匹克,1978年)

[证] 对 $n\in N$ 用归纳法.因为多项式 $Q_1(x)$ 被自身整除,所以当 $n=1$ 时结论成立.现在设已经证明恒等式 $Q_n(x)=R_n(x)Q_1(x)$ 对某个 n 成立,其中 $R_n(x)$ 是多项式,则有

$$\begin{aligned}Q_{n+1}(x)&\equiv P[Q_n(x)+x]-x\\&\equiv P[R_n(x)Q_1(x)+x]-x\\&\equiv\{P[R_n(x)\cdot Q_1(x)+x\}-P(x)+[P(x)-x]\end{aligned}$$

设 $$P(x)=\sum_{k=0}^{m}a_kx^k,$$

则 $$\begin{aligned}Q_{n+1}(x)&\equiv\sum_{k=0}^{m}a_k((R_n(x)Q_1(x)+x)^k-x^k)+Q_1(x)\\&\equiv\sum_{k=0}^{m}a_kR_n(x)Q_1(x)S_k(x)+Q_1(x)\\&\equiv Q_1(x)\Big(1+\sum_{k=0}^{m}a_kR_n(x)S_k(x)\Big)\end{aligned}$$

其中 $$S_k(x)=\sum_{j=0}^{k-1}(R_n(x)Q_1(x))^jx^{k-j-1},$$

这里应用了等式

$$a^k-b^k=(a-b)\sum_{j=0}^{k-1}a^jb^{k-j-1},$$

并取 $\quad a = R_n(x)Q_1(x) + x, b = x.$

这就证明,结论对于 $n+1$ 成立.

5·108 证明:对任意 $n \in N, \alpha \in R$,并且 $n \neq 1, \sin\alpha \neq 0$,多项式 $P(x) = x^n \sin\alpha - x\sin n\alpha + \sin(n-1)\alpha$ 被多项式 $Q(x) = x^2 - 2x\cos\alpha + 1$ 整除.

(罗马尼亚数学奥林匹克,1962 年)

[证] 记 $x_\varepsilon = \cos\alpha + i\varepsilon\sin\alpha$,其中 $\varepsilon \in \{-1,1\}$,则多项式 $Q(x)$ 可以写为

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x - \cos\alpha - i\sin\alpha)(x - \cos\alpha + i\sin\alpha) \\ &= (x - x_1)(x - x_{-1}), \end{aligned}$$

由棣莫佛公式,有

$$\begin{aligned} x_\varepsilon{}^n &= (\cos\varepsilon\alpha + i\sin\varepsilon\alpha)^n \\ &= \cos\varepsilon n\alpha + i\sin\varepsilon n\alpha \\ &= \cos n\alpha + i\varepsilon\sin n\alpha. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} P(x_\varepsilon) &= (\cos n\alpha + i\varepsilon\sin n\alpha)\sin\alpha - (\cos\alpha + i\varepsilon\sin\alpha)\sin n\alpha + \\ &\quad \sin(n-1)\alpha \\ &= \cos n\alpha\sin\alpha - \cos\alpha\sin n\alpha + \sin(n-1)\alpha \\ &= \sin(1-n)\alpha + \sin(n-1)\alpha \\ &= 0. \end{aligned}$$

因此由裴蜀定理,多项式 $P(x)$ 被多项式 $(x - x_1), (x - x_{-1})$ 整除(因为 $\sin\alpha \neq 0$,所以 $x - x_1$ 与 $x - x_{-1}$ 不相同),从而被它们的乘积 $Q(x)$ 整除.

5·109 二次三项式 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的系数全部为正,且有 $a + b + c = 1$. 证明:对于任何满足等式 $x_1 \cdot \cdots \cdot x_n = 1$ 的正数 $x_1, \cdots, x_n$,不等式 $f(x_1) \cdot \cdots \cdot f(x_n) \geqslant 1$ 均成立.

(第 24 届全苏数学奥林匹克,1990 年)

[证] 我们先来证明:对任何 $x, y > 0$,都有

$$f(x) \cdot f(y) \geqslant (f(\sqrt{xy}))^2.$$

事实上,如果记 $\sqrt{xy} = z$,那么我们有

$$\begin{aligned} & f(x) \cdot f(y) - (f(z))^2 \\ &= a^2(x^2y^2 - z^4) + b^2(xy - z^2) + c^2(1-1) + ab(x^2y + xy^2 - \end{aligned}$$

$$2z^3) + ac(x^2 + y^2 - 2z^2) + bc(x + y - 2z)$$
$$= ab(\sqrt{x^2y} - \sqrt{xy^2})^2 + ac(x - y)^2 + bc(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$$
$$\geqslant 0.$$

现证不等式本身. 如果 n 不是 2 的方幂, 那么可以在数组 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 中补入若干个 1, 使得数组中数的数目恰好变为 2^m 个(m 为自然数), 这时, 数组中的各数乘积仍保持为 1, 且因 $f(1) = 1$, 知所得的结果不妨碍其一般性. 故为方便计, 不妨设 $n = 2^m$, 于是由上所证, 知

$$f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot \cdots \cdot f(x_n)$$
$$\geqslant (f(\sqrt{x_1x_2}))^2 \cdot (f(\sqrt{x_3x_4}))^2 \cdot \cdots$$
$$\geqslant (f(\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}))^4 \cdot \cdots$$
$$\geqslant (f(\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}))^n$$
$$= (f(1))^n$$
$$= 1.$$

5·110 (1) 给定以自然数为系数的多项式 $P(x)$, 并用 a_n 表示 $P(n)$ 在十进制记数法中的数字和. 证明: 存在一个数, 它在数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 中出现无穷多次.

(2) 对于整系数多项式 $P(x)$, 证明同样的结论.

(第 9 届全苏数学奥林匹克, 1975 年)

[证] (1) 我们把多项式 $P(x)$ 的所有系数的一切数字之和记作 S, 并取 n_0 是使 10^{n_0} 大于所有系数的正整数. 那么对于任意 $n \geqslant n_0$ 有

$$a_{10^n} = S.$$

于是命题(1) 得证.

(2) 令多项式 $Q(x) = P(x + d)$, 则

$$Q(x) = P_0(x + d)^n + P_1(x + d)^{n-1} + \cdots + P_n$$
$$= P_0(x^n + C_n^1x^{n-1}d + \cdots + C_n^{n-1}xd^{n-1} + d^n)$$
$$+ P_1(x^{n-1} + C_{n-1}^1x^{n-2}d + \cdots + d^{n-1}) + \cdots + P_n$$
$$= q_0x^n + q_1(d)x^{n-1} + \cdots + q_n(d)$$

其中 $q_k(d)$ 是 d 的多项式, $k = 0, 1, \cdots, n$, 同时 $q_k(d)$ 的次数为 k, 首项是 $p_0C_n^kd^k$(q_0 就等于 p_0), 显然在 d 足够大时, 每一 $q_k(d)$ 的符号与

p_0 的符号相同.

把(1)的结果用于多项式 $Q(x)=P(x+d)$,其中 d 为充分大的自然数,可知,当 $n_0=n_0(d)$ 足够大时,对于任意 $n\geqslant n_0$,数 $Q(10^n)=a_{10^n}+d$ 的所有数字之和相同,于是命题(2)得证.

5・111　给定复系数多项式

$$f(z)=c_0z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_n.$$

试证:存在复数 z_0,适合 $|z_0|\leqslant 1$ 且 $|f(z_0)|\geqslant|c_0|+|c_n|$.

(第9届中国中学生数学冬令营,1994年)

[证]　当 $c_n\neq 0$ 时,构造多项式

$$g(z)=c_0z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z-\left|\frac{c_0}{c_n}\right|\cdot c_n$$

由代数基本定理,$g(z)$ 有 n 个根 $z_1,z_2,\cdots,z_n$,将其模排序为

$$|z_1|\leqslant|z_2|\leqslant\cdots\leqslant|z_n|.$$

由根与系数关系知 $|z_1z_2\cdots z_n|=1$,故 $|z_1|\leqslant 1$ 且

$$\begin{aligned}f(z_1)&=c_0z_1^n+c_1z_1^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z_1+c_n\\&=g(z_1)+\left|\frac{c_0}{c_n}\right|c_n+c_n\\&=c_n\left(\left|\frac{c_0}{c_n}\right|+1\right),\end{aligned}$$

所以　$|f(z_1)|=|c_0|+|c_n|$.

当 $c_n=0$ 时,构造多项式

$$g(z)=c_0z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z-c_0.$$

由代数基本定理,$g(z)$ 有 n 个根 $z_1,z_2,\cdots,z_n$,按模排序为

$$|z_1|\leqslant|z_2|\leqslant\cdots\leqslant|z_n|.$$

由根与系数关系知 $|z_1z_2\cdots z_n|=1$,故 $|z_1|\leqslant 1$ 且

$$\begin{aligned}f(z_1)&=c_0z_1^n+c_1z_1^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z_1\\&=g(z_1)+c_0\\&=c_0.\end{aligned}$$

所以　$|f(z_1)|=|c_0|=|c_0|+|c_n|$.

5・112　已知非常数实数列 $a_0,a_1,a_2\cdots$ 满足

$$a_{i-1}+a_{i+1}=2a_i\quad(i=1,2,3,\cdots).$$

求证:对于任何自然数 n,

$$P(x)=a_0C_n^0(1-x)^n+a_1C_n^1x(1-x)^{n-1}+a_2C_n^2x^2(1-x)^{n-2}+\cdots+a_{n-1}C_n^{n-1}x^{n-1}(1-x)+a_nC_n^nx^n$$

是 x 的一次多项式.

（中国高中数学联赛，1986 年）

［解］ 题设条件可改写为

$$a_i-a_{i-1}=a_{i+1}-a_i\quad(i=1,2,\cdots),$$

这说明 $a_0,a_1,a_2,\cdots$ 是以 a_1-a_0 为公差的等差数列，由等差数列的通项公式，得 $a_i=a_0+i(a_1-a_0)\quad(i=1,2,3,\cdots)$，那么

$$\begin{aligned}P(x)&=a_0C_n^0(1-x)^n+[a_0+(a_1-a_0)]C_n^1x(1-x)^{n-1}+[a_0+2(a_1-a_0)]C_n^2x^2(1-x)^{n-2}+\cdots+[a_0+n(a_1-a_0)]C_n^nx^n\\&=a_0[C_n^0(1-x)^n+C_n^1x(1-x)^{n-1}+C_n^2x^2(1-x)^{n-2}+\cdots+C_n^nx^n]+(a_1-a_0)[C_n^1x(1-x)^{n-1}+2C_n^2x^2(1-x)^{n-2}+\cdots+nC_n^nx^n]\end{aligned}$$

根据二项式定理，有

$$\begin{aligned}&C_n^0(1-x)^n+C_n^1x(1-x)^{n-1}+C_n^2x^2(1-x)^{n-2}+\cdots+C_n^nx^n\\&=[(1-x)+x]^n=1.\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}&C_n^1x(1-x)^{n-1}+2C_n^2x^2(1-x)^{n-2}+\cdots+nC_n^nx^n\\&=nx[(1-x)^{n-1}+C_{n-1}^1x(1-x)^{n-2}+\cdots+x^{n-1}]\\&=nx[(1-x)+x]^{n-1}\\&=nx,\end{aligned}$$

从而 $\quad P(x)=a_0+(a_1-a_0)nx.$

5・113 设 $f(x)=x^n+5x^{n-1}+3$，其中 n 是一个大于 1 的整数. 求证：$f(x)$ 不能表示为两个多项式的乘积，其中每一个多项式都具有整数系数而且它们的次数都不低于一次.

（第 34 届国际数学奥林匹克，1993 年）

［解］ 假设 $f(x)$ 可分解为两个整系数多项式之积

$$f(x)=g(x)\cdot h(x)\qquad①$$

其中 $\quad g(x)=x^p+a_{p-1}x^{p-1}+\cdots+a_1x+a_0,$

$$h(x) = x^q + b_{q-1}x^{q-1} + \cdots + b_1x + b_0,$$

且 $a_p = 1, b_q = 1, p, q, a_0, a_1, \cdots, a_{p-1}, b_0, b_1, \cdots, b_{q-1} \in Z$.

首先证明 p 和 q 均不小于 2. 若不然,不妨设 $p = 1$,有 $f(x) = (x + a_0)h(x)$,由 $a_0b_0 = 3$,有 $a_0 = \pm 1$ 或 ± 3,即 $f(x)$ 有根 ± 1 或 ± 3. 但

$$\begin{aligned} f(1) &= 9, \\ f(-1) &= (-1)^n + 5(-1)^{n-1} + 3 \\ &= (-1)^{n-1} \cdot 4 + 3 \neq 0, \\ f(3) &= 3^n + 5 \cdot 3^{n-1} + 3 \neq 0, \\ f(-3) &= (-3)^n + 5(-3)^{n-1} + 3 \\ &= (-3)^{n-1} \cdot 2 + 3 \neq 0. \end{aligned}$$

所以, ± 1, ± 3 不会是 $f(x)$ 的根,即 p, q 均不小于 2.

设 $2 \leqslant p \leqslant q \leqslant n-2$. 由 $a_0b_0 = 3$,不妨设 $a_0 = 3, b_0 = 1$. 设 $a_1, \cdots, a_{p-1}, a_p$ 中不能被 3 整除的系数中下标最小的为 a_k. 有 $k \leqslant p$,且

$$3 \mid a_1, 3 \mid a_2, \cdots, 3 \mid a_{k-1}, 3 \nmid a_k. \quad ②$$

考察 ① 两边 x^k 的系数,有

$$0 = a_kb_0 + a_{k-1}b_1 + \cdots + a_0b_k,$$

即 $a_k = -(a_{k-1}b_1 + \cdots + a_0b_k)$.

由 ② 即得 $3 \mid a_k$,矛盾.

所以 $f(x)$ 不能分解为两个整系数多项式的乘积.

5·114 $P(x)$ 是非常数的整系数多项式,$n(P)$ 为能使 $[P(k)]^2 = 1$ 成立的整数 k 的个数. 试证:

$$n(P) - \deg(P) \leqslant 2,$$

其中 $\deg(P)$ 是多项式 $P(x)$ 的次数.

(第 16 届国际数学奥林匹克,1974 年)

[证] 若 $[P(k)]^2 = 1$,则 $P(k) = \pm 1$.

设 $P(x) - 1$ 有 m 个整数根 $k_1, \cdots, k_m$,则 $P(x) - 1$ 能被 $(x - k_1)\cdots(x - k_m)$ 整除,

故 $m \leqslant \deg(P)$.

设 $P(x) - 1 = (x - k_1)\cdots(x - k_m)Q(x)$,

其中 $Q(x)$ 为整系数多项式,

则 $P(x) + 1 = (x - k_1)\cdots(x - k_m)Q(x) + 2$.

若 $m \geqslant 4$，则因4个互不相同的非零整数之积的绝对值大于2，故 $P(k)+1$ 对任意整数 k 不为0，若 $m=3$，同样的道理至多只有1个 k 使 $P(x)+1=0$. 对 $P(x)+1$ 的整数根个数 m' 有完全类似的结论：若 $m' \geqslant 4$，则 $m=0$，若 $m'=3$，则 $m=1$. 总之，m 和 m' 至少有一个不大于2，因而

$$n(P)=m+m' \leqslant 2+\deg(P),$$

于是得 $n(P)-\deg(P) \leqslant 2$.

5·115　设 a,b,c，是三个不同的整数. $P(x)$ 是一个整系数多项式，试证：$P(a)=b, P(b)=c, P(c)=a$ 不可能同时成立.

（第3届美国数学奥林匹克，1974年）

[证]　因为 P 是整系数多项式，且 a,b,c 是不同的整数，若设

$$P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n,$$

则

$$\begin{aligned}P(a)-P(b)&=a_1(a-b)+a_2(a^2-b^2)+\cdots+a_n(a^n-b^n)\\&=(a-b)Q(a,b).\end{aligned}$$

其中 $Q(a,b)$ 是一个整数，于是

$$\frac{P(a)-P(b)}{a-b}=Q(a,b).$$

同理

$$\frac{P(b)-P(c)}{b-c}=Q(b,c),$$

$$\frac{P(c)-P(a)}{c-a}=Q(c,a).$$

其中 $Q(b,c)$ 和 $Q(c,a)$ 都是整数. 若 $P(a)=b; P(b)=c, P(c)=a$，则

$$(b-c)=(a-b)Q(a,b),$$
$$(c-a)=(b-c)Q(b,c),$$
$$(a-b)=(c-a)Q(c,a).$$

因此有　$Q(a,b)\cdot Q(b,c)\cdot Q(c,a)=1$，

所以　$|Q(a,b)|=|Q(b,c)|=|Q(c,a)|=1$，

最后得到　$|a-b|=|b-c|=|c-a|$. 这是不可能的，因为它与 a,b,c 是不同的整数相矛盾.

根据同样的论证，还可以得到更一般的结果：

若 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是不同的整数，则不可能有

$$P(a_i)=a_{i+1}\quad(i=1,2,\cdots,n)，而\ a_{n+1}=a_1.$$

5·116　把多项式 $x^4+x^3+x^2+x+1$ 表示为两个次数不同的实系数多项式的平方差的形式.

(波兰数学奥林匹克,1955 年)

[解]　如果多项式 $W(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$ 表示成 $U^2(x)-V^2(x)$,其中 $U(x)$ 和 $V(x)$ 是两个次数不同的多项式.那么多项式 $U(x)$ 必须是二次,而多项式 $V(x)$ 是一次或零次.因此,多项式 $V^2(x)$ 不含高于 2 次的项,由此可知多项式 $U^2(x)$ 和 $W(x)$ 的最高次项和次高次项应当相同,从而 $U^2(x)$ 有 $x^4+x^3+\cdots$ 的形式.于是 $U(x)$ 可表示为 $U(x)=x^2+\frac{1}{2}x+a$.从而

$$V^2(x)=U^2(x)-W(x)=\left(x^2+\frac{1}{2}x+a\right)^2-(x^4+x^3+x^2+x+1)$$
$$=\left(2a-\frac{3}{4}\right)x^2+(a-1)x+a^2-1.$$

因为 $2a-\frac{3}{4}=0$ 与 $a-1=0$ 不可能同时成立,所以由得到的 $V^2(x)$ 的表达式知 $V(x)$ 不可能是零次的.因此 $V(x)$ 应是一次多项式.这表明 $V^2(x)$ 是首项系数为正,且判别式为零的二次三项式,即有

$$2a-\frac{3}{4}>0,(a-1)^2-4\left(2a-\frac{3}{4}\right)(a^2-1)=0.$$

第二个条件可化简为

$$(a-1)(4a^2+2a-1)=0,$$

解之得 $a=1,a=\frac{1}{4}(-1\pm\sqrt{5})$.其中只有 $a=1$ 适合条件

$$2a-\frac{3}{4}>0.$$

于是,原多项式可以表示为

$$x^4+x^3+x^2+x+1=\left(x^2+\frac{1}{2}x+1\right)^2-\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}x\right)^2,$$

且表示法是惟一的.

5·117　试证:五次多项式

$$P(x)=x^5-3x^4+6x^3-3x^2+9x-6$$

不能表示成两个次数低于 5 的整系数多项式之积的形式.

(波兰数学奥林匹克,1963 年)

[证] 首先注意到,如果首项系数为 1 的多项式能表示成两个整系数多项式之积的形式,那么可以认为这两个多项式的首项系数都是 1.

事实上,如果乘积等于原多项式的那两个多项式的首项是 a_0x^k 和 b_0x^l,那么,或者 $a_0 = b_0 = 1$,或者 $a_0 = b_0 = -1$,对后一种情形,只需将这两个多项式都变号,即可化成前一种情况.

根据上述事实,我们只需证明:多项式 $P(x)$ 既不能表示成 $(x+a)Q(x)$,也不能表示成 $(x^2+a_1x+a_2)(x^3+b_1x^2+b_2x+b_3)$,这里 $Q(x)$ 是首项系数为 1 的整系数四次多项式,a,a_1,a_2,b_1,b_2,b_3 是整数.

若 $x^5-3x^4+6x^3-3x^2+9x-6=(x+a)Q(x)$, ①

令 $x=-a$,得

$$-a^5-3a^4-6a^3-3a^2-9a-6=0.$$

这个等式是不可能成立的.因若 a 是 3 的倍数,由于上式左端不能被 9 整除,因而它不能是零;若 a 不是 3 的倍数,那么上式左端也不能被 3 整除,所以也不能是零.于是,原多项式不能表示成 ① 中两个多项式的乘积形式.

若 $x^5-3x^4+6x^3-3x^2+9x-6=(x^2+a_1x+a_2)(x^3+b_1x^2+b_2x+b_3)$. ②

比较上式两端 x 的同次幂的系数,得

$$a_2b_3=-6, \quad ③$$

$$a_1b_3+a_2b_2=9, \quad ④$$

$$a_1b_2+a_2b_1+b_3=-3, \quad ⑤$$

$$a_1b_1+a_2+b_2=6, \quad ⑥$$

$$a_1+b_2=-3. \quad ⑦$$

由等式 ③ 可知,a_2,b_3 中有一个且仅有一个能被 3 整除.

若 3 整除 a_2,但不能整除 b_3,那么从等式 ④ 推知,3 整除 a_1,又由 ⑤ 式推知 3 整除 b_3,于是导出矛盾.

若 3 不能整除 a_2,但能整除 b_3,那么由等式 ④ 知 3 能整除 b_2.于是

由等式⑤知3能整除 b_1,由此根据等式⑥知3能整除 a_2.这又导出矛盾.

故,多项式 $P(x)$ 也不能表示成②中两个多项式乘积的形式.

本题至此完全得证.

5·118　设 r 是自然数.试证二次三项式 x^2-rx-1 不可能是任何系数绝对值小于 r 的整系数多项式　$p(x)\neq 0$ 的因子.

（波兰数学奥林匹克,1974年）

[证]　设多项式

$$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

的系数是绝对值小于 r 的整数,$a_n\neq 0$,并设它能被多项式 $f(x)=x^2-rx-1$ 整除.那么

$$p=f\cdot h. \quad ①$$

根据多项式除法,多项式 $h(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_{n-2}x^{n-2}$ 的系数也是整数.比较①式两端同次幂的系数,得

$$a_0=-b_0, \quad ②_0$$

$$a_1=-b_1-rb_0, \quad ②_1$$

$$a_2=-b_2-rb_1+b_0, \quad ②_2$$

……

$$a_k=-b_k-rb_{k-1}+b_{k-2},(k=2,3,\cdots,n-2) \quad ②_k$$

……

$$a_{n-2}=-b_{n-2}-rb_{n-3}+b_{n-4}, \quad ②_{n-2}$$

$$a_{n-1}=-rb_{n-2}+b_{n-3}, \quad ②_{n-1}$$

$$a_n=b_{n-2}. \quad ②_n$$

由 $②_n$ 式知 $b_{n-2}\neq 0$.由 $②_{n-1}$ 式知 $b_{n-3}\neq 0$,且 b_{n-2},b_{n-3} 同号,因若不然,$|a_{n-1}|=|-rb_{n-2}+b_{n-3}|=|-rb_{n-2}|+|b_{n-3}|\geqslant r|b_{n-2}|\geqslant r$.这与 $|a_{n-1}|<r$ 的假设矛盾.类似地,由等式 $②_{n-2}$ 知 $b_{n-4}\neq 0$,而且系数 b_{n-3},b_{n-4} 同号.因若不然,系数 a_{n-2} 的绝对值适合不等式 $|a_{n-2}|=|-b_{n-2}-rb_{n-3}+b_{n-4}|=|-b_{n-2}|+|-rb_{n-3}|+|b_{n-4}|\geqslant r|b_{n-3}|\geqslant r$,与 $|a_{n-2}|<r$ 的假设矛盾.

一般地,若对于某个 $k=2,3,\cdots,n-2$,系数 b_k,b_{k-1} 同号,那么 $b_{k-2}\neq 0$,且系数 b_{k-1},b_{k-2} 也同号.因若不然,由 $②_k$ 式知 $|a_k|=$

$|-b_k|+|-rb_{k-1}|+|b_{k-2}|\geqslant r$,这与 $p(x)$ 的系数绝对值小于 r 的假定矛盾.

应用归纳法可证明 $b_{n-2},b_{n-3},\cdots,b_1,b_0$ 不为零,且同号.但由等式②$_1$ 得 $|a_1|=|-b_1-rb_0|=|b_1|+|rb_0|\geqslant r$,与假设矛盾.

所得到的矛盾说明具有整系数 $|a_k|<r$ 的多项式 $p(x)$ 不存在.

5·119　设 $f(x),g(x)$ 是整系数多项式.试证若对任何整数 n,$f(n)$ 整除 $g(n)$,那么 $g(x)=f(x)h(x)$,这里 $h(x)$ 是多项式.并举例说明,$h(x)$ 不一定是整系数多项式.

(波兰数学奥林匹克,1976 年)

[证]　首先证明一个引理.

引理:若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是次数相同的整系数多项式,且对任何自然数 n,$f(n)$ 整除 $g(n)$,那么存在整数 c,使 $g(x)=cf(x)$.

事实上,依据引理的条件,对每个自然数 n,存在整数 a_n,使 $g(n)=a_nf(n)$.设

$$f(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_{r-1}x^{r-1}+b_rx^r,$$
$$g(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_{r-1}x^{r-1}+c_rx^r,$$

其中　$b_r\neq 0,c_r\neq 0$.于是

$$\frac{f(n)}{n^r}=\frac{b_0}{n^r}+\frac{b_1}{n^{r-1}}+\cdots+\frac{b_{r-1}}{n}+b_r.$$

由此得　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n^r}=b_r$.类似地可证　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{g(n)}{n^r}=c_r$.故由等式

$$\frac{g(n)}{n^r}=a_n\frac{f(n)}{n^r},$$

得知序列$\{a_n\}$当 $n\to\infty$ 时的极限为 c_r/b_r.

序列$\{a_n\}$的各项为整数.对于整数列,当且仅当从某项起它的各项皆为同一常数时才有极限.

因此,存在自然数 N,使对一切 $n>N$,$a_n=c$.于是对于一切 $n>N$,$g(n)=cf(n)$.这表明任何大于 N 的自然数都是多项式 $g(x)-cf(n)$ 的根.但任何不恒为零的多项式只有有限个根,因此 $g(x)-cf(x)\equiv 0$ 或 $g(x)=cf(x)$.引理证毕.

依据引理,若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的次数相等,则 $g(x)=cf(x)$,这时取 $h(x)=c$ 即可.

若 g 的次数大于 f 的次数，据代余除法，存在多项式 $h(x)$ 和 $r(x)$，使

$$g(x) = h(x)f(x) + r(x), \quad ①$$

其中 $r(x)$ 的次数小于 $f(x)$ 的次数，且 $h(x)$ 及 $r(x)$ 的系数皆为有理数. 设 a 是 $h(x)$ 及 $r(x)$ 系数的最小公分母，那么 $H = ah, R = ar$ 的系数都是整系数. 用 a 乘 ① 式两端得

$$ag(x) = H(x)f(x) + R(x), \quad ②$$

因此，$ag(x)$ 也是整系数多项式.

显然，对一切 n，$f(x)$ 整除 $ag(n)$. 由 ② 式知，当 $n = 1,2,\cdots$ 时，数 $f(n)$ 整除 $R(n) = ag(n) - H(n)f(n)$. 因 $R(x)$ 的次数等于 $r(x)$ 的次数，所以小于 $f(x)$ 的次数，因此多项式 $R(x) = a(r(x)) \equiv 0$，故由 ① 得

$$g(x) = h(x)f(x).$$

现举例说明 $h(x)$ 的系数不一定是整数. 设 $f(x) = 2, g(x) = x^2 + x$，对任何整数 n，n 与 $n+1$ 中有一个为偶数，所以 $g(n) = n(n+1)$ 是偶数. 因此，对一切 $n = 1,2,\cdots$ 时，$f(n)$ 整除 $g(n)$. 但 $h(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x$ 没有整系数.

5・120　整系数多项式 $P(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ 的权 $w(P)$ 定义为它的奇系数的个数. 试证：对任一有限序列 $0 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_n$，$i_1$、$i_2$、$\cdots$、$i_n$，都是整数.

$$w[(1+x)^{i_1} + (1+x)^{i_2} + \cdots + (1+x)^{i_n}] \geqslant w[(1+x)^{i_1}].$$

（第 26 届国际数学奥林匹克，1985 年）

［证］　首先注意在 $l = 2^m$ 时，

$$(1+x)^l = 1 + x^l + (\text{系数为偶数的项})$$

因此在 $P(x)$ 的次数 $< l$ 时，

$$w[P(1+x)^l] = 2w(P). \quad ①$$

对 i_n 施行归纳，$i_n = 1$ 结论显然，设在 $i_n < 2^m$ 时命题成立. 现证当 $i_n \geqslant 2^m$ 时命题仍成立. 不失一般性，设 $2^m \leqslant i_n < 2^{m+1}$. 如果 $i_1 \geqslant 2^m$，那么

$$w[(1+x)^{i_1} + (1+x)^{i_2} + \cdots + (1+x)^{i_n}]$$

$$= w\{(1+x)^l[(1+x)^{i_1-l}+\cdots+(1+x)^{i_n-l}]\}$$
$$= 2w[(1+x)^{i_1-l}+\cdots+(1+x)^{i_n-l}] \quad \text{(利用①)}$$
$$\geqslant 2w[(1+x)^{i_1-l}] \quad \text{(归纳假设)}$$
$$= w[(1+x)^{i_1}] \quad \text{(利用①)}$$

如果 $i_1 < 2^m$，那么

$$(1+x)^{i_1}+(1+x)^{i_2}+\cdots+(1+x)^{i_n}$$
$$= a_0+a_1x+\cdots+a_{l-1}x^{l-1}+(1+x)^l(b_0+b_1x+\cdots+b_{l-1}x^{l-1})$$
$$= a_0+a_1x+\cdots+a_{l-1}x^{l-1}+b_0+b_1x+\cdots+b_{l-1}x^{l-1}+x^l(b_0+b_1x+\cdots+b_{l-1}x^{l-1})+\text{(偶数系数的项)}.$$

上式中，如果某个系数 a_i 与 b_i 同为奇数，则有一个奇系数的项 b_ix^{i+l}“补偿”损失掉的奇系数项 a_ix^i，因此仍有

$$w[(1+x)^{i_1}+\cdots+(1+x)^{i_n}] \geqslant w[(1+x)^{i_1}].$$

5・121　用以下规则归纳得到多项式的集合 S：

(1) $x \in S$；

(2) 若 $f(x) \in S$，则 $xf(x) \in S$，$x+(1-x)f(x) \in S$.

证明：S 中任意两个不同的多项式，它们的图像在 $0<x<1$ 中都不相交.

（第 16 届美国数学奥林匹克，1987 年）

[证]　我们首先证明，当 $0<x<1$ 时，对任意的 $f(x) \in S$，总有

$$0<f(x)<1.$$

事实上，当 $f(x)$ 为一次多项式时，由题设可知 $f(x)=x$. 因此，当 $0<x<1$ 时，满足不等式 $0<f(x)<1$.

假设当 $f(x)$ 为 k 次多项式时，只要 $0<x<1$，就有 $0<f(x)<1$.

当 $f(x)$ 是 $k+1$ 次多项式时，由题设条件可知，存在 k 次多项式 $g(x) \in S$，使

$$f(x)=xg(x) \quad \text{或} \quad f(x)=x+(1-x)g(x).$$

由归纳假设，当 $0<x<1$ 时，有 $0<g(x)<1$. 因此，当 $0<x<1$ 时，我们有

$$0<xg(x)<x<1,$$
$$0<x+(1-x)g(x)<x+(1-x)=1.$$

也就是说,对于 $k+1$ 次多项式 $f(x) \in S$,当 $0 < x < 1$ 时,必有 $0 < f(x) < 1$.

根据数学归纳原理,对于 S 中任意多项式 $f(x)$,当 $0 < x < 1$ 时,都有 $0 < f(x) < 1$.

下面我们证明,S 中没有两个不同的多项式,它们在 $0 < x < 1$ 上的图像相交.

事实上,当 $f(x)$ 为一次多项式时,$f(x) = x$,它的图像显然不可能相交.

假设对任意两个次数不大于 k 的不同的多项式 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$,它们的图像在 $0 < x < 1$ 上都不相交.

那么对任意两个次数不大于 $k+1$ 的不同的多项式 $g_1(x)$ 和 $g_2(x)$,其中 $g_1(x)$ 和 $g_2(x)$ 可以表示成

$$xf_1(x),\ x + (1-x)f_1(x),$$

$$xf_2(x) \text{ 或 } x + (1-x)f_2(x).$$

由于 $0 < f_1(x) < 1, 0 < f_2(x) < 1$,因此对任意的 $x \in (0,1)$ 都有

$$xf_1(x) < x < x + (1-x)f_2(x),$$

$$xf_2(x) < x < x + (1-x)f_1(x),$$

$$xf_1(x) \neq xf_2(x),$$

$$x + (1-x)f_1(x) \neq x + (1-x)f_2(x),$$

$$xf_1(x) < x + (1-x)f_1(x),$$

$$xf_2(x) < x + (1-x)f_2(x).$$

这说明 $g_1(x)$ 和 $g_2(x)$ 在 $0 < x < 1$ 上的图像不相交.

根据数学归纳原理,S 中任意两个不同的多项式,它们的图像在 $0 < x < 1$ 上都不相交.

5·122　已知 $P(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \cdots + c_n$ 是复变量 z 的实系数多项式,且 $|P(i)| < 1$.求证存在实数 a, b,使得 $P(a+bi) = 0$,且 $(a^2+b^2+1)^2 < 4b^2 + 1$.

(第 18 届美国数学奥林匹克,1989 年)

[证]　显然,给定多项式在复数范围内有 n 个根(一个 k 重根按 k 个根计算),并且虚根成对出现.

设 $\alpha_j (j = 1, 2, \cdots, m)$ 是 $P(z)$ 的所有实根,β_k 和 $\bar{\beta}_k (k = 1, 2, \cdots,$

s)是 $P(z)$ 的所有共轭虚根.则

$$P(z)=(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_m)\cdot[(z-\beta_1)(z-\overline{\beta_1})]\cdot[(z-\beta_2)(z-\overline{\beta_2})]\cdot\cdots\cdot[(z-\beta_s)(z-\overline{\beta_s})].$$

由 $|P(i)|<1$,得

$$|i-\alpha_1|\cdot|i-\alpha_2|\cdot\cdots\cdot|i-\alpha_m|\cdot|(i-\beta_1)(i-\overline{\beta_1})|\cdot|(i-\beta_2)(i-\overline{\beta_2})|\cdot\cdots\cdot|(i-\beta_s)(i-\overline{\beta_s})|<1.$$

由于 $|i-\alpha_j|=\sqrt{1+\alpha_j^2}\geqslant 1\quad(j=1,2,\cdots,m.)$,

因此必存在 $k(1\leqslant k\leqslant s)$,使

$$|(i-\beta_k)(i-\overline{\beta_k})|<1.$$

设 $\beta_k=a+bi$,则

$$|-a+(1-b)i|\cdot|-a+(1+b)i|<1,$$

即
$$\sqrt{a^2+(1-b)^2}\cdot\sqrt{a^2+(1+b)^2}<1,$$

$$(a^2+b^2-2b+1)(a^2+b^2+2b+1)<1,$$

$$(a^2+b^2+1)^2-4b^2<1.$$

于是有 $(a^2+b^2+1)^2<1+4b^2$,且 $P(a+bi)=0$.

5·123 设 $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$,

和 $q(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0$

是两个整系数多项式.已知乘积 $p(x)\cdot q(x)$ 的所有系数都是偶数,但不全是 4 的倍数.证明:$p(x)$ 和 $q(x)$ 之一的全部系数都是偶数,而另一个的系数中至少有一个是奇数.

(第 9 届加拿大数学奥林匹克,1977 年)

[证] 显然,$p(x)$ 和 $q(x)$ 的所有系数不可能都是偶数.因为不然的话,乘积 $p(x)\cdot q(x)$ 的所有系数都是4的倍数,与已知条件矛盾.

现在我们来证明,$p(x)$ 和 $q(x)$ 两者不可能都至少有一个奇系数.因为不然的话,我们可以假定 a_k 是奇数,而 $a_{k+1},a_{k+2},\cdots,a_n$ 全是偶数,并且假定 b_l 是奇数,而 $b_{l+1},b_{l+2},\cdots,b_m$ 全是偶数.这样的话,乘积$p(x)\cdot q(x)$ 中的 x^{k+l} 的系数

$a_kb_l+a_{k+1}b_{l-1}+a_{k+2}b_{l-2}+\cdots+a_{k-1}b_{l+1}+a_{k-2}b_{l+2}+\cdots$ 是一个奇数(奇数 a_kb_l 与若干个偶数之和),此与已知条件矛盾.

综上所述,可以断定,$p(x)$ 和 $q(x)$ 之一的全部系数都是偶数,并且另一个的系数中至少有一个是奇数.

代数卷

5·124　设 $P(x,y)$ 是变量 x 和 y 的多项式，并且对任意的 x,y，都有 $P(x,y)=P(y,x)$（例如，多项式 $x^2-2xy+y^2$ 满足这个条件）. 已知 $x-y$ 是 $P(x,y)$ 的因式，证明：$(x-y)^2$ 是 $P(x,y)$ 的因式.

（第 8 届加拿大数学奥林匹克，1976 年）

［证］　因为 $x-y$ 是 $P(x,y)$ 的因式，所以可以设

$$P(x,y)=(x-y)\cdot Q(x,y), \quad ①$$

其中 $Q(x,y)$ 是变量 x 和 y 的多项式. 于是可得

$$P(y,x)=(y-x)\cdot Q(y,x), \quad ②$$

由 ①、② 和已知条件得

$$(x-y)Q(x,y)=(y-x)\cdot Q(y,x),$$

从而有　$Q(x,y)+Q(y,x)=0.$　③

在 ③ 式中，令 $y=x$，得 $Q(x,x)=0$.

这就是说，多项式 $Q(x,y)$ 有因式 $x-y$. 于是多项式 $P(x,y)$ 就有因式 $(x-y)^2$.

5·125　给定多项式

$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，其中 $0\leqslant a_i\leqslant a_0$，$i=1,2,\cdots,n$.

设　$b_0,b_1,b_2,\cdots,b_{2n}$ 是多项式

$$[f(x)]^2=(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n)^2$$
$$=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_{2n}x^{2n}$$

的系数. 证明 $b_{n+1}\leqslant\frac{1}{2}[f(1)]^2$.

（第 6 届加拿大数学奥林匹克，1974 年）

［证］　易知

$$b_{n+1}=a_1a_n+a_2a_{n-1}+\cdots+a_na_1 \quad ①$$

又由　$0\leqslant a_i\leqslant a_0$，$i=1,2,\cdots,n$ 得

$$b_{n+1}\leqslant a_1a_0+a_2a_0+\cdots+a_na_0 \quad ②$$

① + ② 得

$$2b_{n+1}\leqslant a_1(a_0+a_n)+a_2(a_0+a_{n-1})+\cdots+a_n(a_0+a_1)$$
$$\leqslant a_1(a_0+a_1+\cdots+a_n)+a_2(a_0+a_1+\cdots+a_n)+\cdots+a_n(a_0+a_1+\cdots+a_n)$$
$$=(a_0+a_1+\cdots+a_n)(a_1+a_2+\cdots+a_n)$$

$$\leqslant (a_0 + a_1 + \cdots + a_n)^2$$
$$= [f(1)]^2.$$

$$\therefore \quad b_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}[f(1)]^2.$$

5・126　试证:任何实系数多项式均可以表示成两个单调递增的多项式之差.

（波兰数学奥林匹克,1973 年）

[证]　用数学归纳法,对多项式的次数进行归纳.

如果多项式 f 恒等于某个常数 c,那么

$$f(x) = (x + c) - x,$$

其中多项式 $x + c$ 和 x 都是单调递增的.

设 $f(x)$ 的次数大于 0,并且任何次数比它低的多项式都可表示成两个单调递增的多项式之差的形式.

如果多项式 $f(x)$ 的次数是偶数 $2n$,那么

$$f(x) = ax^{2n} + g(x), \quad a \neq 0 \qquad ①$$

这里多项式 $g(x)$ 是零多项式或次数小于 $2n$ 的多项式.由牛顿二项式定理得

$$\frac{1}{2n+1}[(x+a)^{2n+1} - x^{2n+1}] = ax^{2n} + h(x) \qquad ②$$

这里 $h(x)$ 是次数低于 $2n$ 的多项式,多项式 $(x+a)^{2n+1}$ 和 x^{2n+1} 单调递增.由归纳假设,存在单调递增多项式 $F_1(x)$ 和 $G_1(x)$ 适合

$$g(x) - h(x) = F_1(x) - G_1(x). \qquad ③$$

令
$$F(x) = F_1(x) + \frac{1}{2n+1}(x+a)^{2n+1},$$
$$G(x) = G_1(x) + \frac{1}{2n+1}x^{2n+1}.$$

则
$$f(x) = ax^{2n} + g(x)$$
$$= \frac{1}{2n+1}[(x+a)^{2n+1} - x^{2n+1}] - h(x) + g(x)$$
$$= \frac{1}{2n+1}(x+a)^{2n+1} - \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + F_1(x) - G_1(x)$$
$$= F(x) - G(x).$$

因为 $F(x)$ 和 $G(x)$ 都是两个单调递增多项式的和，所以 $F(x)$ 和 $G(x)$ 都是单调递增的多项式.

若多项式 $f(x)$ 的次数是奇数 $2n-1$，那么

$$f(x)=ax^{2n-1}+g(x). \qquad ④$$

其中 $g(x)$ 是零多项式或次数低于 $2n-1$ 的多项式.

由归纳假设，存在单调递增多项式 $F_1(x)$ 和 $G_1(x)$ 适合

$$g(x)=F_1(x)-G_1(x) \qquad ⑤$$

将 a 表示成两个正数之差：

$$a=b-c \quad (b>0,c>0),$$

于是 $\quad ax^{2n-1}=bx^{2n-1}-cx^{2n-1}, \qquad ⑥$

这里 bx^{2n-1} 和 cx^{2n-1} 都是单调递增的多项式.

令 $\quad F(x)=F_1(x)+bx^{2n-1},$

$$G(x)=G_1(x)+cx^{2n-1}.$$

则 $\quad f(x)=F(x)-G(x).$

显然 $F(x)$ 和 $G(x)$ 是两个单调递增的多项式.

由数学归纳原理知，原命题成立.

5·127 设 $p(x)$ 是一个有理系数的三次多项式，令 $q_1,q_2,q_3,\cdots$ 是一个有理数序列，满足

$$q_n=p(q_{n+1}) \quad (n \text{ 为正整数})$$

证明：存在整数 $k\geqslant 1$，对一切 $n\geqslant 1$，

$$q_{n+k}=q_n.$$

（第 31 届国际数学奥林匹克预选题，1990 年）

［证］ 因为 $\left|\dfrac{p(x)}{x}\right|\to\infty(|x|\to\infty)$，

所以，必有一个整数 $M>|q_1|$，使得对一切 $|x|\geqslant M$，

$$|p(x)|\geqslant|x|.$$

由数学归纳法可知，对一切 n，都有

$$|q_n|<M.$$

（因为，若有某个 $|q_{k+1}|\geqslant M$，则

$$|q_k|=|p(q_{k+1})|\geqslant|q_{k+1}|\geqslant M).$$

设 $\quad q_1=\dfrac{r}{s}$ 及

$$p(x)=(ax^3+bx^2+cx+d)/e.$$

这里，a,b,c,d,e,r,s 都是整数.

令 $m=sa(\neq 0)$，我们来证明 mq_n 对每一个 n 都是整数.

$n=1$，显然，

若 mq_k 是整数，则由

$$q_k=p(q_{k+1}),$$

得出 mq_{k+1} 是多项式

$$\frac{e}{a}m^3\left[p\left(\frac{x}{m}\right)-q_k\right]$$
$$=x^3+(sb)x^2+(s^2ac)x+[(s^3a^2d)-(s^2ae)(mq_k)]$$

的零点.

这个多项式是一个首项系数为1的整系数多项式. 由多项式的有理根定理知，mq_{k+1} 是整数. 于是 q_k 均为 $\frac{1}{m}$ 的倍数. 但 $\frac{1}{m}$ 只有 $2M|m|-1$ 个倍数的绝对值小于 M，所以，序列

$$q_1,q_2,q_3,\cdots$$

中不同的值少于 $j=2M|m|$ 个，于是，对于每一个 $i\geqslant 1$，在集合

$$\{ij+1,ij+2,\cdots,ij+j\}$$

中，必有两个元素 m_j 和 $m_j+k_j(1\leqslant k_j\leqslant j)$，使

$$q_{m_j}=q_{mj+kj}.$$

因而，存在 $k\geqslant 1$，对于无穷个 j 有

$$k_j=k.$$

即，对无穷个 m，有 $q_m=q_{m+k}$.

任给 $n\geqslant 1$，取 $m>n$，使 $q_m=q_{m+k}$

对上式两边实行 $m-n$ 次 P 的变换，得

$$q_n=q_{n+k}.$$

5·128 如果两个首项系数为1的变量 x 的多项式 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 使得多项式 $P(Q(x))$ 和 $Q(P(x))$ 恒等，那么我们就称 P,Q 是可交换的.

(1) 对于每一个数 α，求与多项式 $P(x)=x^2-\alpha$ 可交换的、不超过3次的多项式.

(2) 设 P 为2次多项式，k 为自然数. 证明：至多存在一个与 P 可交

换的 k 次多项式.

(3) 求与所给的2次多项式 P 可交换的4次及8次的所有多项式.

(4) 多项式 R、Q 与同一个2次多项式 P 可交换,证明它们也可交换.

(5) 证明:存在多项式的无穷函数列 $P_2, P_3\cdots, P_k, \cdots$ 其中 P_k 为 k 次多项式,使在这个函数列中任何两个多项式都可交换,而且多项式 P_2 有形式 $P_2(x) = x^2 - 2$.

(第11届全苏数学奥林匹克,1977年)

[解] (1) 设 $Q_1(x) = x + b$ 与 $P(x) = x^2 - \alpha$ 可交换,

则 $$P(Q_1(x)) = Q_1(P(x)),$$

即 $$(x+b)^2 - \alpha = (x^2 - \alpha) + b,$$

$$x^2 + 2bx + b^2 - \alpha = x^2 - \alpha + b,$$

于是,我们有

$$\begin{cases} 2b = 0, \\ b^2 - \alpha = -\alpha + b. \end{cases}$$

解得 $b = 0, \alpha$ 为任意实数.

因此,当 α 为任意实数时, $Q_1(x) = x$ 与 $P(x)$ 可交换.

设 $Q_2(x) = x^2 + bx + c$ 与 $P(x) = x^2 - \alpha$ 可交换,

则 $$P(Q_2(x)) = Q_2(P(x)),$$

即 $$(x^2 + bx + c)^2 - \alpha = (x^2 - \alpha)^2 + b(x^2 - \alpha) + c,$$

$$x^4 + 2bx^3 + (b^2 + 2c)x^2 + 2bcx + c^2 - \alpha$$
$$= x^4 + (b - 2\alpha)x^2 + \alpha^2 - \alpha b + c.$$

于是,我们有

$$\begin{cases} b = 0, \\ b^2 + 2c = b - 2\alpha, \\ 2bc = 0, \\ c^2 - \alpha = \alpha^2 - \alpha b + c. \end{cases}$$

解得 $b = 0, c = -\alpha, \alpha$ 为任意实数.

因此,当 α 为任意实数时, $Q_2(x) = x^2 - \alpha$ 与 $P(x)$ 可交换.

设 $Q_3(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ 与 $P(x)$ 可交换,则

$$P(Q_3(x)) = Q_3(P(x)),$$

即 $$(x^3+bx^2+cx+d)^2-\alpha$$
$$\doteq (x^2-\alpha)^3+b(x^2-\alpha)^2+c(x^2-\alpha)+d, \qquad ①$$
于是,我们对照 ① 式两端 x^5 的系数,得
$$b=0.$$
并将 ① 式化为
$$(x^3+cx+d)^2-\alpha \doteq (x^2-\alpha)^3+c(x^2-\alpha)+d. \qquad ②$$
再对照 ② 式两端 x^3 的系数,得
$$d=0.$$
并将 ② 式化为
$$(x^3+cx)^2-\alpha=(x^2-\alpha)^3+c(x^2-\alpha). \qquad ③$$
如果 $\alpha=0$,那么由 ③ 式得
$$(x^3+cx)^2=x^6+cx^2,$$
对照上式两端 x^4 的系数,得 $c=0$.
因此,当 $\alpha=0$ 时,$Q_3(x)=x^3$ 与 $P(x)=x^2$ 可交换.

如果 $\alpha\neq 0$,那么由 ③ 式得
$$\begin{cases}2c=-3\alpha, & ④\\ c^2=3\alpha^2+c, & ⑤\\ -\alpha=-\alpha^3-\alpha c. & ⑥\end{cases}$$
由 ⑥ 得 $c=1-\alpha^2$. ⑦

代入 ④,整理得 $2\alpha^2-3\alpha-2=0$,

所以 $\alpha_1=-\dfrac{1}{2}$, $\alpha_2=2$.

代入 ⑦ 得 $c_1=\dfrac{3}{4}$, $c_2=-3$.

但 α_1,c_1 的值不适合 ⑤ 式,故舍去.而 α_2,c_2 的值适合 ⑤ 式,因此,当 $\alpha=2$ 时,$Q_3(x)=x^3-3x$ 与 $P(x)=x^2-2$ 可交换.

综上所述,当 α 为任意实数时,$Q_1(x)=x$ 和 $Q_2(x)=P(x)$ 与 $P(x)=x^2-\alpha$ 可交换;当 $\alpha=0$ 时,$Q_3(x)=x^3$ 与 $P(x)=x^2$ 可交换;当 $\alpha=2$ 时,$Q_3(x)=x^3-3x$ 与 $P(x)=x^2-2$ 可交换,而其他的次数不小于 1 次,不超过 3 次、首项系数为 1 的多项式都与 $P(x)=x^2-\alpha$ 不可交换.

(2) 我们先证明一个引理:如果 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 可交换,那么

$P^*(x) = P(x-r)+r$ 和 $Q^*(x) = Q(x-r)+r$ 也可交换.反之亦然.

事实上,

$$P^*(Q^*(x)) = P^*(Q(x-r)+r) = P(Q(x-r))+r,$$
$$Q^*(P^*(x)) = Q^*(P(x-r)+r) = Q(P(x-r))+r,$$

如果 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 可交换,那么就有

$$P(Q(x-r)) = Q(P(x-r)),$$

因此 $P^*(Q^*(x)) = Q^*(P^*(x))$,

即 $P^*(x)$ 和 $Q^*(x)$ 也可交换.

反过来,如果 $P^*(x)$ 和 $Q^*(x)$ 可交换,那么由

$$P^*(Q^*(x)) = Q^*(P^*(x))$$

可得 $P(Q(x-r)) = Q(P(x-r))$,

从而有恒等式 $P(Q(x)) = Q(P(x))$,

即 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 也可交换.

现在我们来考察命题(2).

由已知,$P(x)$ 是首项系数为1的二次多项式,即 $P(x) = x^2+bx+c$.配方得

$$P(x) = \left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4}.$$

如果存在 k 次多项式 $Q_k(x)$ 与 $P(x)$ 可交换,那么由引理可知,也存在 k 次多项式

$$Q_k^*(x) = Q\left(x-\frac{b}{2}\right)+\frac{b}{2},$$

与

$$P^*(x) = P\left(x-\frac{b}{2}\right)+\frac{b}{2} = x^2-\alpha, \text{其中 } \alpha = \frac{b^2}{4}-c-\frac{b}{2}$$

可交换.反过来,如果存在 k 次多项式 $Q_k^*(x)$ 与 $P^*(x) = x^2-\alpha$ 可交换,那么也存在 k 次多项式 $Q_k(x)$ 与 $P(x) = x^2+bx+c$ 可交换.因此,为了证明命题(2),可以假设 $P(x) = x^2-\alpha$.

设 k 次多项式

$$Q_k(x) = x^k + b_1x^{k-1} + b_2x^{k-2} + \cdots + b_k,$$

与

$$P(x) = x^2 - \alpha$$

可交换,则

$$(Q_k(x))^2 - \alpha = Q_k(x^2 - \alpha) \qquad ⑧$$

对照恒等式⑧两端 x 同次幂的系数,可以得到一个方程组.从这个方程组,首先可以得出

$$b_1 = b_3 = b_5 = \cdots = 0,$$

其次是通过对照 $x^{2k-2}, x^{2k-4}, \cdots$ 项的系数依次得到的方程组

$$\begin{cases} b_2 = F_2, \\ b_4 = F_4, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \qquad ⑨$$

这里的 F_i 依赖于 α 和 $b_{2j}(2j < i)$.因此,我们可以从方程组⑨中的前 $\left[\frac{k}{2}\right]$ 个方程依次求出 $b_2, b_4, \cdots$.如果求出的 $b_2, b_4, \cdots$ 同时适合方程组⑨的其他方程,那么就存在惟一的 $Q_k(x)$,它与 $P(x)$ 可交换;如果求出的 $b_2, b_4, \cdots$ 不适合方程组⑨的其他方程中的某一个,那么就不存在与 $P(x)$ 可交换的 k 次多项式 $Q_k(x)$.因此命题(2)成立.

(3) 令 $Q_4(x) = P(P(x))$,则

$$P(Q_4(x)) = P(P(P(x))) = Q_4(P(x)).$$

故 $Q_4(x)$ 与 $P(x)$ 可交换.又由(2)的结论可知,与 $P(x)$ 可交换的4次多项式只有 $Q_4(x) = P(P(x))$.

同理可证,与 $P(x)$ 可交换的8次多项式只有

$$Q_8(x) = P(P(P(x))).$$

(4) 由已知,可得

$$R(P(x)) = P(R(x)),$$
$$Q(P(x)) = P(Q(x)).$$

于是,我们有

$$Q(R(P(x))) = Q(P(R(x))) = P(Q(R(x))).$$

这说明 $Q(R(x))$ 与 $P(x)$ 可交换.

同样地,我们又有

$$R(Q(P(x))) = R(P(Q(x))) = P(R(Q(x))),$$

因此 $R(Q(x))$ 也与 $P(x)$ 可交换.

由于 $Q(R(x))$ 与 $R(Q(x))$ 次数相同,因此由(2)的结论可知,

代数卷

$$Q(R(x)) = R(Q(x)),$$

即 $R(x)$ 与 $Q(x)$ 也可交换.

(5) 我们先来证明一个引理:对于任意整数 $k \geqslant 2$ 存在 k 次多项式 P_k 使

$$t^k + \frac{1}{t^k} = P_k\left(t + \frac{1}{t}\right).$$

事实上,因为

$$t^2 + \frac{1}{t^2} = \left(t + \frac{1}{t}\right)^2 - 2,$$

所以存在 2 次多项式

$$P_2(x) = x^2 - 2$$

能使

$$t^2 + \frac{1}{t^2} = P_2\left(t + \frac{1}{t}\right).$$

同样地,因为

$$t^3 + \frac{1}{t^3} = \left(t + \frac{1}{t}\right)^3 - 3\left(t + \frac{1}{t}\right),$$

所以存在三次多项式

$$P_3(x) = x^3 - 3x$$

能使

$$t^3 + \frac{1}{t^3} = P_3\left(t + \frac{1}{t}\right).$$

假设引理当 $k \leqslant n$ 时成立.现在来证明 $k = n + 1$ 时引理也成立.

因为

$$\left(t + \frac{1}{t}\right)^{n+1} = \left(t^{n+1} + \frac{1}{t^{n+1}}\right) + C_{n+1}^1\left(t^{n-1} + \frac{1}{t^{n-1}}\right) + C_{n+1}^2\left(t^{n-3} + \frac{1}{t^{n-3}}\right) + \cdots,$$

所以

$$t^{n+1} + \frac{1}{t^{n+1}} = \left(t + \frac{1}{t}\right)^{n+1} - C_{n+1}^1\left(t^{n-1} + \frac{1}{t^{n-1}}\right)$$

$$-C_{n+1}^{2}\left(t^{n-3}+\frac{1}{t^{n-3}}\right)-\cdots.$$

由归纳假设,

$$t^{n+1}+\frac{1}{t^{n+1}}=\left(t+\frac{1}{t}\right)^{n+1}-C_{n+1}^{1}P_{n-1}\left(t+\frac{1}{t}\right)$$
$$-C_{n+1}^{2}P_{n-3}\left(t+\frac{1}{t}\right)-\cdots$$

因此存在 $n+1$ 次多项式

$$P_{n+1}(x)=x^{n+1}-C_{n+1}^{1}P_{n-1}(x)-C_{n+1}^{2}P_{n-3}(x)-\cdots,$$

使得

$$t^{n+1}+\frac{1}{t^{n+1}}=P_{n+1}\left(t+\frac{1}{t}\right).$$

根据数学归纳原理,引理对任意整数 $k\geqslant 2$ 都成立.

现取在引理证明过程中所构造的无穷函数列.

$P_2,P_3,P_4,\cdots.$

对于任意不小于 2 的自然数 m 和 n,我们有

$$P_m\left(P_n\left(t+\frac{1}{t}\right)\right)=P_m\left(t^n+\frac{1}{t^n}\right)=t^{mn}+\frac{1}{t^{mn}},$$
$$P_n\left(P_m\left(t+\frac{1}{t}\right)\right)=P_n\left(t^m+\frac{1}{t^m}\right)=t^{mn}+\frac{1}{t^{mn}},$$

因此

$$P_m\left(P_n\left(t+\frac{1}{t}\right)\right)=P_n\left(P_m\left(t+\frac{1}{t}\right)\right).$$

由 t 的任意性及多项式 $P_m(P_n(x))$,$P_n(P_m(x))$ 的次数 mn 的有限性可知,

$$P_m(P_n(x))=P_n(P_m(x))$$

是恒等式,即 $P_m(x)$ 和 $P_n(x)$ 可交换.

5・129 求最大的实数 λ,使得当实系数多项式

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$$

的所有根都是非负实数时,只要 $x\geqslant 0$,就有

$$f(x)\geqslant\lambda(x-a)^3$$

并问上式中等号何时成立?

(中国中学生数学冬令营,1999 年)

[解] 设 $f(x)$ 的三个根是 α,β,γ，并设 $0\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma$. 显然，

$$x-a=x+\alpha+\beta+\gamma,$$
$$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma).$$

当 $0\leqslant x\leqslant\alpha$ 时，由于

$$-f(x)=(\alpha-x)(\beta-x)(\gamma-x),$$

利用均值不等式可得

$$-f(x)\leqslant\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma-3x}{3}\right)^3\leqslant\left(\frac{x+\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)^3,$$

即
$$f(x)\geqslant-\frac{1}{27}(x+\alpha+\beta+\gamma)^3$$
$$=-\frac{1}{27}(x-a)^3.$$

显然上式等号成立的充分必要条件是

$$\begin{cases}\alpha-x=\beta-x=\gamma-x\\ \alpha+\beta+\gamma-3x=x+\alpha+\beta+\gamma,\end{cases}$$

即 $x=0,\alpha=\beta=\gamma$.

当 $\beta\leqslant x\leqslant\gamma$ 时，由于

$$-f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(\gamma-x)$$
$$\leqslant\left(\frac{x+\gamma-\alpha-\beta}{3}\right)^3$$
$$\leqslant\left(\frac{x+\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)^3$$
$$=\left(\frac{x-a}{3}\right)^3,$$

即
$$f(x)\geqslant-\frac{1}{27}(x-a)^3.$$

显然，上式等号成立的充分必要条件是

$$\begin{cases}x-\alpha=x-\beta=\gamma-x\\ \alpha=\beta=0\end{cases}$$

即 $\alpha=\beta=0,\gamma=2x$.

当 $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$，或者 $x>\gamma$ 时，

$$f(x)>0\geqslant-\frac{1}{27}(x-\alpha)^3.$$

综上所述，可知所求的 $\lambda = -\frac{1}{27}$，并且等号成立的充要条件是 $x = 0, \alpha = \beta = \gamma$ 或者 $\alpha = \beta = 0, \gamma = 2x$.

5·130 设 p 为素数，$f(x)$ 为整系数 d 次多项式，并且满足：

(1) $f(0) = 0, f(1) = 1$;

(2) 对任一正整数 n，$f(n)$ 被 p 除所得的余数为 0 或 1.

证明：$d \geqslant p - 1$.

（第 38 届国际数学奥林匹克预选题，1997 年）

[证] 用反证法.

设 $d \leqslant p-2$. 则多项式 $f(x)$ 完全由它在 $0, 1, \cdots, p-2$ 处的值所确定. 由拉格朗日插值公式，对于任一 x，有

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p-2} f(k) \cdot \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)(x-k-1)\cdots(x-p+2)}{k!(-1)^{p-k}\cdot(p-k-2)!}$$

将 $x = p-1$ 代入上式，得

$$f(p-1) = \sum_{k=0}^{p-2} f(k) \cdot \frac{(p-1)(p-2)\cdots(p-k)}{(-1)^{p-k}\cdot k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{p-2} f(k) \cdot (-1)^{p-k} \cdot C_{p-1}^{k}. \quad ①$$

对 k 简单地归纳可发现，若 p 是素数，且 $0 \leqslant k \leqslant p-1$，则

$$C_{p-1}^{k} \equiv (-1)^{k} (\bmod p)$$

当 $k = 0$ 时，上述结论显然成立. 设

$$C_{p-1}^{k-1} \equiv (-1)^{k-1} (\bmod p). \quad ②$$

则由

$$C_{p}^{k} \equiv 0 (\bmod p)$$

可得

$$C_{p-1}^{k} = C_{p}^{k} - C_{p-1}^{k-1} \equiv 0 - (-1)^{k-1} = (-1)^{k} (\bmod p)$$

由数学归纳法原理可知，结论 ② 成立.

由 ① 和 ② 得

$$f_{(p-1)} \equiv (-1)^{p} \sum_{k=0}^{p-z} f(k) (\bmod p)$$

第五章 多项式

注意到 $f(0)=0$. 因此上式对任意素数 p 都可化为

$$f(0)+f(1)+\cdots+f(p-1)\equiv 0(\bmod p) \quad ③$$

另一方面,由已知 $f(0)=0, f(1)=1$,

$f(i)\equiv 0$ 或 $1(\bmod p), i=2,3,\cdots,p-1$.

因此

$$f(0)+f(1)+\cdots+f(p-1)\equiv k(\bmod p)$$

其中 k 为满足 $f(i)\equiv 1, 1\leqslant i\leqslant p-1$ 的 i 的个数. 显然

$1\leqslant k\leqslant p-1$, 此与 ③ 式矛盾.

故 $d\geqslant p-1$.

5·131　设 $p(x)$ 是实系数多项式,且对所有的 $x\geqslant 0$, 有 $p(x)>0$. 求证:存在一个正整数 n, 使得 $(1+x)^n p(x)$ 是非负系数多项式.

(第 38 届国际数学奥林匹克预选题,1997 年)

[证]　由已知条件, $p(x)$ 无非负根,所以 $p(x)$ 所有的实根都是负的. 记这些根为

$-a_1, -a_2, \cdots, -a_k$.

其中 $a_i>0, i=1,2,\cdots,k$. 于是 $p(x)$ 在实数范围里的分解式为

$$p(x)=c(x+a_1)\cdots(x+a_k)(x^2-p_1x+q_1)\cdots(x^2-p_mx+q_m),$$

其中 C 为最高项系数,每个 $x^2-p_ix+q_i$ 都无实根.

由于 $c>0$, $x+a_i(i=1,2,\cdots,k)$ 的系数均为正,并且非负系数多项式的乘积仍是非负系数多项式,因此为证结论,只需证明:若 $Q(x)$ 是无实根的实系数多项式,即

$$Q(x)=x^2-px+q, p^2<4q,$$

则存在正整数 n, 使得 $(1+x)^n Q(x)$ 是非负系数多项式.

注意到,对于任意正整数 n, 我们有

$$\begin{aligned}(1+x)^n Q(x)&=\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k(x^2-px+q)\\&=\sum_{k=0}^{n+2}(C_n^{k-2}-pC_n^{k-1}+qC_n^k)\cdot x^k,\end{aligned}$$

其中组合数 C_n^m 当 $m<0$ 或 $m>n$ 时都规定为 0, 因此只需证明:当 n 足够大时,所有的系数

$$C(n,k)=C_n^{k-2}-pC_n^{k-1}+qC_n^k, k=0,1,\cdots,n+2 \text{ 均非负}.$$

事实上,由 $4q>p^2$ 知 $q>0$, 且有

$c(n, n+2)=1>0,$

$c(n, 0)=q>0.$

$c(n, 1)=qn-p>0, n$ 足够大时;

$c(n, n+1)=n-p>0, n$ 足够大时.

而当 $k \in \{2,3\cdots, n\}$ 时,经计算可得

$$c(n, k)=\frac{n!}{k!(n-k+2)!}[AK^{2}-(Bn+C)K+q(n^{2}+3n+2)],$$

其中 $A=1+p+q, B=p+2q, C=1+2p+3q.$

由配方可得

$$\begin{aligned}&AK^{2}-(Bn+C)K+q(n^{2}+3n+2)\\&=A\left(K-\frac{Bn+C}{2A}\right)^{2}+\alpha n^{2}+\beta n+\gamma,\end{aligned}$$

其中 $\alpha=q-\frac{B^{2}}{4A}, \beta=3q-\frac{2BC}{4A}, \gamma=2q-\frac{C^{2}}{4A}.$

由于 $A=1+p+q=Q(-1)>0$,因此上式右端第一项对于所有的 n 和 k 均非负,剩余各项构成了一个关于 n 的二次三项式,其首项系数为

$$\alpha=q-\frac{B^{2}}{4A}=\frac{4q-p^{2}}{4A}>0$$

因此当 n 足够大时

$$\alpha n^{2}+\beta n+\gamma>0$$

从而有

$C(n,k)>0, k \in \{2,3,\cdots, n\}, n$ 足够大时,即存在 n,使 $(1+x)^{n}Q(x)$ 是非负系数多项式.于是原命题得证.

5·132 找出使得如下命题成立的所有正整数 k:若 $F(x)$ 是整系数多项式,且满足条件:对任意 $C \in \{0,1,\cdots, k+1\}, 0 \leqslant F(c) \leqslant k$,则

$$F(0)=F(1)=\cdots=F(k+1).$$

(第 38 届国际数学奥林匹克预选题,1997 年)

[解] 此命题当且仅当 $k \geqslant 4$ 时成立.

我们先证明它对于 $k \geqslant 4$ 时都成立.

事实上,如果 $F(x)$ 满足命题的条件,且 $k \geqslant 4$.由于 $F(k+1)-$

$F(0)$ 是 $k+1$ 的倍数,并由条件可知 $|F(k+1)-F(0)|\leqslant k$,因此

$$F(k+1)=F(0)$$

从而有

$$F(x)-F(0)=x(x-k-1)G(x),$$

其中 $G(x)$ 是整系数多项式.

于是,对于任意 $C\in\{1,2\cdots,k\}$,都有

$$k\geqslant|F(c)-F(0)|=c(k+1-c)|G(c)|. \qquad ①$$

因为不等式 $c(k+1-c)>k$ 等价于 $(c-1)(k-c)>0$,所以它对任意的 $C\in\{2,3\cdots,k-1\}$ 都成立.再由 ① 可得

$$|G(c)|\leqslant 1,C\in\{2,3,\cdots,k-1\}.$$

因为 $G(c)$ 是整数,所以

$$G(c)=0,C\in\{2,3,\cdots,k-1\}.$$

即 $2,3,\cdots,k-1$ 都是整系数多项式 $G(x)$ 的根.于是我们有

$$F(x)-F(0)=x(x-k-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-k+1)H(x) \qquad ②$$

其中 $H(x)$ 是整系数多项式.

显然,由上式可得

$$F(c)=F(0),C\in\{2,3\cdots,k-1\}.$$

为证结论,还须证明

$$H(c)=0,C\in\{1,k-1\}.$$

由 ② 可知,当 $C=1$ 或 $C=k$ 时都有

$$k\geqslant|F(c)-F(0)|=(k-2)!k\cdot|H(c)|,$$

由于 $k\geqslant 4$,因此 $(k-2)!>1$,从而有

$$|H(c)|<1,$$

注意到 $H(c)$ 是整数,于是得

$$H(c)=0,C\in\{1,k\}.$$

至此,我们证明了题中所给的命题对于任意的 $k\geqslant 4$ 都成立.

注意到在上述证明过程中,对于任意的 $k\geqslant 1$,$F(x)-F(0)$ 都有根 0 和 $k+1$.当 $k=3$ 时,$F(x)-F(0)$ 还有根 2,我们依据这些线索构造反例如下:

当 $k=1$ 时,令 $F(x)=x(2-x)$;

当 $k=2$ 时,令 $F(x)=x(3-x)$;

当 $k=3$ 时,令 $F(x)=x(4-x)(x-2)^2$.
以上 3 个反例足以说明,当 $k=1,2,3$ 时,题中所给的命题不成立.

综上所述,能使题中命题成立的所有正整数 k 的集合为 $\{k \mid k \geqslant 4, k \in N\}$.

5・133 设 n 是正偶数.证明存在一个正整数 k,满足

$$k=f(x) \cdot (x+1)^n+g(x)(x^n+1),$$

其中 $f(x),g(x)$ 是某个整系数多项式.如果用 k_0 表示满足上式的最小的 k.试将 k_0 表示为 n 的系数.

(第 37 届国际数学奥林匹克预选题,1996 年)

[解] 先证 k 的存在性.

事实上,n 为偶数时,$((x+1)^n, x^n+1)=1$.于是存在有理系数多项式 $f^*(x),g^*(x)$,使得

$$1=f^*(x) \cdot (x+1)^n+g^*(x)(x^n+1).$$

设 k 为 $f^*(x)$ 和 $g^*(x)$ 的所有系数的分母的一个公倍数,记 $f(x)=kf^*(x)$,$g(x)=kg^*(x)$,则 $f(x),g(x)$ 是整系数多项式,且

$$k=f(x)(x+1)^n+g(x)(x^n+1).$$

于是,k 的存在性得证.

下面来求 k 的最小值 k_0.

设 $n=2^\alpha t$,t 为奇数,α 为非负整数.记 $m=2^\alpha$.于是,我们有

$$x^n+1=(x^m)^t+1=(x^m+1) \cdot h(x),$$

其中 $h(x)$ 是整系数多项式.

设 $x^m+1=0$ 的 m 个根为

$$w_j=e^{i \cdot \frac{2j-1}{m}\pi}, j=1,2,\cdots,m, m=2^\alpha.$$

若正整数 k,整系数多项式 $f(x),g(x)$ 满足

$$k=f(x) \cdot (x+1)^n+g(x)(x^n+1),$$

则

$$k=f(w_j)(w_j+1)^n, j=1,2,\cdots,m.$$

从而有

$$k^m=\prod_{j=1}^{m} f(w_j) \cdot \prod_{j=1}^{m}(w_j+1)^n \cdot$$

设 $\sigma_1=\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_m$,

$$\sigma_2 = \omega_1\omega_2 + \omega_1\omega_3 + \cdots + \omega_{m-1}\omega_m,$$

$\cdots\cdots\cdots$

$$\sigma_m = \omega_1\omega_2\cdots\omega_m.$$

由韦达定理知 σ_j 为整数, $j = 1,2,\cdots,m$. 因为 $\prod_{j=1}^{m} f(w_j)$ 是关于 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m$ 的整系数对称多项式,所以 $\prod_{j=1}^{m} f(w_j)$ 可表示为 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_m$ 的整系数多项式,于是它为整数. 又因为

$$\begin{aligned}&\prod_{j=1}^{m}(w_j+1)^n = [\prod_{j=1}^{m}(w_j+1)]^n\\&= (1+\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_m)^n\\&= 2^n.\end{aligned}$$

所以, $2^n \mid k^m$, 于是有 $2^t \mid k, k \geqslant 2^t$.

另一方面,我们记

$E(x) = (x+1)(x^3+1)\cdots(x^{2m-1}+1) = (x+1)^m \cdot F(x)$.

对于固定的 $j \in \{1,2,\cdots,m\}$, 考虑集合

$$\{\omega_j,\omega_j^3,\omega_j^5,\cdots,\omega_j^{2m-1}\},$$

其中的元素均为 $x^m+1=0$ 的根,且两两不等,故它是 $x^m+1=0$ 的解集. 于是

$$\begin{aligned}E(W_j) &= (1+\omega_j)(1+\omega_j^3)\cdots(1+\omega_j^{2m-1})\\&= (1+\omega_1)(1+\omega_2)\cdots(1+\omega_m)\\&= 2\end{aligned}$$

即 ω_j 是 $E(x)-2$ 的根. 因此可设

$$G(x)(x^m+1)+2 = E(x) = (x+1)^m F(x),$$

两边 t 次方得

$$G^*(x)\cdot(x^m+1)+2^t = (x+1)^n F^t(x) \quad ①$$

其中 $G^*(x)$ 为某个整系数多项式.

由于

$$x^n+1 = (x^m+1)h(x),$$

其中 $h(x)$ 满足 $h(-1)=1$, 因此可设

$$c(x)\cdot(x+1) = h(x)-1,$$

两边 n 次方,得

$$C^n(x)\cdot(x+1)^n = h(x)\cdot d(x)+1 \qquad ②$$

其中 $d(x)$ 为某个整系数多项式.

由 ① 和 ② 得

$$\begin{aligned}
&G^*(x)d(x)\cdot(x^n+1)\\
&=G^*(x)\cdot(x^m+1)\cdot d(x)\cdot h(x)\\
&=[(x+1)^nF^t(x)-2^t]\cdot[C^n(x)(x+1)^n-1]\\
&=(x+1)^n\cdot U(x)+2^t,
\end{aligned}$$

其中 $U(x)$ 为某个整系数多项式.

因此,存在整系数多项式 $f(x),g(x)$,其中

$$f(x)=-U(x),g(x)=G^*(x)\cdot d(x),$$

使得

$$f(x)\cdot(x+1)^n+g(x)\cdot(x^n+1)=2^t.$$

综上所述,k 的最小值$k_0=2^t$,其中 $n=2^\alpha\cdot t$,t 为奇数,α 为非负整数.

5·134 对于$-1\leqslant x\leqslant 1$,令

$$T_n(x)=\frac{1}{2^n}[(x+\sqrt{1-x^2}i)^n+(x-\sqrt{1-x^2}i)^n],n\in N.$$

(1) 求证:对于 $-1\leqslant x\leqslant 1$,$T_n(x)$ 是 x 的首项系数为 1 的 n 次多项式,且 $T_n(x)$ 的最大值是$\frac{1}{2^{n-1}}$.

(2) 假设 $p(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是首项系数为 1 的实系数多项式,使得对在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 内的所有 x,$p(x)>-\frac{1}{2^{n-1}}$,求证:存在$[-1,1]$内的 x^*,使得

$$p(x^*)\geqslant\frac{1}{2^{n-1}}.$$

(中国台北市数学奥林匹克,1994 年)

[证] (1) 令

$$T_n^*(x)=2^{n-1}T_n(x),$$

则

$$T_1^*(x)=T_1(x)=x,$$

$$T_2^*(x)=2T_2(x)=2x^2-1.$$

因此，$T_1^*(x)$，$T_2^*(x)$分别是首项系数为1的一次多项式和首项系数为2的二次多项式.

设$T_{n-1}^*(x)$，$T_{n-2}^*(x)$分别是首项系数为2^{n-2}的$n-1$次多项式和首项系数为2^{n-3}的$n-2$次多项式，则

$$2xT_{n-1}^*(x)-T_{n-2}^*(x)$$

是n次多项式，且首项系数为2^{n-1}，但

$$\begin{aligned}
&2xT_{n-1}^*(x)-T_{n-2}^*(x)\\
=\ &2^{n-1}xT_{n-1}(x)-2^{n-3}T_{n-2}(x)\\
=\ &x[(x+\sqrt{1-x^2}i)^{n-1}+(x-\sqrt{1-x^2}i)^{n-1}]-\frac{1}{2}[(x+\\
&\sqrt{1-x^2}i)^{n-2}+(x-\sqrt{1-x^2}i)^{n-2}]\\
=\ &(x+\sqrt{1-x^2}i)^{n-2}\left[x(x+\sqrt{1-x^2}i)-\frac{1}{2}\right]+(x-\\
&\sqrt{1-x^2}i)^{n-2}\left[x(x-\sqrt{1-x^2}i)-\frac{1}{2}\right]\\
=\ &(x+\sqrt{1-x^2}i)^{n-2}\cdot\frac{1}{2}[x^2+2x\sqrt{1-x^2}i-(1-x^2)]\\
&+(x-\sqrt{1-x^2}i)^{n-2}\cdot\frac{1}{2}[x^2-2x\sqrt{1-x^2}i-(1-\\
&x^2)]\\
=\ &\frac{1}{2}[(x+\sqrt{1-x^2}i)^n+(x-\sqrt{1-x^2}i)^n]\\
=\ &2^{n-1}T_n(x)\\
=\ &T_n^*(x).
\end{aligned}$$

因此$T_n^*(x)$是首项系数为2^{n-1}的n次多项式.由数学归纳法原理知，对于任意自然数n，$T_n^*(x)$是首项系数为2^{n-1}的n次多项式.

由此即得，对于任意自然数n，$T_n(x)$是首项系数为1的n次多项式.

因为$-1\leqslant x\leqslant 1$，所以可令

$$x=\cos\theta,0\leqslant\theta\leqslant\pi.$$

代入已知条件中，得

$$T_n^*(x)=2^{n-1}\cdot T_n(x)$$

$$= \frac{1}{2}[(\cos\theta + i\sin\theta)^n + (\cos\theta - i\sin\theta)^n]$$

$$= \frac{1}{2}[(\cos n\theta + i\sin n\theta) + (\cos n\theta - i\sin n\theta)]$$

$$= \cos n\theta.$$

由上式,有

$$|T_n^*(x)| = |\cos n\theta| \leqslant 1, \forall x \in [-1,1],$$

因此

$$|T_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}|T_n^*(x)| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}.$$

另一方面,当 $x=1$ 时,显然 $T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}$. 所以 $T_n(x)$ 的最大值为$\frac{1}{2^{n-1}}$.

(2) 由于 $T_n(x)$ 是在$[-1,1]$上定义的 x 的首项系数为 1 的 n 次多项式,因此对于$[-1,1]$上任意一个首项系数为1的 n 次实系数多项式 $p(x)$,一定存在 n 个确定的实数$b_1,b_2,\cdots,b_n$,使得对于任意的 $x \in [-1,1]$,有

$$p(x) = T_n(x) + b_1 T_{n-1}(x) + \cdots + b_{n-1}T_1(x) + b_n.$$

令

$$x_k = \cos\frac{2k+1}{n}\pi, (k = 0,1,2,\cdots,n-1)$$

则对于 $j = 1,2,\cdots,n$,有

$$T_j(x_k) = \frac{1}{2^j}\left[\left(\cos\frac{2k+1}{n}\pi + i\sin\frac{2k+1}{n}\pi\right)^j + \left(\cos\frac{2k+1}{n}\pi - i\sin\frac{2k+1}{n}\pi\right)^j\right]$$

$$= \frac{1}{2^{j-1}}\cos\frac{(2k+1)j}{n}\pi,$$

利用以上三个式子,有

$$\sum_{k=0}^{n-1}P(x_k) = \sum_{k=0}^{n-1}T_n(x_k) + b_1\sum_{k=0}^{n-1}T_{n-1}(x_k) + \cdots + b_{n-1}\sum_{K=0}^{n-1}T_1(x_k) + nb_n$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} T_n(x_k) + \sum_{j=1}^{n-1} \left(b_j \sum_{k=0}^{n-1} T_{n-j}(x_k) \right) + nb_n$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \cos(2k+1)\pi$$

$$+ \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{b_j}{2^{n-j-1}} \sum_{K=0}^{n-1} \cos \frac{(2k+1)(n-j)}{n} \pi \right) + nb_n$$

$$= -\frac{n}{2^{n-1}} +$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left\{ \frac{b_j}{2^{n-j} \cdot \sin \frac{(n-j)}{n} \pi} \sum_{j=0}^{n-1} \left[\sin \frac{2(k+1)(n-j)}{n} \pi - \sin \frac{2k(n-j)}{n} \pi \right] \right\} +$$

$$nb_n$$

$$= -\frac{n}{2^{n-1}} + nb_n \qquad ①$$

由已知,

$$p(x_k) > -\frac{1}{2^{n-1}},$$

因此

$$\sum_{k=0}^{n-1} p(x_k) > -\frac{n}{2^{n-1}}$$

由上式及①式,得

$$b_n > 0.$$

令

$$x_k^* = \cos \frac{2k\pi}{n}, (k = 0, 1, 2, \cdots, n-1),$$

于是,类似地可得

$$\sum_{k=0}^{n-1} p(x_k^*) = \sum_{k=0}^{n-1} T_n(x_k^*) + b_1 \sum_{k=0}^{n-1} T_{n-1}(x_k^*) + \cdots + b_{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} T_1(x_k^*)$$
$$+ nb_n$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} T_n(x_k^*) + \sum_{j=1}^{n-1} \left[b_{n-j} \sum_{k=0}^{n-1} T_j(x_k^*) \right] + nb_n$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\cos 2k\pi + \sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{b_{n-j}}{2^{j-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{2kj}{n}\pi\right) + nb_n$$

$$= \frac{n}{2^{n-1}} +$$

$$\sum_{j=1}^{n-1}\left\{\frac{b_{n-j}}{2^j\sin\frac{j\pi}{n}}\cdot\sum_{K=0}^{n-1}\left[\sin\frac{(2k+1)j}{n}\pi + \sin\frac{(2k-1)j}{n}\pi\right]\right\} +$$

$$nb_n$$

$$= \frac{n}{2^{n-1}} +$$

$$\sum_{j=1}^{n-1}\left\{\frac{b_{n-j}}{2^j\sin\frac{j\pi}{n}}\left[\sin\frac{(2n-1)j}{n}\pi + \sin\frac{j\pi}{n}\right]\right\} + nb_n$$

$$= \frac{n}{2^{n-1}} + nb_n$$

即
$$\sum_{k=0}^{n-1}p(x_k^*) = \frac{n}{2^{n-1}} + nb_n$$

利用上式及 $b_n > 0$ 可得

$$\sum_{k=0}^{n-1}p(x_k^*) > \frac{n}{2^{n-1}}$$

由抽屉原则,在 n 个实数 $p(x_0^*), p(x_1^*), \cdots, p(x_{n-1}^*)$ 中必有一数

$$p(x_l^*) > \frac{1}{2^{n-1}},$$

其中

$$|x_l^*| = \left|\cos\frac{2l\pi}{n}\right| \leqslant 1,$$

故本题得证.

5・135　给定1个次数 $\geqslant 1$ 的实系数多项式 $f(x)$. 证明:对每个 $c > 0$,存在一个正整数 n_0,满足如下条件:对每个次数 $\geqslant n_0$ 且首项系数等于 1 的实系数多项式 $p(x)$,满足不等式

$$|f(p(x))| \leqslant C$$

的整数 x 的个数均不超过 $p(x)$ 的次数.

(越南国家队选拔试题,1992 年)

[证] 由已知条件可知,对每个 $C>0$,必存在 $x_0>0$,使得当 $|x|>x_0$ 时,就有 $|f(x)|>C$.

设 $p(x)$ 是 k 次多项式,$b_1<b_2<\cdots b_{k+1}$ 是 $k+1$ 个整数,则由拉格朗日插值多项式可知

$$p(x)=\sum_{i=1}^{k+1}p(b_i)\cdot\prod_{j\neq i}\frac{x-b_j}{b_i-b_j}.$$

因为 $p(x)$ 的首项系数为 1,所以

$$\begin{aligned}1&=\sum_{i=1}^{k+1}p(b_i)\cdot\prod_{j\neq i}\frac{1}{b_i-b_j}\\&\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant k+1}|p(b_i)|\cdot\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{(i-1)!(k+1-i)!}\\&=\frac{1}{k!}\max_{1\leqslant i\leqslant k+1}|p(b_i)|\cdot\sum_{i=1}^{k+1}\frac{k!}{(i-1)!(k-i+1)!}\\&=\frac{2^k}{k!}\max_{1\leqslant i\leqslant k+1}|p(b_i)|,\end{aligned}$$

即

$$\max_{1\leqslant i\leqslant k+1}|p(b_i)|\geqslant\frac{K!}{2^k}$$

取 n_0 使得

$$\frac{n_0!}{2^{n_0}}>x_0,$$

于是,当 $p(x)$ 的次数 $k\geqslant n_0$ 时,就有

$$\max_{1\leqslant i\leqslant k+1}|p(b_i)|\geqslant\frac{k!}{2^k}\geqslant\frac{n_0!}{2^{n_0}}>x_0,$$

从而有

$$\left|f(\max_{1\leqslant i\leqslant k+1}|p(b_i))\right|>C$$

由 $b_1,b_2,\cdots,b_{k+1}$ 的任意性可知,使得

$$|f(p(x))|\leqslant C$$

的整数 x 的个数不超过 $p(x)$ 的次数 k.

5·136 试证能将区间[0,1]分成若干个黑白相间的小区间,使得任意 2 次多项式 $p(x)$ 在所有黑色小区间上的增量的和等于在所有白色小区间上的增量的和(称 $p(a)-p(b)$ 为 $p(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的增量).

对 3 次多项式情形,同样的结论是否成立?

对 5 次多项式情形,同样的结论是否成立?

(中国国家队选拔赛,1995 年)

[证] 先证明更一般的结论.

定理 设 l 是正实数,k 是正整数. 可以将$[0,2^k l]$分成若干子区间,然后将这些子区间相间地染成黑色区间和白色区间,使得任何一个不超过 k 次的多项式在所有的黑色区间上的增量的和等于它在所有白色区间上的增量的和.

用数学归纳法来证明这个定理.

对于 $k=1$,显然可将$[0,2l]$分成黑色区间$[0,l]$和白色区间$[l,2l]$.

设对 $k=n$ 时定理成立. 约定以 B_n 表示所述的黑色区间组成的集合,以 W_n 表示所述的白色区间组成的集合. 对于黑色区间 $b\in B_n$ 和白色区间 $\omega\in W_n$,约定用 $\triangle_b f$ 和 $\triangle_\omega f$ 表示多项式 f 在 b 和 ω 上的增量.

对于任意一个不超过 $n+1$ 次的多项式 $f(x)$,我们记

$$g(x)=f(x+2^n l),$$

$$\varphi(x)=f(x)-g(x).$$

易见,$\varphi(x)$ 是不超过 n 次的多项式,因而由归纳假设,我们有

$$\sum_{b\in B_n}\triangle_b\varphi=\sum_{\omega\in W_n}\triangle_\omega\varphi,$$

$$\sum_{b\in B_n}\triangle_b f+\sum_{\omega\in W_n}\triangle_\omega g=\sum_{\omega\in W_n}\triangle_\omega f+\sum_{b\in B_n}\triangle_b g. \qquad ①$$

如果将子区间族 B_n 中所有的区间都沿数轴正方向平移一个距离 τ,那么就得到一个新的子区间族. 约定将这样得到的新的子区间族记为 $B_n+\tau$. 对记号 $Wn+\tau$ 也作类似的约定. 我们记

$$B'_{n+1}=B_n\cup(W_n+2^n l),$$

$$W'_{n+1}=W_n\cup(B_n+2^n l).$$

则 $B'_{n+1}\cup W'_{n+1}$ 构成区间$[0,2^{n+1}l]$的一个分划,并且可将①式写成

$$\sum_{b\in B'_{n+1}}\triangle_b f=\sum_{b\in W'_{n+1}}\triangle_\omega f.$$

由 $B'_{n+1}\cup W'_{n+1}$ 作成的黑白色区间的分划可能不是黑白相间的,但是,只需把相邻的同色区间合并成一个小区间,并保持原有的染色,

就得到一个区间$[0,2^{n+1}l]$的黑白区间相间的分划$B_{n+1}\cup W_{n+1}$，并且有

$$\sum_{b\in B_{n+1}}\triangle_b f=\sum_{w\in W_{n+1}}\triangle_\omega f.$$

故定理得证.取$l=\frac{1}{2^k}$，则题中所有问题都有了肯定的回答.

第4节　求多项式

5·137　求所有满足$P(0)=0$且

$$P(x)\equiv\frac{1}{2}(P(x+1)+P(x-1)),x\in R$$

的多项式$P(x)$.

（美国纽约数学竞赛，1975年）

[解]　多项式$P(x)=ax$满足题中条件，其中a是常数.下面对$n\in Z^+$用归纳法证明.

所求的多项式$P(x)$满足$P(n)=nP(1)$.当$n=0$和$n=1$时，等式显然成立.设等式对$n-1$和n成立，其中$n\in N$，则

$$\begin{aligned}P(n+1)&=2P(n)-P(n-1)\\&=2nP(1)-(n-1)P(1)\\&=(n+1)P(1),\end{aligned}$$

即等式对$n+1$也成立.因此多项式$P(x)-P(1)x$有无限多个根$x=0,1,2,\cdots$.于是它应当恒等于零.所以所求的多项式具有$P(x)=ax$的形式.

5·138　求所有满足

$$xP(x-1)\equiv(x-2)P(x),x\in R$$

的多项式$P(x)$.

（前民主德国数学竞赛，1977年）

[解]　将$x=0,2$代入题中的恒等式，可知多项式$P(x)$有根0和1，即它被多项式x^2-x整除.其次，将$P(x)\equiv(x^2-x)Q(x)$代入恒等式得

$$x[(x-1)^2-(x-1)]Q(x-1)\equiv(x-2)(x^2-x)Q(x),$$
$$x(x-1)(x-2)Q(x-1)\equiv x(x-1)(x-2)Q(x).$$

故多项式 $Q(x)$ 满足恒等式

$$Q(x) \equiv Q(x-1).$$

由此得到 $Q(0)=Q(1)=Q(2)=\cdots$

因此 $Q(x)\equiv a$，其中 a 是常数，于是所求的多项式为

$P(x)=a(x^2-x)$. 反之，容易验证，所有这样的多项式也都满足题中的恒等式.

5·139　求所有满足

$$(x-1)P(x+1)-(x+2)P(x)\equiv 0, x\in R$$

的多项式 $P(x)$.

（美国纽约数学竞赛，1976 年）

［解］　将 $x=1,-2,0$ 代入题中的恒等式，可知多项式有根 0，± 1. 即它被 x^3-x 整除. 其次，将 $P(x)=(x^3-x)Q(x)$ 代入恒等式，可知多项式 $Q(x)$ 满足恒等式 $Q(x)\equiv Q(x-1)$，由此得到

$$Q(0)=Q(-1)=Q(-2)=\cdots$$

因而 $Q(x)\equiv a$，a 为常数，于是，所求的多项式 $P(x)=a(x^3-x)$. 反之，容易验证所有这种形式的多项式也都满足题中的恒等式.

5·140　对每个 $n\in N$，是否存在非零的 n 元整系数多项式 P 和 Q，使得

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$
$$\equiv Q(x_1{}^2,x_2{}^2,\cdots,x_n{}^2), x_1,x_2,\cdots,x_n\in R.$$

（匈牙利数学奥林匹克，1977 年）

［解］　令 $Q'(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

$$=\prod_{\varepsilon\in A}(\varepsilon_1x_1+\varepsilon_2x_2+\cdots+\varepsilon_nx_n).$$

其中 $\varepsilon_i\in\{-1,1\}$，$(i=1,2,\cdots,n)$

$$\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$$

A 是 2^n 个数组 ε 的集合.

则　$Q'(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1+x_2+\cdots+x_n)P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

且　P,Q' 均为非零整系数多项式.

又由对称性知，对任意的 k，都有

$$Q'(x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots,x_n)$$
$$\equiv Q'(x_1,x_2,\cdots,-x_k,\cdots,x_n).$$

$\therefore$ 含有 x_k 项的 x_k 的指数必为偶数,故

$$Q'(x_1,x_2,\cdots,x_n)=Q(x_1^2,x_2^2,\cdots,x_n^2).$$

故原命题得证.

5·141 求所有的非零多项式 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 满足方程 $f(x^2)=(f(x))^2$,其中 x 为实数.

(罗马尼亚数学奥林匹克,1980 年)

[解] 设 n 次多项式 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ 满足条件 $(f(x))^2=f(x^2),x\in R$.

因为 x^{2n} 的系数应相等,所以 $a_n{}^2=a_n$,因为 $a_n\neq0$,所以 $a_n=1$.

同样地,x^{2n-1} 的系数应相等,因此有

$$2a_{n-1}a_n=0,\text{即 } a_{n-1}=0.$$

同理可得 $a_{n-2}=\cdots=a_1=a_0=0$

所以 $f(x)=x^n$.

5·142 求所有满足

$$P(x^2-2x)\equiv(P(x-2))^2,x\in R$$

的非零多项式 $P(x)$.

(保加利亚数学竞赛,1976 年)

[解] 记 $y=x-1,Q(y)=P(y-1)$,则有

$$(P(x-2)^2)=(P(y-1))^2=(Q(y))^2,$$

$$P(x^2-2x)=P(y^2-1)=Q(y^2).$$

于是原恒等式化为

$$Q(y^2)\equiv(Q(y))^2,y\in R.$$

由上题可知 $Q(y)=y^n$.

由此 $P(y)=(y+1)^n,n\in Z^+$.

即 $P(x)=(x+1)^n,n\in Z^+$.

5·143 求所有的三次实系数多项式 $P(x)$ 和 $Q(x)$,使得下面的四个条件能够满足:

(1) 这两个多项式在点 $x=1,2,3,4$ 只取值 0 或 1;

(2) 如果 $P(1)=0$ 或 $P(2)=1$,则 $Q(1)=Q(3)=1$;

(3) 如果 $P(2)=0$ 或 $P(4)=0$,则 $Q(2)=Q(4)=0$;

(4) 如果 $P(3)=1$ 或 $P(4)=1$，则 $Q(1)=0$.

（前民主德国数学竞赛，1980 年）

[解] 设多项式 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 满足题中条件，

记 $\alpha_k=P(k),\beta_k=Q(k)$，

其中 $k=1,2,3,4$. 因为多项式 $P(x)$、$Q(x)$ 是三次的，所以“四元数组” $\overline{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}$ 与 $\overline{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4}$ 不能是 0000，0110，或 1111. 另一方面，“四元数组” $\overline{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}$ 也不能是 $\overline{0\alpha_2 1\alpha_4}$，$\overline{0\alpha_2\alpha_3 1}$，$\overline{\alpha_1 11\alpha_4}$ 或 $\overline{\alpha_1 1\alpha_3 1}$. 否则，由条件(2)与(4)得到，$\beta_1=1$ 且 $\beta_1=0$，矛盾. 因此，由条件(3)，由两种“四元数组”作成的对于 $(\overline{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4};\overline{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4})$ 是且只能是下述七种之一：(0100;1010)，(1000;0010)，(1000;1000)，(1000;1010)，(1010;0010)，(1011;0010) 和 (1100;1010). 由于其中只用到了六个不同的“四元数组”，即 0010，0100，1000，1010，1011 和 1100，由拉格朗日插值公式每个“四元数组” $\overline{\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4}$ 可以作出一个多项式 $R(x)$，使得 $R(k)=\gamma_k$，$k=1,2,3,4$. 于是得到六个相应的多项式

$$R_1(x)=-\frac{1}{2}x^3+\frac{7}{2}x^2-7x+4,$$

$$R_2(x)=\frac{1}{2}x^3-4x^2+\frac{19}{2}x-6,$$

$$R_3(x)=-\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{13}{3}x+4,$$

$$R_4(x)=-\frac{2}{3}x^3+5x^2-\frac{34}{3}x+8,$$

$$R_5(x)=-\frac{1}{2}x^3+4x^2-\frac{19}{2}x+7,$$

$$R_6(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+\frac{31}{6}x-2.$$

因此，多项式 $(P(x);Q(x))$ 是下列各对之一：$(R_2(x),R_4(x))$，$(R_3(x),R_1(x))$，$(R_3(x),R_3(x))$，$(R_3(x),R_4(x))$，$(R_4(x),R_1(x))$，$(R_5(x),R_1(x))$，$(R_6(x),R_4(x))$.

5·144 求所有满足

$$P(x)P(2x^2)\equiv P(2x^3+x),x\in R$$

的实系数非零多项式 $P(x)$.

（保加利亚数学竞赛，1979 年）

[解] 若 $P(x)=a$(常数),则 $a^2=a, a=1$,显然 $P(x)=1$ 满足条件.

代数卷

设非零多项式 $P(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ 满足题中条件,其中 $a_n\neq 0$,则比较原恒等式中 x^{3n} 和 x^0 的系数,得到 $a_n{}^2=a_n, a_0{}^2=a_0$,从而 $a_n=1$.如果 $a_0=0$,则 $P(x)=x^lP_1(x)$,其中

$$P_1(0)\neq 0, l\in N,$$

并且由 $x^lP_1(x)(2x^2)^lP_1(2x^2)\equiv(2x^3+x)^lP_1(2x^3+x)$,

得到 $2^lx^{2l}P_1(x)P_1(2x^2)\equiv(2x^2+1)^lP_1(2x^3+x)$,

于是 $P_1(0)=0$,矛盾.因此 $a_0=1$,设 $\alpha=\rho(\cos\phi+i\sin\phi)$ 是多项式 $P(x)$ 的根.因为

$$P(2\alpha^3+\alpha)=P(\alpha)P(2\alpha^2),$$

所以 $2\alpha^3+\alpha$ 也是根.其次

$$|2\alpha^3+\alpha|=|\alpha|\cdot|2\alpha^2+1|\geqslant|\alpha|\cdot(2|\alpha|^2-1).$$

所以,若 $|\alpha|=\rho>1$,则 $|2\alpha^3+\alpha|>|\alpha|$,从而非零多项式 $P(x)$ 有无限多个不同的根

$$\beta_1=\alpha, \beta_{j+1}=2\beta_j{}^3+\beta_j, j=1,2,\cdots,$$

不可能,因此多项式 $P(x)$ 的根的模不大于1,但由韦达定理,诸根的乘积的模为1,所以没有模小于1的根.于是 $\rho=1$,并由

$$\begin{aligned}1&=|2\alpha^3+\alpha|^2=|2\alpha^2+1|^2\\&=|2\cos2\phi+1+2\sin2\phi i|^2\\&=4\cos^22\phi+4\cos2\phi+1+4\sin^22\phi\\&=4\cos2\phi+5\end{aligned}$$

得到 $\phi=\dfrac{\pi}{2}+m\pi, m\in Z.$

即 $\alpha=\pm i$.因为 $P(x)$ 是实系数的,所以

$$P(x)=(x^2+1)^k, k\in Z^+.$$

最后,可以验证,所有这种形式的多项式都满足题中条件.

5·145 设多项式 $R(x)$ 的次数小于4,并且存在多项式 $P(x)$,使得

$$\begin{aligned}&7\sin^{31}t+8\sin^{13}t-5\sin^5t\cos^4t-10\sin^7t+5\sin^5t-2\\&\equiv P(\sin t)[\sin^4t-(1+\sin t)(\cos^2t-2)]+R(\sin t),\end{aligned}$$

这里 $t \in R$. 试求所有这样的 $R(x)$.

(罗马尼亚数学奥林匹克,1996 年)

[解] 注意到 $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$,并作代换 $\sin t = x$,我们得到,题中要求的次数小于 4 的多项式是多项式

$$S(x) = 7x^{31} + 8x^{13} - 5x^9 - 2$$

除以多项式

$$Q(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

的余式,因为恒等式

$$S(x) = P(x)Q(x) + R(x)$$

对所有 $x \in [-1,1]$ 应当成立,从而对所有 $x \in C$ 也成立. 因为 $(x-1)Q(x) = x^5 - 1$,所以变量 x 有 4 个不同的值,使得 $Q(x) = 0$. 对每个这样的 x 值都有 $x^5 = 1$,并且

$$\begin{aligned} R(x) &= S(x) \\ &= 7x^{31} + 8x^{13} - 5x^9 - 2 \\ &= 7x + 8x^3 - 5x^4 - 2 + 5Q(x) \\ &= 13x^3 + 5x^2 + 12x + 3. \end{aligned}$$

于是 $R(x)$ 和 $13x^3 + 5x^2 + 12x + 3$ 在 4 个不同的点取值相同,但它们的次数都不大于 3,所以它们相等.

5·146 求整系数多项式 $P(x)$ 与 $Q(x)$,满足

$$\frac{P(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}{Q(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})} = \sqrt{3} + \sqrt{2}.$$

(加拿大国家集训队训练题)

[解] 令 $S = \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$. 我们先求多项式 $A(x)$ 与 $Q(x)$,使 $\dfrac{A(S)}{Q(S)} = \sqrt{5}$. 为此,我们考虑

$$x - \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5},\ x + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5},$$
$$x + \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5},\ x - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}$$

的乘积,它等于 $x^4 - 4\sqrt{5}x^3 + 20x^2 - 24$. 由此可见,如果我们令

$$A(x) = x^4 + 20x^2 - 24,\ Q(x) = 4x^3.$$

那么就有 $\quad A(S) - \sqrt{5}Q(S) = 0$

即 $\quad \dfrac{A(S)}{Q(S)} = \sqrt{5},$

第五章 多项式

$$\frac{S^4+20S^2-24}{4S^3}=\sqrt{5}.$$

于是,我们得 $\sqrt{2}+\sqrt{3}=S-\sqrt{5}=\dfrac{3S^4-20S^2+24}{4S^3}$.

这就是说,可取

$P(x)=3x^4-20x^2+24, Q(x)=4x^3$ 满足

$$\frac{P(S)}{Q(S)}=\sqrt{3}+\sqrt{2}.$$

5・147 求出满足下列条件的所有含两个变量的多项式:

(1) P 是 n 次齐次的.即对所有实数 t、x、y,有

$P(tx,ty)=t^nP(x,y)$;

(2) 对所有实数 a、b、c 有

$$P(a+b,c)+P(b+c,a)+P(c+a,b)=0;$$

(3) $P(1,0)=1$.

(第 17 届国际数学奥林匹克,1975 年)

[解] 设 P 是满足条件(1)~(3)的 n 次多项式.由于常数多项式不可能同时满足(2)和(3),故 $n\geqslant 1$.

在(2)中令 $a=b, c=-2a$,则由 P 的齐次性得

$$\begin{aligned}0&=P(2a,-2a)+P(-a,a)+P(-a,a)\\&=[(-2)^n+2]P(-a,a),\end{aligned}$$

若 $n>1$,则有 $P(-a,a)=0$,因而 $P(x,y)$ 能被 $x+y$ 整除.

设 $P(x,y)=(x+y)P_1(x,y)$,

则由(2)得

$$P_1(a+b,c)(a+b+c)+P_1(b+c,a)(a+b+c)+P_1(c+a,b)(a+b+c)=0,$$

故 $P_1(a+b,c)+P_1(b+c,a)+P_1(c+a,b)=0$, P_1 仍是齐次的,

且 $P_1(1,0)=P_1(1,0)(1+0)=P(1,0)=1$,

即 P_1 也满足条件(1)~(3),它的次数为 $n-1$.

如果 $n-1>1$,同样可再构造一个 $n-2$ 次齐次多项式 P_2,它满足条件(1)~(3),并且

$$P_1(x,y)=(x+y)P_2(x,y),$$

如此下去,最后总会得到一个一次多项式

$$P_{n-1}(x,y) = mx + ny.$$

由条件(2)令 $a = 1, b = c = 0$,得 $2m + n = 0$,

再由(3)得 $m = 1$,故 $n = -2$,而

$$P(x,y) = (x+y)^{n-1}P_{n-1}(x,y) = (x+y)^{n-1}(x-2y),$$

不难验证这种形状的多项式的确满足条件(1) ~ (3),这样我们就求出了所有满足条件(1) ~ (3)的齐次多项式.

5·148 (1) 是否存在关于变量 x,y,z 的多项式

$$P = P(x,y,z), Q = Q(x,y,z), R = R(x,y,z)$$

使恒等式

$$(x-y+1)^3P + (y-z-1)^3Q + (z-2x+1)^3R = 1$$

成立?

(2) 对于恒等式

$$(x-y+1)^3P + (y-z-1)^3Q + (z-x+1)^3R = 1$$

上一问题中的多项式存在吗?

(第16届全苏数学奥林匹克,1982年)

[解] (1)由于方程组

$$\begin{cases} x-y+1=0, \\ y-z-1=0, \\ z-2x+1=0. \end{cases}$$

有解 $x = 1, y = 2, z = 1$.因此,当 $x = 1, y = 2, z = 1$ 时,有

$$(x-y+1)^3P + (y-z-1)^3Q + (z-2x+1)^3R = 0.$$

故不存在多项式 P,Q,R,使恒等式

$$(x-y+1)^3P + (y-z-1)^3Q + (z-2x+1)^3R = 1$$

成立.

(2) 令 $u = x-y+1, v = y-z-1, w = z-x+1$,则

$$(u+v+w)^7 = 1. \quad ①$$

在①式左边展开式的每一项中,u,v,w 的次数至少有一个不小于3,因此我们可以通过恒等变形得到

$$u^3 \cdot P + v^3 \cdot Q + w^3R = 1.$$

故存在多项式 P,Q,R,使恒等式

$$(x-y+1)^3P + (y-z-1)^3Q + (z-x+1)^3R = 1$$

成立.

5·149 试求所有满足下列各条件的实系数多项式 $f(x)$:

(1) $f(x)=a_0x^{2n}+a_2x^{2n-2}+\cdots+a_{2n-2}x^2+a_{2n}, a_0>0$;

(2) $\sum_{j=0}^{n}a_{2j}a_{2n-2j}\leqslant C_{2n}^{n}\cdot a_0a_{2n}$;

(3) $f(x)$ 的 $2n$ 个根都是纯虚数.

(中国国家队选拔赛,1997年)

[解] 首先记

$$g(t)=a_0t^n-a_2t^{n-1}+\cdots+(-1)^ja_{2j}t^{n-j}+\cdots+(-1)^na_{2n},$$

显然

$$f(x)=(-1)^ng(-x^2).$$

设多项式 $f(x)$ 的 $2n$ 个根是 $\pm i\beta_1,\pm i\beta_2,\cdots,\pm i\beta$,其中 $\beta_j>0$, $j=1,2,\cdots,n$. 则多项式 $g(t)$ 的 n 个根为 $t_j=\beta_j^2>0, j=1,2,\cdots,n$. 因此

$$\frac{a_{2j}}{a_0}=\sum_{k_1<k_2<\cdots<k_j}t_{k_1}t_{k_2}\cdots t_{k_j}>0.$$

(在下面几行式子中,符号 $\sum$ 下方未标出的求和范围都是 $1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_j\leqslant n$.)

$$\begin{aligned}(C_n^j)^2\frac{a_{2n}}{a_0}&=\left(C_n^j\sqrt{\frac{a_{2n}}{a_0}}\right)^2\\&=\left[\sum\sqrt{t_{k_1}\cdots t_{k_j}}\cdot\frac{\sqrt{\frac{a_{2n}}{a_0}}}{\sqrt{t_{k_1}\cdots t_{k_j}}}\right]^2\\&\leqslant\left(\sum t_{k_1}\cdots t_{k_j}\right)\cdot\left[\sum\frac{\frac{a_{2n}}{a_0}}{t_{k_1}\cdots t_{k_j}}\right]\\&=\frac{a_{2j}}{a_0}\cdot\frac{a_{2n-2j}}{a_0}.\end{aligned}$$

注意到 $C_{2n}^n=\sum_{j=0}^{n}(C_n^j)^2$,并根据上式和已知条件(2),可得

$$
\begin{aligned}
C_{2n}^{n}\cdot\frac{a_{2n}}{a_0} &= \sum_{j=0}^{n}(C_n^j)^2\frac{a_{2n}}{a_0}\\
&\leqslant \sum_{j=0}^{n}\frac{a_{2j}}{a_0}\cdot\frac{a_{2n-2j}}{a_0}\\
&\leqslant C_{2n}^{n}\cdot\frac{a_{2n}}{a_0}.
\end{aligned}
$$

由上式可以看出,对于 $j=1,2,\cdots,n$,在以上两式中的"$\leqslant$"号都恰为"$=$"号.依据 Cauchy 不等式及等号成立的条件可知

$$t_1=t_2=\cdots=t_n.$$

记 $t_i=r^2(i=1,2,\cdots,n)$,我们有

$$\frac{a_{2j}}{a_0}=C_n^j\cdot r^{2j},$$

$$a_{2j}=a_0C_n^jr^{2j},\quad j=1,2,\cdots,n.$$

于是 $f(x)=a_0(x^2+r^2)^n,\quad a_0>0,r>0.$

容易验证,这样的多项式 $f(x)$ 满足题目的全部条件.

5・150　给定实数 a.设实多项式序列$\{f_n(x)\}$满足:

$$\begin{cases}f_0(x)=1,\\ f_{n+1}(x)=xf_n(x)+f_n(ax),n=0,1,2,\cdots.\end{cases}$$

(1) 求证:$f_n(x)=x^nf_n\left(\frac{1}{x}\right),n=0,1,2,\cdots.$

(2) 求 $f_n(x)$ 的明显表达式.

(中国中学生数学冬令营,1999 年)

[解] (1) 约定

$$F_k(x)=(x-1)f_k(x)+f_k(ax)-a^kxf_k\left(\frac{x}{a}\right).$$

首先指出:$F_{k+1}(x)=xF_k(x)+F_k(ax)$.事实上,

$$
\begin{aligned}
&F_{k+1}(x)-xF_k(x)\\
&=(x-1)f_{k+1}(x)+f_{k+1}(ax)-a^{k+1}xf_{k+1}\left(\frac{x}{a}\right)-x(x-\\
&\quad 1)f_k(x)-xf_k(ax)-a^kx^2f_k\left(\frac{x}{a}\right)\\
&=(x-1)(xf_k(x)+f_k(ax))+(axf_k(ax)+f_k(a^2x))-
\end{aligned}
$$

$$a^{k+1}x\left[\left(\frac{x}{a}\right)f_k\left(\frac{x}{a}\right)+f_k(x)\right]-x(x-1)f_k(x)-$$

$$xf_k(ax)-a^kx^2f_k\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$=(ax-1)f_k(ax)+f_k(a^2x)-a^{k+1}xf_k(x)$$

$$=F_k(ax).$$

因为 $F_0(x)=0$,所以 $F_n(x)=0,n=0,1,2,\cdots$.

下面用数学归纳法证明

$$f_n(x)=x^nf_n\left(\frac{1}{x}\right),n=0,1,2,\cdots.$$

首先,显然有 $f_0(x)=x^0f_0\left(\frac{1}{x}\right)$

假设已证得 $f_k(x)=x^kf_k\left(\frac{1}{x}\right)$.则有

$$f_{k+1}(x)-x^{k+1}f_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=f_{k+1}(x)-x^{k+1}f_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right)-\left(f_k(x)-x^kf_k\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$=(x-1)f_k(x)+f_k(ax)-x^{k+1}\left[\left(\frac{1}{x}\right)f_k\left(\frac{1}{x}\right)+f_k\left(\frac{a}{x}\right)\right]+$$

$$x^kf_k\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=(x-1)f_k(x)+f_k(ax)-a^k\cdot x\cdot\left(\left(\frac{x}{a}\right)^kf_k\left(\frac{a}{x}\right)\right)$$

$$=(x-1)f_k(x)+f_k(ax)-a^kxf_k\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$=F_k(x)$$

$$=0$$

即 $f_{k+1}(x)=x^{k+1}f_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right)$.

由数学归纳法原理知,对于任意非负整数 n,都有

$$f_n(x)=x^nf_n\left(\frac{1}{x}\right).$$

(2) 由已知条件可知,$f_k(x)$ 的次数不大于 k.不妨设

$$f_k(x) = \sum_{j=1}^{k} b_j^{(k)} x^j, k = 0,1,2,\cdots.$$

由已知条件容易看出

$$b_0^{(k)} = 1, k = 0,1,2,\cdots.$$

由已证得的(1)的结论可知

$$b_{k-j}^{(k)} = b_j^{(k)} \quad (k = 0,1,\cdots; j = 0,1,\cdots k).$$

特别地

$$b_0^{(k)} = b_k^{(k)} = 1, k = 0,1,2,\cdots.$$

比较式子

$$f_n(x) = x f_{n-1}(x) + f_{n-1}(ax)$$

两边 x^j 和 x^{n-j} 的系数,分别得到

$$\begin{cases} b_j^{(n)} = b_{j-1}^{(n-1)} + a^j \cdot b_j^{(n-1)}, \\ b_{n-j}^{(n)} = b_{n-j-1}^{(n-1)} + a^{n-j} b_{n-j}^{(n-1)}. \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} b_j^{(n)} = b_{j-1}^{(n-1)} + a^j \cdot b_j^{(n-1)}, \\ b_j^{(n)} = b_j^{(n-1)} + a^{n-j} b_{n-j}^{(n-1)}. \end{cases}$$

由上面的方程组中,消去 $b_j^{(n-1)}$,得 $(a^j - 1) b_j^{(n)} = (a^n - 1) b_{j-1}^{(n-1)}$,

于是有
$$\begin{aligned} b_j^{(n)} &= \frac{a^n - 1}{a^j - 1} \cdot b_{j-1}^{(n-1)} \\ &= \frac{a^n - 1}{a^j - 1} \cdot \frac{a^{n-1} - 1}{a^{j-1} - 1} \cdot b_{j-2}^{(n-2)} \\ &\cdots \\ &= \frac{(a^n - 1)(a^{n-1} - 1)\cdots(a^{n-j+1} - 1)}{(a^j - 1)(a^{j-1} - 1)\cdots(a - 1)} b_0^{n-j} \\ &= \frac{(a^n - 1)(a^{n-1} - 1)\cdots(a^{n-j+1} - 1)}{(a^j - 1)(a^{j-1} - 1)\cdots(a - 1)}. \end{aligned}$$

故得

$$f_n(x) = 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{(a^n - 1)(a^{n-1} - 1)\cdots(a^{n-j+1} - 1)}{(a^j - 1)(a^{j-1} - 1)\cdots(a - 1)} x^j.$$

5・151 n 是一个正整数,求整系数多项式 $f(x)$ 的个数,使得其系数属于集合 $\{0,1,2,3\}$,并满足 $f(2) = n$.

(罗马尼亚国家队选拔试题,1994 年)

[解] 记

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_kx^k,$$

这里 k 是非负整数,$a_j(0\leqslant j\leqslant k)\in\{0,1,2,3\}$,且 $a_k\neq 0$.

由 $f(2)=n$ 得

$$n=a_0+a_1\cdot 2+a_2\cdot 2^2+\cdots+a_k\cdot 2^k.$$

令

$$b_j=\left[\frac{a_j}{2}\right],\quad (j=0,1,2,\cdots,k)$$

这里$\left[\frac{a_j}{2}\right]$表示不超过$\frac{a_j}{2}$ 的最大整数,则

$$b_j\in\{0,1\}$$

又令

$$m=b_0+b_1\cdot 2+b_2\cdot 2^2+\cdots+b_k\cdot 2^k,$$

显然

$$0\leqslant m\leqslant\frac{n}{2}.$$

于是,有一个满足题目条件的多项式 $f(x)$,对应地,有闭区间 $\left[0,\frac{n}{2}\right]$内一个非负整数 m,并记作:

$$g(f(x))=m,$$

这里映射 g 的定义域是满足题目条件的所有多项式,值域为$\left[0,\frac{n}{2}\right]$.

下面我们证明:若 m 是$\left[0,\frac{n}{2}\right]$上的非负整数,则存在惟一一个满足题目条件的整系数多项式 $f(x)$,使得

$$g(f(x))=m.$$

事实上,先将 m 用二进制表示成

$$m=c_0+c_1\cdot 2+c_2\cdot 2^2+\cdots+c_k\cdot 2^k,$$

这里 k 是非负整数,$c_j\in\{0,1\},j=1,2,\cdots,k$,且当 $m\neq 0$时,$C_k=1$.

如果存在满足题设条件的多项式

$$f(x)=a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+\cdots+a_t\cdot x^t$$

使得

$$g(f(x))=m.$$

则

$$n = a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + \cdots + a_t \cdot 2^t,$$

$$c_j = \left[\frac{a_j}{2}\right], \quad (j = 0,1,2,\cdots,k);$$

$$\left[\frac{a_j}{2}\right] = 0, \quad (j = k+1,\cdots,t)\ t \geqslant k.$$

若 $C_0 = 0$,则 $a_0 = 0$ 或 1.因为 $n - a_0$ 是 2 的倍数,所以 a_0 与 n 奇偶性相同,当 n 是偶数时,$a_0 = 0$;当 n 是奇数时,$a_0 = 1$.

若 $C_0 = 1$,则 $a_0 = 2$ 或 3,同样的道理,当 n 是偶数时 $a_0 = 2$;当 n 是奇数时,$a_0 = 3$.

因此 a_0 可由 c_0 和 n 的奇偶性惟一确定.并且 $n - a_0$,是2的倍数.

设 $a_0,a_1,\cdots,a_{j-1}$ 可由 $c_0,c_1,\cdots,c_{j-1}$ 和 n 惟一地确定,并且

$n - a_0 - a_1 \cdot 2 - \cdots - a_{j-1} \cdot 2^{j-1}$ 是 2^j 的倍数.

当 $c_j = 0$ 时,则 $a_j = 0$ 或 1.因为

$$n - a_0 - a_1 \cdot 2 - \cdots - a_{j-1} \cdot 2^{j-1} - a_j \cdot 2^j$$

是 2^{j+1} 的倍数,所以,如果

$n - a_0 - a_1 \cdot 2 - \cdots - a_{j-1} \cdot 2^{j-1}$ 是 2^{j+1} 的倍数,那么 $a_j = 0$;否则 $a_j = 1$.

同理,当 $c_j = 1$ 时,则 $a_j = 2$ 或 3.如果

$n - a_0 - a_1 \cdot 2 - \cdots - a_{j-1} \cdot 2^{j-1}$ 是 2^{j+1} 的倍数,那么 $a_j = 2$;否则 $a_j = 3$.

因此,a_j 也被惟一地确定,并且

$n - a_0 - a_1 \cdot 2 - \cdots - a_{j-1} \cdot 2^{j-1} - a_j \cdot 2^j$ 是 2^{j+1} 的倍数.

于是 $a_0,a_1,a_2\cdots,a_k$ 都可依次惟一地被确定.

此时,

$A = n - (a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + \cdots + a_k \cdot 2^k)$,是 2^{k+1} 的倍数.由于

$$\left[\frac{a_j}{2}\right] = 0(j = k+1,k+2,\cdots,t)$$

因此

$$a_j \in \{0,1\}(j = k+1,k+2,\cdots,t).$$

从而

$a_{k+1} \cdot 2^{k+1} + a_{k+2} \cdot 2^{k+2} + \cdots + a_t \cdot 2^t$ 是 A 的二进制表达式,

所以 $a_{k+1}, a_{k+2}, \cdots, a_t$ 都是被惟一确定的.

因此映射 g 是满足题目条件的所有整系数多项式到 $\left[0, \frac{n}{2}\right]$ 上的所有非负整数的一一对应,从而满足题目条件的所有整系数多项式的个数等于 $\left[0, \frac{n}{2}\right]$ 上所有非负整数的个数 $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$,这里 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 表示不超过 $\frac{n}{2}$ 的最大整数.

5·152　是否存在多项式 $P(x), Q(x), T(x)$ 同时满足下述条件:

(1)　$P(x), Q(x), T(x)$ 的每个系数都是正整数.

(2)　$T(x) = (x^2 - 3x + 3)P(x) = \left(\frac{x^2}{20} - \frac{x}{15} + \frac{1}{12}\right)Q(x)$.

(越南数学奥林匹克,1994 年)

[解]　条件(2)等价于

$$60T(x) = 60(x^2 - 3x + 3)P(x) = (3x^2 - 4x + 5)Q(x).$$

因为 $x^2 - 3x + 3$ 与 $3x^2 - 4x + 5$ 没有公共根,所以可设

$$P(x) = (3x^2 - 4x + 5)S(x), \quad ①$$

$$Q(x) = 60(x^2 - 3x + 3)S(x). \quad ②$$

于是,有

$$T(x) = (x^2 - 3x + 3)(3x^2 - 4x + 5)S(x). \quad ③$$

下面只需选择 $S(x)$,使得由 ①、②、③ 式计算所得的 $P(x)$, $Q(x), T(x)$ 的系数都是正整数. 为此,选取

$$S(x) = (x + 1)^n, n \in N.$$

于是,

$$\begin{aligned} P(x) &= (3x^2 - 4x + 5)(x^n + C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + \cdots + C_n^{n-1} x + 1) \\ &= 3x^{n+2} + (3C_n^1 - 4)x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n-1}(3C_n^{k+1} - 4C_n^k + 5C_n^{k-1})x^{n-k+1} + (5C_n^{n-1} - 4)x + 5 \end{aligned}$$

若 $P(x)$ 的系数都是正整数,则

$$\begin{cases} 3C_n^1 - 4 > 0, & ④ \\ 3C_n^{k+1} - 4C_n^k + 5C_n^{k-1} > 0, 1 \leqslant k \leqslant n - 1 & ⑤ \\ 5C_n^{n-1} - 4 > 0. & ⑥ \end{cases}$$

由④得

$$n \geqslant 2. \tag{7}$$

由⑤得

$$3 \cdot \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} - 4 \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} + 5 \cdot \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} > 0,$$

即

$$3(n-k)(n-k+1) - 4(k+1)(n-k+1) + 5k(k+1) > 0,$$

展开,并化简,得

$$3n^2 - 10kn + 12k^2 - n + 2k - 4 > 0$$

即

$$3n^2 - (10k+1)n + (12k^2 + 2k - 4) > 0 \tag{8}$$

由于当 $k \geqslant 2$ 时,判别式

$$\begin{aligned} \Delta &= (10k+1)^2 - 12(12k^2 + 2k - 4) \\ &= -4(11k^2 + k) + 49 \\ &< 0, \end{aligned}$$

从而当 $k \geqslant 2$ 时,对任意自然数 n,⑧式都成立,当 $k = 1$ 时,⑧式化为

$$3n^2 - 11n + 10 > 0,$$

从而

$$n = 1 \text{ 或 } n \geqslant 3.$$

因此,由⑤得

$$n = 1 \text{ 或 } n \geqslant 3. \tag{9}$$

由⑥得

$$n \geqslant 1. \tag{10}$$

由⑦、⑨、⑩得

$$n \geqslant 3. \tag{11}$$

又

$$\begin{aligned} \frac{1}{60}Q(x) &= (x^2 - 3x + 3)(x+1)^n \\ &= x^{n+2} + (C_n^1 - 3)x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n-1}\begin{pmatrix} C_n^{k+1} - 3C_n^k \\ + 3C_n^{k-1} \end{pmatrix} x^{n-k+1} + \end{aligned}$$

$$(3C_n^{n-1}-3)x+3,$$

若 $Q(x)$ 的系数全是正整数,则

$$\begin{cases} C_n^1-3>0, & ⑫ \\ C_n^{k+1}-3C_n^k+3C_n^{k-1}>0, & ⑬ \\ 3C_n^{n-1}-3>0. & ⑭ \end{cases}$$

由 ⑫ 得

$$n \geqslant 4 \quad ⑮$$

由 ⑬ 得

$$\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}-3\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}+3\cdot\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}>0,$$

即

$$(n-k)(n-k+1)-3(k+1)(n-k+1)+3k(k+1)>0,$$

展开,并整理,得

$$n^2-(5k+2)n+(7k^2+2k-3)>0. \quad ⑯$$

当 $k \geqslant 6$ 时,它的判别式

$$\begin{aligned}\Delta &= (5k+2)^2-4(7k^2+2k-3)\\ &=-3k^2+12k+16\\ &=-3k(k-4)+16\\ &<0\end{aligned}$$

从而,当 $k \geqslant 6$ 时,对任意自然数 n,⑯ 式成立.

当 $k=1$ 时,⑯ 式化为

$$(n-1)(n-6)>0;$$

当 $k=2$ 时,⑯ 式化为

$$n^2-12n+29>0;$$

当 $k=3$ 时,⑯ 式化为

$$(n-6)(n-11)>0;$$

当 $k=4$ 时,⑯ 式化为

$$(n-9)(n-13)>0;$$

当 $k=5$ 时,⑯ 式化为

$$(n-13)(n-14)>0.$$

因此当 $n\geqslant 15$ 时,⑯ 式都成立,从而 ⑬ 式成立.

由 ⑭ 得

$$n\geqslant 2.$$

于是,当 $n\geqslant 15$ 时,⑫、⑬、⑭ 成立,从而 $Q(x)$ 的系数全是正整数.

综上所述可知,若取 $n=18$,即取

$$S(x)=(x+1)^{18},$$

则

$$P(x)=(3x^2-4x+5)\cdot(x+1)^{18},$$

$$Q(x)=60(x^2-3x+3)\cdot(x+1)^{18},$$

$$T(x)=[(3x^2-4x+5)(x+1)^3][(x^2-3x+3)\cdot(x+1)^{15}],$$

并且 $P(x),Q(x),T(x)$ 的系数全是正整数.因此,满足题目所有条件的多项式 $P(x),Q(x),T(x)$ 存在.

第六章　函数

第1节　函数的值

6·1　已知 $\cos 2\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$,试求:$\sin^4\theta + \cos^4\theta$ 的值.

(中国北京市数学竞赛,1964 年)

[解]　$\sin^4\theta + \cos^4\theta = (\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\theta = 1 - \frac{1}{2}(1 - \cos^2 2\theta)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos^2 2\theta$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{9}$$

$$= \frac{11}{18}.$$

6·2　定义域为正整数的函数 f,满足:

$$f(n) = \begin{cases} n - 3 & (\text{当 } n \geqslant 1000 \text{ 时}), \\ f(f(n+7)) & (\text{当 } n < 1000 \text{ 时}). \end{cases}$$

求 $f(90)$.

(日本数学奥林匹克代表队选拔试题,1990 年)

[解]　记 $f^m(n) = \underbrace{f(f\cdots f}_{m个}(n)\cdots)$.

因为　$90 + 7 \times 130 = 1000$,

所以 $f(90)=f^2(97)=\cdots=f^{131}(1000)$.

又 $f(1000)=997$;

$f(999)=f(f(1006))=f(1003)=1000$;

$f(998)=f(f(1005))=f(1002)=999$;

$f(997)=f(f(1004))=f(1001)=998$.

因此,$f^m(1000)$的值在 $997\to998\to999\to1000\to\cdots$ 之间循环出现,并以4为周期.

因为 $131\div4=32$ 余3,

所以 $f(90)=f^{131}(1000)=f^3(1000)=999$.

6・3 $f(n)$定义在正整数集上,并且

(1) 对任一正整数 n,$f(f(n))=4n+9$;

(2) 对任一非负整数 k,$f(2^k)=2^{k+1}+3$.

试确定 $f(1789)$.

(澳大利亚数学奥林匹克,1989年)

[解] $1789=9+4\times9+4^2\times9+4^3\times9+4^4\times2^2$,

而 $f(4n+9)=f(f(f(n)))=4f(n)+9$

所以
$$\begin{aligned}f(1789)&=9+4f(9+4\times9+4^2\times9+4^3\times2^2)\\&=9+4\times9+4^2f(9+4\times9+4^2\times2^2)\\&=9+4\times9+4^2\times9+4^3f(9+4\times2^2)\\&=9+4\times9+4^2\times9+4^3\times9+4^4f(2^2)\\&=9+4\times9+4^2\times9+4^3\times9+4^4\times(2^3+3)\\&=1789+1792\\&=3581.\end{aligned}$$

6・4 设 $f(x)=x^2-x+1$.证明:对于任意自然数 $m>1$,数 $m,f(m),f(f(m)),\cdots\cdots$ 两两互质.

(第12届全苏数学奥林匹克,1978年)

[证] 显然 $f(0)=1,f(1)=1$.

令 $f_n(x)=\underbrace{f(f(f\cdots(f}_{n个f}(x)))),(n=1,2\cdots)$.

则 $f_n(0)=1\quad(n=1,2,\cdots)$,

即 $f_n(x)$的常数项都为1.因此,对于任意整数 n,$f_n(m)$除以 m 的余数等于1,即 m 与 $f_n(m)$ 互质.

令 $m'=f_k(m)$，易证 $m'>1$. 我们用 m' 代替上面讨论中的 m，可以知道，$f_{n+k}(m)=f_n(f_k(m))=f_n(m')$ 与 $f_k(m)=m'$ 互质.

由 k 和 n 的任意性知，$f(m),f(f(m)),\cdots$ 两两互质.

综上所述，$m,f(m),f(f(m),\cdots$ 两两互质.

6·5　若 $\log_2(\log_8 x)=\log_8(\log_2 x)$，求 $(\log_2 x)^2$.

（第 6 届美国数学邀请赛，1988 年）

［解］　由换底公式，

$$\log_2(\log_8 x)=\log_2\left(\frac{\log_2 x}{3}\right),$$

$$\log_8(\log_2 x)=\frac{\log_2(\log_2 x)}{3}.$$

令　　$y=\log_2 x$，则

$$\log_2\frac{y}{3}=\frac{1}{3}\log_2 y,$$

$$\log_2\left(\frac{y}{3}\right)^3=\log_2 y,$$

即　　$\left(\frac{y}{3}\right)^3=y.$

注意到 $y\neq 0$，故得

$$y^2=27,$$

即　　$(\log_2 x)^2=27.$

6·6　计算 $4(\cos15^\circ-i\sin15^\circ)\cdot5(\sin15^\circ-i\cos15^\circ)$，并且以 $a+bi$ 表示其积.

（中国上海市数学竞赛，1962 年）

［解］　原式 $=20(\cos15^\circ-i\sin15^\circ)(-i)(\cos15^\circ+i\sin15^\circ)$

$=(-20i)(\cos0^\circ+i\sin0^\circ)$

$=-20i.$

6·7　a,b,c,d 是任意正实数. 下述和式

$$S=\frac{a}{a+b+d}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{b+c+d}+\frac{d}{a+c+d}$$ 的值在什么范围内？

（第 16 届国际数学奥林匹克，1974 年）

[解]

$$\frac{a}{a+b+d}+\frac{b}{a+b+c}<\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}=1,$$

同理 $\dfrac{c}{b+c+d}+\dfrac{d}{a+c+d}<1,$

故 $S<2$.不妨设 $a\geqslant b\geqslant c\geqslant d$,则有

$$S\geqslant\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}+\frac{d}{a+b+c}$$

$$=\frac{a+b+c+d}{a+b+c}>1.$$

若令 $a=c=1$,则当 b 和 d 充分小时,S 可以任意接近 2,又若令 $a=b=1$,则当 c 和 d 充分小时,S 可以任意接近于 1,故 S 的范围是开区间(1,2).

6·8 已知 $\sin\alpha+\sin\beta=p,\cos\alpha+\cos\beta=q$,试求 $\sin(\alpha+\beta)$ 和 $\cos(\alpha+\beta)$ 的值. （中国北京市数学竞赛,1963 年）

[解] 首先由已知条件可知 p,q 的绝对值都不能大于 2,已知:

$$\sin\alpha+\sin\beta=p, \quad ①$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=q. \quad ②$$

将 ①、② 两边分别平方得

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta=p^2, \quad ③$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+2\cos\alpha\cos\beta=q^2. \quad ④$$

将 ③ 与 ④ 两边分别相加,得

$$2+2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=q^2+p^2,$$

即 $$2[1+\cos(\alpha-\beta)]=q^2+p^2. \quad ⑤$$

④ - ③ 得

$$\cos2\alpha+\cos2\beta+2\cos(\alpha+\beta)=q^2-p^2,$$

即 $$2\cos(\alpha+\beta)[\cos(\alpha-\beta)+1]=q^2-p^2. \quad ⑥$$

①×② 得

$$\sin(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}(\sin2\alpha+\sin2\beta)=pq,$$

即 $$\sin(\alpha+\beta)[1+\cos(\alpha-\beta)]=pq. \quad ⑦$$

将 ⑤ 分别代入 ⑥ 和 ⑦,得

$$(p^2+q^2)\cos(\alpha+\beta)=q^2-p^2,$$

$$(p^2+q^2)\sin(\alpha+\beta)=2pq.$$

当 p、q 不全为零时,得

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{2pq}{p^2+q^2};$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{q^2-p^2}{q^2+p^2}.$$

当 $p=q=0$ 时,由 ① 得 $\sin\beta=-\sin\alpha$,

由 ② 得 $\cos\beta=-\cos\alpha$.

所以
$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\&=\sin\alpha(-\cos\alpha)+\cos\alpha(-\sin\alpha)\\&=-\sin2\alpha,\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\&=\cos\alpha(-\cos\alpha)-\sin\alpha(-\sin\alpha)\\&=-\cos2\alpha.\end{aligned}$$

在这种特殊情况下,所求的解答不定.

6·9 函数 f 定义在自然数集上,且满足下列条件:

(1) $f(1)=1$;

(2) $f(2n)=f(n)$, $f(2n+1)=f(2n)+1(n\geqslant1)$.

当 $1\leqslant n\leqslant1989$ 时,试求出 $f(n)$ 的最大数 u,并且求出有多少个 $n(1\leqslant n\leqslant1989)$,使 $f(n)=u$.

(爱尔兰数学奥林匹克,1989 年)

[解] 我们来证明:若 a 是用二进制表示的数,则 $f(a)$ 是 a 的各位数字之和.事实上,当 a 是个位数时,$f(1)=1$,命题成立;假设 a 是 n 位数时,命题成立,即当 $a=a_02^{n-1}+a_12^{n-2}+\cdots+a_{n-1}$ 时,$f(a)=a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}$.

二进制的 $n+1$ 位数有两种情况:

(1) $2a=a_02^n+a_12^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\cdot2$,它的各位数字之和为 $a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}=f(a)$,又 $f(2a)=f(a)$,即 $f(2\cdot a)$ 的各位数字之和是 $2a$ 的各位数字之和.

(2) $2a+1=a_02^n+a_12^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\cdot2+1$ 它的各位数字之和是

$$a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}+1=f(a)+1.$$

又 $f(2a+1)=f(2a)+1=f(a)+1$，即 $f(2a+1)$ 也是 $2a+1$ 的各位数字之和.

这样我们用数学归纳法证明了当 a 是用二进制表示的数时，$f(a)$ 是 a 的各位数字之和.

因为 $2^{10}+2^9+\cdots+2+1=2^{11}-1=2047>1989$，又 $1989=2^{10}+2^9+2^8+2^7+2^6+2^2+1=(11111000101)_2$，

所以 $\qquad M_{\max}=10.$

不超过十进制 1989 的二进制为一个十位数，$(1111111111)_2=1023$ 和四个十一位数 $(10111111111)_2=1535$，

$$(11011111111)_2=1791,(11101111111)_2=1919,$$

$$(11110111111)_2=1983.$$

所以 $\quad M_{\max}=10$，当 $1\leqslant n\leqslant 1989$ 时，有 5 个 n 使 $f(n)=10$.

6・10　下列表中的对数值中有两个是错误的，请予纠正.

x	$\lg x$	x	$\lg x$
0.021	$2a+b+c-3$	6	$1+a-b-c$
0.27	$6a-3b-2$	7	$2(b+c)$
1.5	$3a-b+c$	8	$3-3a-3c$
2.8	$1-2a+2b-c$	9	$4a-2b$
3	$2a-b$	14	$1-a+2b$
5	$a+c$		

（中国高中数学联赛，1981 年）

［解］ lg1.5 和 lg7 的值是错误的，应分别纠正为 $3a-b+c-1$ 和 $2b+c$.

理由如下：

我们从三个质数 3,5,7 的对数着手来进行分析：

(1) 若 $\lg 3\neq 2a-b$，则 $\lg 9=2\lg 3\neq 4a-2b$，$\lg 0.27=3\lg 3-2\neq 6a-3b-2$，从而表上有三个对数值是错误的，与题设矛盾，因此

$$\lg 3 = 2a - b \quad ①$$

(2) 若 $\lg 5 \neq a + c$，则 $\lg 2 = 1 - \lg 5 \neq 1 - a - c$，并且 $\lg 8 = 3\lg 2 \neq 3 - 3a - 3c$，$\lg 6 = \lg 3 + \lg 2 \neq 1 + a - b - c$，表上也有三个对数值是错误的，与题设矛盾，因此：

$$\lg 5 = a + c \quad ②$$

由 ① 和 ② 就可看出表上 lg1.5 的值是错误的，应纠正为：

$$\lg 1.5 = \lg 3 + \lg 5 - 1 = 3a - b + c - 1.$$

现在考察表上 lg0.021，lg2.8，lg14 三个值.

$$\lg 0.021 = \lg 3 + \lg 7 - 3,$$

则 $2a + b + c - 3 = (2a - b) + (2b + c) - 3$；

$$\lg 2.8 = 2\lg 2 + \lg 7 - 1,$$

则 $1 - 2a + 2b - c = 2(1 - a - c) + (2b + c) - 1$；

$$\lg 14 = \lg 2 + \lg 7,$$

则 $1 - a + 2b = (1 - a - c) + (2b + c)$.

如果 $\lg 7 = 2(b + c)$，那么表上 lg0.021，lg2.8，lg14 的值都是错误的，又与题设矛盾. 因此，表上 lg7 的值是错误的，应纠正为：

$$\lg 7 = 2b + c.$$

6·11　函数 $f(x, y)$ 对所有的非负整数 x、y，满足

(1) $f(0, y) = y + 1$；

(2) $f(x + 1, 0) = f(x, 1)$；

(3) $f(x + 1, y + 1) = f[x, f(x + 1, y)]$；

试确定 $f(4, 1981)$.

（第 22 届国际数学奥林匹克，1981 年）

[解]　令 $x = 0$，由(2)，(1) 得

$$f(1, 0) = f(0, 1) = 2.$$

由(3)，(1) 得

$$\begin{aligned} f(1, y + 1) &= f[0, f(1, y)] \\ &= f(1, y) + 1 \\ &= f(1, y - 1) + 2 = \cdots = \\ &= f(1, 0) + (y + 1), \end{aligned}$$

即 $f(1, y + 1) = 2 + (y + 1)$ ④

利用(3)，④ 推导

$$\begin{aligned}
&f(2,y+1)\\
&=f[1,f(2,y)]=2+f(2,y)=2+f[1,f(2,y-1)]\\
&=2\times 2+f(2,y-1)=\cdots=2\times(y+1)+f(2,0)
\end{aligned}$$

由(2)得 $f(2,y+1)=2(y+1)+f(1,1)=2(y+1)+2+1$,

即 $$f(2,y+1)=2(y+1)+3 \qquad ⑤$$

利用(3),⑤推导

$$\begin{aligned}
f(3,y+1)&=f[2,f(3,y)]=2f(3,y)+3\\
&=2f[2,f(3,y-1)]+3\\
&=2^2f(3,y-1)+2\times 3+3\\
&=2^2f[2,f(3,y-2)]+2\times 3+3\\
&=2^3f(3,y-2)+2^2\times 3+2\times 3+3\\
&=\cdots\\
&=2^{y+1}f(3,0)+2^y\times 3+\cdots+2^2\times 3+2\times 3+3\\
&=2^{y+1}f(2,1)+3(2^y+\cdots+2^2+2+1)\\
&=2^{y+1}\cdot 5+3\cdot\frac{2^{y+1}-1}{2-1}\\
&=5\cdot 2^{y+1}+3\cdot 2^{y+1}-3\\
&=8\cdot 2^{y+1}-3,
\end{aligned}$$

即 $$f(3,y+1)=2^{3+(y+1)}-3. \qquad ⑥$$

利用(3),⑥推导

$$f(4,y+1)=f[3,f(4,y)]=2^{3+f(4,y)}-3$$

即 $$\begin{aligned}
f(4,y+1)+3&=2^{3+f(4,y)}\\
&=2^{2^{3+f(4,y-1)}}\\
&=\cdots\\
&=2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2^{3+f(4,0)}}}}}}\ \Big\}\, y+1\text{个}.
\end{aligned}$$

因 $$f(4,0)=f(3,1)=2^{3+1}-3,$$

$$3+f(4,0)=2^4=2^{2^2},$$

所以

$$f(4,y+1)+3=2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}\ \Big\}\, y+4\text{个},$$

$$f(4,1981)+3=\left.2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}\right\}1984\text{ 个},$$

故 $f(4,1981)=-3+\left.2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}\right\}1984$ 个.

6·12 $f(n)$ 是定义在正整数集上,取非负整数值的函数,且对所有 m、n 有:

$$f(m+n)-f(m)-f(n)=0\text{ 或 }1;$$
$$f(2)=0, f(3)>0, f(9999)=3333.$$

试求:$f(1982)$.

(第 23 届国际数学奥林匹克,1982 年)

[解] 令 $m=n=1$,则 $f(2)=2f(1)+(0\text{ 或 }1)$.因为 $f(2)=0$,所以 $2f(1)+(0\text{ 或 }1)=0$.又 $f(1)$ 是整数,故有 $f(1)=0$.

令 $m=2, n=1$,则

$$f(3)=f(2)+f(1)+(0\text{ 或 }1),$$
$$f(3)=(0\text{ 或 }1),\text{又因 } f(3)>0,\text{所以 } f(3)=1.$$

令 $m=n+1$,则

$$\begin{aligned}f(3n+3)&=f(3n)+f(3)+(0\text{ 或 }1)\\&=f(3n)+(1\text{ 或 }2),\end{aligned}$$

因此 $f(3(n+1))\geqslant f(3n)+1$.

由归纳法得 $f(3n)\geqslant n$.

然而,若 $f(3n)>n$ 对某个 n 成立,则对所有更大的数也成立.

因为 $f(9999)=3333$,所以对于 $n\leqslant 3333$,

有 $f(3n)=n$(其中 $n\leqslant 3333$).

最后 $1982=f(3\times 1982)\geqslant f(2\times 1982)+f(1982)$
$\geqslant 3f(1982)$.

即 $f(1982)\leqslant 1982/3<661$.

又 $f(1982)\geqslant f(1980)+f(2)=660$,

所以 $f(1982)=660$.

6·13 对于 $f(x)=[x]+[2x]+\left[\frac{5}{3}x\right]+[3x]+[4x]$,当实数 x 在 $0\leqslant x\leqslant 100$ 变动时,试求所能得到的相异整数值的个数.

(第 5 届亚太地区数学奥林匹克,1993 年)

[解]　首先,对于$0\leqslant x\leqslant 100$,$x$可惟一写成$x=3n+z$的形式,其中$n$为非负实数,$0\leqslant z<3$.因此,$f(x)=f(3n+z)=35n+f(z)$.

其次,将$[0,99)$分成33个小区间$[n,n+3)$,$n=0,3,6,9,\cdots,96$.则x限制在每一个小区间时,$f(x)$的相异实数值的个数都相同.因此,我们只需考虑$x\in[0,3)$的情形即可.f是非递减的阶梯函数,所以x为f的一个跳跃点的充分条件是x至少为$[x]$,$[2x]$,$\left[\frac{5}{3}x\right]$,$[3x]$,$[4x]$之一的一个跳跃点.因此,在$[0,3)$中,$f$有22个如此的跳跃点,即,

$$0,\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{3}{4},1,\frac{6}{5},\frac{5}{4},\frac{4}{3},\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{7}{4},\frac{9}{5},2,\frac{9}{4},\frac{7}{5},\frac{12}{5},\frac{5}{2},\frac{8}{3},\frac{11}{4}.$$

所以,当$x\in[0,3)$,则f有22个相异整数值.如此,在$[0,99)$中,f有$22\times 33=726$个相异整数值.

最后,考虑$x\in[99,100]$的情形,f在$[99,100]$中的相异整数值的个数和f在$[0,1]$中的相异整数值的个数是一样的.而f在$[0,1]$中的跳跃点是$0,\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{3}{4},1$共8个.因此$f$在$[0,1]$中有8个相异整数.

如此,f在$[0,100]$中共有$726+8=734$个不同的整数.

6・14　定义在有序正整数对上的函数f满足下列三条性质:

(1) $f(x,x)=x$;

(2) $f(x,y)=f(y,x)$;

(3) $(x+y)f(x,y)=yf(x,x+y)$.

试计算:$f(14,52)$.

(第6届美国数学邀请赛,1988年)

[解]　由(3)得

$$f(x,x+y)=\frac{x+y}{y}\cdot f(x,y).$$

于是当$z>x$时,有

$$f(x,z)=\frac{z}{z-x}f(x,z-x).$$

故

$$
\begin{aligned}
f(14,52) &= \frac{52}{38} f(14,38) \\
&= \frac{52}{38} \cdot \frac{38}{24} f(14,24) \\
&= \frac{52}{24} \cdot \frac{24}{10} f(14,10) \\
&= \frac{52}{10} f(10,14) \\
&= \frac{52}{10} \cdot \frac{14}{4} f(10,4) \\
&= \frac{91}{5} f(4,10) \\
&= \frac{91}{5} \cdot \frac{10}{6} \cdot f(4,6) \\
&= \frac{91}{3} \cdot \frac{6}{2} f(4,2) \\
&= 91 \cdot f(2,4) \\
&= 91 \cdot \frac{4}{2} f(2,2) \\
&= 91 \cdot 2 \cdot 2 \\
&= 364.
\end{aligned}
$$

6·15　对任意的正整数 k，$f_1(k)$ 表示 k 的各位数字的和的平方，并且

$$f_n(k) = f_1(f_{n-1}(k)),\ n \geqslant 2.$$

求：$f_{1988}(11)$.

（第 6 届美国数学邀请赛，1988 年）

[解]　由题设可得

$$
\begin{aligned}
& f_1(11) = (1+1)^2 = 4, \\
& f_2(11) = f_1(4) = 4^2 = 16, \\
& f_3(11) = f_1(16) = (1+6)^2 = 49, \\
& f_4(11) = f_1(49) = (4+9)^2 = 169, \\
& f_5(11) = f_1(169) = (1+6+9)^2 = 256, \\
& f_6(11) = f_1(256) = (2+5+6)^2 = 169,
\end{aligned}
$$

$$f_7(11) = f_1(169) = 256.$$

由此可以看出,当 $n \geqslant 4$ 时,$f_n(11)$ 的值有规律地交替出现,即

$$f_n(11) = \begin{cases} 169, & n \text{ 是大于 3 的偶数时}, \\ 256, & n \text{ 是大于 3 的奇数时}. \end{cases}$$

故 $f_{1988}(11) = 169.$

6·16 求 $10\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}3 + \operatorname{arcctg}7 + \operatorname{arcctg}13 + \operatorname{arcctg}21)$ 的值.

(第 2 届美国数学邀请赛,1984 年)

[解] 令 $a_n = 1 + n + n^2$,则 $a_1 = 3, a_2 = 7, a_3 = 13, a_4 = 21.$

我们先来证明一个公式:

$$\operatorname{arcctg}(1 + n + n^2) = \operatorname{arctg}(n + 1) - \operatorname{arctg}n. \quad ①$$

事实上,我们可以设

$$\alpha = \operatorname{arctg}(n + 1), \beta = \operatorname{arctg}n.$$

于是 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$,且 $\alpha > \beta, 0 < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}.$

又

$$\begin{aligned} & \operatorname{ctg}[\operatorname{arctg}(n + 1) - \operatorname{arctg}n] \\ = & \operatorname{ctg}(\alpha - \beta) \\ = & \frac{1 + \operatorname{tg}\alpha . \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta} \\ = & \frac{1 + (n + 1) \cdot n}{(n + 1) - n} \\ = & 1 + n + n^2. \end{aligned}$$

所以

$$\operatorname{arcctg}(1 + n + n^2) = \operatorname{arctg}(n + 1) - \operatorname{arctg}n.$$

令 $\theta = \operatorname{arcctg}3 + \operatorname{arcctg}7 + \operatorname{arcctg}13 + \operatorname{arcctg}21.$

由公式 ① 可得

$$\begin{aligned} \operatorname{arcctg}3 &= \operatorname{arctg}2 - \operatorname{arctg}1, \\ \operatorname{arcctg}7 &= \operatorname{arctg}3 - \operatorname{arctg}2, \\ \operatorname{arcctg}13 &= \operatorname{arctg}4 - \operatorname{arctg}3, \\ \operatorname{arcctg}21 &= \operatorname{arctg}5 - \operatorname{arctg}4. \end{aligned}$$

以上四式相加得

$$\theta = \operatorname{arctg}5 - \operatorname{arctg}1.$$

于是

$$10\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}3 + \operatorname{arcctg}7 + \operatorname{arcctg}13 + \operatorname{arcctg}21)$$

$$= 10\text{ctg}\theta$$
$$= 10\text{ctg}(\text{arctg}5 - \text{arctg}1)$$
$$= 10 \cdot \frac{1+5\cdot 1}{5-1} = 15.$$

6·17　函数 f 定义在整数集合上,并满足

$$f(n) = \begin{cases} n-3, & \text{当 } n \geqslant 1000; \\ f(f(n+5)), & \text{当 } n < 1000. \end{cases}$$

求 $f(84)$.

（第 2 届美国数学邀请赛,1984 年）

[解]　因为 $84 + 5 \times 184 = 1004 > 1000$,所以

$$f(84) = \underbrace{f\cdots f}_{185\text{个}}(1004) = \underbrace{f\cdots f}_{184\text{个}}(1001)$$
$$= \underbrace{f\cdots f}_{183\text{个}}(998) = \underbrace{f\cdots f}_{184\text{个}}(1003)$$
$$= \underbrace{f\cdots f}_{183\text{个}}(1000) = \underbrace{f\cdots f}_{182\text{个}}(997)$$
$$= \underbrace{f\cdots f}_{183\text{个}}(1002) = \underbrace{f\cdots f}_{182\text{个}}(999)$$
$$= \underbrace{f\cdots f}_{183\text{个}}(1004) = \cdots$$
$$= fff(1004) = \cdots$$
$$= f(1000) = 997.$$

引申　可以用数学归纳法证明一个更强的结论:

$$f(n) \begin{cases} 997, \text{当 } n \text{ 是小于 } 1000 \text{ 的偶数}, \\ 998, \text{当 } n \text{ 是小于 } 1000 \text{ 的奇数}. \end{cases}$$

6·18　设 N 为正整数集,在 N 上定义函数 f 如下:

(i) $f(1) = 1, f(3) = 3$;

(ii) 对 $n \in N$,有

$$f(2n) = f(n),$$
$$f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n),$$
$$f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n).$$

试求所有的 n，使 $n \leqslant 1988$ 且 $f(n)=n$.

（第 29 届国际数学奥林匹克，1988 年）

［解］ 由条件(i)和(ii)，我们可经计算得下表

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(n)$	1	1	3	1	5	3	7	1	9

n	10	11	12	13	14	15	16	17	
$f(n)$	5	13	3	11	7	15	1	17	

把上表中的数改成二进制表示，我们又得

n	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001
$f(n)$	1	1	11	1	101	11	111	1	1001

n	1010	1011	1100	1101	1110	1111	10000	10001
$f(n)$	101	1101	11	1011	111	1111	1	10001

于是，我们猜想：$f(n)$ 等于表示 n 的二进制数全部反序而得到的二进制数.

下面，我们先证明这个猜想是正确的.

事实上，当 $n=1,3$ 时，上述猜想成立.

假设 $n<k$ 时上述猜想成立.我们来证明 $n=k$ 时上述猜想也成立.

事实上，如果 k 是偶数，那么可设 k 的二进制数为 $(a_l a_{l-1}\cdots a_1 0)_2$，$\frac{k}{2}$ 的二进制数为 $(a_l a_{l-1}\cdots a_1)_2$，此时根据已知条件和归纳假设可得 $f(k)=f\left(\frac{k}{2}\right)=(a_1\cdots a_{l-1}a_l)_2$.故 k 为偶数时，猜想成立.

如果 $k=4m+1(m\in N)$，那么可设 k 的二进制数为

$$k=4m+1=(a_l a_{l-1}\cdots a_2 01)_2.$$

于是

$m=(a_l a_{l-1}\cdots a_2)_2, 2m+1=(a_l a_{l-1}\cdots a_2 1)_2$.此时，根据已知条件和归纳假设可得

$$\begin{aligned} f(4m+1) &= 2f(2m+1) - f(m) \\ &= (1a_2\cdots a_{l-1}a_l0)_2 - (a_2\cdots a_{l-1}a_l)_2 \\ &= 2^l + 2f(m) - f(m) \\ &= 2^l + f(m) \\ &= (10a_2\cdots a_{l-1}a_l)_2. \end{aligned}$$

这就是说,$k = 4m + 1$ 时猜想也成立.

同理可证,$k = 4m + 3$ 时猜想也成立.

根据数学归纳原理,猜想得到证明.

根据所证猜想,满足 $f(n) = n$ 的充分必要条件是

$$n = (a_1a_2\cdots a_l)_2 = (a_la_{l-1}\cdots a_1)_2.$$

即 $$a_i = a_{l+1-i} \qquad \left(i = 1,2,\cdots,\left[\frac{l}{2}\right]\right).$$

当 n 的二进制位数为偶数 $2S$ 时,满足上述条件的 n 是 2^{s-1} 个;当 n 的二进制位数为奇数 $2s+1$ 时,满足上述条件的 n 有 2^s 个.

注意到 $1988 = (11111000100)_2$,而比这个数大的满足 $f(n) = n$ 的 11 位二进制数只有两个:

$$(11111111111)_2 \text{和} (11111011111)_2,$$

因此所求的数的个数为

$$(1+1+2+2+4+4+8+8+16+16+32) - 2$$
$$= 92.$$

6·19 全体正整数的集合可以分成两个互不相交的正整数子集 $\{f(1),f(2),\cdots,f(n),\cdots\}$,$\{g(1),g(2),\cdots,g(n),\cdots\}$,

式中 $$f(1) < f(2) < \cdots < f(n) < \cdots$$
$$g(1) < g(2) < \cdots < g(n) < \cdots$$

且有 $$g(n) = f(f(n)) + 1 \quad (n \geqslant 1)$$

求:$f(240)$.

(第 20 届国际数学奥林匹克,1978 年)

[解] 我们先来证明以下三个等式:

$$g(n) = f(n) + n \qquad ①$$
$$f(f(n)) = f(n) + n - 1 \qquad ②$$
$$f(f(n)+1) = f(n) + n + 1 \qquad ③$$

事实上,假设 $f(n) = k$,则 $g(n) = f(k) + 1$,于是两个互不相交

的集合

$$\{f(1),f(2),f(3),\cdots,f(k)\} \text{ 和 } \{g(1),g(2),g(3),\cdots,g(n)\}$$

中包含所有从1到$g(n)$的自然数.计算一下这两个集合中元素的个数就可以得到

$$g(n)=k+n,$$

即 $$g(n)=f(n)+n.$$

故①式成立.

又由 $k+n=g(n)=f(k)+1$ 得

$$f(k)=k+n-1,$$

即 $$f(f(n))=f(n)+n-1,$$

故②式成立.

令 $F=\{f(n)\}, G=\{g(n)\}, n=1,2,3,\cdots$.由等式

$$g(n)-1=f(f(n))$$

可知,$g(n)-1$是F的元素.因此不可能有两个连续的整数都是G的元素.

又因为$k+n$是G的元素,所以$k+n-1$和$k+n+1$都是F的元素,并且是F的两个相邻的元素.由②可知

$$f(f(n)+1)=k+n+1,$$

即 $$f(f(n)+1)=f(n)+n+1.$$

故③式成立.

下面,我们利用①、②、③三个式子,来逐步求出$f(240)$.

事实上,由$g(1)=f(f(1))+1>1$得$f(1)=1$,从而得$g(1)=2$.

由③得 $$f(2)=f(f(1)+1)=f(1)+1+1=3.$$

由②得 $$f(3)=f(f(2))=f(2)+2-1=4,$$

$$f(4)=f(f(3))=f(3)+3-1=6,$$

$$f(6)=f(f(4))=f(4)+4-1=9,$$

$$f(9)=f(f(6))=f(6)+6-1=14,$$

$$f(14)=f(f(9))=f(9)+9-1=22,$$

$$f(22)=f(f(14))=f(14)+14-1=35,$$

$$f(35)=f(f(22))=f(22)+22-1=56,$$

$$f(56)=f(f(35))=f(35)+35-1=90.$$

由③得 $f(91) = f(f(56) + 1) = f(56) + 56 + 1 = 147$,
$f(148) = f(f(91) + 1) = f(91) + 91 + 1 = 239$,
$f(240) = f(f(148) + 1) = f(148) + 148 + 1 = 388$.

6·20 设 $f(n)$ 是定义在自然数集上的函数，并且所取得的函数值也在自然数集中. 试证：如果对于每一个自然数，$f(n+1) > f[f(n)]$，那么 $f(n) = n$ 对于每一个 n 值都成立.

（第 19 届国际数学奥林匹克，1977 年）

[证] 我们先来证明，若 $m \geqslant n$，则 $f(m) \geqslant n$.

事实上，$n = 1$ 时，对于任意自然数 m，都有 $f(m) \geqslant 1$，故结论成立.

设 $n = k$ 时结论成立，即若 $m \geqslant k$，则 $f(m) \geqslant k$.

当 $n = k+1$ 时，由 $m \geqslant n$ 得 $m \geqslant k+1$，从而 $m-1 \geqslant k$. 根据归纳假设，得 $f(m-1) \geqslant k$. 再根据归纳假设，又得 $f(f(m-1)) \geqslant k$. 于是由已知条件，得

$$f(m) > f(f(m-1)) \geqslant k,$$

故 $f(m) \geqslant k+1$，即 $n = k+1$ 时，结论也成立.

根据数学归纳原理，对于任意自然数 n，结论都成立. 特别地，取 $m = n$，得

$$f(n) \geqslant n, \quad ①$$

由①得 $f(f(n)) \geqslant f(n)$, ②

由已知 $f(n+1) > f(f(n))$, ③

由②、③得 $f(n+1) > f(n)$. ④

这表明函数 f 是严格递增函数，因而由③可得

$$n+1 > f(n) \quad ⑤$$

由①、⑤得 $f(n) = n$.

6·21 n 是不小于 3 的自然数，$f(n)$ 表示不是 n 的因数的最小自然数（例如 $f(12) = 5$）. 如果 $f(n) \geqslant 3$，又可作 $f(f(n))$. 类似地，如果 $f(f(n)) \geqslant 3$，又可作 $f(f(f(n)))$ 等等. 如果

$$\underbrace{f(f(\cdots f}_{k\text{个}f}(n)\cdots)) = 2,$$

就把 k 叫做 n 的“长度”.

如果用 l_n 表示 n 的长度，试对任意的自然数 $n(n \geqslant 3)$，求 l_n，并证

明你的结论.

（第 3 届中国中学生数学冬令营,1988 年）

[解]　对自然数 n 分情况讨论.

情况 1:n 为奇数.

此时,$f(n)=2$,所以 $l_n=1$.

情况 2:n 是偶数.

此时,我们设 $n=2^a(2m+1)$,其中 $a\geqslant 1,m\geqslant 0$.

若所有满足 $1<t<2^{a+1}$ 的奇数 t 都是 n 的约数,则

$$f(n)=2^{a+1},$$
$$f(f(n))=3,$$
$$f(f(f(n)))=2.$$

因此,　$l_n=3$.

若满足 $1<t<2^{a+1}$ 的奇数 t 不全是 n 的约数,则必有一个最小正奇数 $t_0(1<t_0<2^{a+1})$ 它不是 n 的约数.于是有

$$f(n)=t_0,$$
$$f(f(n))=f(t_0)=2.$$

因此,$l_n=2$.

综上所述,我们有

$$l_n=\begin{cases}1, n\text{ 为奇数},\\ 3, n\text{ 为偶数 }2^a(2m+1), a\geqslant 1, m\geqslant 0,\\ \quad\text{并且满足 }1<t<2^{a+1}\text{ 的所有奇数 }t\text{ 都是 }n\text{ 的约数},\\ 2, n\text{ 为偶数 }2^a(2m+1), a\geqslant 1, m\geqslant 0,\\ \quad\text{并且存在不是 }n\text{ 约数的奇数 }t_0,\text{满足 }1<t_0<2^{a+1}.\end{cases}$$

6·22　对于给定的正整数 k,定义 $f_1(k)$ 为 k 的数字和的平方,并令

$$f_{n+1}(k)=f_1(f_n(k)),$$

求:$f_{1991}(2^{1990})$ 的值.

（第 31 届国际数学奥林匹克预选题,1990 年）

[解]　首先注意对大的 k 值,$f_1(k)$ 远小于 k.由于 f_1 不是单调,我们将这个事实表达成如下的形式:

若 $A\leqslant B$,则 A 的位数 $\leqslant B$ 的位数 $\leqslant 1+\lg B$,

$$f_1(A) < (9 \times (1 + \lg B))^2 < (4\log_2 16B)^2.$$

利用这个不等式两次，我们得到 $f_2(2^{1990})$ 的估计：

$$f_1(2^{1990}) < 4^2 \times (1994)^2 < 2^{26},$$

$$f_2(2^{1990}) < (4 \times 30)^2 = 14400.$$

所以 $f_2(2^{1990})$ 的数字和最多是 $36(= 4 \times 9)$，因此

$$f_3(2^{1990}) \leqslant 36^2 = 1296,$$

$$f_4(2^{1990}) < (9 + 9 + 9)^2 = 729,$$

$$f_5(2^{1990}) < (6 + 9 + 9)^2 = 576.$$

另一方面，因为

$$f_1(k) \equiv k^2 (\bmod 9),$$

所以

$$f_1(2^{1990}) \equiv (2^{1990})^2 \equiv (-2)^2 \equiv 4 (\bmod 9),$$

$$f_2(2^{1990}) \equiv 4^2 \equiv -2 (\bmod 9),$$

$$f_3(2^{1990}) \equiv (-2)^2 \equiv 4 (\bmod 9),$$

……

所以当 n 为奇数时，

$$f_n(2^{1990}) \equiv 4 (\bmod 9).$$

当 n 为偶数时，

$$f_n(2^{1990}) \equiv -2 (\bmod 9).$$

若 $x^2 \equiv 4(\bmod 9)$ 且 $x \leqslant 24$，则

$$x^2 \in H = \{4, 49, 121, 256, 400\},$$

通过简单计算即知(对每一个 $h \in H$)，

$$f_3(h) = f_5(h) = f_7(h) = \cdots = 169,$$

$$f_4(h) = f_6(h) = f_8(h) = \cdots = 256.$$

由于 $f_5(2^{1990}) \in H$，所以当 $n \geqslant 8$ 时，

$$f_n(2^{1990}) = \begin{cases} 169, \text{若 } n \text{ 是偶数;} \\ 256, \text{若 } n \text{ 是奇数.} \end{cases}$$

从而 $\quad f_{1991}(2^{1990}) = 256.$

6・23　设 $f(0) = f(1) = 0$，及

$$f(v+2) = 4^{v+2} f(v+1) - 16^{v+1} f(v) + v 2^{v^2}, (v = 0, 1, 2, \cdots).$$

求证:$f(1989)$,$f(1990)$,$f(1991)$均被13整除.

(第31届国际数学奥林匹克预选题,1990年)

[证] 令 $f(v)=g(v)2^{v^2}$,所给递推关系就变为

$$g(v+2)-2g(v+1)+g(v)=v16^{-v-1},$$
$$v=0,1,2,\cdots.$$

从0到 $v-1$ 对上式求和,我们得到

$$g(v+1)-g(v)=\frac{1}{15^2}[1-(15v+1)\cdot 16^{-v}].$$

再求一次和(从0到 $v-1$),得

$$g(v)=\frac{1}{15^3}[15v-32+(15v+2)16^{-v+1}],$$

从而 $$f(v)=\frac{1}{15^3}[15v+2+(15v-32)16^{v-1}]2^{(v-2)^2},$$
$$(v=0,1,2,\cdots)$$

以13为模,得

$$\begin{aligned}&15v+2+(15v-32)16^{v-1}\\ \equiv\ &2v+2+(2v-6)3^{v-1}\\ \equiv\ &2(v+1+(v-3)3^{v-1})(\bmod 13).\end{aligned}$$

由于

$$1990\equiv 1(\bmod 13),3^3\equiv 1(\bmod 13),$$

因此,对于 $v=1989,1990,1991$ 有

$$f(v)\equiv 0(\bmod 13).$$

6·24 x 为一实数,$0<x<\pi$,证明:对于所有的自然数 n

$$\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots+\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$

的值为正数.

(第6届爱尔兰数学奥林匹克,1993年)

[证] 令 $f(x)=\sin x+\dfrac{\sin 3x}{3}+\dfrac{\sin 5x}{5}+\cdots+\dfrac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$.

利用 $2\sin x\sin(2k-1)x=\cos(2k-2)x-\cos 2kx$,得

$$2f(x)\sin x=1-\cos 2x+\frac{\cos 2x-\cos 4x}{3}+\frac{\cos 4x-\cos 6x}{5}$$

$$+\cdots+\frac{\cos(2n-2)x-\cos 2nx}{2n-1}$$

$$=1-\left(1-\frac{1}{3}\right)\cos 2x-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\cos 4x-\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)\cos 6x-\cdots-\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}\right)\cos(2n-2)-\frac{\cos 2nx}{2n-1}$$

$$\geqslant 1-\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}\right)+\frac{1}{2n-1}\right]$$

$$=0.$$

若等号成立，则有 $\cos 2kx=1,(k=1,2,\cdots,n)$ 但因 $0<x<\pi$，故 $\cos 2x\neq 1$.

于是得 $f(x)\sin x>0$.

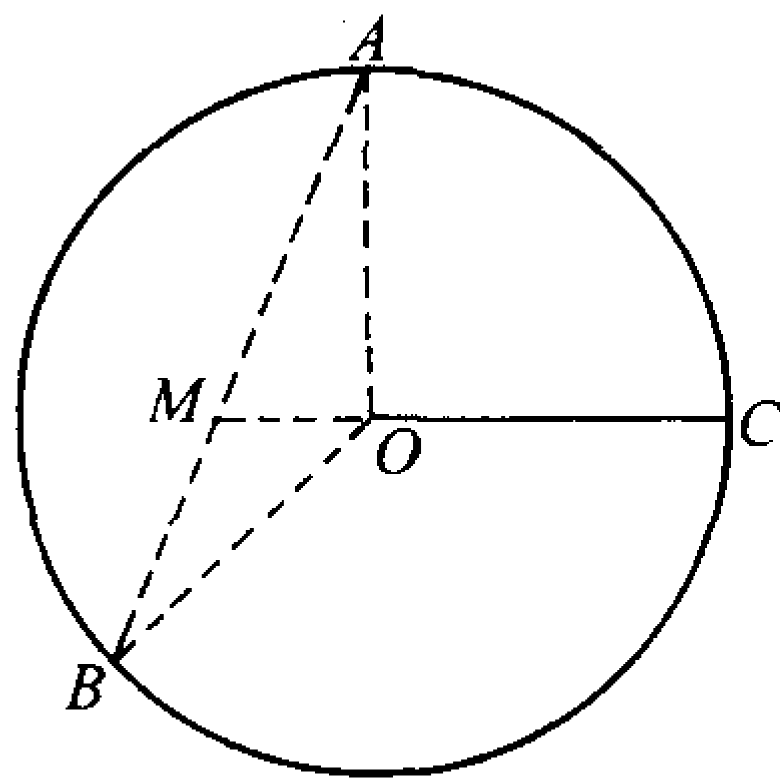
又因 $\sin x>0$,

所以 $f(x)>0$.

6·25 一个均匀的圆盘悬挂在一根系于圆盘中心 O 的细线之下而处于水平位置，在圆盘边缘上的三个不同点 A,B,C 分别放置重量 p_1,p_2,p_3 后，没有破坏圆盘的平衡. 计算 $\angle AOB,\angle BOC,\angle COA$.

（波兰数学奥林匹克，1954 年）

[解] 平行于同一个方向的力 p_1 和 p_2，其合力经过线段 AB 上的某个点 M（如图）. 因为安放重物后圆盘保持平衡，所以三力 p_1,p_2,p_3 的合力经过 O 点. 于是点 M 不与悬挂点 O 重合，力 p_3 的作用点（也即 C 点）与射线 MO 与圆盘边缘的交点相重合，而夹角 AOB,BOC,COA 之和等于 360°.



从静力学知道，点 M 由下式确定其位置：

$$\frac{AM}{MB}=\frac{p_2}{p_1}. \quad ①$$

在 $\triangle AOM$ 和 $\triangle BOM$ 中,有关系式

$$\frac{AM}{\sin\angle AOM}=\frac{OM}{\sin\angle A},$$

$$\frac{MB}{\sin\angle MOB}=\frac{OM}{\sin\angle B}$$

成立,因为 $\angle A=\angle B$,所以

$$\frac{AM}{\sin\angle AOM}=\frac{MB}{\sin\angle MOB}. \quad ②$$

由等式 ①、② 得

$$\frac{p_2}{\sin\angle AOM}=\frac{p_1}{\sin\angle MOB}.$$

但因 $\angle AOM=180^\circ-\angle COA$, $\angle MOB=180^\circ-\angle BOC$,所以

$$\frac{p_1}{\sin\angle BOC}=\frac{p_2}{\sin\angle COA}.$$

对另一对所求的角也有类似的等式成立.将它们合并得到

$$\frac{p_1}{\sin\angle BOC}=\frac{p_2}{\sin\angle COA}=\frac{p_3}{\sin\angle AOB}. \quad ③$$

等式 ③ 已使我们可以计算 $\angle BOC$, $\angle COA$, $\angle AOB$.事实上,设 $\alpha=180^\circ-\angle BOC$, $\beta=180^\circ-\angle COA$, $\gamma=180^\circ-\angle AOB$.因为 $\angle BOC+\angle COA+\angle AOB=360^\circ$,所以 $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$,从而等式 ③ 化为

$$\frac{p_1}{\sin\alpha}=\frac{p_2}{\sin\beta}=\frac{p_3}{\sin\gamma},$$

这里 α,β,γ 是边长为 p_1,p_2,p_3 的三角形的三个内角.对这个三角形应用余弦定理可以求出 α,β,γ,而 $\angle BOC$, $\angle COA$, $\angle AOB$ 是这些角的补角.实际计算可得

$$\left.\begin{aligned}\cos\angle BOC&=\frac{p_1^2-p_2^2-p_3^2}{2p_2p_3},\\ \cos\angle COA&=\frac{p_2^2-p_3^2-p_1^2}{2p_3p_1},\\ \cos\angle AOB&=\frac{p_3^2-p_1^2-p_2^2}{2p_1p_2}.\end{aligned}\right\} \quad ④$$

因为 $\angle BOC$, $\angle COA$, $\angle AOB$ 都介于 0° 与 180° 之间,故关系式 ④ 单值地确定所求的角.

6·26 N_0是所有非负整数的集合,$f(n)$是一个函数,使得$f: N_0 \to N_0$,且对于每个$n \in N_0$,$f(f(n))+f(n)=2n+3$.求:$f(1993)$.

(保加利亚数学奥林匹克,1994年)

[解] 首先证明如果$m, n \in N_0$,$m \neq n$,必有$f(m) \neq f(n)$,即f是$1-1$的.

用反证法.

如果$f(m)=f(n)$,则$f(f(m))=f(f(n))$.于是我们由题设条件可得

$$2m+3=f(f(m))+f(m)=f(f(n))+f(n)=2n+3,$$

从而有 $m=n$,矛盾.

再求$f(0)$.

设$f(0)=x$,$x \geqslant 0$.

在题目给定的关系式中,令$n=0$,则得

$$f(x)+x=3,$$
$$f(x)=3-x.$$

由于$f(x) \geqslant 0$,因此$x \leqslant 3$. ①

在题目给定的关系式中,令$n=x$,则得

$$f(f(x))+f(x)=2x+3,$$

将①代入上式,得

$$f(3-x)=3x. \quad ②$$

在题目给定的关系式中,令$n=3-x$,则得

$$f(f(3-x))+f(3-x)=2(3-x)+3,$$

将②代入上式,得

$$f(3x)=9-5x$$

由于$f(3x) \geqslant 0$,因此

$$9-5x \geqslant 0$$

$$x \leqslant \frac{9}{5}$$

从而有 $x=0$或$x=1$.

如果$x=0$,即$f(0)=0$.此时,在题目给定的关系式中,令$n=0$,则得

$$f(f(0))+f(0)=3,$$

从而有　$0 = 3$,矛盾.

故必有 $x = 1$,则必有 $f(0) = 1$.

接着用数学归纳法证明:对任何非负整数 n, $f(n) = n + 1$.

事实上,当 $n = 0$ 时,由 $f(0) = 1$ 可知,结论成立.

设当 $n = k$ 时,结论成立,即 $f(k) = k + 1$.

于是,在题目给定的关系式中,令 $n = k$,我们有

$$f(f(k)) + f(k) = 2k + 3,$$

由归纳假设得

$$f(k+1) + k + 1 = 2k + 3,$$

$$f(k+1) = k + 2.$$

根据数学归纳法原理可知,对任何非负整数 n,有

$$f(n) = n + 1.$$

因此,所求的 $f(1993) = 1993 + 1 = 1994$.

6・27　函数 $f(k)$ 是定义在 N 上,在 N 中取值的严格增函数(如果任意的 $x_1, x_2 \in A$,当 $x_1 < x_2$ 时,有 $f(x_1) < f(x_2)$,则称 $f(x)$ 是 A 上的严格增函数),并且满足条件 $f(f(k)) = 3k$. 试求: $f(1) + f(9) + f(96)$ 之值.

(中国北京市中学生数学竞赛,1996 年)

[**解**]　对任 $k \in N$,由已知

$$f(f(k)) = 3k, \quad ①$$

$$f(f(f(k))) = f(3k).$$

又由已知 $f(f(f(k)) = 3f(k)$,

所以　$f(3k) = 3f(k)$.　②

若 $f(1) = 1$,则代入 ① 得 $f(1) = 3$,矛盾.

所以　$f(1) = a > 1$.

但由 ①, $f(f(1)) = f(a) = 3$

由 $f(x)$ 的严格递增性得

$$3 = f(a) > f(1) > 1,$$

所以　$f(1) = 2, a = 2, f(2) = 3$.

再由 ② 得, $f(3) = 3f(1) = 6$,

$f(6) = 3f(2) = 9$,

$f(9) = 3f(3) = 18$,

$$f(18)=3f(6)=27,$$
$$f(27)=3f(9)=54, \quad ③$$
$$f(54)=3f(18)=81. \quad ④$$

由 ③ 和 ④,自变量从 27 到 54,增加 27 个数,对应的函数值从 54 到 81,也增加 27 个数.由函数 $f(x)$ 的严格递增性可知,当自变量从 27 到 54 之间每增加 1,对应的函数值也增加 1.因此有

$$f(28)=55, f(29)=56, f(30)=57, f(31)=58, f(32)=59.$$

再由 ② 得

$$f(96)=3f(32)=177.$$

因此

$$f(1)+f(9)+f(96)=2+18+177=197.$$

6·28　已知 $\sin\alpha$ 之值.试问:(a) $\sin\frac{\alpha}{2}$,(b) $\sin\frac{\alpha}{3}$ 分别最多可能有几个不同的值?

（第 58 届莫斯科数学奥林匹克,1996 年）

[解]　(a) 记 $\sin\alpha=x$,满足该式的 α 必然具有形式

$$k\pi+(-1)^k\arcsin x,$$

其中 k 为整数.于是,相应的$\frac{\alpha}{2}$ 的值对应于单位圆上的 4 个点:

$$\frac{1}{2}\arcsin x, \frac{1}{2}\arcsin x+\pi,$$
$$\frac{1}{2}(\pi-\arcsin x), \frac{1}{2}(3\pi-\arcsin x).$$

从而,$\sin\frac{\alpha}{2}$ 至多取 4 个不同值.

另一方面,当 $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时,$\alpha=\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\frac{7\pi}{3},\frac{8\pi}{3},\cdots\sin\frac{\alpha}{2}$ 可以取到 4 个不同的值.

$$\sin\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{3}, \sin\frac{7\pi}{6}, \sin\frac{4\pi}{3}.$$

(b) 相应的$\frac{\alpha}{3}$ 的值对应于单位圆上的 6 个点:

$$\frac{1}{3}\arcsin x, \frac{1}{3}(2\pi+\arcsin x), \frac{1}{3}(4\pi+\arcsin x),$$

$$\frac{1}{3}(\pi - \arcsin x), \frac{1}{3}(3\pi - \arcsin x), \frac{1}{3}(5\pi - \arcsin x).$$

但后三个点与前三个点有以下关系：

$$\frac{1}{3}(\pi - \arcsin x) = \pi - \frac{1}{3}(2\pi + \arcsin x),$$

$$\frac{1}{3}(3\pi - \arcsin x) = \pi - \frac{1}{3}\arcsin x,$$

$$\frac{1}{3}(5\pi - \arcsin x) = 3\pi - \frac{1}{3}(4\pi + \arcsin x),$$

所以 $\sin\frac{\alpha}{3}$ 至多取 3 个不同的值.

又因为 $\sin\alpha = 0$ 时，$\alpha = 0, 2\pi, 4\pi, \cdots$，$\sin\frac{\alpha}{3}$ 可以取到 3 个不同的值.

$$\sin 0, \sin\frac{2\pi}{3}, \sin\frac{4\pi}{3}.$$

6・29　对任意的实数 x，函数 $f(x)$ 具有性质

$$f(x) + f(x-1) = x^2.$$

如果 $f(19) = 94$，那么，$f(94)$ 除以 1000 的余数是多少？

（第 12 届美国数学邀请赛，1994 年）

[解]　由 $f(x)$ 的性质，得

$$f(x) = x^2 - f(x-1).$$

反复使用上述公式，可得

$$\begin{aligned} f(94) &= 94^2 - f(93) \\ &= 94^2 - 93^2 + f(92) \\ &= 94^2 - 93^2 + 92^2 - f(91) \\ &\cdots \\ &= 94^2 - 93^2 + 92^2 - 91^2 + \cdots + 20^2 - f(19) \\ &= 187 + 183 + \cdots + 43 + 400 - 94 \\ &= \frac{187+43}{2} \cdot \left(\frac{187-43}{4} + 1\right) + 400 - 94 \\ &= 4561. \end{aligned}$$

因此，$f(94)$ 除以 1000 的余数是 561.

6・30　对给定的一个正整数 n，设 $p(n)$ 表示 n 的各位上的非零

数字的乘积(如果 n 只有一位数字,那么 $p(n)$ 就等于这个数字).若

$$S = p(1) + p(2) + p(3) + \cdots + p(999),$$

则 S 的最大素因子是多少?

(第 12 届美国数学邀请赛,1994 年)

[解] 由于

$$(a + 1 + 2 + \cdots + 9)^3 = a \cdot a \cdot a + a \cdot a \cdot 1 + a \cdot a \cdot 2 + \cdots + 9 \cdot 9 \cdot 8 + 9 \cdot 9 \cdot 9$$

的左边,当 $a = 1$ 时,除第一项以外,其余的恰等于

$p(1) + p(2) + p(3) + \cdots + p(999)$,因此

$$S = (1 + 1 + 2 + \cdots + 9)^3 - 1 = 46^3 - 1 = 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 103,$$

S 的最大素因子等于 103.

第 2 节　函数的性质

6・31　试求函数:$y = \lg\left(\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\frac{1}{x-2}}$ 的定义域.

(中国上海市数学竞赛,1962 年)

[解] 由 $\lg\left(\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right)$ 的定义域,得

$$\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{2} > 0, \text{即} \sin\frac{x}{2} > \frac{1}{2}.$$

故　$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < \frac{x}{2} < \frac{5}{6}\pi + 2k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$

即　$\frac{\pi}{3} + 4k\pi < x < \frac{5\pi}{3} + 4k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$

由　$\sqrt{\frac{1}{x-2}}$ 的定义域有　$x - 2 > 0$,即 $x > 2$.

因此 y 的定义域是　$2 < x < \frac{5\pi}{3}.$

及　$\frac{\pi}{3} + 4k\pi < x < \frac{5\pi}{3} + 4k\pi. (k = 1,2,\cdots)$

6·32 画图像:(1) $y=\sqrt{\frac{1}{x^2}}$,

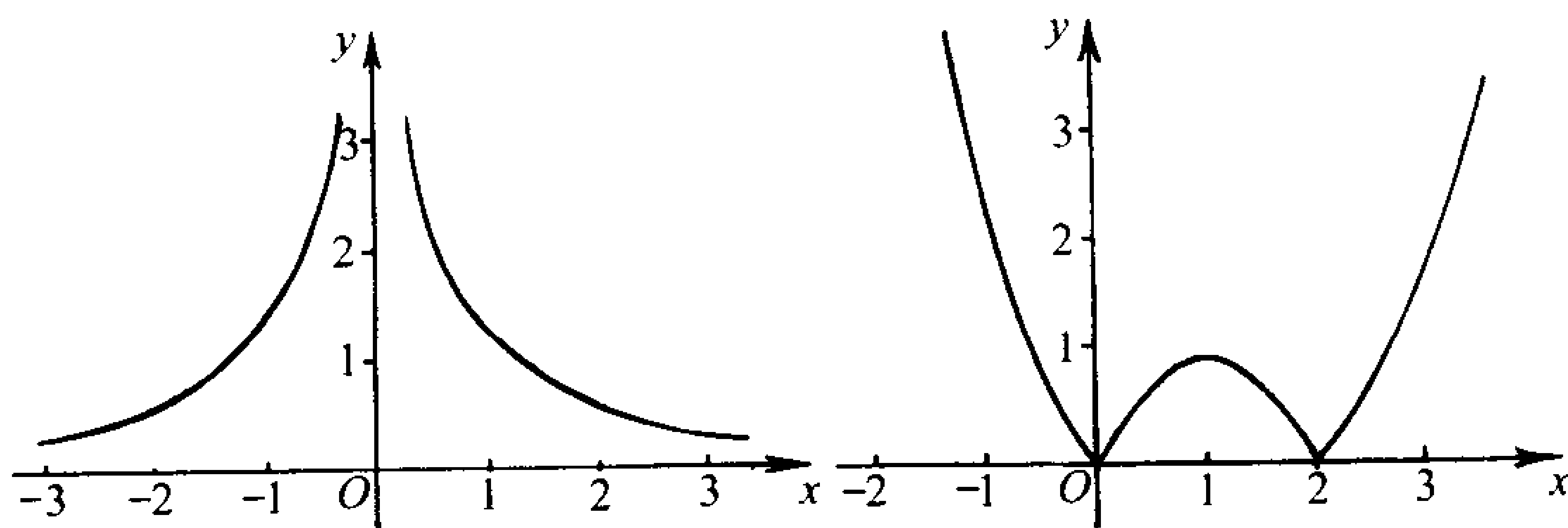
(2) $y=|x(x-2)|$.

(中国上海市数学竞赛,1963年)

[解] 由题设有(1) $y=\frac{1}{|x|}=\begin{cases}\frac{1}{x}, & (x>0)\\ -\frac{1}{x}. & (x<0)\end{cases}$

(2) $y=\begin{cases}x(x-2)=(x-1)^2-1, & (x<0\text{或}x>2)\\ -x(x-2)=-(x-1)^2+1. & (0\leqslant x\leqslant 2)\end{cases}$

图像如下:



6·33 (1) 设函数 f,g 对所有 x 满足

$$-\frac{\pi}{2}<f(x)\pm g(x)<\frac{\pi}{2},$$

证明:对所有 x

$$\cos(f(x))>\sin(g(x)).$$

(2) 利用(1)或不利用(1),证明:对所有 x

$$\cos(\cos x)>\sin(\sin x).$$

(加拿大国家集训队训练题)

[解] (1) 不妨设 $g(x)>0$,由已知

$$-\frac{\pi}{2}+g(x)<f(x)<\frac{\pi}{2}-g(x).$$

若 $f(x)\geqslant 0$,则由(1)及 $\cos x$ 在第一象限递减得

$$\cos(f(x))>\cos\left(\frac{\pi}{2}-g(x)\right)=\sin(g(x)).$$

若 $f(x)<0$，则由(1)及 $\cos x$ 在第四象限递增得

$$\cos(f(x))>\cos\left(-\frac{\pi}{2}+g(x)\right)=\sin(g(x)).$$

(2) 我们取 $f(x)=\cos x, g(x)=\sin x$，于是

$$\begin{aligned}&|f(x)\pm g(x)|\\=&|\cos x\pm\sin x|\\=&\left|\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}\pm x\right)\right|\\\leqslant&\sqrt{2}<\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

由(1)得 $\quad\cos(f(x))>\sin(g(x))$，

即 $\quad\cos(\cos x)>\sin(\sin x)$.

6・34 $a>0$ 是实数. f 是定义在全体实数上的一个实函数，对每一实数 x，有

$$f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}.$$

(1) 试证：f 是周期的，即有这样一个实数 $b>0$，使对每一 x，有 $f(x+b)=f(x)$；

(2) 对 $a=1$ 时，具体给出一个这样的非常数的函数 f.

（第 10 届国际数学奥林匹克，1968 年）

[证] (1) 显然 $\quad f(x)\geqslant\dfrac{1}{2}$，

$$\left[f(x+a)-\frac{1}{2}\right]^2=f(x)-f^2(x)$$

$$=\frac{1}{4}-\left[\frac{1}{2}-f(x)\right]^2,$$

可见 $\quad\left[f(x+2a)-\dfrac{1}{2}\right]^2$

$$=\frac{1}{4}-\left[\frac{1}{2}-f(x+a)\right]^2=\left[\frac{1}{2}-f(x)\right]^2.$$

$$\therefore\quad f(x+2a)-\frac{1}{2}=f(x)-\frac{1}{2},$$

$$f(x+2a)=f(x),$$

即 f 是周期的，周期 $b=2a$.

(2) 对 $a = 1$,可取 $f(x) = \dfrac{1 + \left|\cos\dfrac{\pi}{2}x\right|}{2}$.

6·35　如果存在正数 p 使得对一切 x 都有 $f(x + p) = f(x)$,那么 $f(x)$ 就是周期函数.例如,$\sin x$ 是周期为 2π 的周期函数.问 $\sin(x^2)$ 是周期函数吗?

(第 7 届加拿大数学奥林匹克,1975 年)

[解]　令 $g(x) = \sin(x^2)$.设 $g(x)$ 是周期函数,并且周期为 p.于是我们有恒等式
$$\begin{cases} g(-x) = g(x), & ① \\ g(p - x) = g(-x), & ② \\ g(p + x) = g(x). & ③ \end{cases}$$
由 ①、②、③ 得恒等式
$$g(p - x) = g(p + x)$$
即　$\sin(p^2 + x^2 - 2px) = \sin(p^2 + x^2 + 2px)$,

移项并和差化积得恒等式
$$2\cos(p^2 + x^2)\cdot\sin(2px) = 0. \qquad ④$$
但 ④ 式仅当 $p = 0$ 时为恒等式,此与 $p > 0$ 矛盾.因此 $\sin(x^2)$ 不是周期函数.

6·36　设 α, β, γ 是任一锐角三角形的三个顶角.试证:如果 $\alpha < \beta < \gamma$,则
$$\sin 2\alpha > \sin 2\beta > \sin 2\gamma.$$
(匈牙利数学奥林匹克,1933 年)

[证]　因为 $\alpha + \beta + \gamma = \pi$,$\gamma$ 和 $\beta - \alpha$ 都是锐角

因此
$$\begin{aligned} \sin 2\alpha - \sin 2\beta &= 2\cos(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) \\ &= 2\cos\gamma\sin(\beta - \alpha) > 0. \end{aligned}$$
即　$\sin 2\alpha > \sin 2\beta$.

同理可证　$\sin 2\beta > \sin 2\gamma$.

6·37　是否存在函数 $f(n)$,它把自然数的集合变为自身,且对于每一个自然数 $n > 1$,满足 $f(n) = f(f(n - 1)) + f(f(n + 1))$?

(第 23 届全苏数学奥林匹克,1989 年)

[解]　如果存在满足条件的函数 $f(n)$,那么当 $n \geqslant 2$ 时,存在函

数 $f(n)$ 的最小值 $f(n_0)$. 于是,我们有

$$f(n_0)=f(f(n_0-1))+f(f(n_0+1)). \qquad ①$$

由 ① 得 $f(n_0)\geqslant 1+1=2$. 由 $f(n_0)$ 的最小性及 $n_0+1\geqslant 2$ 可得

$$f(n_0+1)\geqslant f(n_0)\geqslant 2.$$

因此 $f(f(n_0+1))\geqslant f(n_0)$. ②

由 ① 和 ② 得

$$f(n_0)\geqslant 1+f(n_0), 0\geqslant 1,$$

矛盾. 故满足题目条件的函数 $f(n)$ 不存在.

6·38 已知函数 $f(x)$ 在整个数轴上有定义,并且将它的图像绕坐标原点旋转 $\frac{\pi}{2}$ 后,仍变为自身.

(1) 证明:方程 $f(x)=x$ 恰有一个解.

(2) 举出这样函数的例子.

(第 21 届全苏数学奥林匹克,1987 年)

[证] (1) 设 $f(0)=a$,则由已知条件可知 $f(-a)=0, f(0)=-a$. 因此 $a=-a$,从而 $a=0, f(0)=0$.

如果当 $x_0\neq 0$ 时,$f(x_0)=x_0$,则由已知条件可知,$f(-x_0)=x_0$,$f(-x_0)=-x_0$,此与函数定义矛盾. 故当 $x_0\neq 0$ 时,必有 $f(x_0)\neq x_0$.

综上所述,方程 $f(x)=x$ 只有一个解 $x=0$.

(2) 下列函数为符合条件的例子:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x=0 \text{ 时;}\\ -\dfrac{x}{2}, & \text{当 } 4^k\leqslant |x|<2\cdot 4^k \text{ 时;} \quad (k\in z)\\ 2x, & \text{当 } 2\cdot 4^{k-1}\leqslant |x|<4^k \text{ 时.}\end{cases}$$

6·39 已知对于某个自然数 $n\geqslant 2$,多项式 $u_i(x)=a_ix+b_i$(a_i, b_i 是实数,$i=1,2,3$)满足关系式

$$u_1^n(x)+u_2^n(x)=u_3^n(x). \qquad ①$$

试证这些多项式可以表示成

$$u_i(x)=c_i(A\cdot x+B).$$

这里 $i=1,2,3$,并且 A, B, c_1, c_2, c_3 是实数.

(波兰数学奥林匹克 1972 年)

[证] 若 $a_1=a_2=0$,那么多项式 u_1 和 u_2 退化为常数. 由关系

式①可知多项式 $u_3(x)$ 也退化为常数，也即 $a_3=0$. 在这种情形下，只需令 $c_i=b_i(i=1,2,3)$，$A=0,B=1$.

如果数 a_1,a_2 中至少有一个异于0，比如设 $a_1\neq0$. 我们令 $y=a_1x+b_1$，那么对于 $j=2,3$，将 $x=\dfrac{y-b_1}{a_1}$ 代入到 $u_j(x)=a_jx+b_j$ 中得

$$u_j(x)=\frac{a_j}{a_1}y+\frac{b_ja_1-a_jb_1}{a_1},$$

或者 $$u_j(x)=A_jy+B_j,$$

其中 $A_j=a_j/a_1,B_j=(b_ja_1-a_jb_1)/a_1$，于是①式可变形为

$$y^n+(A_2y+B_2)^n=(A_3y+B_3)^n, \qquad ②$$

这里 y 是实数. 比较②式两端的常数项及 y,y^n 的系数(已知 $n\geqslant2$)，得

$$B_2^n=B_3^n, \qquad ③$$

$$nA_2B_2^{n-1}=nA_3B_3^{n-1}, \qquad ④$$

$$1+A_2^n=A_3^n. \qquad ⑤$$

若 $B_2=0$，则由③得 $B_3=0$. 于是对于 $j=2,3$，有 $b_ja_1-a_jb_1=0$，或即 $b_j=\dfrac{a_j}{a_1}b_1$. 在这种情况下，只需取 $c_1=1,c_j=\dfrac{a_j}{a_1}(j=2,3)$，$A=a_1,B=b_1$.

若 $B_2\neq0$，则由③知 $B_3\neq0$. 将等式④，③两端分别相除，得 $\dfrac{A_2}{B_2}=\dfrac{A_3}{B_3}$. 将此式两端 n 次方，并利用③，得 $A_2^n=A_3^n$. 这与⑤式矛盾. 因此 $B_2\neq0$ 的情形不可能出现.

6·40 已知一个二次函数 $y=f(x)$ 的图像顶点是$(-1,1)$，与 y 轴交点为$(0,2)$.

(1) 求出这个二次函数表达式；

(2) 当 $x=8$，$y=?$

(3) 给出任一 y 的值，是否一定可以找到 x 值?为什么?用图像说明.

(中国上海市数学竞赛，1960年)

[解] (1) 因$(-1,1)$是$y=f(x)$的顶点，

故可设$y=a(x+1)^2+1$,

再由与y轴交点为$(0,2)$,可得

$$2=a(0+1)^2+1,\text{解得 } a=1.$$

故所求二次函数为

$$y=(x+1)^2+1,$$

即$y=x^2+2x+2$.

(2) 当$x=8$时，$y=9^2+1=82$.

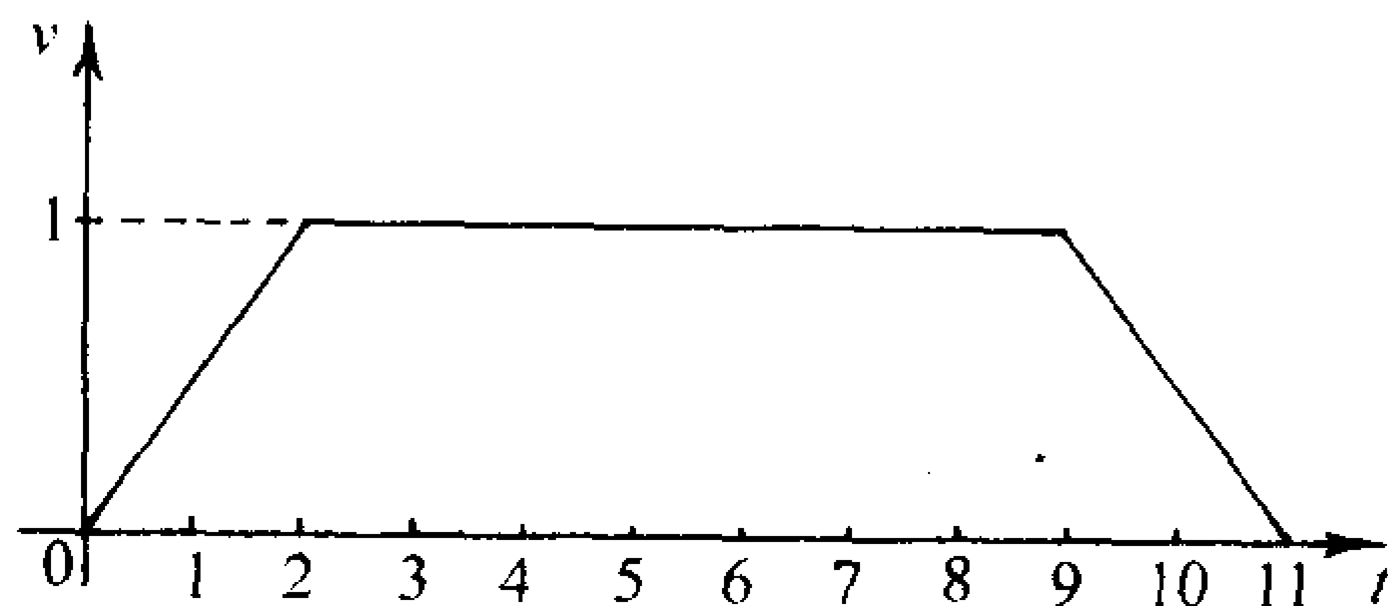
(3) 给出任一y的值，不一定可以找到对应的x的值.因为$y=(x+1)^2+1\geqslant 1$,故y值取小于1时，找不到对应的x值.

如图，直线$y=m$,在$m<1$时，与抛物线$y=x^2+2x+2$不相交.

6·41 火车从甲站出发，以0.5千米/分^{2}的加速度前进，经过2分钟后，以匀速运动继续前进，再过7分钟，又以0.5公里/分^{2}作匀减速运动进乙站，在乙站停车2分钟，试画出从甲站出发，到乙站运行这一段时间内，速度与时间关系的图像，再求出这段时间内，路程与时间的函数关系解析式，并确定这些函数中，时间的允许值范围.

(中国上海市数学竞赛，1960年)

[解]



当 $0 \leqslant t \leqslant 2$ 时，$S = \frac{1}{2}at^2 = \frac{t^2}{4}$；

当 $2 < t \leqslant 9$ 时，$S = \frac{2^2}{4} + (t-2) = 1 + t - 2 = t - 1$；

当 $9 < t \leqslant 11$ 时，$S = (9-1) + (t-9) - \frac{1}{2}a(t-9)^2$

$$= t - 1 - \frac{1}{4}(t-9)^2$$

$$= \frac{1}{4}(-t^2 + 22t - 85);$$

当 $11 < t \leqslant 13$ 时，$S = \frac{1}{4}(-11^2 + 22 \times 11 - 85) = 9$.

6・42　已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的对称轴为 $x = -2$，它与某直线切于一点，这直线斜率为 2，在 y 轴上截距为 1，且抛物线与 $y = 0$ 相交于两点，它们之间的距离为 $2\sqrt{2}$，试求此抛物线方程.

（中国上海市数学竞赛，1960 年）

[解]　(1)　$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$

由 $x = -2$ 为对称轴，得 $\frac{b}{2a} = 2$，故 $b = 4a$.

(2)　$y = ax^2 + bx + c$ 与直线 l 相切，

而 $l: y = 2x + 1$，故抛物线与 l 相交于一点，

故有　$ax^2 + 4ax + c = 2x + 1$，

即　$ax^2 + 2(2a-1)x + (c-1) = 0$.

且　$(2a-1)^2 - a(c-1) = 0$，

故有 $c = \frac{(2a-1)^2 + a}{a}$.

(3)　$y = ax^2 + 4ax + \frac{(2a-1)^2 + a}{a}$

它与 $y = 0$ 交点为 $ax^2 + 4ax + \frac{(2a-1)^2 + a}{a} = 0$，

解之得　$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 - \frac{(2a-1)^2 + a}{a^2}}$.

由 $x_1 - x_2 = 2\sqrt{2}$，得

$$\sqrt{4-\frac{(2a-1)^2+a}{a^2}}=\sqrt{2},$$

即 $4-\frac{(2a-1)^2+a}{a^2}=2,$

$(2a-1)^2+a=2a^2,$

即 $2a^2-3a+1=0,(2a-1)(a-1)=0.$

故 $a=1$ 或 $a=\frac{1}{2}.$

如图当 $a=1$ 时,所求抛物线为

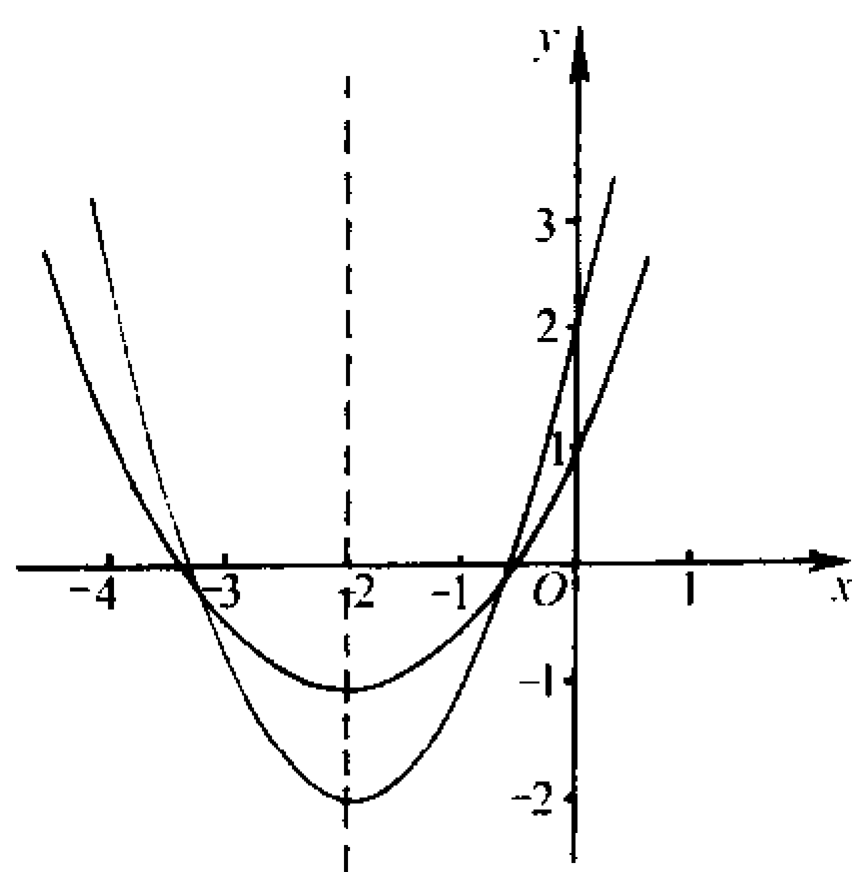
$$y=x^2+4x+2,$$

即 $y=(x+2)^2-2.$

当 $a=\frac{1}{2}$ 时,所求抛物线为

$$y=\frac{1}{2}x^2+2x+1,$$

即 $y=\frac{1}{2}(x+2)^2-1.$



6·43 令 $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$,其中 $-1\leqslant x_i\leqslant 1, i=1,2,\cdots,n$.证明:不可能存在数 a、b 同时满足

(1) $|f(a)|\geqslant 1$;

(2) $|f(b)|\geqslant 1$;

(3) $-1<a<0<b<1$.

(加拿大国家集训队训练题)

[证] 设有 a,b 满足 $-1<a<0<b<1$.我们证明

$$|f(a)|<1,\ |f(b)|<1 \quad ①$$

至少有一个成立.

事实上,设在 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中

$x_1,x_2,\cdots,x_k<a, x_{k+1},\cdots,x_{k+h}>b$,其余的在 a,b 之间.

不失一般性,可假定 $h\geqslant k$.

若 $b\geqslant\frac{1}{2}$,则在乘积

$|f(a)\cdot f(b)|$

$= |(a-x_1)(a-x_2)\cdots(a-x_n)(b-x_1)(b-x_2)\cdots(b-x_n)|$

中，由于

$$|(x_i-b)(x_{k+i}-b)|\leqslant(1+b)(1-b)<1 \qquad ②$$

$$|(x_i-a)(x_{k+i}-a)|\leqslant(1+a)(1-a)<1 \qquad ③$$

其中 $i=1,2,\cdots,k$，

$$|(x_i-b)(x_j-a)|\leqslant(1-b)(1-a)<\frac{1}{2}\times 2=1 \qquad ④$$

其中 $j=2k+1,2k+2,\cdots,k+h$，

$$|(b-x_t)(x_t-a)|\leqslant\left(\frac{b-a}{2}\right)^2<1 \qquad ⑤$$

其中 $t=k+h+1,k+h+2,\cdots,m$，

所以 $|f(a)\cdot f(b)|<1$.

从而 ① 中至少有一个不等式成立.

若 $b<\frac{1}{2}$，先考虑 $f(b)$. 这时 ② 式仍成立，而对于 $(b-1,1]$ 中的每个 x_i 均有

$$|x_i-b|<1,$$

如果 $|f(b)|\geqslant 1$，那么必有 $a<b-1$. 对于 $(a,b-1]$ 中每个 x_i 及 $[0,1]$ 中的每个 x_j 均有

$$|(x_i-b)(x_j-b)|<(1+b)(1-b)=1-b^2<1,$$

所以 $(a,b-1]$ 中的 x_i 的个数大于 $[0,1]$ 中的 x_i 的个数减去 k.

现在考虑 $f(a)$. 这时 ③ 仍成立. 由于 $[0,1]$ 中的除 $x_{k+1},x_{k+2},\cdots,x_{2k}$ 以外的 x_j 的个数不多于 $[a,b-1]$ 上 x_i 的个数，并且

$$\begin{aligned}|(x_i-a)(x_j-a)| &\leqslant |(x_i-a)(1-a)|\\ &\leqslant(b-1-a)(1-a)\\ &<2(b-1-a)\\ &<2b<1.\end{aligned}$$

而对于 $(a,0)$ 中每个 x_i，

$$|x_i-a|<1,$$

所以 $|f(a)|<1$.

于是原命题得证.

6·44 设$f(x)$为定义在$0\leqslant x\leqslant 1$的连续函数,$f(0)=0$,$f(1)=1$.又设对于任一x,$0<x<1$,存在h,当$0\leqslant x-h<x+h\leqslant 1$时,

$$f(x)=\frac{f(x-h)+f(x+h)}{2}.$$

证明:对$0\leqslant x\leqslant 1$,$f(x)=x$.

(加拿大国家集训队训练题)

[解] 令$F(x)=f(x)-x$,则$F(0)=F(1)=0$,并且F满足与f相同的条件.若$F(x)$的最大值$M>0$,则我们取

$$x_0=\inf\{x:F(x)=M\},$$

因为F连续,所以$F(x_0)=M>0$,于是$x_0>0$.并且存在h,$0\leqslant x_0-h<x_0+h\leqslant 1$,使

$$F(x_0)=\frac{F(x_0-h)+F(x_0+h)}{2}.\quad ①$$

另一方面,由于M是最大值,所以$F(x_0\pm h)\leqslant M$,又由x_0的定义,$F(x_0-h)<M$,于是①不可能成立,从而$M=0$.

同理(用$s\cup p$代替inf)可证$F(x)$的最小值为0.因此对$0\leqslant x\leqslant 1$,$F(x)=0$.即对$0\leqslant x\leqslant 1$,$f(x)=x$.

6·45 证明:存在一个惟一的,从正实数集到正实数集的函数f,对所有的$x>0$满足$f(f(x))=6x-f(x)$.

(加拿大国家集训队训练题)

[解] 构造数列$a_1=6$,$a_n=\dfrac{6}{1+a_{n-1}}$,$n\geqslant 2$. ①

显然,该数列的每一项都是正数.因为

$$a_n-2=\frac{6}{1+a_{n-1}}-2=\frac{2(2-a_{n-1})}{1+a_{n-1}}.$$

所以,由数学归纳法易知,对于任意自然数n,我们有

$$a_{2n-1}>2>a_{2n}.$$

又因为

$$\begin{aligned}a_n-a_{n-2}&=\frac{6}{1+a_{n-1}}-a_{n-2}\\&=\frac{6}{1+\dfrac{6}{1+a_{n-2}}}-a_{n-2}\end{aligned}$$

$$= \frac{-(a_{n-2}-2)(a_{n-2}+3)}{7+a_{n-2}}.$$

所以用数学归纳法易知,a_{2n-1} 递减,a_{2n} 递增. 从而 $\{a_{2n-1}\}$ 与 $\{a_{2n}\}$ 均有极限. 设极限分别为 α,β,则由 ①

$$\begin{cases}\alpha(1+\beta)=6, & ② \\ \beta(1+\alpha)=6. & ③\end{cases}$$

由 ②、③ 解得 $\alpha=\beta=2$.

对于每个正数 x,显然 $f(x)<6x=a_1x$. ④

若对每个正数 x,有 $f(x)<a_{n-1}x$,则

$$6x-f(x)=f(f(x))<a_{n-1}f(x).$$

从而 $f(x)>\dfrac{6x}{1+a_{n-1}}=a_{nx}$.

同样,若对每个正数 x,有 $f(x)>a_nx$,

则 $f(x)<a_{n+1}x$.

于是,对任意自然数 n,

$$a_{2n}x<f(x)<a_{2n-1}x.$$

在 $n\to+\infty$ 的过程中,取极限得 $f(x)=2x$.

容易验证 $f(x)=2x$ 满足题述条件. 故命题得证.

6·46 设 $M=\{1,2,3,\cdots,20\}$,对于 M 的任一 9 元子集 S,函数 $f(S)$ 取 1 至 20 之间的整数值. 求证:不论 f 是怎样的一个函数,总存在 M 的一个 10 元子集 T,使得对所有的 $k\in T$,都有

$$f(T-\{k\})\neq k.$$

(第 17 届美国数学奥林匹克,1988 年)

[证] 如果一个 10 元子集 T 具有性质:对任何 $k\in T$,均有 $f(T-\{k\})\neq k$,我们就称 T 为"好集",不是"好集"的10元子集称之为"坏集". 也就是说,如果 T 为"坏集",是指 T 中有一 k_0,使

$$f(T-\{k_0\})=k_0.$$

令 $S=T-\{k_0\}$,这是一个 9 元子集. 一方面 $f(S)=k_0$,另一方面 $T=S\cup\{k_0\}$,即

$$T=S\cup\{f(S)\}.$$

上式表示了"坏集"的结构,它可由某一个 9 元子集 S 生成,即 S 与 $\{f(S)\}$ 的并集构成了"坏集".

如果 $f(S) \in S$,那么 $S \cup \{f(S)\}$ 是一个 9 元子集,而不是 10 元子集,因此任一 9 元子集至多能按上式生成一个"坏集".

于是"坏集"的个数 $\leqslant$ 9 元子集的个数 $= C_{20}^{9} < C_{20}^{10} =$ 10 元子集的个数.

由此可知,"好集"是存在的.

6·47 设 X 是一个有限集合,法则 f 使得 X 的每一个偶子集 E(偶数个元素组成的子集)都对应一个实数 $f(E)$,且满足条件:

(1) 存在一个偶子集 D,使得 $f(D) > 1990$,

(2) 对于 X 的任意两个不相交的偶子集 A, B,有

$$f(A \cup B) = f(A) + f(B) - 1990.$$

求证:存在 X 的子集 P 和 Q,满足

(1) $P \cap Q = \phi, P \cup Q = X$;

(2) 对 P 的任何非空偶子集 S,有 $f(S) > 1990$;

(3) 对 Q 的任何偶子集 T,有 $f(T) \leqslant 1990$.

(第 5 届中国中学生数学冬令营,1990 年)

[证] 由于 X 是有限集,因此 X 的一切偶子集的数目是有限的.

令 P 是 X 的 f 取值最大的偶子集中元素最少的一个,Q 是 P 相对于 X 的补集.

可以证明,这样选取的 P, Q 满足题目的要求.

事实上,显然有

$$P \cap Q = \phi, P \cup Q = X,$$

即满足题目要求(1).

由题设条件(1)及 P 的取法,得

$$f(P) \geqslant f(D) > 1990.$$

由于空集 ϕ 是偶子集,且 $\phi = \phi \cup \phi$,因此由题设条件(2)可得

$$f(\phi) = f(\phi) + f(\phi) - 1990,$$

故 $$f(\phi) = 1990.$$

故 $$P \neq \phi.$$

对于 P 的任何非空偶子集 S. 令 $\overline{S}$ 是 S 相对于 P 的补集,则

$$S \cap \overline{S} = \phi, S \cup \overline{S} = P,$$

如果 $f(S) \leqslant 1990$,那么

$$f(S) - 1990 \leqslant 0.$$

由题设条件(2),得

$$f(P)=f(S\cup\overline{S})=f(S)+f(\overline{S})-1990\leqslant f(\overline{S}),$$

即 $f(\overline{S})\geqslant f(P)>1990.$

由于 $S\neq\phi$,因此 $\overline{S}$ 的元素个数少于 P 的元素个数,从而与 P 的取法矛盾.故

$$f(S)>1990.$$

即满足题目要求(2).

任取 Q 的偶子集 T,则 $P\cap T=\phi$.

如果 $f(T)>1990$,那么由假设条件(2),得

$$f(P\cup T)=f(P)+f(T)-1990>f(P),$$

即 $f(P\cup T)>f(P)$,

此与 P 的取法矛盾.故

$$f(T)\leqslant 1990,$$

即满足题目要求(3).

6·48 设 $N=\{1,2,3,\cdots\}$.

论证是否存在一个函数 $f:N\rightarrow N$ 使得

$$f(1)=2,$$

$$f(f(n))=f(n)+n$$

对一切 $n\in N$ 成立,

$$f(n)<f(n+1)$$

对一切 $n\in N$ 成立.

(第 34 届国际数学奥林匹克,1993 年)

[解] 这样的函数存在.

我们取 $\alpha=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2},\beta=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$,显然 $\alpha=1+\beta,\alpha\beta=1$,

令 $f(n)=[\alpha n+\beta],n\in N$.证明 $f(n)$ 合于条件 $f:N\rightarrow N$,且

$$f(1)=[\alpha+\beta]=[\sqrt{5}]=2,$$

$$\begin{aligned}f(n+1)&=[(n+1)\alpha+\beta]\\&=[\alpha n+\beta+\alpha]\geqslant[\alpha n+\beta+1]\\&=f(n)+1>f(n).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(f(n))&=[\alpha[\alpha n+\beta]+\beta]\\&=[\alpha n+\beta]+[\beta[\alpha n+\beta]+\beta]\end{aligned}$$

$$= f(n) + [\beta[\alpha n + \beta] + \beta]. \quad ①$$

显然，$\alpha n + \beta$ 不是整数，于是，有

$$\begin{aligned} &\beta[\alpha n + \beta] + \beta < \beta(\alpha n + \beta) + \beta \\ &= n + \beta^2 + \beta \\ &= n + \beta(\beta + 1) \\ &= n + 1, \\ &\beta[\alpha n + \beta] + \beta \\ &> \beta(\alpha n + \beta - 1) + \beta \\ &= n + \beta^2 > n. \end{aligned}$$

所以 $[\beta[\alpha n + \beta] + \beta] = n.$

由 ① 得 $f(f(n)) = f(n) + n.$

故 $f(n) = [\alpha n + \beta]$ 满足所有的条件.

注 所求的 $f(n)$ 不是惟一的，有多种构造形式，如：

(A) $f(n) = \left[\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}n + \dfrac{1}{2}\right]$；

(B) $f(1) = 2$，

$f(n) = n + \max\{i < n : f(i) \leqslant n\}.$

(A)，(B) 所构造的函数，都可验证满足题目中所给的条件.

6·49 给出 $f(x) = ax + b$ 型的非常数函数 f 所组成的非空集 G，这里 a、b 是实数且 $a \neq 0$，x 是实变数. 若 G 有如下性质：

(1) 若 f、$g \in G$，则 $g_\circ f \in G$，其中定义

$(g_\circ f)(x) = g(f(x))$；

(2) 若 $f \in G$，且 $f(x) = ax + b$，那么反函数 f^{-1} 也属于 G，这里

$$f^{-1}(x) = \frac{x - b}{a};$$

(3) 对每一 $f \in G$ 有一个 x_f，使 $f(x_f) = x_f$. 试证总有一个 k，使对所有 $f \in G$，有 $f(k) = k$.

（第 15 届国际数学奥林匹克，1973 年）

［证］ 我们用反证法证明，对 G 中所有异于 x 的 $f(x)$，x_f 都相等.

设有 $f, g \in G - \{x\}$ 使得 $x_f \neq x_g$.

令 $f(x) = ax + b$，$g(x) = a'x + b'$，则由

$ax_f + b = x_f$，$a'x_g + b' = x_g$

得 $a \neq 1$，$a' \neq 1$，

$$x_f=\frac{b}{1-a},x_g=\frac{b'}{1-a'}.$$

于是 $h(x)=f_0g_0f_0^{-1}g^{-1}(x)$

$$=a\left[a'\left(\frac{\frac{x-b'}{a'}-b}{a}\right)+b'\right]+b$$

$$=x-b'-a'b+ab'+b$$

$$=x+(1-a)(1-a')(x_f-x_g).$$

由于$(1-a)(1-a')(x_f-x_g)\neq 0$,不存在 x_h 使$h(x_h)=x_h$,此与$h(x)\in G$矛盾.

6・50　设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是实常数,x 是实变数,且

$$f(x)=\cos(\alpha_1+x)+\frac{1}{2}\cos(\alpha_2+x)+\frac{1}{2^2}\cos(\alpha_3+x)+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\cos(\alpha_n+x).$$

试证:从 $f(x_1)=f(x_2)=0$ 可推得 $x_2-x_1=m\pi$ 其中 m 是一个整数.

(第 11 届国际数学奥林匹克,1969 年)

[证]　首先注意

$$f(-\alpha_1)=1+\frac{1}{2}\cos(\alpha_2-\alpha_1)+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\cos(\alpha_n-\alpha_1)$$

$$\geqslant 1-\frac{1}{2}-\cdots-\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^{n-1}}>0,$$

所以 $f(x)$ 不恒等于 0,再注意

$$f(x)=(\cos\alpha_1\cdot\cos x-\sin\alpha_1\cdot\sin x)+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}(\cos\alpha_n\cdot\cos x-\sin\alpha_n\cdot\sin x)$$

$$=(\cos\alpha_1+\frac{1}{2}\cos\alpha_2+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\cos\alpha_n)\cdot\cos x-(\sin\alpha_1+\frac{1}{2}\sin\alpha_2+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\sin\alpha_n)\cdot\sin x$$

令 $\cos\alpha_1+\frac{1}{2}\cos\alpha_2+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\cos\alpha_n=c,$

$\sin\alpha_1+\frac{1}{2}\sin\alpha_2+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\sin\alpha_n=s,$

则 $r=\sqrt{c^2+s^2}\neq 0$,于是可以找到 α 使得

$$\cos\alpha=\frac{c}{\sqrt{c^2+s^2}},\sin\alpha=\frac{s}{\sqrt{c^2+s^2}},$$

这样
$$\begin{aligned}f(x)&=c\cdot\cos x-s\cdot\sin x\\&=r\cdot\cos\alpha\cdot\cos x-r\sin\alpha\cdot\sin x\\&=r\cdot\cos(\alpha+x),\end{aligned}$$

于是,当且仅当

$$\alpha+x_1=k\pi+\frac{\pi}{2},\alpha+x_2=l\pi+\frac{\pi}{2}(k,l\text{ 为整数}),$$

有 $f(x_1)=f(x_2)=0$,

故 $x_2-x_2=m\pi,m=l-k$.

6·51 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ 与 $g(x)=c_{n+1}x^{n+1}+c_nx^n+\cdots+c_0$ 都是实系数非零多项式,且有一个实数 γ,使 $g(x)=(x+\gamma)f(x)$;并设 a 为 $\{|an|,|a_{n-1}|,\cdots,|a_0|\}$ 之元素中最大的数,c 为 $\{|c_{n+1}|,|c_n|,\cdots,|c_0|\}$ 之元素中最大的数.

试证:$\frac{a}{c}\leqslant n+1$.

(第 5 届亚太地区数学奥林匹克,1993 年)

[证] 因 $g(x)=(x+\gamma)f(x)$,比较两边系数得

$$\begin{cases}c_0=a_0\gamma,\\c_1=a_0+a_1\gamma,\\\cdots\cdots\\c_i=a_{i-1}+a_i\gamma,\\\cdots\cdots\\c_n=a_{n-1}+a_n\gamma,\\c_{n+1}=a_n.\end{cases}\qquad ①$$

由 ① 解得

$$\begin{cases} a_n = c_{n+1}, \\ a_{n-1} = c_n - c_{n+1}\gamma, \\ \cdots\cdots \\ a_{i-1} = c_i - a_i\gamma = c_i - c_{i+1}\gamma + \cdots + (-1)^{n-i+1}c_{n+1}\gamma^{n-i+1} \\ \cdots\cdots \\ a_0 = c_1 - c_2\gamma + \cdots + (-1)^n c_{n+1}\gamma^n. \end{cases} \quad ②$$

(1) 当 $|\gamma| \leqslant 1$ 时,由 ② 得

$$|a_i| \leqslant (n+1)c, i = 0,1,2,\cdots,n.$$

因此,$a \leqslant (n+1)c$,得证:

(2) 当 $|\gamma| > 1$ 时,由 ①, $|a_0| \leqslant |a_0||\gamma| = |c_0| \leqslant c$,

$$|a_1| \leqslant |a_1\gamma| = |c_1 - a_0| \leqslant |c_1| + |a_0| \leqslant 2c,$$

$\cdots\cdots$

$$|a_i| \leqslant |a_i\gamma| = |c_i - a_{i-1}| \leqslant |c_i| + |a_{i-1}| \leqslant c + ic = (i+1)c$$

$\cdots\cdots$

$$|a_{n-1}| \leqslant |a_{n-1}\gamma| = |c_{n-1} - a_{n-2}| \leqslant |c_{n-1}| + |a_{n-2}| \leqslant c + (n-1)c = nc$$

$$|a_n| = |c_{n+1}| \leqslant c.$$

因此,$|a_i| \leqslant nc < (n+1)c, i = 1,2,\cdots,n.$

故得 $a < (n+1)c.$

合并(1),(2) 得证 $\frac{a}{c} \leqslant n+1.$

6·52 设 $y_1, y_2, y_3, \cdots\cdots$ 是一个数列,其中 $y_1 = 1$,并且对于整数 $k > 0$,有

$$y_{2k} = \begin{cases} 2y_k & k \text{ 为偶数} \\ 2y_k + 1 & k \text{ 为奇数}, \end{cases}$$

$$y_{2k+1} = \begin{cases} 2y_k & k \text{ 为奇数} \\ 2y_k + 1 & k \text{ 为偶数}. \end{cases}$$

证明:每一个自然数恰在数列 $y_1, y_2, y_3, \cdots\cdots$ 中出现一次.

(第 25 届加拿大数学奥林匹克,1993 年)

[证] 计算可得:$y_1 = 1$, $y_2 = 2y_1 + 1 = 3$, $y_3 = 2y_1 = 2$, $y_4 = 2y_2 = 6$, $y_5 = 2y_2 + 1 = 7$, $y_6 = 2y_3 + 1 = 5$, $y_7 = 2y_3 = 4$.

即 $\{y_1\}=\{1\}$, $\{y_2,y_3\}=\{2,3\}$, $\{y_4,y_5,y_6,y_7\}=\{4,5,6,7\}$.

显然,我们只需证明下列两个 2^{m-1} 个元素的集合满足等式

$$\{y_{2^{m-1}},y_{2^{m-1}+1},\cdots,y_{2^m-1}\}=\{2^{m-1},2^{m-1}+1,\cdots,2^m-1\} \quad ①$$

用数学归纳法证之.

假设①式对某一个 $m\geqslant 1$ 成立,考虑 $y_k(k=2^m+d,d=0,1,2,\cdots,2^m-1)$,则有

$$\left[\frac{k}{2}\right]\geqslant 2^{m-1},\quad \left[\frac{k}{2}\right]\leqslant\left[\frac{2^{m+1}-1}{2}\right]=2^m-1.$$

又因为 k 为偶数时,$k=2\cdot\left(\frac{k}{2}\right)=2\cdot\left[\frac{k}{2}\right]$;

k 为奇数时,$k=2\cdot\left(\frac{k-1}{2}\right)+1=2\cdot\left[\frac{k}{2}\right]+1$,所以

$$2y_{\left[\frac{k}{2}\right]}\leqslant y_k\leqslant 2y_{\left[\frac{k}{2}\right]}+1.$$

由归纳假设知

$$\{y_{2^m},y_{2^m+1},\cdots,y_{2^{m+1}-1}\}\leqslant\{2^m,2^m+1,\cdots,2^{m+1}-1\}$$

下面证明对 $2^m\leqslant k\leqslant 2^{m+1}-1$ 映射 $k\to y_k$ 是一一对应的.

假设 $y_i=y_j$,且 $2^m\leqslant i,j\leqslant 2^{m+1}-1$,则可设 $i=2k_i+\varepsilon_i$, $j=2k_j+\varepsilon_j$,其中 $\varepsilon_i,\varepsilon_j\in\{0,1\}$, $2^{m-1}\leqslant k_i,k_j\leqslant 2^m-1$.则由条件

$$2y_{k_i}=2y_{k_j}$$

及归纳假设知

$$k_i=k_j$$

从而 $\varepsilon_i=\varepsilon_j$ (否则 $|y_i-y_j|=1$ 矛盾).

即得 $i=j$.

这就是说 $\{y_{2^m},y_{2^m+1},\cdots,y_{2^{m+1}-1}\}=\{2^m,2^{m+1},\cdots,2^{m+1}-1\}$.所以①式对任意 $m\geqslant 1$ 都成立.

从而原命题证毕.

6·53 f、g、h 定义如下:

$f(n)=10n$,n 为正整数;

$g(n)=10n+4$,n 为正整数;

$h(n)=\dfrac{n}{2}$,n 为正偶数.

证明:每一个自然数都能够从4开始经有限次 f、g、h 的某些运算表示出来.

(第4届爱尔兰数学奥林匹克,1991年)

[证] 用归纳法.显然,$2=h(4)$, $1=h(2)$, $5=h(f(1))$, $7=h(g(1))$, $6=h(h(g(2)))$, $3=h(6)$, $10=f(1)$, $9=h(h(h(h(g(g(1))))))$, $8=h(h(h(g(6))))$, $4=h(8)$.因此,每一个不大于10的自然数都能从4开始经有限次 f,g,h 运算而得到.

设命题对每一个不大于 N 的自然数都成立,我们记

$$N+1=10n+t, t\in\{0,1,2,\cdots,9\}.$$

易知

$$10n=f(n);$$
$$10n+1=h(20n+2)=h(h(40n+4))=h(h(g(4n)));$$
$$10n+2=h(g(2n));$$
$$10n+3=h(h(h(g(8n+2))));$$
$$10n+4=g(n);$$
$$10n+5=h(f(2n+1));$$
$$10n+6=h(h(g(4n+2)));$$
$$10n+7=h(g(2n+1));$$
$$10n+8=h(h(h(g(8n+6)))).$$

下面再考虑 $10n+9$.

首先 $10n+9=h(h(h(h(g(16n+14))))).$

令 $m=16n+14$,则 $m=10k+s, s=0,2,4,6,8$.

若 $s=0$,则 $m=f(k)$;

若 $s=2$,则 $m=h(g(2k))$;

若 $s=4$,则 $m=g(k)$;

若 $s=6$,则 $m=h(h(g(4k+2)))$,且 $4k+2<10n+9$;

若 $s=8$,则 $m=h(h(h(g(8k+6))))$,但 $8k+6>10n+9$.

所以我们必须再进一步考虑.记 $8k+6=10p+q$. $q=0,2,4,6,8$.对于 $q=0,2,4,6$ 的情况,由以上证明易知命题对 $N+1$ 成立.若 $q=8$,同样有 $10p+8=h(h(h(g(8p+6))))$.

由于仍有 $8p+6>10n+9$,从而再设 $8p+b=10a+b$,其中 $b=0,2,4,6.8$,此时易知

$$8a+6<10n+9,$$

于是重复以上证明可知命题对 $N+1$ 也成立.

6・54　求常数 c 的值,使函数

$$f(x)=\operatorname{arctg}\frac{2-2x}{1+4x}+c$$

在区间 $\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$ 上为奇函数.

(第16届全俄数学奥林匹克,1990年)

[**解**]　假设所求常数 c 是存在的,函数 $f(x)$ 为奇函数,于是 $f(0)=\operatorname{arctg}2+c=0$,由此知 c 的惟一可能值为 $-\operatorname{arctg}2$.

我们再证明在区间 $\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$ 上,函数

$$f(x)=\operatorname{arctg}\frac{2-2x}{1+4x}-\operatorname{arctg}2$$

是奇函数,即满足关系式:

$$f(x)=-f(-x).\qquad ①$$

事实上,当 $x\in\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$ 时,函数 $z=\frac{2-2x}{1+4x}$ 之值落在区间 $\left(\frac{3}{4},\infty\right)$ 之内,因而函数 $f(x)=\operatorname{arctg}z-\operatorname{arctg}2$ 之值位于区间 $\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}-\operatorname{arctg}2,\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}2\right)$ 之间,显然也位于区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 之内.由此可见,当 $x\in\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$ 时,函数 $-f(-x)$ 之值也位于该区间内,故 ① 式等价于

$$\operatorname{tg}f(x)=\operatorname{tg}(-f(-x)).\qquad ②$$

但用三角公式可得

$$\operatorname{tg}f(x)=-2x,$$

$$\operatorname{tg}[-f(-x)]=-2x,$$

故 ② 式成立,从而 ① 式成立,于是 $c=-\operatorname{arctg}2$.

6・55　设 f 是具有下列性质的函数:

(1) $f(n)$ 对每个正整数 n 有定义;

(2) $f(n)$ 是整数;

(3) $f(2)=2$;

(4) $f(m\cdot n)=f(m)\cdot f(n)$ 对一切 m,n;

(5) $f(m) > f(n)$，当 $m > n$ 时.

试证：$f(n) = n$.

（第 1 届加拿大数学奥林匹克，1969 年）

[证] 由(4)得 $f(2) = f(1) \cdot f(2)$，从而有 $f(1) = 1$. 设当 $n \leqslant k$ 时，都有 $f(n) = n$. 现在来证明 $f(k+1) = k+1$.

如果 $k + 1 = 2j (j \in N)$，那么 $1 \leqslant j \leqslant k$，从而得

$f(k+1) = f(2j) = f(2) \cdot f(j) = 2j = k+1$.

如果 $k + 1 = 2j + 1 (j \in N)$，那么 $1 \leqslant j \leqslant k$，从而得

$$2j = f(2j) < f(2j+1) < f(2j+2) = 2j+2$$

即 $$2j < f(2j+1) < 2j+2,$$

又由(2)得

$$f(2j+1) = 2j+1.$$

由数学归纳原理可知，对一切自然数 n，都有 $f(n) = n$.

6・56 已知定义在正整数集上的函数 f 满足：$f(1) = 1$，$f(2) = 2$，$f(n+2) = f(n+2-f(n+1)) + f(n+1-f(n))$ $(n \geqslant 1)$

(1) 求证：$0 \leqslant f(n+1) - f(n) \leqslant 1$，并且当 $f(n)$ 为奇数时，$f(n+1) = f(n) + 1$；

(2) 试求：适合 $f(n) = 2^{10} + 1$ 的所有 n 的值，并证明你的结论.

（第 22 届加拿大数学奥林匹克，1990 年）

[解] (1) 我们先证明一个引理：对于任意的自然数 n，$f(n+1) - f(n) \in \{0,1\}$.

用数学归纳法.

当 $n = 1$ 时，$f(2) - f(1) = 1$，引理成立.

设当 $n < k$ 时，引理成立.

则当 $n = k$ 时，我们有

$[(n+2) - f(n+1)] - [n+1-f(n)]$

$= 1 - [f(n+1) - f(n)] \in \{0,1\}$.

因此，由归纳假设，

$$f[n+2-f(n+1)] - f[n+1-f(n)] \in \{0,1\} \quad ①$$

下面分两种情况讨论：

情况 1 $f(k) - f(k-1) = 1$. ②

代数卷

这时，$f(k+1)-f(k)$

$$= f(k+1-f(k))-f(k-1-f(k-2))$$

（根据已知递推式）

$$= f(k-f(k-1))-f(k-1-f(k-2)) \quad （根据②）$$

$$\in \{0,1\} \quad （根据①）$$

情况2 $f(k)-f(k-1)=0$ ③

这时，由已知的递推式可得

$$f(k-f(k-1))=f(k-2-f(k-3)) \quad ④$$

由①和④可得 $f(k-1-f(k-2))=f(k-f(k-1))$ ⑤

$$f(k+1)-f(k)$$

$$= f(k+1-f(k))-f(k-1-f(k-2)) \quad （根据已知递推式）$$

$$= f(k+1-f(k))-f(k-f(k-1)) \quad （根据⑤）$$

$$\in \{0,1\} \quad （根据①）$$

根据数学归纳原理，对于任意自然数 n，都有

$$f(n+1)-f(n)\in\{0,1\}.$$

由引理，显然有

$$0\leqslant f(n+1)-f(n)\leqslant 1.$$

现在用数学归纳法再证当 $f(n)$ 为奇数时，$f(n+1)=f(n)+1$.

由已知，当 $n=1$ 时，$f(1)$ 为奇数，且

$$f(2)=f(1)+1.$$

假设当 $n<k$ 时，结论成立.

若 $f(k)$ 为奇数，则 $f(k-1)$ 必为偶数（否则，若 $f(k-1)$ 为奇数，则由归纳假设可得 $f(k)=f(k-1)+1$ 为偶数，与 $f(k)$ 为奇数矛盾）.于是由引理可得

$$f(k)=f(k-1)+1,$$

$$f(k+1)=f[k+1-f(k)]+f(k-f(k-1))$$

$$=2f(k-f(k-1)),$$

即 $f(k+1)$ 是偶数.再由引理得

$$f(k+1)=f(k)+1.$$

根据数学归纳原理，对于任意的自然数 n，当 $f(n)$ 是奇数时，都有

$$f(n+1)=f(n)+1.$$

（2） 我们用数学归纳法证明一个更强的结论：对于任意正整数

$m>1$，方程 $f(n)=2^{m-1}+1$ 有惟一解 $n=2^m$.

事实上，$m=2$时，方程化为 $f(n)=3$，它有惟一解 $n=2^2$，即 $n=4$（我们可由已知的递推式得 $f(3)=2$，$f(4)=3$；由(1)得 $f(5)=3+1=4$. 并由函数 $f(n)$ 的不减性判定解的惟一性）.

设 $m=k$ 时，要证的更强的结论成立.

由于 $f(n)$ 的值随着 n 的增加，每次增加0或者1，又从已知的递推式可以看出，

$$\lim_{n\to+\infty} f(n)=+\infty,$$

（否则，从某时刻起，$f(n)$ 将为正的常数值. 但由已知的递推式知，这样的话，对于足够大的 n，$f(n+2)$ 却为这个常数值的2倍，矛盾）因此，必有整数 n 使

$$f(n)=2^k+1.$$

这时，$f(n-1)$ 必为偶数，并且

$$f(n-1)=2^k.$$

由于 $f(n-f(n-1))+f(n-1-f(n-2))=f(n)=2^k+1$，并且上式左端两项之差为0或1，因此

$f(n-f(n-1))=f(n-1-f(n-2))+1=2^{k-1}+1$，由归纳假设

$$n-f(n-1)=2^k,$$

故 $$n=f(n-1)+2^k=2^k+2^k=2^{k+1}.$$

根据数学归纳原理，对于大于1的任意自然数 m，所证的更强的结论成立.

特别地，方程 $f(n)=2^{10}+1$ 有解 $n=2^{11}$.

这个解的惟一性显然可从(1)的结论的后一条得出.

6·57 试证：不存在非负整数集到非负整数集的这样一个函数 f，使得对每一 n，都有 $f(f(n))=n+1987$.

（第28届国际数学奥林匹克，1987年）

［证］ 假若这样的函数存在，则对每一 $n\in N$（非负整数集），有

$$f(n+1987)=f(f(f(n)))=f(n)+1987$$

由此应用归纳法，对每个 $n,t\in N$，有

$$f(n+1987t)=f(n)+1987t.$$

另一方面，考虑 $\gamma\in N$，$\gamma\leqslant 1986$，则有

$$f(\gamma) = 1987k + l, k, l \in N, l \leqslant 1986.$$

于是

$$f(f(r)) = r + 1987,$$
$$f(f(r)) = f(l + 1987k) = f(l) + 1987k.$$

由 $r \leqslant 1986, f(l) \geqslant 0.$

知 $k \leqslant 1$,这样就有两种可能性:

(1)$k = 1 \Rightarrow f(r) = 1987 + l$ 及 $f(l) = r \Rightarrow r \neq l$;

(2)$k = 0 \Rightarrow f(r) = l$ 及 $f(l) = r + 1987 \Rightarrow r \neq l$.

于是集$\{0,1,2,\cdots,1986\}$可按这样的方式配成对$\{a,b\}$:

$f(a) = b$ 和 $f(b) = a + 1987$

或 $f(b) = a$ 和 $f(a) = b + 1987$.

但集$\{0,1,2,\cdots,1986\}$仅含有奇数个元素,这样配对是不可能的.矛盾.

6·58 f是线段$0 \leqslant x \leqslant 1$上的函数.已知这个函数非负且$f(1) = 1$.此外,对于满足条件$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_1 + x_2 \leqslant 1$的任意两个数$x_1, x_2$,有不等式

$$f(x_1 + x_2) \geqslant f(x_1) + f(x_2).$$

(1) 证明:满足上述条件的任意函数f,对于一切x都有不等式$f(x) \leqslant 2x$.

(2) 不等式$f(x) \leqslant 1.9x$对于一切x都成立吗?

(第8届全苏数学奥林匹克,1974年)

[解] (1) 先证明函数f是区间$[0,1]$上的单调不减函数.

事实上,若$1 \geqslant x \geqslant y \geqslant 0$,则由已知条件可得

$$\begin{aligned} f(x) &= f((x-y)+y) \\ &\geqslant f(x-y) + f(y) \\ &\geqslant f(y). \end{aligned}$$

因此函数f是单调不减的.

另外,我们由已知条件可得

$$f(2x) \geqslant f(x) + f(x) = 2f(x),$$

即 $$f(x) \leqslant \frac{1}{2} f(2x). \quad ①$$

利用f的单调不减性和不等式①,我们可知:

当$\frac{1}{2} < x \leqslant 1$时，

$$f(x) \leqslant f(1) = 1 \leqslant 2x;$$

当$\frac{1}{2^2} < x \leqslant \frac{1}{2}$时，

$$f(x) \leqslant \frac{1}{2} f(2x) \leqslant \frac{1}{2} \leqslant 2x;$$

……

当$\frac{1}{2^{n+1}} < x \leqslant \frac{1}{2^n}$时，

$$f(x) \leqslant \frac{1}{2} f(2x) \leqslant \frac{1}{2^n} \leqslant 2x;$$

……

当$n \to +\infty$时，由以上结果及f的单调不减性可知$f(0) = 0$，即$x = 0$时，$f(x) \leqslant 2x$也成立.

故对于定义域上的一切x，都有$f(x) \leqslant 2x$.

(2) 取函数

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{当 } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \text{ 时}, \\ 1, \text{当} \frac{1}{2} < x \leqslant 1 \text{ 时}. \end{cases}$$

容易验证该函数满足题设的所有条件.然而

$$f(0.51) = 1 > 1.9 \cdot 0.51 = 0.969.$$

因此$f(x) \leqslant 1.9x$并不对所有x成立.

6·59 设$S_r = x^r + y^r + z^r$，其中x, y, z为实数.已知在$S_1 = 0$时，对

$$(m, n) = (2,3), (3,2), (2,5) \text{ 或 } (5,2),$$

都有

$$\frac{S_{m+n}}{m+n} = \frac{S_m}{m} \cdot \frac{S_n}{n} \qquad ①$$

试确定所有其他的适合①式的正整数组(m, n).

(第11届美国数学奥林匹克，1982年)

[解] 显然，当$x = k+1, y = -k, z = -1$时，能使$S_1 = x + y$

$+z=0$.

若 $$\frac{S_{m+n}}{m+n}=\frac{S_m}{m}\cdot\frac{S_n}{n}$$

则 $$\frac{x^{m+n}+y^{m+n}+z^{m+n}}{m+n}=\frac{x^m+y^m+z^m}{m}\cdot\frac{x^n+y^n+z^n}{n}.$$

用 $x=k+1, y=-k, z=-1$ 代入上式得

$$\frac{(k+1)^{m+n}+(-k)^{m+n}+(-1)^{m+n}}{m+n}$$

$$=\frac{(k+1)^m+(-k)^m+(-1)^m}{m}\cdot\frac{(k+1)^n+(-k)^n+(-1)^n}{n} \quad ②$$

显然,② 式两端都可以看作是关于 k 的多项式.

情况1:如果 m、n 都是奇数,那么 $m+n$ 是偶数.此时 ② 式左端是关于 k 的 $m+n$ 次多项式,② 式右端是关于 k 的 $m+n-2$ 次多项式,矛盾.说明 m、n 不可能都是奇数.

情况2:如果 m、n 都是偶数,那么 $m+n$ 也是偶数.此时比较 ② 式两端的最高次项的系数得

$$\frac{2}{m+n}=\frac{2}{m}\cdot\frac{2}{n},$$

即 $$\frac{1}{\frac{m}{2}}+\frac{1}{\frac{n}{2}}=1.$$

由于 $\frac{m}{2},\frac{n}{2}$ 是正整数,因此 $\frac{m}{2}=\frac{n}{2}=2$,从而有 $m=n=4$.

另一方面,当 $m=n=4$ 时,我们取 $k=1$,即取 $x=2, y=-1, z=-1$,则得

$$S_4=2^4+(-1)^4+(-1)^4=18,$$
$$S_8=2^8+(-1)^8+(-1)^8=258,$$

但 $$\frac{S_8}{8}=\frac{258}{8}\neq\frac{18}{4}\cdot\frac{18}{4}=\frac{S_4}{4}\cdot\frac{S_4}{4}.$$

这说明 m、n 也不可能都是偶数.

情况3:如果 m、n 中的一个是奇数,另一个是偶数,那么 $m+n$ 是奇数.此时比较 ② 式两边的 k 的最高次项的系数得

$$1=1\cdot\frac{2}{n},$$

$\therefore \qquad n = 2.$

当 $m = 1$ 时,由 $S_1 = 0$ 得 ② 式右端为零,所以此时 ② 式不可能成立.

当 $m = 3$ 时,由题设 ② 式成立.

当 $m > 3$ 时,② 式左端为

$$\frac{S_{m+2}}{m+2} = \frac{(k+1)^{m+2} - k^{m+2} - 1}{m+2}$$

$$= k^{m+1} + \frac{m+1}{2}k^m + \frac{(m+1)m}{6}k^{m-1} + \cdots,$$

而 ② 式右端为

$$\frac{S_m}{m} \cdot \frac{S_2}{2} = \frac{(k+1)^m - k^m - 1}{m} \cdot \frac{(k+1)^2 + k^2 + 1}{2}$$

$$= \left[k^{m-1} + \frac{m-1}{2}k^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{6}k^{m-3} + \cdots\right] \cdot (k^2 + k + 1)$$

$$= k^{m+1} + \frac{m+1}{2}k^m + \left[\frac{(m-1)(m-2)}{6} + \frac{m-1}{2} + 1\right]k^{m-1} + \cdots$$

比较两端 k^{m-1} 的系数得

$$\frac{(m+1)m}{6} = \frac{(m-1)(m-2)}{6} + \frac{m-1}{2} + 1.$$

解得 $\quad m = 5$. 而$(m, n) = (5,2)$ 恰是题设的解.

因此,$(m, n) = (2,3), (3,2), (2,5), (5,2)$ 是满足 ① 式的全部正整数组.

注 本题有题设"在 $S_1 = 0$ 时,$(m, n) = (2,3), (3,2), (2,5)$ 或$(5,2)$ 满足 ① 式". 如果将这个题设去掉,那么只需要对问题的解作以下补充就够了.

记 $xy + yz + zx = b$,

$$xyz = c.$$

又由 $S_1 = x + y + z = 0$ 知,x, y, z 是方程

$$u^3 + bu - c = 0 \qquad ③$$

的三个根.

③ $\times\, u^{m-3}$ 得

$$u^m + bu^{m-2} - cu^{m-3} = 0.$$

第六章 函数

依次令 $u = x, y, z$,代入上式并相加得

$$S_m + bS_{m-2} - CS_{m-3} = 0 \qquad (m = 3,4,\cdots)$$

由于 $S_0 = x^0 + y^0 + z^0 = 3,$

$S_1 = 0,$

$$\begin{aligned} S_2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ &= (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) \\ &= -2b. \end{aligned}$$

因此 $S_3 = 3c,$

$S_4 = 2b^2,$

$S_5 = -5bc,$

$S_7 = 7b^2c.$

于是

$$\frac{S_5}{5} = \frac{-5bc}{5} = \frac{3c}{3} \cdot \frac{-2b}{2} = \frac{S_3}{3} \cdot \frac{S_2}{2},$$

$$\frac{S_7}{7} = \frac{7b^2c}{7} = \frac{-5bc}{5} \cdot \frac{-2b}{2} = \frac{S_5}{5} \cdot \frac{S_2}{2}.$$

6·60 设 N 为自然数集合,$k \in N$,如果有一个函数 $f: N \to N$ 是严格递增的,且对每个 $n \in N$,都有 $f(f(n)) = kn$.
求证:对每一个 $n \in N$,都有

$$\frac{2k}{k+1} n \leqslant f(n) \leqslant \frac{k+1}{2} n.$$

(第5届中国数学奥林匹克选拔试题,1990年)

[证] 由于 $f: N \to N$ 是严格递增的,因此有

$$f(n) \geq n, \qquad ①$$

$$f(n + m) \geq f(n) + m. \qquad ②$$

由①,可设 $f(n) = n + m$(m 为非负整数),于是由已知得

$$\begin{aligned} kn &= f(f(n)) = f(n + m) \geqslant f(n) + m \\ &= f(n) + f(n) - n \end{aligned}$$

即 $kn \geq 2f(n) - n,$

$$f(n) \leqslant \frac{k+1}{2} n. \qquad ③$$

由③可得

$$kn = f(f(n)) \leqslant \frac{k+1}{2} f(n),$$

$$f(n) \geq \frac{2k}{k+1} n.$$

所以,我们有

$$\frac{2k}{k+1} n \leqslant f(n) \leqslant \frac{k+1}{2} n.$$

6·61　设 f 是一个从实数集 R 映射到自身的函数,并且对任何 $x \in R$,均有 $|f(x)| \leqslant 1$,以及

$$f\left(x+\frac{13}{42}\right)+f(x)=f\left(x+\frac{1}{6}\right)+f\left(x+\frac{1}{7}\right).$$

证明:f 是周期函数,即存在一个非零实数 c,使得对任何 $x \in R$,成立

$$f(x+c)=f(x).$$

(第 37 届国际数学奥林匹克预选题,1996 年)

[证]　由已知

$$f\left(x+\frac{13}{42}\right)+f(x)=f\left(x+\frac{7}{42}\right)+f\left(x+\frac{6}{42}\right),$$

$$\begin{aligned} f\left(x+\frac{7}{42}\right)-f(x) &= f\left(x+\frac{13}{42}\right)-f\left(x+\frac{6}{42}\right) \\ &= f\left(x+\frac{19}{42}\right)-f\left(x+\frac{12}{42}\right) \\ &= \cdots\cdots \\ &= f\left(x+\frac{49}{42}\right)-f\left(x+\frac{42}{42}\right), \end{aligned}$$

所以

$$f\left(x+\frac{42}{42}\right)-f(x)=f\left(\frac{49}{42}\right)-f\left(x+\frac{7}{42}\right) \qquad ①$$

同样地,我们有

$$\begin{aligned} f\left(x+\frac{7}{42}\right)-f\left(x+\frac{1}{42}\right) &= f\left(x+\frac{14}{42}\right)-f\left(x+\frac{8}{42}\right) \\ &= f\left(x+\frac{21}{42}\right)-f\left(x+\frac{15}{42}\right) \\ &= \cdots\cdots \\ &= f\left(x+\frac{49}{42}\right)-f\left(x+\frac{43}{42}\right), \end{aligned}$$

即 $f\left(x+\frac{49}{42}\right)-f\left(x+\frac{7}{42}\right)=f\left(x+\frac{43}{42}\right)-f\left(x+\frac{1}{42}\right).$ ②

由①和②得

$$\begin{aligned}f\left(x+\frac{42}{42}\right)-f(x)&=f\left(x+\frac{43}{42}\right)-f\left(x+\frac{1}{42}\right)\\&=f\left(x+\frac{44}{42}\right)-f\left(x+\frac{2}{42}\right)\\&=\cdots\cdots\\&=f\left(x+\frac{84}{42}\right)-f\left(x+\frac{42}{42}\right),\end{aligned}$$

即 $f(x+1)-f(x)=f(x+2)-f(x+1).$

因此 $f(x+n)=f(x)+n(f(x+1)-f(x)).$

由于上式对所有的 $n\in N$ 成立,并且 $|f(x+n)|\leqslant 1$,因此必有

$$f(x+1)-f(x)\equiv 0.$$

即对所有的 $x\in R$,都有 $f(x+1)=f(x)$.从而 $f(x)$ 为周期函数.

6·62 已知若 $y=\sin x,-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$,则 $x=\sin^{-1}y$,现若 $y=\sin x,\left(1992+\frac{1}{2}\right)\pi\leqslant x\leqslant\left(1993+\frac{1}{2}\right)\pi$,

试用 y 表示 x.

(第3届中国澳门数学奥林匹克,1993年)

[解] $-\frac{\pi}{2}\leqslant 1993\pi-x\leqslant\frac{\pi}{2}$,

而 $\sin(1993\pi-x)=\sin x=y$,

故 $x=1993\pi-\sin^{-1}y$.

6·63. N 是所有正整数的集合,$f:N\rightarrow N$ 是一个函数,满足不等式,对任意 $x\in N$,

$$f(x)+f(x+2)\leqslant 2f(x+1).$$

求证:在平面内存在一条直线,它包含无限多点 $(n,f(n))$.

(第43届捷克(和斯洛伐克)数学奥林匹克,1994年)

[证] 令

$$d(x)=f(x+1)-f(x),x\in N.$$

由题设,

$$d(x+1) \leqslant d(x),$$

因此,数列$\{d(x) \mid x \in N\}$是单调下降的.

下面证明:$d(x) \geqslant 0, x \in N$.

用反证法.

若存在 k 使得$d(k) < 0$,其中 k 为某个正整数,则有

$$d(k) \leqslant -1.$$

由 $d(x)$ 的单调下降性,有

$$-1 \geqslant d(k) \geqslant d(k+1) \geqslant d(k+2) \geqslant \cdots \geqslant d(k+n) \geqslant \cdots,$$

这里 n 为任意正整数.于是,

$$\begin{aligned}
&f(k+f(k)+1) \\
&= [f(k+f(k)+1) - f(k+f(k))] + [f(k+f(k)) - f(k+f(k) \\
&\quad -1)] + \cdots + [f(k+1) - f(k)] + f(k) \\
&= \sum_{j=0}^{f(k)} d(k+j) + f(k) \\
&\leqslant (-1) \cdot (f(k)+1) + f(k) \\
&= -1,
\end{aligned}$$

此与题设条件 $f(k+f(k)+1) \in N$ 矛盾.

因此,必有

$$d(x) \geqslant 0, x \in N,$$

从而有

$$d(1) \geqslant d(2) \geqslant d(3) \geqslant \cdots \geqslant d(n) \geqslant \cdots \geqslant 0.$$

这就是说,对于任意正整数 x,都有

$$d(x) \in [0, d(1)].$$

但在$[0,d(1)]$上,非负整数的个数是有限的,所以一定有无限多个正整数 n,使得 $d(n)$ 是$[0,d(1)]$上的同一个整数.不妨设

$$d(n_1) = d(n_2) = \cdots = d(n_k) = \cdots = c,$$

这里 $n_k \in N, k = 1,2,\cdots, n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots, c$ 是$[0,d(1)]$上的一个非负整数.

对于大于等于 n_1 的任意一个正整数 n,一定有上述一个 $n_k > n$,由 $d(x)$ 的单调下降性,有

$$d(n_1) \geqslant d(n) \geqslant d(n_k),$$

但 $d(n_1) = d(n_k)$,所以

$$d(n_1)=d(n)=d(n_k).$$

上式表示,对于任何一个不小于 n_1 的正整数 n,都有

$$d(n)=d(n_1).$$

于是,我们有

$$\begin{cases}f(n_1+1)-f(n_1)=d(n_1)\\ f(n_1+2)-f(n_1+1)=d(n_1)\\ \cdots\cdots\\ f(n_1+n)-f(n_1+n-1)=d(n_1),\end{cases}$$

其中 n 为任意正整数.将以上 n 个等式相加,有

$$f(n_1+n)-f(n_1)=nd(n_1),n\in N.$$

$$f(n_1+n)=(n_1+n)d(n_1)+f(n_1)-n_1d(n_1).$$

因此,在直线

$$y=d(n_1)x+f(n_1)-n_1d(n_1)$$

上,有无限多个点

$$(n_1+n,f(n_1+n)),n\in N.$$

6·64 已知整数 $n\geqslant k\geqslant 0$,定义数 $c(n,k)$:

$c(n,0)=c(n,n)=1,n\geqslant 0$ 时;

$c(n+1,k)=2^kc(n,k)+c(n,k-1),n\geqslant k\geqslant 1$ 时.

证明:$c(n,k)=c(n,n-k)$ 对所有满足 $n\geqslant k\geqslant 0$ 的整数 n,k 成立.

(第 39 届国际数学奥林匹克预选题,1998 年)

[证] 对 $m\geqslant 1$ 设

$$f(m)=(2^1-1)(2^2-1)\cdots(2^m-1),$$
$$f(0)=1.$$

令

$$a(n,k)=\frac{f(n)}{f(k)f(n-k)}.$$

则对 $n\geqslant 0$,有

$$a(n,0)=a(n,n)=1.$$

又因为

$$f(m)\cdot(2^{m+1}-1)=f(m+1),m\geqslant 0\text{ 时},$$

于是,对所有 $n\geqslant k\geqslant 1$,有

$$2^k a(n,k)+a(n,k-1)$$
$$=2^k\frac{f(n)}{f(k)f(n-k)}+\frac{f(n)}{f(k-1)\cdot f(n-k+1)}$$
$$=f(n)\cdot\frac{2^k(2^{n-k+1}-1)+(2^k-1)}{f(k)\cdot f(n-k+1)}$$
$$=\frac{f(n)(2^{n+1}-1)}{f(k)\cdot f(n-k+1)}$$
$$=a(n+1,k),$$
所以,$a(n,k)$ 和 $c(n,k)$ 满足同样的递归公式.
故
$$c(n,k)=a(n,k)$$
由于对所有的 $n\geqslant k\geqslant 0$,有
$$a(n,k)=a(n,n-k),$$
因此,有
$$c(n,k)=c(n,n-k),n\geqslant k\geqslant 0\text{ 时}.$$

6·65 $X=\{0,a,b,c\}$ 和 $M(X)=\{f\mid f:X\to X\}$ 是从 X 到自身的所有函数的集合.在 X 上定义加法运算 $\oplus$ 如下表:

$\oplus$	0	a	b	c
0	0	a	b	c
a	a	0	c	b
b	b	c	0	a
c	c	b	a	0

(1) 如果
$$S=\{f\in M(X)\mid f((x\oplus y)\oplus x)=(f(x)\oplus f(y))\oplus f(x),\ \forall x,y\in X\},$$
确定 S 内元素的数目.

(2) 如果
$$I=\{f\in M(X)\mid f(x\oplus x)=f(x)\oplus f(x),\forall x\in X\},$$
确定 I 内元素的数目.

(中国台北市数学奥林匹克,1994 年)

[解] (1) 由加法运算表,对于 $x \in \{a,b,c\}$,有

$$0 \oplus x = x \oplus 0 = x,$$
$$x \oplus x = 0,$$
$$b \oplus a = a \oplus b = c, \quad c \oplus a = a \oplus c = b,$$
$$c \oplus b = b \oplus c = a.$$

因此,有

$$x \oplus y = y \oplus x, \forall x, y \in X.$$

并且容易验证

$$(x \oplus y) \oplus x = y, \forall x, y \in X. \quad ①$$

事实上,若 $y = 0$,则

$$(x \oplus y) \oplus x = (x \oplus 0) \oplus x = x \oplus x = 0 = y.$$

若 $y \neq 0$,但 $x = 0$,则

$$(x \oplus y) \oplus x = (0 \oplus y) \oplus 0 = y \oplus 0 = y.$$

若 $y \neq 0$ 且 $x \neq 0$,设 $z = \{a,b,c\} - \{x,y\}$,则

$$(x \oplus y) \oplus x = z \oplus x = y.$$

因此 ① 式成立.

因为 $\forall x, y \in X$,有 $f(x), f(y) \in X$,所以由 ① 可得

$$(f(x) \oplus f(y)) \oplus f(x) = f(y).$$

因此,

$$S = M(X).$$

但

$$|M(X)| = 4^4 = 256,$$

故

$$|S| = 256,$$

即 S 内的元素数目为 256.

(2) 因为

$$f(x \oplus x) = f(0),$$
$$f(x) \oplus f(x) = 0,$$

所以

$$I = \{f \in M(X) \mid f(0) = 0\},$$

于是

$$|I|=4^3=64,$$

即 I 中元素数目为 64.

6·66　a,b,c 是正实数，α 是实数，假设

$$f(\alpha)=abc(a^\alpha+b^\alpha+c^\alpha),$$

$$g(\alpha)=a^{\alpha+2}(b+c-a)+b^{\alpha+2}(a-b+c)+c^{\alpha+2}(a+b-c),$$

确定 $f(\alpha)$ 与 $g(\alpha)$ 间的大小.

（中国台北市数学奥林匹克，1994 年）

[解]　由已知，

$$\begin{aligned}f(\alpha)-g(\alpha)&=abc(a^\alpha+b^\alpha+c^\alpha)+(a^{\alpha+3}+b^{\alpha+3}+c^{\alpha+3})\\&\quad-a^{\alpha+2}(b+c)-b^{\alpha+2}(c+a)-c^{\alpha+2}(a+b)\\&=[a^{\alpha+1}bc+a^{\alpha+3}-a^{\alpha+2}(b+c)]\\&\quad+[b^{\alpha+1}ca+b^{\alpha+3}-b^{\alpha+2}(c+a)]\\&\quad+[c^{\alpha+1}ab+c^{\alpha+3}-c^{\alpha+2}(a+b)]\\&=a^{\alpha+1}(a-b)(a-c)+b^{\alpha+1}(b-c)(b-a)+\\&\quad c^{\alpha+1}(c-a)(c-b).\end{aligned}$$

下面证明上式右端不小于零（这是著名的 *Schur* 不等式）.

事实上，由于 $f(\alpha),g(\alpha)$ 是关于 a,b,c 的对称式，因此不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$.

令

$$x=a-b\geqslant 0,y=b-c\geqslant 0.$$

代入前一个式子，得

$$\begin{aligned}f(\alpha)-g(\alpha)&=(b+x)^{\alpha+1}x(x+y)-b^{\alpha+1}xy+(b-y)^{\alpha+1}(-x-y)(-y)\\&=(b+x)^{\alpha+1}x(x+y)-b^{\alpha+1}xy+(b-y)^{\alpha+1}y(x+y).\end{aligned}\qquad ①$$

由已知 $c>0$　可知

$$y<b.$$

当 $\alpha>-1$ 时，$\alpha+1>0$. 注意到 $b+x\geqslant b>0$，有

$$x(x+y)(b+x)^{\alpha+1}\geqslant xy(b+x)^{\alpha+1}\geqslant xyb^{\alpha+1},$$

由 ① 及上式，得

$$f(\alpha)\geqslant g(\alpha),\alpha>-1\text{ 时}.$$

当 $\alpha=-1$ 时，

$$
\begin{aligned}
f(\alpha)-g(\alpha) &= f(-1)-g(-1)\\
&= x(x+y)-xy+y(x+y)\\
&= x^2+xy+y^2\\
&\geqslant 0,
\end{aligned}
$$

因此，

$$f(\alpha) \geqslant g(\alpha), \alpha=-1 \text{ 时}.$$

当 $\alpha<-1$ 时，$\alpha+1<0$，于是有

$$(b-y)^{\alpha+1} \geqslant b^{\alpha+1},$$

由此得

$$y(x+y)(b-y)^{\alpha+1} \geqslant xy(b-y)^{\alpha+1} \geqslant xyb^{\alpha+1},$$

由①及上式，有

$$f(\alpha) \geqslant g(\alpha), \alpha<-1 \text{ 时}.$$

综上所述，本题的结论是

$$f(\alpha) \geqslant g(\alpha), \alpha \in R.$$

6·67　用 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 表示整数 $1,2,\cdots,n$ 的任意一个排列.设 $f(n)$ 为满足条件：

(1) $a_1=1$,

(2) $|a_i-a_{i+1}| \leqslant 2, i=1,2,\cdots,n-1$

的排列种数.确定 $f(1996)$ 是否可被 3 整除.

（第 28 届加拿大数学奥林匹克，1996 年）

［解］　显然 $f(1)=f(2)=1, f(3)=2$.

设 $n \geqslant 4$.因为 $a_1=1$，所以 $a_2=2$ 或 3.

若 $a_2=2$，则 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 的排列种数，等于 $a_2-1, a_3-1, \cdots, a_n-1$ 的排列种数.而后者为 $1,2,\cdots,n-1$ 的排列，且满足

$$a_2-1=1$$

和　$|(a_i-1)-(a_{i+1}-1)| \leqslant 2, i=2,3,\cdots,n-1$.

因此后者的排列种数为 $f(n-1)$，从而原题所说的排列中，满足条件 $a_2=2$ 的有 $f(n-1)$ 种.

若 $a_2=3, a_3=2$，则必有 $a_4=4$，类似地可说明，原题所说的排列中，满足条件 $a_2=3$ 且 $a_3=2$ 的有 $f(n-3)$ 种.

若 $a_2=3, a_3 \neq 2$，则 2 一定在 4 后面，并且没有数可紧接在 2 的后

面，从而最后两个数依次为 4,2. 这样，5 必须在 3 的后面，6 必须在 4 的前面. 依次类推，此时的排列只有一种：

$$1,3,5,\cdots,6,4,2.$$

（先将奇数按顺序排列，再将偶数按倒序排列而成）.

因此，我们有

$$f(n)=f(n-1)+f(n-3)+1.$$

设 $f(n)$ 除以 3 所得的余数为 $r(n)$，则

$$r(1)=r(2)=1,r(3)=2,$$

$$r(n)=r(n-1)+r(n-3)+1,n\geqslant 4.$$

从而数列 $r(1),r(2),r(3),r(4),\cdots\cdots$ 构成一个周期为 8 的数列 1,1,2,1,0,0,2,0,1,1,……

因为 $1996=8\times 249+4$，所以 $f(1996)$ 除以 3 所得的余数

$$r(1996)=r(4)=1,$$

即 $f(1996)$ 不能被 3 整除.

6·68 $f(n)$ 是定义在正整数集合上，且满足

$$f(1)=2,f(n+1)=(f(n))^2-f(n)+1,n=1,2,3,\cdots.$$

求证：对所有整数 $n>1$，

$$1-\frac{1}{2^{2^{n-1}}}<\frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\cdots+\frac{1}{f(n)}<1-\frac{1}{2^{2^n}}.$$

（爱尔兰数学奥林匹克，1994 年）

［证］ 若 $f(n)\geqslant 2$，则由

$$f(n+1)=f(n)(f(n)-1)+1$$

可得

$$f(n+1)\geqslant 2.$$

注意到 $f(1)=2$，因此，对所有整数 $n\geqslant 1$，都有

$$f(n)\geqslant 2.$$

将已知等式化为

$$f(n+1)-1=f(n)(f(n)-1),$$

显然等式两端都为正整数，因此有

$$\frac{1}{f(n+1)-1}=\frac{1}{f(n)\cdot(f(n)-1)},$$

即

$$\frac{1}{f(n+1)-1}=\frac{1}{f(n)-1}-\frac{1}{f(n)},$$

移项,得

$$\frac{1}{f(n)}=\frac{1}{f(n)-1}-\frac{1}{f(n+1)-1},$$

在上式中,将 n 改成 k,并且关于 k 从 1 到 n 求和,有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f(n)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{f(k)-1}-\frac{1}{f(k+1)-1}\right),$$

即

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f(n)}=\frac{1}{f(1)-1}-\frac{1}{f(n+1)-1},$$

注意到 $f(1)=2$,得

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f(n)}=1-\frac{1}{f(n+1)-1}.$$

利用上式,将求证的不等式化为

$$2^{2^{n-1}}<f(n+1)-1<2^{2^{n}}, \quad ①$$

因此只需证明,对 $n>1$,上式成立就可以了.

事实上,我们有

$$f(2)=f(1)(f(1)-1)+1=3,$$
$$f(3)=f(2)(f(2)-1)+1=7$$

以及

$$4=2^{2^{1}}<7-1<2^{2^{2}}=16,$$

因此,当 $n=2$ 时,① 式成立.

设 $n=m$ 时,不等式 ① 成立,即

$$2^{2^{m-1}}<f(m+1)-1<2^{2^{m}},$$

由上式可得

$$2^{2^{m-1}}+1\leqslant f(m+1)-1\leqslant 2^{2^{m}}-1.$$

于是有

$$2^{2^{m-1}}+2\leqslant f(m+1)\leqslant 2^{2^{m}},$$

由以上两个式子可得

$$(2^{2^{m-1}}+1)(2^{2^{m-1}}+2)\leqslant f(m+1)(f(m+1)-1)$$

$$\leqslant 2^{2^m}(2^{2^m}-1),$$

即 $2^{2^m}+3\cdot 2^{2^{m-1}}+2\leqslant f(m+2)-1\leqslant 2^{2^{m+1}}-2^{2^m}$,

于是,有

$$2^{2^m}<f(m+1)-1<2^{2^{m+1}}.$$

因此,对任意整数 $n>1$,① 式都成立.从而本题要证的不等式成立.

6·69　已知 $f(x)=x^4-4x^3+(3+m)x^2-12x+12$,这里 m 是一个实参数.

(1) 求所有整数 m,使得 $f(x)-f(1-x)+4x^3=0$ 至少有一个整数解;

(2) 求所有的 m 的值,使得对每个实数 x,$f(x)\geqslant 0$.

(保加利亚数学奥林匹克,1994 年)

[解]　(1) 由题设

$$\begin{aligned}0&=f(x)-f(1-x)+4x^3\\&=[x^3-4x^3+(3+m)x^2-12x+12]-[(1-x)^4-4(1-x)^3\\&\quad+(3+m)(1-x)^2-12(1-x)+12]+4x^3\\&=[x^4-(1-x)^4]-4[x^3-(1-x)^3]+(3+m)[x^2-(1-x)^2]\\&\quad-12[x-(1-x)]+4x^3\\&=(4x^3-6x^2+4x-1)-4(2x^3-3x^2+3x-1)+(3+m)(2x\\&\quad-1)-12(2x-1)+4x^3\\&=6x^2+2(m-13)x+12-m.\end{aligned}\qquad ①$$

且上述关于 x 的一元二次方程至少有一个整数解,因此它的判别式应是一个完全平方数,即

$$4(m-13)^2-24(12-m)$$

是一个完全平方数,从而有

$$(m-13)^2-6(12-m)=y^2, y\text{ 是非负整数,由上式得}$$

$$(m-10)^2-y^2=3,$$

$$(m-10+y)(m-10-y)=3.$$

由于 $m-10+y\geqslant m-10-y$,因此

$$\begin{cases}m-10+y=3,\\m-10-y=1;\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}m-10+y=-1,\\m-10-y=-3.\end{cases}$$

解得

$m = 12$ 或 $m = 8$.

若 $m = 12$,由 ① 得

$$6x^2 - 2x = 0,$$

这个方程只有一个整数解 $x = 0$.

若 $m = 8$,由 ① 得 $6x^2 - 10x + 4 = 0$ 这个方程只有一个整数解 $x = 1$.

因此,所求的所有能使 $f(x) - f(1 - x) + 4x^3 = 0$ 至少有一个整数解的 m 为 12 或 8.

(2) $f(x) = (x^2 + 3)(x - 2)^2 + (m - 4)x^2$

如果 $m < 4$,那么 $f(2) = 4(m - 4) < 0$,不合题意.

如果 $m \geqslant 4$,显然对每个实数 x,都有 $f(x) \geqslant 0$.

因此,所求的所有 m 为 $[4, \infty)$.

6·70　证明:任何定义在整条实直线上的函数都可以表示为两个这样的函数的和,这两个函数的图像都具有对称轴.

(第 21 届俄罗斯数学奥林匹克决赛,1995 年)

[证]　设 $f(x)$ 是任一给定的函数. 我们证明可将 $f(x)$ 表示成 $f_1(x) + f_2(x)$,其中 $f_1(x)$ 以 $x = 0$ 为对称轴,$f_2(x)$ 以 $x = a, a > 0$ 为对称轴.

在区间 $[-a, a]$ 中,令 $f_1(x) \equiv 0, f_2(x) = f(x)$.

在区间 $[a, 3a]$ 中,令

$$f_2(x) = f_2(2a - x), f_1(x) = f(x) - f_2(x).$$

在区间 $[-3a, -a]$ 中,令

$$f_1(x) = f_1(-x), f_2(x) = f(x) - f_1(x).$$

在区间 $[3a, 5a]$ 中,令

$$f_2(x) = f_2(2a - x), f_1(x) = f(x) - f_2(x).$$

依此类推,即得定义在实数集上的函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$,满足

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x), x \in R,$$

且 $f_1(x)$ 关于 $x = 0$ 对称,$f_2(x)$ 关于 $x = a$ 对称.

6·71　多项式序列 $p_0(x), p_1(x), p_2(x), \cdots\cdots$ 满足等式

$p_0(x) = 1, p_1(x) = x$,

$(n + t - 2)p_{n+1}(x) = (2n + t - 2)xp_n(x) - np_{n-1}(x)$,这里 t 是

大于 1 的固定实数, $n = 1,2,3\cdots\cdots$

(1) 求证:对每个多项式

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,$$
$$(a_0 \neq 0, a_i \in R, 0 \leqslant i \leqslant n)$$

存在惟一一个实数集合 $\{c_0, c_1, \cdots, c_n\}$,使得

$$f(x) = c_0p_0(x) + c_1p_1(x) + \cdots + c_np_n(x).$$

(2) 求 c_0,使得

$$f(x) = (x^2 + \alpha x + \beta)^2\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

这里 α 和 β 是实数.

(3) 如果 $t \geqslant 10$,求证在(2)内求出的 c_0 满足 $c_0 \leqslant 0$.

(保加利亚数学奥林匹克,1994 年)

[解] 先证明对非负整数 n, $P_n(x)$ 是 x 的 n 次实系数多项式.

用数学归纳法.

当 $n = 0$ 时, $p_0(x) = 1$ 是 x 的零次实系数多项式.

当 $n = 1$ 时, $p_1(x) = x$ 是 x 的一次实系数多项式.

设 $p_{n-1}(x)$ 是 x 的 $n-1$ 次实系数多项式, $p_n(x)$ 是 x 的 n 次实系数多项式.

由题设可知

$$p_{n+1}(x) = \frac{2n + t - 2}{n + t - 2}xp_n(x) - \frac{n}{n + t - 2}p_{n-1}(x),$$

由归纳假设及上式可知, $p_{n+1}(x)$ 是 x 的 $n+1$ 次实系数多项式.

因此,对任一非负整数 n, $p_n(x)$ 是 x 的 n 次实系数多项式.

再证明:若记

$$p_n(x) = a_{n,n}x^n + a_{n,n-1}x^{n-1} + a_{n,n-2}x^{n-2} + \cdots + a_{n,1}x + a_{n,0},$$

这里 $a_{n,j} \in R, j = 0,1,2,\cdots,n, a_{n,n} \neq 0$.

则当 $n + j$ 是奇数时, $a_{n,j} = 0$.

用数学归纳法.

因为 $p_0(x) = 1, p_1(x) = x$,所以当 $n = 0, n = 1$ 时,结论成立.

设当 $n < 2k, k \in N$ 时,结论成立.即当 $n < 2k$ 时,若 n 是奇数,则 $p_n(x)$ 中只含有 x 的奇次项;若 n 是偶数,则 $p_n(x)$ 中只含有 x 的偶次项.

因为

$$p_{2k}(x)=\frac{2(2k-1)+t-2}{(2k-1)+t-2}xp_{2k-1}(x)-\frac{2k-1}{(2k-1)+t-2}p_{2k-2}(x).$$

由归纳假设，$p_{2k-1}(x)$ 只含 x 的奇次项，因此 $\frac{2(2k-1)+t-2}{(2k-1)+t-2}\cdot xp_{2k-1}(x)$ 只含 x 的偶次项.又由归纳假设，$p_{2k-2}(x)$ 也只含 x 的偶次项，所以 $p_{2k}(x)$ 只含 x 的偶次项.

又因为

$$p_{2k+1}(x)=\frac{4k+t-2}{2k+t-2}\cdot xp_{2k}(x)-\frac{2k}{2k+t-2}p_{2k-1}(x),$$

已证得 $p_{2k}(x)$ 只含 x 的偶次项，从而有 $xp_{2k}(x)$ 只含 x 的奇次项.又由归纳假设，$p_{2k-1}(x)$ 只含 x 的奇次项，所以 $p_{2k+1}(x)$ 只含 x 的奇次项.

根据数学归纳法原理，对于任何非负整数 n，$p_{2n}(x)$ 只含 x 的偶次项，$p_{2n+1}(x)$ 只含 x 的奇次项.换句话说，当 $n+j$ 是奇数时，都有 $a_{n,j}=0$.

现在我们回到原题(1)和(2)上来.

(1) 若有

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$
$$=c_0p_0(x)+c_1p_1(x)+\cdots+c_np_n(x),$$

对照上式两端 x 的同次幂的系数，我们有

$$a_0=c_na_{n,n},$$

$$a_1=c_{n-1}a_{n-1,n-1},$$

$$(\text{因为 } a_{n,n-1}=0),$$

$$a_2=c_na_{n,n-2}+c_{n-2}a_{n-2,n-2},$$

$$(\text{因为 } a_{n-1,n-2}=0),$$

$$a_3=c_{n-1}a_{n-1,n-3}+c_{n-3}a_{n-3,n-3},$$

$$(\text{因为 } a_{n,n-3}=0, a_{n-2,n-3}=0),$$

……

$$a_n=\begin{cases}c_na_{n,0}+c_{n-2}a_{n-2,0}+\cdots+c_2a_{2,0}+c_0a_{0,0} & \text{当 } n \text{ 是偶数时},\\ c_{n-1}a_{n-1,0}+c_{n-3}a_{n-3,0}+\cdots+c_2a_{2,0}+c_0a_{0,0} & \text{当 } n \text{ 是奇数时}.\end{cases}$$

由上面这些关系式,可以惟一地确定 c_n,c_{n-1},再惟一地确定 c_{n-2},c_{n-3},依此类推,一直到 c_2,c_1,c_0 都被惟一地确定.因此,存在惟一确定的实数集合 $\{c_0,c_1,\cdots,c_n\}$,使得

$$f(x)=c_0p_0(x)+c_1p_1(x)+\cdots+c_np_n(x).$$

(2) 设

$$\begin{aligned}f(x)&=(x^2+\alpha x+\beta)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)\\&=c_0p_0(x)+c_1p_1(x)+c_2p_2(x)+c_3p_3(x)+c_4p_4(x)\\&\quad+c_5p_5(x).\end{aligned}$$

由题设条件可知

$$p_0(x)=1,$$

$$p_1(x)=x,$$

$$p_2(x)=\frac{tx^2-1}{t-1},$$

$$p_3(x)=\frac{(t+2)x^3-3x}{t-1},$$

$$p_4(x)=\frac{(t+4)(t+2)x^4-6(t+2)x^2+3}{t^2-1}.$$

比较关于 $f(x)$ 的等式的两端的常数项及 x^2,x^4 的系数,得

$$\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\beta^2=c_0-\dfrac{c_2}{t-1}+\dfrac{3c_4}{t^2-1},\\ -\dfrac{1}{2}\alpha^2-\beta+2\alpha\beta=\dfrac{c_2t}{t-1}-\dfrac{6c_4(t+2)}{t^2-1},\\ 2\alpha-\dfrac{1}{2}=\dfrac{c_4(t+4)(t+2)}{t^2-1}.\end{cases}$$

从这个方程组解出 c_4,c_2 和 c_0,得

$$c_4=\frac{t^2-1}{(t+2)(t+4)}\left(2\alpha-\frac{1}{2}\right),$$

$$c_2=\frac{t-1}{t}\left[2\alpha\beta-\beta-\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{6}{t+4}\left(2\alpha-\frac{1}{2}\right)\right],$$

$$c_0=-\frac{1}{2}\beta^2+\frac{1}{t}\left[2\alpha\beta-\beta-\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{6}{t+4}\left(2\alpha-\frac{1}{2}\right)\right]-\frac{3}{(t+2)(t+4)}\left(2\alpha-\frac{1}{2}\right).$$

因此,所求的

$$c_0=-\frac{1}{2t}\alpha^2-\frac{1}{2}\beta^2+\frac{2}{t}\alpha\beta-\frac{1}{t}\beta+\frac{6}{t(t+2)}\alpha-\frac{3}{2t(t+2)}.$$

(3) 当 $t\geqslant 10$ 时,将 c_0 的表达式写成关于 α 的一元二次多项式的形式:

$$c_0=-\frac{1}{2t}\alpha^2+\left[\frac{2}{t}\beta+\frac{6}{t(t+2)}\right]\alpha-\left[\frac{1}{2}\beta^2+\frac{1}{t}\beta+\frac{3}{2t(t+2)}\right],$$

这个二次多项式的首项系数

$$-\frac{1}{2t}<0,$$

而这个二次多项式的判别式

$$\begin{aligned}\Delta&=\left[\frac{2}{t}\beta+\frac{6}{t(t+2)}\right]^2-4\cdot\frac{1}{2t}-\left[\frac{1}{2}\beta^2+\frac{1}{t}\beta+\frac{3}{2t(t+2)}\right]\\&=\frac{4}{t^2}\beta^2+\frac{24}{t^2(t+2)}\beta+\frac{36}{t^2(t+2)^2}-\frac{1}{t}\beta^2-\frac{2}{t^2}\beta-\frac{3}{t^2(t+2)}\\&=\frac{4-t}{t^2}\left[\beta+\frac{10-t}{(t+2)(4-t)}\right]^2+\frac{2(10-t)(1-t)}{t^2(t+2)^2(4-t)}\\&\leqslant 0.\end{aligned}$$

所以这个二次多项式的值 c_0 恒不大于 0,即

$$c_0\leqslant 0.$$

6·72　设 U 是一个有限集,f,g 是从 U 到其自身的双射.令

$$S=\{W\in U:f(f(w))=g(g(w))\},$$
$$T=\{W\in U:f(g(w))=g(f(w))\}.$$

并假定 $U=S\cup T$.证明对于 $W\in U$,$f(w)\in S$ 成立的充要条件是 $g(w)\in s$.

(第 37 届国际数学奥林匹克预选题,1996 年)

[证]　由于 f 和 g 的地位相同,因此只需证明

$$f(w)\in s\Rightarrow g(w)\in s.$$

用反证法.

若存在 $w \in U, f(w) \in S$ 且 $g(w) \overline{\in} S$.

则由 $g(w) \in U$ 及 $S \cup T = U$ 可知

$$g(w) \in T.$$

因此,由 S 和 T 的定义可知

$$f(f(f(w))) = g(g(f(w))),$$
$$f(g(g(w))) = g(f(g(w))).$$

于是,我们有

$$\begin{aligned} w \in s &\Leftrightarrow f(f(w)) = g(g(w)) \\ &\Leftrightarrow f(f(f(w))) = f(g(g(w))) \\ &\Leftrightarrow g(g(f(w))) = g(f(g(w))) \\ &\Leftrightarrow g(f(w)) = f(g(w)) \\ &\Leftrightarrow w \in T. \end{aligned}$$

因为 $U = S \cup T$,故 $w \in S, w \in T$ 至少有一个成立,因此,$w \in S \cap T$.

考虑 $g^{-1}(w)$:

若 $g^{-1}(w) \in S$,则

$$f(f(g^{-1}(w))) = g(g(g^{-1}(w))) = g(w)$$

此时,我们有

$$\begin{aligned} f(g^{-1}(w)) \in S &\Leftrightarrow g(g(f(g^{-1}(w)))) = f(f(f(g^{-1}(w)))) \\ &\Leftrightarrow g(g(f(g^{-1}(w)))) = f(g(w)) \\ &\Leftrightarrow g(g(f(g^{-1}(w)))) = g(f(w)) \\ &\Leftrightarrow g(f(g^{-1}(w))) = f(w) \qquad ① \\ &\Leftrightarrow f(g(f(g^{-1}(w)))) = f(f(w)) \\ &\Leftrightarrow f(g(f(g^{-1}(w)))) = g(g(w)) \\ &\Leftrightarrow f(g(f(g^{-1}(w)))) = g(f(f(g^{-1}(w)))) \\ &\Leftrightarrow f(g^{-1}(w)) \in T. \end{aligned}$$

于是,$f(g^{-1}(w)) \in S \cap T$,

从而 ① 式成立,即

$$g(f(g^{-1}(w))) = f(w) = f(g(g^{-1}(w))),$$

故得 $g^{-1}(w) \in T$.

类似地,若 $g^{-1}(w) \in T$,则

$$g(f(g^{-1}(w))) = f(g(g^{-1}(w))) = f(w).$$

此时,我们有

$$\begin{aligned} f(g^{-1}(w)) \in S &\Leftrightarrow f(f(f(g^{-1}(w)))) = g(g(f(g^{-1}(w)))) \\ &\Leftrightarrow f(f(f(g^{-1}(w)))) = g(f(w)) \\ &\Leftrightarrow f(f(f(g^{-1}(w)))) = f(g(w)) \\ &\Leftrightarrow f(f(g^{-1}(w))) = g(w) \qquad ② \\ &\Leftrightarrow g(f(f(g^{-1}(w)))) = g(g(w)) \\ &\Leftrightarrow g(f(f(g^{-1}(w)))) = f(f(w)) \\ &\Leftrightarrow g(f(f(g^{-1}(w)))) = f(g(f(g^{-1}(w)))) \\ &\Leftrightarrow f(g^{-1}(w)) \in T. \end{aligned}$$

于是

$$f(g^{-1}(w)) \in S \cap T,$$

从而 ② 式成立,即

$$f(f(g^{-1}(w))) = g(w) = g(g(g^{-1}(w))),$$

故得 $g^{-1}(w) \in S$.

因此,$g^{-1}(w) \in S \Leftrightarrow g^{-1}(w) \in T$,

从而有 $g^{-1}(w) \in S \cap T$.

在上面证明 $g^{-1}(w) \in S \cap T$ 的过程中,只用到了 $w \in S \cap T$,也就是说

$$w \in S \cap T \Rightarrow g^{-1}(w) \in S \cap T,$$

重复使用上式可得

$$w \in S \cap T \Rightarrow g^{-1(n)}(w) \in S \cap T,$$

其中 $g^{-1(n)}(w) = \underbrace{g^{-1}(g^{-1}(\cdots}_{n\text{个}g^{-1}} g^{-1}(w)\cdots))$.

因 U 为有限集,故存在 $a, b \in N, a < b$,使得

$$g^{-1(a)}(w) = g^{-1(b)}(w).$$

于是,

$$\begin{aligned} g(w) &= g^{(a+1)}(g^{-1(a)}(w)) \\ &= g^{(a+1)}(g^{-1(b)}(w)) \\ &= g^{-1(b-a-1)}(w) \end{aligned}$$

(记 $g^{-1(0)}(w) = w$).

因为 $w \in S \cap T \Rightarrow g^{-1(b-a-1)}(w) \in S \cap T$

所以 $w \in S \cap T \Rightarrow g(w) \in S \cap T$

此与 $g(w) \overline{\in} S$ 矛盾.

故原命题得证.

6・73 对 $x \neq 0, f(x) = \dfrac{x^2+1}{2x}$,定义 $\begin{cases} f^{(0)}(x) = x, \\ f^{(n)}(x) = f(f^{(n-1)}(x)), \end{cases}$ 对所有正整数 n 和 $x \neq 0$ 求证:对所有非负整数 n 和 $x \neq -1,0,1$,都有

$$\frac{f^{(n)}(x)}{f^{(n+1)}(x)} = 1 + \frac{1}{f\left(\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{2^n}\right)}.$$

(第 35 届国际数学奥林匹克预选题,1994 年)

[证] 用数学归纳法.

当 $n=0$ 时,对 $x \neq -1,0,1$,有

$$\frac{f^{(0)}(x)}{f^{(1)}(x)} = \frac{x}{f(x)} = \frac{2x^2}{x^2+1},$$

而
$$1 + \frac{1}{f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)} = 1 + \frac{2\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)}{\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2 + 1}$$
$$= 1 + \frac{2(x+1)(x-1)}{(x+1)^2 + (x-1)^2}$$
$$= \frac{2x^2}{x^2+1},$$

所以,$n=0$ 时结论成立.

设 $n=k$ 时,对于 $x \neq -1,0,1$,有

$$\frac{f^{(k)}(x)}{f^{(k+1)}(x)} = 1 + \frac{1}{f\left(\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{2^k}\right)}.$$

注意到当 $x \neq -1,0,1$ 时,$f(x) = \dfrac{x^2+1}{2x}$ 同样不等于 $-1,0,1$.因此由归纳假设

$$\frac{f^{(k+1)}(x)}{f^{(k+2)}(x)}=\frac{f^{(k)}(f(x))}{f^{(k+1)}(f(x))}$$

$$=1+\frac{1}{f\left(\left(\frac{f(x)+1}{f(x)-1}\right)^{2^k}\right)},$$

其中

$$\frac{f(x)+1}{f(x)-1}=\frac{\frac{x^2+1}{2x}+1}{\frac{x^2+1}{2x}-1}=\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2},$$

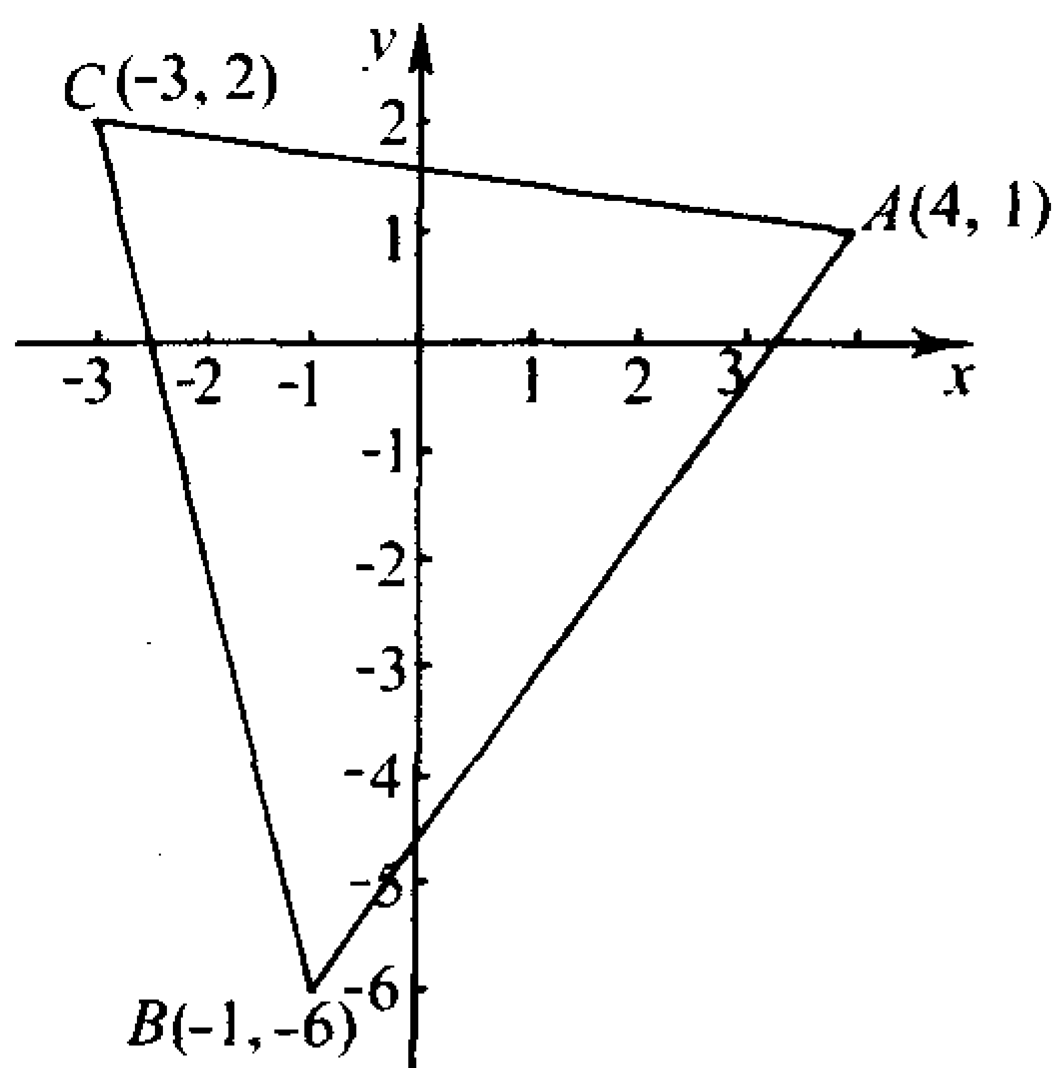
因此 $$\frac{f^{(k+1)}(x)}{f^{(k+2)}(x)}=1+\frac{1}{f\left(\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2^{k+1}}\right)}.$$

由数学归纳法原理可知,命题得证.

第3节　最大与最小

6·74　设R为平面上以$A(4,1)$,$B(-1,-6)$,$C(-3,2)$三点为顶点的三角形区域(包括三角形内部及周界,如图所示).试求当(x,y)在上变动时,函数$4x-3y$的极大值和极小值(需证明你的论断).

(中国高中数学联赛,1978年)



[解]　令$\lambda=4x-3y$,显见,当λ固定,(x,y)变动时,我们即得平面上一条直线,再令λ变动.则得平面上一系列相互平行的直线,在其中每一条直线上,$4x-3y$的值都相同,当直线经过A点时,$\lambda=13$,此时直线经过$\left(\frac{13}{4},0\right)$,当直线经过$B$点时,$\lambda=14$,此时直线经过$\left(\frac{7}{2},0\right)$,当直线经过$C$点时,

$\lambda=-18$，此时，直线经过$\left(-\frac{9}{2},0\right)$.一般地，直线$\lambda=4x-3y$和$x$轴交于$(x',0)=\left(\frac{\lambda}{4},0\right)$且$\lambda=4x'$和$x'$成正比.由于$-\frac{9}{2}\leqslant x'\leqslant\frac{7}{2}$，所以$-18\leqslant\lambda\leqslant 14$，所求最大值和最小值分别是14和$-18$.

6·75　已知x,y,z为正数，且满足等式

$$xyz(x+y+z)=1,$$

求表达式$(x+y)(y+z)$的最小值.

（第23届全苏数学奥林匹克，1989年）

[解]　由已知条件及算术-几何平均不等式，可得

$$\begin{aligned}(x+y)(y+z)&=(x+y+z)y+xz\\&=\frac{1}{xyz}\cdot y+xz\\&=\frac{1}{xz}+xz\\&\geqslant 2.\end{aligned}$$

另一方面，当$x=1,y=\sqrt{2}-1,z=1$时，满足已知等式，而

$$(x+y)(y+z)=2.$$

因此，表达式的最小值是2.

6·76　已知$|x_i|<1,i=1,2,\cdots,n$.又设

$$|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|=19+|x_1+x_2+\cdots+x_n|.$$

那么整数n的最小值是多少？

（第6届美国数学邀请赛，1988年）

[解]　由已知可得

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i|-\left|\sum_{i=1}^{n}x_i\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|x_i|<n, \qquad ①$$

但　$$\sum_{i=1}^{n}|x|-\left|\sum_{i=1}^{n}x_i\right|=19, \qquad ②$$

故得　$n>19$，

从而有　$n\geqslant 20$.

另一方面，当$n=20$时，我们取

$$x_i=\begin{cases}\dfrac{19}{20},1\leqslant i\leqslant 10,\\ -\dfrac{19}{20},11\leqslant i\leqslant 20.\end{cases}$$

则 $x_1,x_2,\cdots,x_{20}$ 满足题设的所有条件.

综上所述,所求的整数 n 的最小值是20.

6·77　求 k 的最大值,使 3^{11} 可以表示为 k 个连续正整数的和.

（第5届美国数学邀请赛,1987年）

[解]　设

$$3^{11}=(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+k),\qquad ①$$

其中 n 是非负整数,k 是自然数,即

$$3^{11}=nk+\frac{k(k+1)}{2},$$

$$2\cdot 3^{11}=k(2n+k+1).$$

显然 $k<2n+k+1$.要使 k 尽可能大,而 n 又是非负整数,则最好的可能情况是

$$k=2\cdot 3^5,2n+k+1=3^6,$$

此时　$n=121,k=486$.

故所求的最大的 k 为486.

6·78　设 $f(x)=|x-p|+|x-15|+|x-p-15|$,其中 $0<p<15$.试求对于区间 $p\leqslant x\leqslant 15$ 中的 x,$f(x)$ 的最小值.

（第1届美国数学邀请赛,1983年）

[解]　由题设知　$0<p\leqslant x\leqslant 15$,从而

$$x-p\geqslant 0,15-x\geqslant 0,p+15-x>0.$$

因此　$f(x)=(x-p)+(15-x)+(p+15-x)$,

即　$f(x)=30-x$.

它在区间 $[p,15]$ 上的最小值为 $f(15)=15$.

6·79　求 $f(x)=\dfrac{9x^2\sin^2x+4}{x\sin x}(0<x<\pi)$ 的最小值.

（第1届美国数学邀请赛,1983年）

[解]　设 $t=x\sin x$.由 $0<x<\pi$ 知 $t>0$.于是

$$f(x)=\frac{9t^2+4}{t}\geqslant\frac{2\times 3t\times 2}{t}=12.$$

所以 $f(x)$ 的最小值等于 12.

6・80　设两个复数 x,y,它们的平方和是 7,立方和是 10,那么 $x+y$ 可能取的实数值中最大的是几?

(第 1 届美国数学邀请赛,1983 年)

[解]　由题设

$$\begin{cases} x^2+y^2=7, \\ x^3+y^3=10. \end{cases}$$

设　$x+y=t$.则由

$$(x+y)^3=(x^3+y^3)+3xy(x+y),$$

$$(x+y)^3=(x^3+y^3)+3(x+y)\cdot\frac{(x+y)^2-(x^2+y^2)}{2},$$

得　$t^3=10+3t\cdot\dfrac{t^2-7}{2}$,

即　$t^3-21t+20=0$.

从而得　$t_1=1,t_2=4,t_3=-5$.因此 $x+y$ 可能取的实数值中最大的是 4.

6・81　函数 f 定义在实数域上,且满足如下条件:对任何实数 x,

$$f(2+x)=f(2-x),f(7+x)=f(7-x).$$

如果 $x=0$ 是 $f(x)=0$ 的一个根,那么 $f(x)=0$ 在区间 $-1000\leqslant x\leqslant 1000$ 中至少应有几个根?

(第 2 届美国数学邀请赛,1984 年)

[解]　由题设可得

$$f(x)=f(2+x-2)=f[2-(x-2)]=f(4-x), \quad ①$$

$$f(4-x)=f[7-(x+3)]=f[7+(x+3)]=f(10+x), \quad ②$$

由 ① 和 ② 得　$f(x)=f(10+x)$.　③

于是由 $f(0)=0$ 可得

$$f(0)=f(\pm 10)=f(\pm 20)=\cdots=f(\pm 1000)=0.$$

这样就得到了 $f(x)=0$ 在$[-1000,1000]$上的 201 个根.

由 ① 又可得　$f(4)=f(0)=0$.

再由 ③ 得

$$f(4)=f(4\pm 10)=f(4\pm 20)$$

$$= \cdots = f(4 \pm 990)$$
$$= f(4 - 1000) = 0.$$

这样又得到了 $f(x) = 0$ 在$[-1000,1000]$上的另外 200 个根.

因此,$f(x) = 0$ 在区间$[-1000,1000]$上至少应有 401 个根.

6・82　求最小的实数 A,使对每个满足条件

$$|f(x)| \leqslant 1 \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

的二次多项式 $f(x)$,适合不等式 $f'(0) \leqslant A$.

（波兰数学奥林匹克,1970 年）

[解]　设二次三项式 $f(x) = ax^2 + bx + c$,当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时满足不等式

$$|f(x)| \leqslant 1. \qquad ①$$

特别地,应当有不等式

$$|f(0)| \leqslant 1, \left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leqslant 1, |f(1)| \leqslant 1.$$

因为　$f(0) = c, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c, f(1) = a + b + c$,又因为

$$f'(0) = b = 4\left(\frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c\right) - (a + b + c) - 3c,$$

所以

$$\begin{aligned} |f'(0)| &\leqslant 4\left|\frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c\right| + |a + b + c| + 3|c| \\ &= 4\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| + |f(1)| + 3|f(0)| \\ &\leqslant 4 + 1 + 3 = 8. \end{aligned}$$

因此 $A \leqslant 8$.

另一方面,二次三项式

$f(x) = -8x^2 + 8x - 1 = -2(2x-1)^2 + 1$ 满足不等式①.

事实上,当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时,有 $-1 \leqslant 2x - 1 \leqslant 1$,因此 $0 \leqslant (2x-1)^2 \leqslant 1$.于是 $-2 \leqslant -2(2x-1)^2 \leqslant 0$,从而 $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$.又因为 $f'(x) = -16x + 8$,所以 $f'(0) = 8$.因此 $A \geqslant 8$.

由于 $A \geqslant 8$,又 $A \leqslant 8$,所以 $A = 8$.

6・83　已知两两互异的实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$,求由式子

$$y = |x - a_1| + |x - a_2| + \cdots + |x - a_n|$$

所定义的函数的最小值，其中 x 是实数.

（波兰数学奥林匹克，1969 年）

［解］ 首先注意到，当 $a < b$ 时，

$$|x-a|+|x-b|=\begin{cases}a+b-2x, x\leqslant a \text{ 时},\\ -a+b, a\leqslant x\leqslant b \text{ 时},\\ 2x-a-b, x\geqslant b \text{ 时}.\end{cases}$$

因此，在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 的每个点上，和 $|x-a|+|x-b|$ 达到它的最小值. 我们据此解答本题.

不失一般性，假设数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 组成递增序列，也即

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n.$$

当 $n = 2m$（m 为自然数）时，表达式

$$y=|x-a_1|+|x-a_2|+\cdots+|x-a_n| \quad ①$$

的右端可分成 m 组，即

$$y=(|x-a_1|+|x+a_n|)+(|x-a_2|+|x-a_{n-1}|)+\cdots+(|x-a_m|+|x-a_{m+1}|). \quad ②$$

和 $y_i=|x-a_i|+|x-a_{n+1-i}|\quad(i=1,2,\cdots,m)$ 在区间 $a_i\leqslant x\leqslant a_{n+1-i}$ 上是常数，这常数就是它的最小值. 因为每个区间 $a_i\leqslant x\leqslant a_{n+1-i}$ 都包含下一个区间 $a_{i+1}\leqslant x\leqslant a_{n+1-(i+1)}$，因此所有区间有一个公共部分，即区间 $a_m\leqslant x\leqslant a_{m+1}$.

在区间 $a_m\leqslant x\leqslant a_{m+1}$ 的每个点上，所有的 y_i 都取得自身的最小值，因而 y 在这区间的每个点上取得最小值. 为计算这个值，可在 ② 中令 $x = a_m$ 或 $x = a_{m+1}$. 这个值等于

$$-a_1-a_2-\cdots-a_m+a_{m+1}+\cdots+a_n.$$

当 $n = 2m+1$（m 为自然数或 0）时，① 的右端可以改写为

$$y=(|x-a_1|+|x-a_n|)+(|x-a_2|+|x-a_{n-1}|)+\cdots+(|x-a_m|+|x-a_{m+2}|)+|x-a_{m+1}|. \quad ③$$

与 n 为偶数的情形类似，不难验证，当 $x = a_{m+1}$ 时，每个 $y_i=|x-a_i|+|x-a_{n+1-i}|$ 达到自己的最小值. 而这时 $|x-a_{m+1}|=0$. 所以 ③ 式右端最末一项也达到自己的最小值. 因此，当 $x=a_{m+1}$ 时 y 达到最小值. 根据 ③ 式，这个最小值等于 $-a_1-a_2-\cdots-a_m+a_{m+2}+a_{m+3}+\cdots+a_n$.

6·84　对有限集合 A，存在函数 $f: N\to A$ 具有下述性质：若

$|i-j|$ 是素数,则 $f(i) \neq f(j)$, $N=\{1,2,\cdots\}$,求有限集合 A 的元素的最少个数.

（第 7 届巴尔干地区数学竞赛,1990 年）

[解] 从 1 考虑起,与它的差为素数的最小自然数是 3;与前两者差均为素数的最小自然数是 6;与前三者的差均为素数的最小自然数是 8.这就是说,对于集合 $M=\{1,3,6,8\} \subset N$ 中,任意两个元素 i,j, $|i-j|$ 为素数,因此 M 中的元素的象必须两两互异.于是 $|A| \geqslant 4$.

另一方面,我们可以构造函数 f 如下:

$f(x)=i$, 其中 $x \in N, i \in A=\{0,1,2,3\}$ 并且 $x \equiv i \pmod 4$.

由上述构造知,若 $f(x)=f(y)$,则 $x-y$ 被 4 整除, $|x-y|$ 便不是素数.这就是说,我们所构造的函数 f 具有本题所要求的性质.因为在这里 $|A|=4$,所以集合 A 的元素的最少个数是 4.

6・85　试求如下表达式的最大值:

$$|\cdots||x_1-x_2|-x_3|-\cdots-x_{1990}|,$$

其中 $x_1,x_2,\cdots,x_{1990}$ 是由 1 到 1990 的不同自然数.

（第 24 届全苏数学奥林匹克,1990 年）

[解] 当 $x \geqslant 0, y \geqslant 0$ 时,显然有 $|x-y| \leqslant \max\{x,y\}$ 以及 $\max\{\max\{x,y\}\}, z=\max\{x,y,z\}$,由此可知,当 $n=1,2,\cdots,1990$ 时,有

$$|\cdots||x_1-x_2|-x_3|-\cdots-x_n| \leqslant \max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}.$$

所以在问题的条件中所给出的表达式不会超过

$$\max\{x_1,\cdots,x_{1990}\}=1990.$$

但是该式不可能等于 1990,这是因为该式之值的奇偶性应当与和数

$$x_1+x_2+\cdots+x_{1990}=1+2+\cdots+1990$$

$$=\frac{1990 \cdot 1991}{2}=995 \cdot 1991$$

的奇偶性相同,即为奇数,而如下的具体例子表明,该式之值可达 1989: $|\cdots|||2-4|-5|-3|-\cdots-(4k+2)|-(4k+4)|-|(4k+5)|-(4k+3)|-\cdots-1986|-1988|-1989|-1987|-1990|-1|=1989.$

综上所述可知,所求的最大值是 1989.

6·86　设 x,y 为区间$(0,1)$中的实数，证明：x^2+xy+y^2，$x^2+x(y-1)+(y-1)^2$，$(x-1)^2+(x-1)y+y^2$，$(x-1)^2+(x-1)(y-1)+(y-1)^2$ 中，最小的至多为$\frac{1}{3}$.

（加拿大国家集训队训练题）

［证］　由于作变换$(x,y)\to(y,x)$之后，我们的问题仍然不变，因此不妨设 $x\geqslant y$，也就是说，只需证明区域

$$\{(x,y):0<x<1,0<y\leqslant x\}$$

中的点满足以下四个不等式之一.

$$x^2+xy+y^2\leqslant\frac{1}{3},x^2+x(y-1)+(y-1)^2\leqslant\frac{1}{3},$$

$$(x-1)^2+(x-1)y+y^2\leqslant\frac{1}{3},$$

$$(x-1)^2+(x-1)(y-1)+(y-1)^2\leqslant\frac{1}{3}.$$

又由于作变换$(x,y)\to(1-y,1-x)$之后，我们的问题也不变，因此，只需证明区域

$$D=\left\{(x,y):0<x\leqslant\frac{1}{2},0<y\leqslant x\right\}\cup\left\{(x,y):\frac{1}{2}<x<1,0<y\leqslant 1-x\right\}$$

中的点满足以上四个不等式之一.

由于点 $O(0,0),A\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right),B\left(\frac{1}{2},0\right)$均在椭圆

$x^2+xy+y^2=\frac{1}{3}$ 内，所以整个 $\triangle OAB$ 均在椭圆内. 由于点 A,B，$C(1,0),D\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$均在椭圆$(x-1)^2+(x-1)y+y^2=\frac{1}{3}$ 内，所以四边形 $ABCD$ 在椭圆内. 这就表明区域 D 内的点至少满足不等式

$$x^2+xy+y^2\leqslant\frac{1}{3}\text{与}(x-1)^2+(x-1)y+y^2\leqslant\frac{1}{3}\text{之一},$$

从而命题得证.

6·87　给定 $k\in N$ 及实数$a>0$，设 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 满足下列条件

$$k_1+k_2+\cdots+k_r=k,k_i\in N,1\leqslant r\leqslant k,$$

求 $a^{k_1}+a^{k_2}+\cdots+a^{k_r}$ 的最大值.

（第 8 届中国中学生数学冬令营，1993 年）

[解] 显然,当 $0 < a \leqslant 1$ 时,所求的最大值为 ka.

当 $a > 1$ 时,对于任意 $s,t \in N$,都有

$$a(a^{s-1}-1)(a^{t-1}-1) \geqslant 0,$$

从而有 $\quad a^s + a^t \leqslant a + a^{s+t-1}.$

利用这个不等式可以得到

$$a^{k_1} + a^{k_2} + \cdots + a^{k_r} \leqslant (r-1)a + a^{k-(r-1)}. \quad ①$$

考虑方程 $\quad a + a^m = a^{m+1}$,

容易解得 $\quad m = \log_a\left(\frac{a}{a-1}\right)$,且可以看出

$$\begin{cases} a + a^m \leqslant a^{m+1}, 当\ m \geqslant \log_a\left(\frac{a}{a-1}\right), \\ a + a^m \geqslant a^{m+1}, 当\ m \leqslant \log_a\left(\frac{a}{a-1}\right). \end{cases} \quad ②$$

利用 ② 式递推可得

$$(r-1)a + a^{k-(r-1)} \leqslant \begin{cases} a^k, 当\ r \leqslant (k+1) - \log_a\left(\frac{a}{a-1}\right), \\ ka, 当\ r \geqslant (k+1) - \log_a\left(\frac{a}{a-1}\right). \end{cases} \quad ③$$

由 ① 和 ③ 式即得

$$a^{k_1} + a^{k_2} + \cdots + a^{k_r} \leqslant \max\{a^k, ka\} \quad ④$$

显然,④ 式右端的括号中的两个值都是可以取得的,所以,所求的最大值为

$$\max\{ka, a^k\} = \begin{cases} ka, a \leqslant k^{\frac{1}{k-1}}, k \geqslant 2, \\ a^k, k = 1 或 a > k^{\frac{1}{k-1}}, k \geqslant 2. \end{cases}$$

6・88 函数 $\quad F(x) = |\cos^2 x + 2\sin x\cos x - \sin^2 x + Ax + B|$ 在 $0 \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\pi$ 上的最大值 M 与参数 A、B 有关.问 A、B 取什么值时 M 为最小?证明你的结论.

(中国高中数学联赛,1983 年)

[解] (1) $F(x) = \left|\sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + Ax + B\right|$ 当 $A = B = 0$ 时,$F(x)$ 成为 $\quad f(x) = \sqrt{2}\left|\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\right|$ 在区间 $\left[0, \frac{3}{2}\pi\right]$ 上有三点 $x_1 = \frac{\pi}{8}, x_2 = \frac{5\pi}{8}, x_3 = \frac{9\pi}{8}$.使 $f(x)$ 取得最大值 $M_f = \sqrt{2}$,它就是

要求的最小的 M 的值.

(2) 下面证明,对任何 A、B 不同时为 0 时,有

$$\max_{0\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}} F(x) > \max_{0\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}} f(x) = M_f = \sqrt{2}. \qquad ①$$

(i) 当 $A=0, B\neq 0$ 时,显然

$$\max_{0\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}} F(x) = \max_{0\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}} \left|\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+B\right|,$$

所以 ① 式成立.

(ii) 当 $A>0, B\geqslant 0$ 时,

因为 $F\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}+\frac{\pi}{8}A+B>\sqrt{2}$,

所以 ① 式成立.

(iii) 当 $A>0, B<0$ 时,再分两种情形:

Ⅰ. 若 $|B|<\frac{9\pi}{8}A$,则$\frac{9\pi}{8}A+B>0$,于是

$$F\left(\frac{9\pi}{8}\right)=\left|\sqrt{2}+\frac{9\pi}{8}A+B\right|>\sqrt{2},$$

所以 ① 式成立.

Ⅱ. 若 $|B|\geqslant\frac{9\pi}{8}A$,则 $|B|>\frac{5\pi}{8}A$, $\frac{5\pi}{8}A+B<0$,于是

$$F\left(\frac{5\pi}{8}\right)=\left|-\sqrt{2}+\frac{5\pi}{8}A+B\right|>\sqrt{2},$$

所以 ① 式成立.

(iv) 当 $A<0, B\leqslant 0$ 时,

因为 $F\left(\frac{5\pi}{8}\right)=\left|-\sqrt{2}+\frac{5\pi}{8}A+B\right|>\sqrt{2}$,

所以 ① 式成立.

(v) 当 $A<0, B>0$ 时,再分两种情况:

Ⅰ. 若 $B<-\frac{5\pi}{8}A$,则$\frac{5\pi}{8}A+B<0$,于是

$$F\left(\frac{5\pi}{8}\right)=\left|-\sqrt{2}+\frac{5\pi}{8}A+B\right|>\sqrt{2},$$

所以 ① 式成立.

Ⅱ. 若 $B\geqslant-\frac{5\pi}{8}A$,则 $B>-\frac{\pi}{8}A$,即$\frac{\pi}{8}A+B>0$,于是

$$F\left(\frac{\pi}{8}\right)=\left|\sqrt{2}+\frac{\pi}{8}A+B\right|>\sqrt{2},$$

所以 ① 式成立.

综合上述五种情况,所以 ① 式成立.

6·89 确定 m^2+n^2 的最大值.其中 m,n 为整数,且 $m,n\in\{1,2,\cdots,1981\}$,$(n^2-mn-m^2)^2=1$.

(第 22 届国际数学奥林匹克,1981 年)

[解] 首先考虑 $m=n$ 的情况.

因 $(n^2-mn-m^2)^2=1$,故 $(mn)^2=1$,

而 $m,n\in\{1,2,3,\cdots,1981\}$,所以必有且只有 $m=n=1$.下面考虑 $m\neq n$ 的情况.

显然,$n>m$.令 $n=m+u_k$.

那么 $[(m+u_k)^2-m(m+u_k)-m^2]^2=1$.

化简得 $(m^2-u_km-u_k^2)^2=1,(m>u_k)$ ①

又令 $m=u_k+u_{k-1}$,

代入 ① 得 $(u_k^2-u_{k-1}u_k-u_{k-1}^2)^2=1$.

如果 $u_k\neq u_{k-1}$,那么继续进行上面的变化直至

$(u_{k-i}^2-u_{k-i-1}u_{k-i}-u_{k-i-1}^2)^2=1$,且 $u_{k-i}=u_{k-i-1}=1$ 为止.从上面所有的变换得到数列:

$$u_{k-i-1},u_{k-i},\cdots,u_{k-1},m,n.$$

此数列任意相邻两项皆满足条件 $(u_j^2-u_{j-1}u_j-u_{j-1}^2)^2=1$,并且数列满足 $u_j=u_{j-1}+u_{j-2}$,显然是斐波那契数列

$\{1,2,\cdots,1981\}$ 中的斐波那契数为:1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,987,1597.

要 m^2+n^2 最大只需取 $m=987,n=1597$.

故 $m^2+n^2=987^2+1597^2=3524578$ 为满足所给条件的最大值.

6·90 设数 $x_1,\cdots,x_{1991}$ 满足条件

$$|x_1-x_2|+\cdots+|x_{1990}-x_{1991}|=1991,$$

而 $y_k=\frac{1}{k}(x_1+\cdots+x_k),k=1,\cdots,1991$.试求如下表达式所可能取得的最大值.

$|y_1-y_2|+\cdots+|y_{1990}-y_{1991}|$.

（第25届全苏数学奥林匹克，1991年）

[解] 对 $k=1,\cdots,1990$，我们有关系式

$$\begin{aligned}&|y_k-y_{k+1}|\\=&\left|\frac{1}{k}(x_1+\cdots+x_k)-\frac{1}{k+1}(x_1+\cdots+x_{k+1})\right|\\=&\left|\frac{1}{k(k+1)}(x_1+\cdots+x_k-kx_{k+1})\right|\\\leqslant&\frac{1}{k(k+1)}[|x_1-x_2|+2|x_2-x_3|+\cdots+k|x_k-x_{k+1}|],\end{aligned}$$

由此得到

$$\begin{aligned}&|y_1-y_2|+\cdots+|y_{1990}-y_{1991}|\\\leqslant&|x_1-x_2|\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{1990\cdot 1991}\right)\\&+2|x_2-x_3|\left(\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{1990\cdot 1991}\right)\\&+\cdots+1990|x_{1990}-x_{1991}|\frac{1}{1990\cdot 1991}\\=&|x_1-x_2|\left(1-\frac{1}{1991}\right)+|x_2-x_3|\left(1-\frac{2}{1991}\right)+\cdots+\\&|x_{1990}-x_{1991}|\left(1-\frac{1990}{1991}\right)\\\leqslant&1991\cdot\left(1-\frac{1}{1991}\right)=1990.\end{aligned}$$

所得的估计，可在 $x_1=1991,x_2=\cdots=x_{1991}=0$ 时取得，故所求的最大值为1990.

6·91　考虑 $[0,1]$ 上的函数 $f(x)$ 满足条件：

(1) $f(x)\geqslant 0$，对任意 $x\in[0,1]$；

(2) $f(1)=1$；

(3) $f(x)+f(y)\leqslant f(x+y)$，$x,y,x+y\in[0,1]$

试求最小的常数 c，使得对任一满足(1)～(3)的函数 $f(x)$ 都有 $f(x)\leqslant cx$，$x\in[0,1]$.

（第22届美国数学奥林匹克，1993年）

[解] c 的最小值为2.

事实上，用函数

$$f(x)=\begin{cases}0,0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2};\\ 1,\dfrac{1}{2}<x\leqslant 1.\end{cases}$$

可以证明 $c\geqslant 2$. 因而只需证明对于满足(1) ~ (3) 的函数 f 都有 $f(x)\leqslant 2x, x\in[0,1]$. 为此,我们在(3) 中,令 $y=1-x$,并由(1) 和(2) 可以得出,对于任意的 $x\in[0,1]$ 都有 $f(x)\leqslant 1$.

因为 $f(0)\geqslant 0$ 且 $f(0)+f(1)\leqslant f(1)$,所以 $f(0)=0$

在(3) 中,令 $y=x$ 得出 $2f(x)\leqslant f(2x)$,其中 $x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$. 从而由归纳可知

$$2^n f(x)\leqslant f(2^n x),\text{其中 } n\geqslant 1, x\in[0,2^{-n}].$$

若 $x>\dfrac{1}{2}$,则 $f(x)\leqslant 1<2x$.

若 $0<x\leqslant\dfrac{1}{2}$,则可选取 n,使

$$\frac{1}{2^{n+1}}<x\leqslant\frac{1}{2^n},$$

于是有
$$2^n f(x)\leqslant f(2^n x)\leqslant 1<2\cdot 2^n x,$$
$$f(x)<2x.$$

综上所述,$f(x)\leqslant 2x$ 对任意的 $x\in[0,1]$ 都成立.

6・92　设 n 是给定的正整数,和式

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|x_i-x_j|=|x_1-x_2|+|x_1-x_3|+\cdots+|x_1-x_n|+|x_2-x_3|+|x_2-x_4|+\cdots+|x_2-x_n|+\cdots+|x_{n-2}-x_{n-1}|+|x_{n-2}-x_n|+|x_{n-1}-x_n|,$$

其中 $0\leqslant x_i\leqslant 1, i=1,2,\cdots,n$. 又设 $S(n)$ 表示和式的最大可能值. 求 $S(n)$.

(第 6 届加拿大数学奥林匹克,1974 年)

[解]　不妨设 $0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant 1$. 令

$$S=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|x_i-x_j|=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

这个和式共有 C_n^2 项. 每个 x_k 都出现在其中的 $n-1$ 项 $(1\leqslant k\leqslant n)$,这 $n-1$ 项是

$$x_k - x_1, x_k - x_2, \cdots, x_k - x_{k-1}; x_{k+1} - x_k, x_{k+2} - x_k, \cdots, x_n - x_k.$$

因此

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{n}[(k-1)\cdot x_k - (n-k)x_k] \\ &= \sum_{k=1}^{n}[x_k(2k-n-1)]. \end{aligned}$$

因为当 $k < \frac{n+1}{2}$ 时,$2k - n - 1 < 0$,所以

$$S \leqslant \sum_{k \geqslant \frac{n+1}{2}}[x_k(2k-n-1)].$$

当 n 是偶数时,

$$\begin{aligned} S &\leqslant \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^{n}[x_k(2k-n-1)] \leqslant \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^{n}(2k-n-1) \\ &= 1+3+5+\cdots+(n-1) = \frac{n^2}{4}; \end{aligned}$$

当 n 是奇数时,

$$\begin{aligned} S &\leqslant \sum_{k=\frac{n+1}{2}}^{n}[x_k(2k-n-1)] \leqslant \sum_{k=\frac{n+1}{2}}^{n}(2k-n-1) \\ &= 2+4+6+\cdots+(n-1) = \frac{n^2-1}{4}. \end{aligned}$$

综上所述,可得

$$S \leqslant \left[\frac{n^2}{4}\right].$$

另一方面,若 n 是偶数,则我们可取

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{\frac{n}{2}} = 0, x_{\frac{n}{2}+1} = x_{\frac{n}{2}+2} = \cdots = x_n = 1,$$

使 $S = \frac{n^2}{4}$.

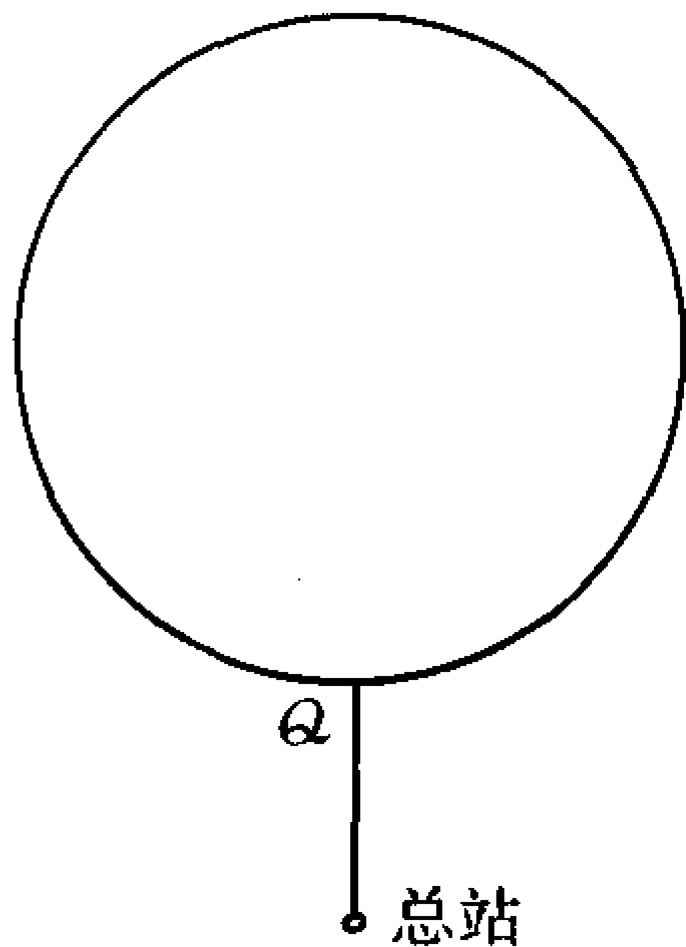
若 n 是奇数,则我们可取

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{\frac{n-1}{2}} = 0, x_{\frac{n+1}{2}} = x_{\frac{n+3}{2}} = \cdots = x_n = 1,$$

使 $S = \frac{n^2-1}{4}$.

因此,不管 n 取什么样的正整数,我们都有 $S(n)=\left[\frac{n^2}{4}\right]$.

6·93 汽车路线由周长为10英里的环路和从总站到环路上 Q 点长1英里的直线组成(如图),两部汽车在路上服务.每部周游需要20分钟.1号车离开总站,先沿直路走,再按顺时针方向绕环路一周,最后沿直路回到总站.2号车走同样的路线,但按反时针方向绕行环路,到达总站比1号车迟10分钟.两车连续行驶,在路上任何地点都不耽搁,让乘客上下车的时间可以忽略不计.



某人打算在地点 P 候车,那里沿1号车路线离总站 x 英里($0\leqslant x<12$).已知他要搭车到总站去,并且搭上了使他尽早到达目的地的汽车.设他的旅行所需的最长的时间为 $w(x)$ 分钟(候车时间加乘车时间).

(1) 求 $w(2)$, $w(4)$.

(2) x 为何值时, $w(x)$ 最大?

(3) 对于 $0\leqslant x<12$,画出 $y=w(x)$ 的草图.

(第6届加拿大数学奥林匹克,1974年)

[解] 由已知,车的行驶速度是每分钟 $\frac{3}{5}$ 英里,并且 $w(x)=w(12-x)$,因此只需考虑 $0<x\leqslant 6$ 的情形就足够了.

如果 $0<x\leqslant 1$,那么这个人显然要搭开向总站的车,候车时间最多10分钟,乘车时间为 $\frac{5x}{3}$ 分钟,因此 $w(x)=10+\frac{5x}{3}(0<x\leqslant 1)$.

如果 $1<x\leqslant 6$,那么情况比较复杂.为此我们将需要的数据列成下表:

A 表示 x 的范围;

B 表示刚错过的汽车号数;

C 表示另一部车的位置(在这个人到达 P 位置的时刻);

D 表示1号车的行驶时间;

E 表示2号车的行驶时间;

F 表示他要等待的汽车的号数.

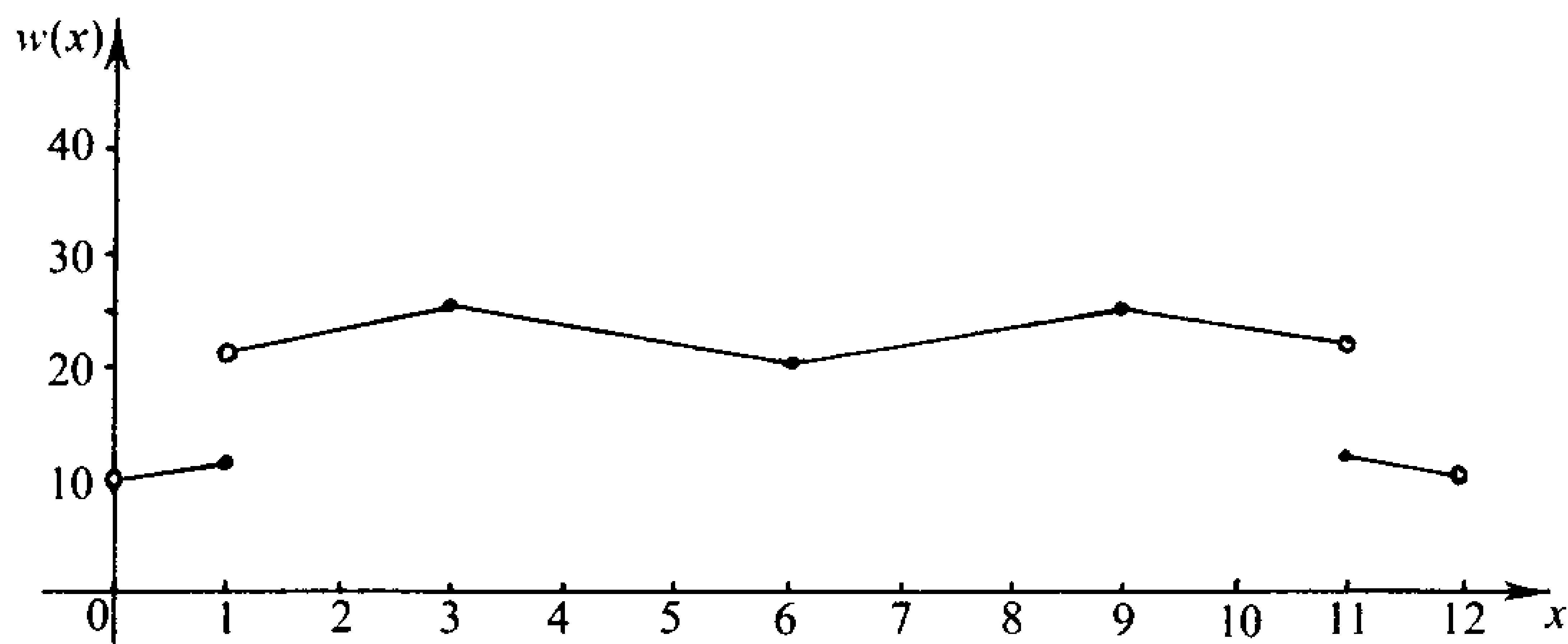
A	B	C	D	E	F
$1<x<3$	1	$6-x$	$20+\frac{5}{3}(12-x)$	$\frac{5}{3}(6-x)$	2
	2	$6-x$	$20+\frac{5}{3}(6+x)$	$20+\frac{5}{3}x$	2
$x=3$	1,2	3	35	25	2
$3<x<6$	1	$6-x$	$20+\frac{5}{3}(12-x)$	$20+\frac{5}{3}(6-x)$	2
	2	$6-x$	$\frac{5}{3}(6+x)$	$20+\frac{5}{3}x$	1
$x=6$	1	0	30	20	2
	2	0	20	30	1

$$\therefore\quad w(x)=\begin{cases}0, x=0,\\ 10+\frac{5}{3}x, 0<x\leqslant 1,\\ 20+\frac{5}{3}x, 1<x<3,\\ 25, x=3,\\ 20+\frac{5}{3}(6-x), 3<x<6,\\ 20, x=6.\end{cases}$$

(1) $w(2)=\frac{70}{3}, w(4)=\frac{70}{3}$.

(2) 当 $x=3$ 和 $x=9$ 时，$w(x)$ 达到最大值 25.

(3) $w(x)$ 的草图为



6·94 确定最大的实数 z,使得

$$x+y+z=5, xy+yz+zx=3,$$

并且 x,y 也是实数.

(第10届加拿大数学奥林匹克,1978年)

[解] 由 $x+y+z=5$ 得

$$(x+y)^2=(5-z)^2,$$

由 $xy+yz+zx=3$ 得

$$xy=3-z(5-z).$$

于是由

$$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=(5-z)^2-4[3-z(5-z)]$$

$$=-3z^2+10z+13=(13-3z)(1+z),$$

得 $$(13-3z)(1+z)\geqslant 0,$$

$$-1\leqslant z\leqslant \frac{13}{3}.$$

当 $x=y=\frac{1}{3}$ 时,$z=\frac{13}{3}$.因此 z 的最大值是$\frac{13}{3}$.

6·95 试证若两个三角形有一个角相等,则其余两个角的正弦之和较大的三角形,它的这两个角之差较小.用所得结果确定:在什么三角形中,其角的正弦之和达到最大值?

(匈牙利数学奥林匹克,1898年)

[证] 设 α,β,γ 和 α',β',γ' 分别是两个三角形的内角,且 $\alpha=\alpha'$,若

$$\sin\beta+\sin\gamma<\sin\beta'+\sin\gamma' \quad ①$$

则 $$2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}<2\sin\frac{\beta'+\gamma'}{2}\cos\frac{\beta'-\gamma'}{2}. \quad ②$$

因为 $\alpha=\alpha'$，故 $\beta+\gamma=\beta'+\gamma'$，且

$$\sin\frac{\beta+\gamma}{2}=\sin\frac{\beta'+\gamma'}{2}>0,$$

所以不等式 ② 等价于

$$\cos\frac{\beta-\gamma}{2}<\cos\frac{\beta'-\gamma'}{2}. \quad ③$$

而不等式 ③ 成立的条件是 $\beta'-\gamma'$ 的绝对值小于 $\beta-\gamma$ 的绝对值，这就证明了本题的第一部分.

若在某一个三角形中，至少有两个角是不同的，设为 β 和 γ，则可以作一个新三角形，使得其角的正弦之和比原来的三角形的正弦之和大. 这只要根据前面所证明的，使新三角形的角 α' 和原三角形的角 α 相等，而使 β' 和 γ' 的每一个更接近于 $\frac{\beta+\gamma}{2}$ 就行了.

因此，当三角形是等边三角形时，正弦之和达到最大值.

6·96　设 a 与 d 是非负数，b 与 c 是正数，并且 $b+c\geqslant a+d$. 试求下式的最小值

$$\frac{b}{c+d}+\frac{c}{a+b}.$$

（第 22 届全苏数学奥林匹克，1988 年）

[解]　如果我们同时将 a 与 d 互换，b 与 c 互换，那么题目的条件与结论都没有变化. 因此，我们不妨设 $a+b\geqslant c+d$. 于是，我们有

$$\begin{aligned}
\frac{b}{c+d}+\frac{c}{a+b}&=\frac{b+c}{c+d}-c\left(\frac{1}{c+d}-\frac{1}{a+b}\right)\\
&\geqslant\frac{\frac{1}{2}(a+b+c+d)}{c+d}-(c+d)\left(\frac{1}{c+d}-\frac{1}{a+b}\right)\\
&=\frac{a+b}{2(c+d)}-\frac{1}{2}+\frac{c+d}{a+b}\\
&\geqslant 2\cdot\sqrt{\frac{a+b}{2(c+d)}\cdot\frac{c+d}{a+b}}-\frac{1}{2}\\
&=\sqrt{2}-\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

另一方面，当 $a=\sqrt{2}+1, b=\sqrt{2}-1, c=2, d=0$ 时，我们有

$$\frac{b}{c+d}+\frac{c}{a+b}=\sqrt{2}-\frac{1}{2}.$$

故所求的最小值是 $\sqrt{2}-\frac{1}{2}$.

6·97　设 x,y,z 为正数，且 $x^2+y^2+z^2=1$，试求下列表达式的最小值

$$S=\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}.$$

（第22届全苏数学奥林匹克，1988年）

[解]　将表达式平方，得

$$S^2=\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}+2(x^2+y^2+z^2),$$

由算术平均和几何平均不等式得

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}\right)\geqslant y^2, \quad ①$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}\right)\geqslant z^2, \quad ②$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}\right)\geqslant x^2, \quad ③$$

①+②+③得

$$\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}\geqslant x^2+y^2+z^2,$$

于是

$$S^2\geqslant 3(x^2+y^2+z^2)=3,$$
$$S\geqslant\sqrt{3}.$$

又因 $x=y=z=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，满足已知条件 $x^2+y^2+z^2=1$，且 $S=\sqrt{3}$，故 S 的最小值是 $\sqrt{3}$.

6·98　I. 作出下列函数的图像：

(1) $y=\sqrt{4x^2+12x+9}$;

(2) $y=\sqrt{(2x+3)^2}$;

(3) $y=\dfrac{|4x^2+12x+9|}{2x+3}$.

Ⅱ. 函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$.

(1) 若 $-1<x_1<x_2<1$, 比较 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小;

(2) 证明: $f(1)$ 是 $f(x)$ 的极大值; $f(-1)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

(中国上海市数学竞赛,1960 年)

[解] Ⅰ. 由题设有 (1) $y=|2x+3|$,

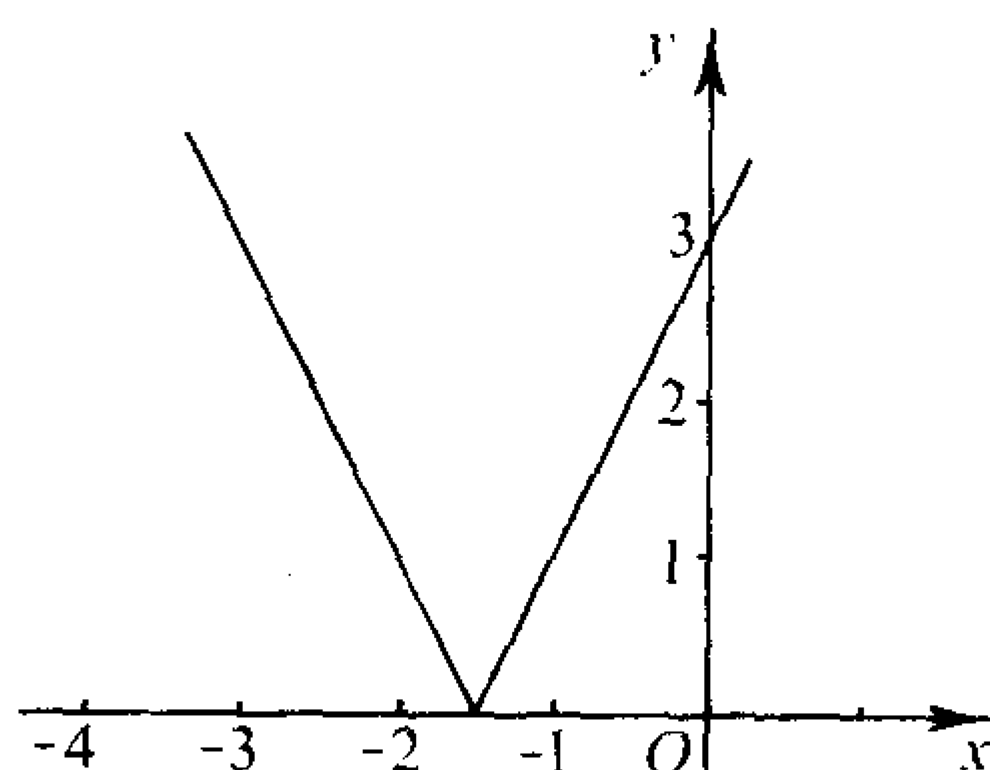
(2) $y=|2x+3|$,

(3) 因 $4x^2+12x+9=(2x+3)^2\geqslant 0$,

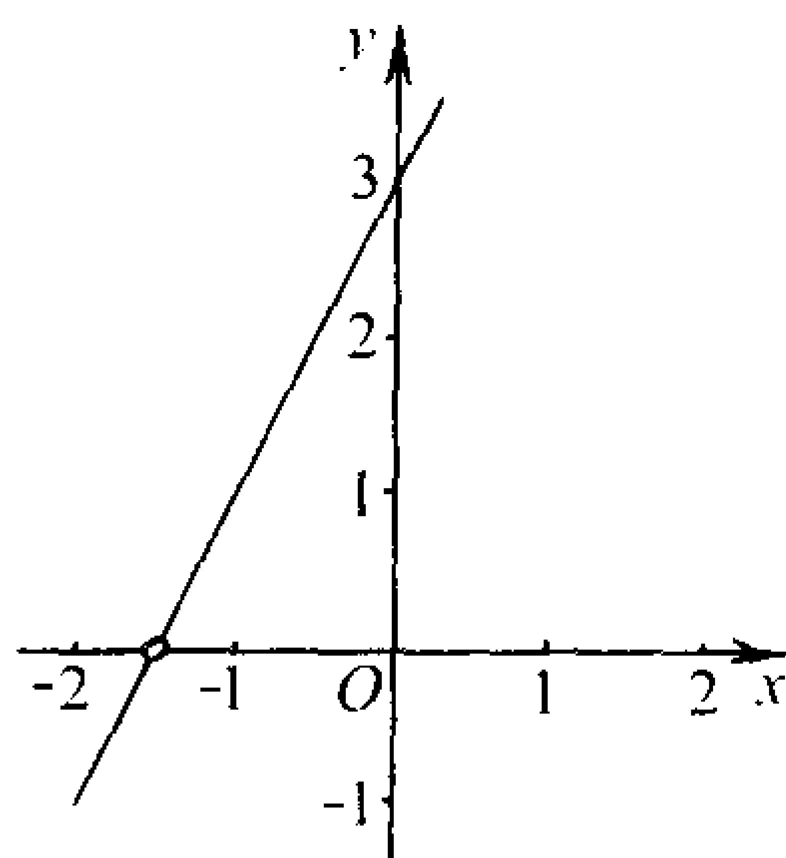
故有 $|4x^2+12x+9|=4x^2+12x+9=(2x+3)^2$.

所以原给函数为 $y=2x+3$, 但 $x\neq-\dfrac{3}{2}$.

图像如下:



(1)(2)



(3)

Ⅱ. 由题设有 (1)
$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{x_2}{1+x_2^2}-\frac{x_1}{1+x_1^2}=\frac{x_2(1+x_1^2)-x_1(1+x_2^2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}=\frac{(x_2-x_1)(1-x_1x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}>0,$$

故 $f(x_2)>f(x_1)$.

(2) 由 (1) 知 $f(x)$ 在 $-1<x<1$ 中是升函数,

又当 $1 < x_3 < x_4$ 时,

$$f(x_4) - f(x_3) = \frac{(x_4 - x_3)(1 - x_3x_4)}{(1 + x_3^2)(1 + x_4^2)} < 0,$$

故知 $f(x)$ 在 $x > 1$ 时是降函数.

再当 $x_5 < x_6 < -1$ 时,

$$f(x_6) - f(x_5) = \frac{(x_6 - x_5)(1 - x_5x_6)}{(1 + x_5^2)(1 + x_6^2)} < 0,$$

故知 $f(x)$ 在 $x < -1$ 时也是降函数.

所以 $f(1)$ 是 $f(x)$ 的极大值,$f(-1)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

6·99　k、l 是自然数,在形式为 $36^k - 5^l$ 的数中求绝对值最小的数,并证明所求的数确实最小.

(第 8 届全苏数学奥林匹克,1974 年)

[解]　36^k 的末位数字是 6,5^l 的末位数字是 5,因此,当 $36^k > 5^l$ 时,$|36^k - 5^l|$ 的末位数字是 1;当 $36^k < 5^l$ 时,$|36^k - 5^l|$ 的末位数字是 9.

若　$|36^k - 5^l| = 1$,

即　$36^k - 5^l = 1$,

于是可得　$5^l = (6^k - 1)(6^k + 1)$.

但 $6^k + 1$ 不是 5 的倍数,因此这种情况不可能出现.

若　$|36^k - 5^l| = 9$,

即　$5^l - 36^k = 9$,

于是得　$5^l = 36^k + 9$.

但上式左端不是3的倍数,右端是3的倍数,矛盾.因此这种情况也不可能出现.

若　$|36^k - 5^l| = 11$,

即　$36^k - 5^l = 11$.

显然,当 $k = 1, l = 2$ 时上式成立.

因此,在形如 $36^k - 5^l$ 的数中,绝对值最小的数是 11.

6·100　n 个正数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 之和等于1.设 S 是下列各数中最大的数:

$$\frac{x_1}{1 + x_1}, \frac{x_2}{1 + x_1 + x_2}, \cdots, \frac{x_n}{1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n}.$$

求 S 的可能的最小值. $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 取何值时能达到最小值?

（第 6 届全苏数学奥林匹克,1972 年）

[解] 设 $y_0=1,y_k=1+x_1+x_2+\cdots+x_k(1\leqslant k\leqslant n)$.

则 $x_k=y_k-y_{k-1}$.

由已知

$$\frac{x_k}{1+x_1+x_2+\cdots+x_k}\leqslant S,$$

即 $$\frac{y_k-y_{k-1}}{y_k}\leqslant S,$$

于是得 $$1-S\leqslant\frac{y_{k-1}}{y_k}\quad(k=1,2,\cdots,n)\qquad ①$$

由已知可知 $S\leqslant 1$ 且 $y_k>0(k=0,1,2,\cdots,n)$,因此我们可以将①式所表达的 n 个不等式相乘,从而得到

$$(1-S)^n\leqslant\frac{y_0}{y_n}$$

注意到 $y_0=1,y_n=2$,因此

$$(1-S)^n\leqslant\frac{1}{2},$$

$$S\geqslant 1-2^{-\frac{1}{n}}.$$

另一方面,若取

$$\frac{y_{k-1}}{y_k}=1-S=2^{-\frac{1}{n}}\quad(k=1,2,\cdots,n),$$

即取 $y_0=1,y_1=2^{\frac{1}{n}},y_2=2^{\frac{2}{n}},y_3=2^{\frac{3}{n}},\cdots,y_n=2$,

则 $S=1-2^{-\frac{1}{n}}$.

此时 $x_k=y_k-y_{k-1}=2^{\frac{k}{n}}-2^{\frac{k-1}{n}}\quad(k=1,2,\cdots,n)$.

这就是说,当 $x_k=2^{\frac{k}{n}}-2^{\frac{k-1}{n}}(k=1,2,\cdots,n)$ 时,S 可取到最小值 $1-2^{-\frac{1}{n}}$.

6·101、设 x,y 是正数,S 是 $x,y+\frac{1}{x},\frac{1}{y}$ 中最小的数.求 S 的可能的最大值. x,y 取何值时能达到最大值?

（第 6 届全苏数学奥林匹克,1972 年）

[解] 我们考虑,当 S 最大取什么值时,可以同时满足三个不等式

$$x \geqslant S, \quad ①$$

$$y+\frac{1}{x} \geqslant S, \quad ②$$

$$\frac{1}{y} \geqslant S. \quad ③$$

并且其中至少有一个取等号.

由于 $x=y=1$ 时,$S=1$,因此可设 $S>0$.

由③得 $y \leqslant \frac{1}{S}$,

由①得 $\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{S}$,

由②得 $S \leqslant \frac{1}{x}+y \leqslant \frac{2}{S}$,

即 $S^2 \leqslant 2$,

$$S \leqslant \sqrt{2}.$$

另一方面,$x=\sqrt{2}, y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时,有 $S=\sqrt{2}$.

因此 S 的可能的最大值是$\sqrt{2}$,并且当 $x=\sqrt{2}, y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时,S 取到最大值.

6·102 设 m 的立方根是一个形如$n+r$ 的数,这里 n 是一个正整数,r 是一个小于$\frac{1}{1000}$ 的正实数.当 m 是满足上述条件的最小正整数时,求 n 的值.

(第 5 届美国数学邀请赛,1987 年)

[解] 由题意,$\sqrt[3]{m}=n+r$,其中 n 为正整数,$0<r<\frac{1}{1000}$.因此

$$n<\sqrt[3]{m}<n+\frac{1}{1000},$$

故 $$n^3<m<\left(n+\frac{1}{1000}\right)^3.$$

满足上面式子的 m 的最小可能值是 $m = n^3 + 1$.
于是得

$$n^3 + 1 < \left(n + \frac{1}{1000}\right)^3,$$

$$1 < \frac{3}{1000}n^2 + \frac{3}{1000000}n + \frac{1}{10^9},$$

$$n^2 + \frac{n}{1000} + \frac{1}{3 \times 10^6} > \frac{1000}{3}, \quad ①$$

故 $$n^2 \approx \frac{1000}{3},$$

即 $$n^2 = 18^2 \text{ 或 } 19^2.$$

经验证,当 $n^2 = 18^2$ 时,① 式不成立;而当 $n^2 = 19^2$ 时,① 式成立.

所以,$n = 19$ 是满足题意的最小正整数.

6·103 求使前 n 个自然数($n > 1$)的平方平均数是一个整数的最小正整数 n,这里 n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的平方平均数指的是

$$\left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(第 15 届美国数学奥林匹克,1986 年)

[解] 设 $\left(\frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = m, m \in N$.

则 $$\frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n} = m^2,$$

$$\frac{(n+1)(2n+1)}{6} = m^2,$$

$$(n+1)(2n+1) = 6m^2.$$

因为 $6m^2$ 是偶数,$2n+1$ 是奇数,所以 $n+1$ 是偶数,从而 n 是奇数.于是,我们设 $n = 6p \pm 1$ 或 $6p + 3, p \in N \cup \{0\}$.

若 $n = 6p + 1$,则

$$6m^2 = (6p + 2)(12p + 3),$$

$$m^2 = (3p + 1)(4p + 1).$$

由于 $3p + 1$ 与 $4p + 1$ 互质,因此 $3p + 1$ 和 $4p + 1$ 都是完全平方数.我们设

$$3p + 1 = u^2, 4p + 1 = v^2.$$

于是 $4u^2-3v^2=1.$

当 $u=1$ 时，$v=1,p=0,n=1$，与 $n>1$ 矛盾.

当 $u=2,3,4,\cdots,11,12$ 时，容易通过计算得知，v 都不是整数，矛盾.

当 $u=13$ 时，$v=15,p=56,n=337.$

若 $n=6p-1$，则

$$6m^2=6p(12p-1),$$
$$m^2=p(12p-1).$$

由于 p 与 $12p-1$ 互质，因此 p 和 $12p-1$ 都是完全平方数.我们设

$$p=S^2,12p-1=t^2,$$

于是 $t^2=12S^2-1.$

因为一个平方数只能是 4 的倍数或 4 除余 1 的数，所以

$$t^2=4[(3S^2)-1]+3,$$

不可能成立.这就是说，n 不可能是 $6p-1$ 型数.

若 $n=6p+3$，则

$$6m^2=(6p+4)(12p+7),$$
$$3m^2=(3p+2)(12p+7),$$
$$3m^2=3p(12p+7)+24p+14.$$

因为 $3p(12p+7),24p,3m^2$ 都是 3 的倍数，而 14 不是 3 的倍数，所以上式也不可能成立.这就是说，n 不可能是 $6p+3$ 型数.

综上所述，本题所求的最小正整数 n 为 337.

6·104 设 a,b 是自然数，$1\leqslant a\leqslant b,M=\left[\dfrac{a+b}{2}\right]$.函数 $f:Z\to Z$ 定义为

$$f(n)=\begin{cases}n+a,若\ n<M;\\ n-b,若\ n\geqslant M.\end{cases}$$

$$f^1(n)=f(n),f^{i+1}(n)=f(f^i(n)),i=1,2,\cdots$$

令 $k\geqslant 1$ 是使 $f^k(0)=0$ 的最小自然数，求证：

$$k=(a+b)/(a,b).$$

（第 31 届国际数学奥林匹克预选题，1990 年）

［证］ 显然只要考虑 $(a,b)=1$ 的情况.

设集合

$$S=\{n \mid M-b \leqslant n \leqslant M+a-1, n \in Z\}.$$

则 $\qquad f(s) \subseteq S$,并且 $0 \in S$.

设 $k \geqslant 1$ 且 $f^k(0)=0$,因为 $f(m)=m+a$ 或 $m-b$,k 可写成 $k=r+s$ 且 $ra-sb=0$. 由于 a,b 互质,从而

$$r \geqslant b, s \geqslant a, k \geqslant a+b.$$

另一方面,

$$f^{a+b}(0)=ra-sb,$$

这里 $r+s=a+b$,因此

$$f^{a+b}(0)=ra-sb=(a+b)(a-s).$$

因为

$$f^{a+b}(0) \in S,$$

而 S 中 $(a+b)$ 的倍数只有 0,所以

$$f^{a+b}(0)=0.$$

综上所述,使 $f^k(0)=0$ 的最小自然数 $k=a+b$(对一般情况,令

$$a=a_1(a,b), b=b_1(a,b),$$

$$S_1=\{n \mid M-b_1 \leqslant n \leqslant M+a_1-1, n \in Z\},$$

上述证明稍作修改即可).

6・105 设 S 是复平面上的单位圆周(即模等于 1 的复数集合),f 是从 S 到 S 的映射,对于任何 $z \in S$,定义

$$f^{(1)}(z)=f(z), f^{(2)}(z)=f(f(z)), \cdots,$$

$$f^{(k)}(z)=\underbrace{f(f(\cdots(f}_{k \text{个} f}(z)\cdots))),$$

如果 $c \in S$,使得

$$f^{(1)}(C) \neq C, f^{(2)}(C) \neq C, \cdots,$$

$$f^{(n-1)}(C) \neq C, f^{(n)}(C)=C.$$

我们就说 C 是 f 的 n-周期点.

设 m 是大于 1 的自然数,f 的定义如下:

$$f(z)=z^m(z \in S).$$

试计算 f 的 1989-周期点的总数.

(第 4 届中国中学生数学冬令营,1989 年)

[**解**] 我们首先证明:

若 $z_0 \in S$ 是 $f^{(n)}$ 的不动点,即 $f^{(n)}(z_0)=z_0$,且 z_0 为 f 的 m-周

期点,则必有 $m \mid n$.

事实上,设 $n = pm + q, 0 \leqslant q < m$,于是有

$$\begin{aligned} z_0 &= f^{(n)}(z_0) \\ &= f^{(pm+q)}(z_0) \\ &= f^{(q)}(f^{(m)}(f^{(m)}(\cdots(f^{(m)}(z_0)\cdots))) \\ &= f^{(q)}(z_0). \end{aligned}$$

若 $q \neq 0$,则上式意味着 z_0 为 f 的 q -周期点,这与 z_0 为 f 的 m -周期点矛盾,所以必有 $q = 0$,即 $m \mid n$.

下面再证明,若 (n, k) 表示 n 和 k 的最大公约数,记

$$B_n = \{z \in S \mid f^{(n)}(z) = z\},$$

则有 $$B_{(n,k)} = B_n \cap B_k.$$

事实上,由定义直接可知,当 $m \mid n$ 时,$B_m \subseteq B_n$,从而有

$$B_{(n,k)} \subseteq B_n \cap B_k.$$

另一方面,若 $z_0 \in B_n \cap B_k$,记

$$n = pk + q, 0 \leqslant q < k.$$

于是有 $$z_0 = f^{(q)}(z_0).$$

这意味着 $z_0 \in B_q \cap B_k$.

递推下去便知 $z_0 \in B_{(n,k)}$,

从而有 $$B_n \cap B_k \subseteq B_{(n,k)},$$

即 $$B_{(n,k)} = B_n \cap B_k.$$

我们还可以证明:

若 T 表示 f 的所有 1989 -周期点的集合,由 $1989 = 3^2 \times 13 \times 17$,必有

$$T = B_{1989} \setminus (B_{117} \cup B_{153} \cup B_{663}).$$

事实上,容易看出

$$T \subseteq B_{1989} \setminus (B_{117} \cup B_{153} \cup B_{663}).$$

故只需再证明相反的包含关系.

对于任意的 $z_0 \in B_{1989} \setminus (B_{117} \cup B_{153} \cup B_{663})$,显然,$z_0$ 是 $f^{(1989)}$ 的不动点,如果 z_0 是 f 的 k -周期点,并且

$k < 1989$.那么 $k \mid 1989$.

从而 k 至少是 117,153,663 这三个数中一个数的因数,于是

$$z_0 \in B_{117} \cup B_{153} \cup B_{663}.$$

出现矛盾.因此,$k = 1989$,即 $z_0 \in T$.所以

$$T \supseteq B_{1989} \setminus (B_{117} \cup B_{153} \cup B_{663}),$$

即 $$T = B_{1989} \setminus (B_{117} \cup B_{153} \cup B_{663}).$$

下面我们来计算 B_n 的元素的个数.

因为 $$f^{(n)}(z) = z,$$

而 $$f^{(n)}(z) = z^{m^n},$$

所以 $$z^{m^n} = z,$$

即 $$z^{m^n - 1} = 1.$$

即 z 为 $z^{m^n - 1} - 1 = 0$ 的单位根,$z \in B_n$,因此 B_n 中元素的个数为

$$|B_n| = m^n - 1.$$

最后我们来计算 f - 1989 周期点的总数.

由容斥原理,得

$$\begin{aligned}
&|B_{117} \cup B_{153} \cup B_{663}| \\
&= |B_{117}| + |B_{153}| + |B_{663}| - |B_{117} \cap B_{153}| - |B_{117} \cap B_{663}| - \\
&\quad |B_{153} \cap B_{663}| + |B_{117} \cap B_{153} \cap B_{663}| \\
&= |B_{117}| + |B_{153}| + |B_{663}| - |B_9| - |B_{39}| - |B_{51}| + |B_3| \\
&= m^{117} - 1 + m^{153} - 1 + m^{663} - 1 - m^9 + 1 - m^{39} + 1 - m^{51} \\
&\quad + 1 + m^3 - 1 \\
&= m^{117} + m^{153} + m^{663} - m^9 - m^{39} - m^{51} + m^3 - 1.
\end{aligned}$$

又 $$|B_{1989}| = m^{1989} - 1.$$

所以 f 的 1989 -周期点的总数为

$$m^{1989} - m^{117} - m^{153} - m^{663} + m^{51} + m^{39} + m^9 - m^3.$$

6・106　对于函数 $y = \lg(2\sin x)$,回答下列问题,然后作出它的图像.

(1) 它的定义域是什么?

(2) x 取什么值时,$y = 0$?

(3) x 取什么值时,函数有极大值?极大值等于多少?

(4) 这个函数是否是周期函数?如果是,求出它的最小正周期.

(5) 当 x 从 $0 \to \pi$ 时,y 的变化情况如何?

(6) 作出它的图像.

(中国上海市数学竞赛,1960 年)

[解] (1) 因负数与零没有对数,

故 $2\sin x>0$, 即 $\sin x>0$,

定义域为 $2k\pi<x<(2k+1)\pi$(k 为整数).

(2) 由 $\lg(2\sin x)=0$,

有 $2\sin x=1,\sin x=\frac{1}{2}$,

得 $x=2k\pi+\frac{\pi}{6}$ 或 $x=2k\pi+\frac{5\pi}{6}$(k 为整数).

(3) $2\sin x$ 的极大值是 2,故当 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ 时,y 有极大值 $\lg2$.

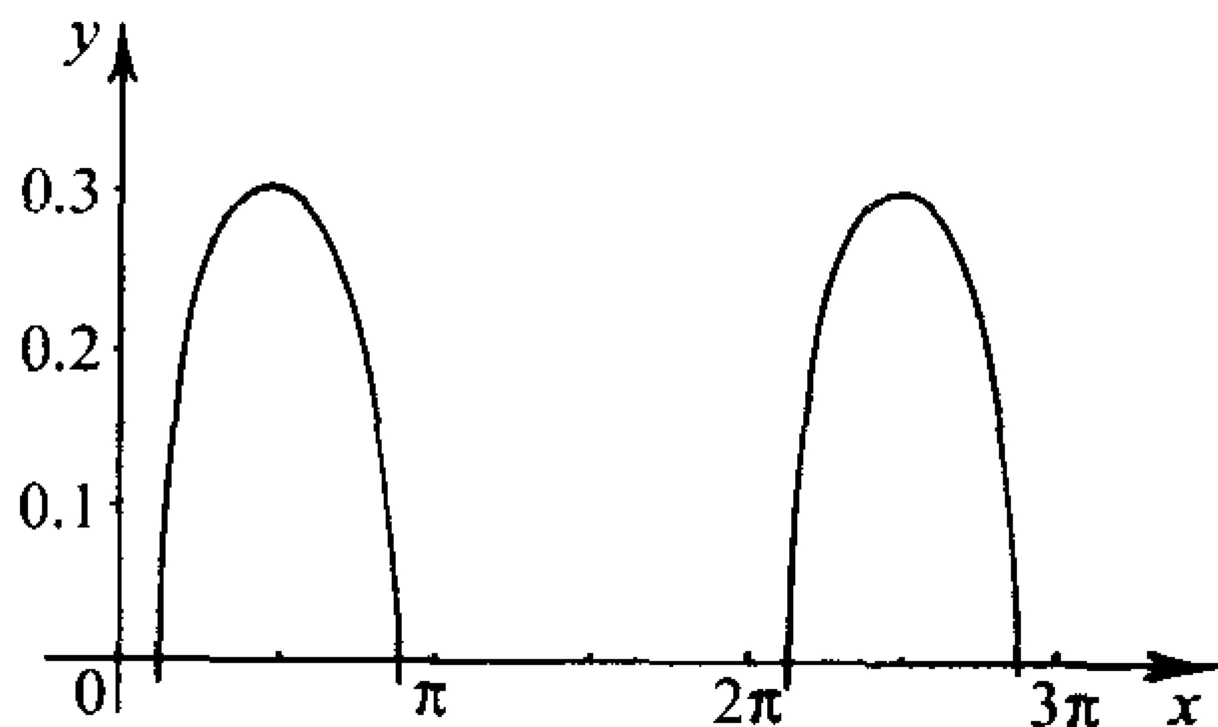
(4) 是周期函数,它的最小正周期是 2π.

(5)

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y	不存在	0	$\frac{1}{2}\lg2$	$\frac{1}{2}\lg3$	$\lg2$	$\frac{1}{2}\lg3$	$\frac{1}{2}\lg2$	0	不存在

当 x 从 $\frac{5\pi}{6}\nearrow\pi$ 时,y 从 $0\searrow-\infty$.

(6)



6·107 已知 振动 $y_1=\sin x,y_2=\sin^2x$;研究它们的合运动 $y=y_1+y_2=\sin x+\sin^2x$ 的性质(y 的值域,极大值,极小值,零点,变

化情况，对称性，周期性，并作图像）.

（中国上海市数学竞赛，1960 年）

[解] (1) 因 $y=\sin x+\sin^2 x\leqslant 2$,

且当 $x=\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi$ 时，(n 为整数)，$y=2$.

又因 $y=\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\geqslant-\frac{1}{4}$,

且当 $x=\left(2n-\frac{1}{6}\right)\pi$ 或 $\left(2n+\frac{7}{6}\right)\pi$ （n 为整数）时，

$y=-\frac{1}{4}$.

所以 y 的值域为$\left[-\frac{1}{4},2\right]$，极大值为 2，极小值为 $-\frac{1}{4}$.

[另外当 $x=2n\pi+\frac{3}{2}\pi$ 时（n 为整数）时，$y=0$，而在此点的两边附近，均有 $y<0$），故 $y=0$ 也是极大值，但不是最大值.]

(2) $y=\sin x(1+\sin x)$

$\sin x=0, x=n\pi$ （n 为整数），

$1+\sin x=0, \sin x=-1$,

$x=\left(2n-\frac{1}{2}\right)\pi$ （n 为整数）.

所以 y 的零点为 $x=n\pi$ 和 $\left(2n-\frac{1}{2}\right)\pi$ （n 为整数）.

(3) 变化情况（n 为整数）

$2n\pi\leqslant x\leqslant 2n\pi+\frac{1}{2}\pi$，$y$ 上升，

$2n\pi+\frac{1}{2}\pi\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{6}$，$y$ 下降，

$2n\pi+\frac{7\pi}{6}\leqslant x\leqslant 2n\pi+\frac{3\pi}{2}$，$y$ 上升，

$2n\pi+\frac{3\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2n\pi+\frac{11}{6}\pi$，$y$ 下降，

$2n\pi+\frac{11}{6}\pi\leqslant x\leqslant 2(n+1)\pi$，$y$ 上升.

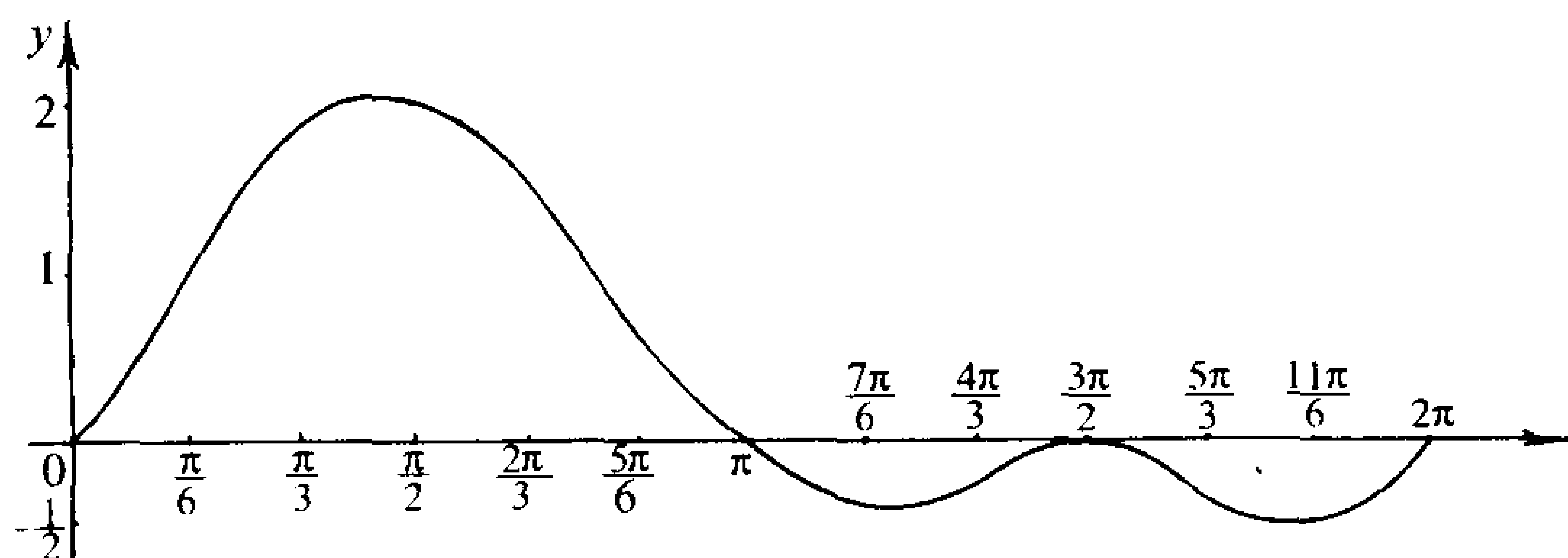
(4) 对称于 $x=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$.

(5) 周期为 2π.

(6) 函数在某些特殊点的值列表如下：

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{2\sqrt{3}+3}{4}$	2	$\frac{2\sqrt{3}+3}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3-2\sqrt{3}}{4}$	0	$\frac{3-2\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0

所以图像如下：



6・108　K 是一个实数，对于任意实数 x，令

$$f(x)=\frac{x^4+kx^2+1}{x^4+x^2+1}.$$

(1) 求 $f(x)$ 的最大值和最小值.

(2) 求所有实数 K，使得对每 3 个实数 a，b 和 c，存在一个三角形，具有边长 $f(a)$，$f(b)$ 和 $f(c)$.

(保加利亚数学奥林匹克，1994 年)

[解]　(1)　将给定函数化为

$$f(x)=\frac{(K-1)x^2}{x^4+x^2+1}+1.$$

由算术—几何平均不等式，

$$x^4+1\geqslant 2x^2,$$

于是，有

$$x^4+x^2+1\geqslant 3x^2,$$

$$0\leqslant\frac{x^2}{x^4+x^2+1}\leqslant\frac{1}{3}.$$

如果 $k\geqslant 1$,那么 $k-1\geqslant 0$,从而有

$$0\leqslant\frac{(K-1)x^2}{x^4+x^2+1}\leqslant\frac{1}{3}(K-1),$$

$$1\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{3}(K+2),$$

所以,当 $K\geqslant 1$ 时,$f(x)$ 的最大值是$\frac{1}{3}(K+2)$,$f(x)$ 的最小值是 1.

如果 $K<1$,那么 $K-1<0$,从而有

$$0\geqslant\frac{(K-1)x^2}{x^4+x^2+1}\geqslant\frac{1}{3}(K-1),$$

$$1\geqslant f(x)\geqslant\frac{1}{3}(K+2).$$

所以,当 $K<1$ 时,$f(x)$ 的最大值是 1,最小值是$\frac{1}{3}(K+2)$.

(2)$f(x)$ 中的实数 K,能使对每三个实数 a,b,c,都存在一个三角形,具有边长 $f(a),f(b)$ 和 $f(c)$,当且仅当 $f(x)$ 中的实数 K 能使

$$2\min f(x)>\max f(x)$$

如果 $K\geqslant 1$,那么上式等价于 $2>\frac{1}{3}(K+2)$,即 $1\leqslant K<4$;如果 $K<1$,那么上式等价于$\frac{2}{3}(K+2)>1$,即 $-\frac{1}{2}<K<1$.故所求的所有实数 K 为 $-\frac{1}{2}<K<4$.

6・109　给定曲线族

$$2(2\sin\theta-\cos\theta+3)x^2-(8\sin\theta+\cos\theta+1)y=0,$$

其中 θ 为参数.求该曲线族在直线 $y=2x$ 上所截得的弦长的最大值.

(中国高中数学联赛,1995 年)

[解]　显然,该曲线族恒过原点,直线 $y=2x$ 也过原点,因此,曲线族在 $y=2x$ 上所截得的弦长取决于曲线族与 $y=2x$ 的另一交点的坐标.

把 $y=2x$ 代入曲线族方程得

$$(2\sin\theta-\cos\theta+3)x^2-(8\sin\theta+\cos\theta+1)x=0.$$

注意到

$$2\sin\theta-\cos\theta+3=\sqrt{5}\sin(\theta-\operatorname{arctg}\frac{1}{2})+3\neq 0,$$

所以当 $x\neq 0$ 时,有

$$x=\frac{8\sin\theta+\cos\theta+1}{2\sin\theta-\cos\theta+3}.$$

令 $$\sin\theta=\frac{2u}{1+u^2},\cos\theta=\frac{1-u^2}{1+u^2},$$

则 $$x=\frac{8u+1}{2u^2+2u+1},$$

$$2xu^2+2(x-4)u+(x-1)=0$$

由 $u\in R$ 知,当 $x\neq 0$ 时,

$$\Delta=[2(x-4)]^2-8x(x-1)$$
$$=4(-x^2-6x+16)\geqslant 0,$$

即 $$x^2+6x-16\leqslant 0 \quad 且\ x\neq 0,$$
$$-8\leqslant x\leqslant 2 \quad 且\ x\neq 0.$$

所以 $$|x|_{\max}=8$$

由 $y=2x$ 得 $|y|_{\max}=16$.

故所求弦长的最大值为 $\sqrt{8^2+16^2}=8\sqrt{5}$.

6·110 对于正整数 a,n,定义

$$F_n(a)=q+r,$$

其中 q,r 为非负整数,$a=q^{n+r}$,且 $0\leqslant r<n$.

求最大的正整数 A,使得存在正整数 n_1,n_2,n_3,n_4,n_5,n_6,对于任意的正整数 $a\leqslant A$,都有

$$F_{n_6}(F_{n_5}(F_{n_4}(F_{n_3}(F_{n_2}(F_{n_1}(a))))))=1.$$

证明你的结论.

(中国高中数学联赛,1998 年)

[解] 将满足条件"存在正整数 $n_1,n_2,\cdots,n_k$,使得只要正整数 $a\leqslant B$,就有

$$F_{n_k}(F_{n_{k-1}}(\cdots(F_{n_1}(a))\cdots))=1"$$

的最大正整数 B 记为 x_k,

显然,本题所求的最大正整数 $A=x_6$.

(1) 先证 $x_1 = 2$.

事实上，$F_2(1) = 1, F_2(2) = 1$，所以 $x_1 \geqslant 2$.

而当 $n_1 \geqslant 3$ 时，$F_{n_1}(2) = 2, F_2(3) = 2, f_1(2) = 2$，所以 $x_1 < 3$.

于是，我们有 $x_1 = 2$.

(2) 设 x_k 已求出，且 x_k 为偶数，显然 $x_k \geqslant x_1 = 2$. 显然，x_{k+1} 满足的必要条件是：存在 n_1，使得只要 $a \leqslant x_{k+1}$，就有 $F_{n_1}(a) \leqslant x_k$.

令 $x_{k+1} = qn_1 + r$，则

$$F_{n_1}(x_{k+1}) = q + r \leqslant x_k,$$

$$x_{k+1} = qn_1 + r \leqslant qn_1 + x_k - q = x_k + q(n_1 - 1).$$

若取 $n_1 = 2$，则 $x_{k+1} = 2x_k \geqslant x_k + 2$. 由此可得

$$q(n_1 - 1) \geqslant 2,$$

$$q \geqslant 1, n_1 \geqslant 2.$$

于是

$$0 < (q-1)n_1 + n_1 - 1 = qn_1 - 1 < x_{k+1}.$$

因此

$$F_{n_1}((q-1)n_1 + n_1 - 1) = q + n_1 - 2 \leqslant x_k.$$

故有

$$q(n_1 - 1) \leqslant \left[\left(\frac{q + n_1 - 1}{2}\right)^2\right] \leqslant \left[\left(\frac{x_k + 1}{2}\right)^2\right]$$

$$= \left[\frac{x_k^2}{4} + \frac{x_k}{2} + \frac{1}{4}\right].$$

因为 x_k 是偶数，所以

$$q(n_1 - 1) \leqslant \frac{x_k^2}{4} + \frac{x_k}{2},$$

又由 $x_{k+1} \leqslant x_k + q(n_1 - 1)$ 得

$$x_{k+1} \leqslant x_k + \frac{x_k^2}{4} + \frac{x_k}{2} = \frac{x_k(x_k + 6)}{4}.$$

另一方面，若取 $n_1 = \frac{x_k}{2} + 2$，则

$$\frac{x_k(x_k + 6)}{4} = \frac{x_k}{2} \cdot n_1 + \frac{x_k}{2}.$$

对每个 $a \leqslant \frac{x_k(x_k+6)}{4}$,令 $a = qn_1 + r$,那么:

$$q = \frac{x_k}{2}, r \leqslant \frac{x_k}{2};$$

或者

$$q \leqslant \frac{x_k}{2} - 1, r \leqslant n_1 - 1 = \frac{x_k}{2} + 1.$$

以上两种情况下,都有 $q + r \leqslant x_k$,即 $F_{n_1}(a) \leqslant x_k$.

综上所述,我们有

$$x_{k+1} = \frac{x_k(x_k+6)}{4}.$$

因为 x_k 是偶数,所以 $x_k + 6$ 也是偶数,并且 x_k 和 $x_k + 6$ 中必有一个是 4 的倍数,从而 $x_k(x_k + 6)$ 是 8 的倍数,故得 x_{k+1} 是偶数.

这样,根据数学归纳法原理,我们证明了递推关系式:

$$x_1 = 2, x_{k+1} = \frac{x_k(x_k+6)}{4}, (k = 1,2,\cdots\cdots)$$

由这个关系式不难通过计算逐次得到

$x_2 = 4, x_3 = 10, x_4 = 40, x_5 = 460, x_6 = 53590.$

故所求的最大正整数 $A = 53590$.

6·111 给定正整数 n,已知用克数都是正整数的 k 块砝码和一台天平可以称出质量为 $1,2,3,\cdots n$ 克的所有物品.

(1) 求 k 的最小值 $f(n)$.

(2) 当且仅当 n 取什么值时,上述 $f(n)$ 块砝码的组成方式是惟一确定的?并证明你的结论.

(中国高中数学联赛,1999 年)

[解] (1) 设这 k 块砝码的质量数分别为 $a_1, a_2, \cdots, a_k$,且 $1 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_k, a_i \in Z, 1 \leqslant i \leqslant k$. 因为天平两端都可以放砝码,所以可称质量为

$$\sum_{i=1}^{k} x_i a_i, x_i \in \{-1,0,1\}.$$

若利用这 k 块砝码可以称出质量为 $1,2,\cdots,n$ 的物品,则上述表示中包含有 $1,2,\cdots,n$. 由对称性易知,也包含有 $-1,-2,\cdots,-n$. 因此

$$\left\{\sum_{i=1}^{k}x_ia_i \mid x_i\in\{-1,0,1\}\right\}\supseteq\{0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm n\}.$$

由于在集合 $\left\{\sum_{i=1}^{k}x_ia_i \mid x_i\in\{-1,0,1\}\right\}$ 中的元素个数不超过 3^k 个，而在集合 $\{0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm n\}$ 中共有 $2n+1$ 个元素，因此

$$3^k\geqslant 2n+1,$$

$$n\leqslant\frac{3^k-1}{2}.$$

若 $\frac{3^{m-1}-1}{2}<n\leqslant\frac{3^m-1}{2}$，$(m\geqslant1, m\in Z)$，则 $k\geqslant m$.

另一方面，若 $\frac{3^{m-1}-1}{2}<n\leqslant\frac{3^m-1}{2}$，$(m\geqslant1, m\in Z)$，则我们可以取 m 块砝码：$a_1=1, a_2=3,\cdots,a_m=3^{m-1}$ 来称出 $1,2,\cdots,n$ 克的所有物品.

事实上，由数的三进制表示可知，对任意 $0\leqslant p\leqslant 3^m-1$，都存在 $y_i\in\{0,1,2\}$，$1\leqslant i\leqslant m$，使得

$$p=\sum_{i=1}^{m}y_i3^{i-1},$$

从而有

$$p-\frac{3^m-1}{2}=\sum_{i=1}^{m}y_i\cdot3^{i-1}-\sum_{i=1}^{m}3^{i-1}=\sum_{i=1}^{m}(y_i-1)3^{i-1},$$

令 $l=p-\frac{3^m-1}{2}$，则 $-\frac{3^m-1}{2}\leqslant l\leqslant\frac{3^m-1}{2}$；

令 $x_i=y_i-1$，则 $x_i\in\{-1,0,1\}$，于是，我们有

$$l=\sum_{i=1}^{m}x_i\cdot3^{i-1}.$$

因为 $n\leqslant\frac{3^m-1}{2}$，所以对任意的 $l\in\{1,2,\cdots,n\}$，都存在 x_i，$1\leqslant i\leqslant m$，使得

$$l=\sum_{i=1}^{m}x_i\cdot3^{i-1}=\sum_{i=1}^{m}x_ia_i.$$

这就是说，用质量为 $1,3,\cdots,3^{m-1}$ 的 m 个砝码，可以称出质量为 1，2，

$\cdots,n$ 的所有物品，其中 $n\leqslant\frac{3^m-1}{2}$.

代数卷

综上所述，可知 k 的最小值 $f(n)=m$，其中 m 满足不等式 $\frac{3^{m-1}-1}{2}<n\leqslant\frac{3^m-1}{2}$.

(2) 先证明当 $\frac{3^{m-1}-1}{2}<n<\frac{3^m-1}{2}$ 时，$f(n)$ 块砝码的组成方式除了在(1)中已经说明的一种方式：

$a_1=1,a_2=3,\cdots,a_m=3^{m-1}$ 以外，至少还有一种方式：

$a_1=1,a_2=3,\cdots,a_{m-1}=3^{m-2},a_m=3^{m-1}-1$.

事实上，若 $1\leqslant l\leqslant\frac{3^{m-1}-1}{2}$，则由(1)可知，存在 $x_i\in\{-1,0,1\}$，使得

$$\begin{aligned}l&=\sum_{i=1}^{m-1}x_i\cdot 3^{i-1}\\&=\sum_{i=1}^{m-1}x_i\cdot 3^{i-1}+0\cdot(3^{m-1}-1).\end{aligned}$$

若 $\frac{3^{m-1}-1}{2}<l\leqslant n<\frac{3^m-1}{2}$，则 $l+1\leqslant\frac{3^m-1}{2}$，

于是由(1)知，存在 $x_i\in\{-1,0,1\}$，使得

$$l+1=\sum_{i=1}^{m}x_i\cdot 3^{i-1},$$

并且必有 $x_m=1$. 于是

$$l=\sum_{i=1}^{m-1}x_i\cdot 3^{i-1}+1\cdot(3^{m-1}-1).$$

因此，用砝码 $a_1=1,a_2=3,\cdots,a_{m-1}=3^{m-2},a_m=3^{m-1}-1$ 能称出质量为 $1,2,\cdots,n$ 克的所有物品. 从而此时 $f(n)$ 块砝码的组成方式不惟一.

再证明当 $n=\frac{3^m-1}{2}$ 时，$f(n)$ 块砝码的组成方式是惟一的，即 $a_i=3^{i-1}(1\leqslant i\leqslant m)$.

事实上，若 m 块砝码 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 可以称出 $1,2,\cdots,n=\frac{3^m-1}{2}$

克重的所有物品,则对每个 $-\frac{3^m-1}{2}\leqslant l\leqslant\frac{3^m-1}{2}$,都有

$$l=\sum_{i=1}^{m}x_ia_i,x_i\in\{-1,0,1\}.$$

因此

$$\left\{\sum_{i=1}^{m}x_ia_i\mid x_i\in\{-1,0,1\}\right\}\supseteq\left\{0,\pm1,\cdots,\pm\frac{3^m-1}{2}\right\},$$

注意到上式左边集合中最多有 3^m 个元素,而右边集合中恰有 3^m 个元素,于是,我们有

$$\left\{\sum_{i=1}^{m}x_ia_i\mid x_i\in\{-1,0,1\}\right\}=\left\{0,\pm1,\cdots,\pm\frac{3^m-1}{2}\right\},$$

并且 $\sum_{i=1}^{m}a_i=\frac{3^m-1}{2}$.

将集合的每一元素都加上 $\frac{3^m-1}{2}$,得

$$\left\{\sum_{i=1}^{m}x_ia_i+\sum_{i=1}^{m}a_i\mid x\in\{-1,0,1\}\right\}=\{0,1,2,\cdots,3^m-1\}.$$

即

$$\left\{\sum_{i=1}^{m}y_ia_i\mid y_i\in\{0,1,2\}\right\}=\{0,1,2,\cdots,3^m-1\}.$$

并且对于每个 $l(0\leqslant l\leqslant3^m-1)$,都可惟一地表示成 $l=\sum_{i=1}^{m}y_ia_i$. 不妨设 $a_1<a_2<\cdots<a_m$. 因此 a_1 是集合 $\{0,1,2,\cdots,3^m-1\}$ 中的最小正整数,即 $a_1=1$. 设 $a_1=1,a_2=3,\cdots,a_s=3^{s-1}$. 则 $\sum_{i=1}^{s}a_i=3^s-1$,从而 a_{s+1} 应是大于 3^s-1 的最小正整数,因此 $a_{s+1}=3^s$.

由数学归纳原理可知:$a_i=3^{i-1},1\leqslant i\leqslant m$.

综合以上可知,当且仅当 $n=\frac{3^m-1}{2}$ 时,上述 $f(n)$ 块砝码的组成方式是惟一确定的.

6·112　大圆酒杯的轴截口为函数 $y=x^4$ 的图像,往酒杯里放一颗樱桃——半径为 r 的小球. 当半径 r 最大为多少时,樱桃可接触到杯底的最低点(换言之,当 r 最大为多少时,位于区域 $y\geqslant x^4$ 中的半径为

r 的圆可以经过原点)?

(第 57 届莫斯科数学奥林匹克,1995 年)

[解] 原问题等价于:经过原点的圆

$$(y-r)^2+x^2=r^2$$

完全位于区域 $y \geqslant x^4$ 中,求 r 的最大值.

因此,当 $0 \leqslant x \leqslant r$ 时,我们有

$$r-\sqrt{r^2-x^2} \geqslant x^4. \quad ①$$

令 $x=r\sin\theta$. ① 式化为:当 $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ 时,有

$$1-\cos\theta \geqslant r^3\sin^4\theta. \quad ②$$

当 $\theta=0$ 时,② 式显然成立. 当 $0<\theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ 时,② 式化为

$$r^3 \leqslant \frac{1}{\sin^2\theta(1+\cos\theta)} \quad ③$$

由于

$$\sin^2\theta(1+\cos\theta)=8\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^4\frac{\theta}{2}$$

$$\leqslant 4\left(\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}}{3}\right)^3$$

$$=\frac{32}{27}.$$

因此 $\quad r^3 \leqslant \frac{27}{32}$,

$$r \leqslant \sqrt[3]{\frac{27}{32}}=\frac{3}{4}\sqrt[3]{2}.$$

所求 r 的最大值为 $\frac{3}{4}\sqrt[3]{2}$.

6・113 设序列 $a(n)$, $n=1,2,3,\cdots$,定义如下:

$a(1)=0$,并且当 $n>1$ 时,

$$a(n)=a\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right)+(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

(a) 求出 $a(n)$ 在 $n<1996$ 范围内的最大值和最小值,并给出取得这些极值的全部的 n 的值.

(b) 在 $n<1996$ 范围内,值为 0 的 $a(n)$ 有多少项?

(第 37 届国际数学奥林匹克预选题,1996 年)

[解] 由 $n>1$ 时

$$a(n)=a\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right)+(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}},$$

可得 $n\geqslant 1$ 时

$$\begin{aligned}a(2n)&=a(n)+(-1)^{n(2n+1)}\\&=a(n)+(-1)^{n}.\\a(2n+1)&=a(n)+(-1)^{(2n+1)(n+1)}\\&=a(n)+(-1)^{n+1}.\end{aligned}$$

设 $n\geqslant 2$ 时,n 在二进制表示下为

$$(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_l)_2,$$

其中 $\alpha_i=0$ 或 $1,i=1,2,\cdots,l$. 考虑 $l-1$ 个数码对

$$(\alpha_1,\alpha_2),(\alpha_2,\alpha_3),\cdots,(\alpha_{l-1},\alpha_l).$$

设其中满足 $\alpha_k=\alpha_{k+1}$ 的有 $f(n)$ 个,满足 $a_k\neq a_{k+1}$ 的有 $g(n)$ 个,$k=1,2,\cdots,l-1$. 显然,

$$f(n)+g(n)=l-1.$$

下面用归纳法证明:$n\geqslant 2$ 时,有

$$a(n)=f(n)-g(n) \qquad ①$$

事实上,$a(2)=a(1)+(-1)^1=-1$.

$$a(3)=a(1)+(-1)^2=1.$$

又 $f(2)=0,g(2)=1,f(3)=1,g(3)=0$. 因此当 $n=2,3$ 时,① 式成立.

假设对于某个 $k\geqslant 3$. 当 $2\leqslant n\leqslant k$ 时,① 式成立. 考虑 $n=k+1$ 时的情况.

设 $k+1=(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_l)_2,l\geqslant 3$. 则

$$\begin{aligned}a(k+1)&=a((\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_l)_2)\\&=a((\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{l-1})_2)+(-1)^{(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{l-1})_2+\alpha_l}\\&=f((\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{l-1})_2)-g((\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{l-1})_2)\\&\quad+(-1)^{\alpha_{l-1}+\alpha_l}\end{aligned}$$

若 $\alpha_{l-1}=\alpha_l$,则

$$f(k+1)=f((\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{l-1})_2)+1,$$

$$g(k+1)=g((\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{l-1})_2),$$

于是

$$a(k+1)=f((\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{l-1})_2)-g((\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{l-1})_2)+1$$
$$=f(k+1)-g(k+1).$$

若 $\alpha_{l-1}=\alpha_l$,则

$$f(k+1)=f((\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{l-1})_2)$$
$$g(k+1)=g((\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{l-1})_2)+1$$

于是
$$a(k+1)=f((\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{l-1})_2)-g((\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{l-1})_2)-1$$
$$=f(k+1)-g(k+1)$$

因此 $n=k+1$ 时 ① 式也成立.

(a) 因为 $(1995)_{10}=(11111001011)_2$, 而由 ① 式知当且仅当 $n(1111111111)_2=1023$ 时,$a(n)$ 取最大值 $9\cdot n=(10101010101)_2=1365$ 时,$a(n)$ 取最小值 -10.

(b) 设 $n=(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_l)_2,n\geqslant 2$. 则当且仅当 $f(n)=g(n)$ 时, $a(n)=0$. 此时

$$l-1=f(n)+g(n)=2f(n)$$

为偶数,从而 l 是奇数.

当 $2\leqslant n\leqslant 1995$ 时,l 只能取 3,5,7,9,11.

对于固定的 $l\in\{3,5,7,9,11\}$. 当 $2^{l-1}\leqslant n\leqslant 2^l-1$ 时,n 在二进制表示下为 $(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_l)_2$, 且 $\alpha_1=1$. 故当且仅当恰有 $\frac{l-1}{2}$ 个数码对 (α_k,α_{k+1}) 满足 $\alpha_k=\alpha_{k+1}$ 时 $a(n)=0$. 因此,$2^{l-1}\leqslant n\leqslant 2^l-1$ 时,值为0的 $a(n)$ 共有 $C_{l-1}^{\frac{l-1}{2}}$ 项. 于是,当 $2\leqslant n\leqslant 2^{11}-1$ 时,值为0的 $a(n)$ 共有

$$C_2^1+C_4^2+C_6^3+C_8^4+C_{10}^5=350(\text{项}).$$

当 $1996\leqslant n\leqslant 2^{11}-1$ 时,易知只有取

$(11111101010)_2,(11111011010)_2,(11111010110)_2,$

$(11111010010)_2,(11111010100)_2.$

这 5 个值时,$a(n)=0$.

故当 $2\leqslant n\leqslant 1995$ 时,值为 0 的 $a(n)$ 项有 345 项. 又 $a(1)=0$, 因此,当 $n<1996$ 时,值为 0 的 $a(n)$ 共 346 项.

6・114　设 $P(x,y)$ 为 $|5x+y|+|5x-y|=20$ 上的一点，求 x^2-xy+y^2 的最大、最小值.

（第 3 届中国澳门数学奥林匹克，1993 年）

［解］　将 $|5x+y|+|5x-y|=20$ 两边平方，化简得

$$25x^2+y^2+|25x^2-y^2|=200.$$

若 $|5x|\geqslant|y|$，则得

$$50x^2=200, x=\pm 2, |y|\leqslant 10.$$

若 $|5x|\leqslant|y|$，则得

$$2y^2=200, y=\pm 10, |5x|\leqslant 10, |x|\leqslant 2.$$

故方程图像为矩形 $ABCD$，其中

$$A(2,-10), B(2,10), C(-2,10), D(-2,-10).$$

由对称性仅需在 AB、BC 边考虑，并易见

在 AB 上，$Q=x^2-xy+y^2=4-2y+y^2$，

$$3\leqslant Q\leqslant 124;$$

在 BC 上，$84\leqslant Q\leqslant 124$.

$Q_{最大}=124, Q_{最小}=3$.

6・115　设 $r_1,r_2,\cdots,r_m$ 是 m 个给定的正有理数，使 $\sum_{k=1}^{m} r_k=1$，对每一个正整数 n，定义函数 f 为

$$f(n)=n-\sum_{k=1}^{m}[r_k n],$$

求 $f(n)$ 的最小值和最大值.

（第 28 届加拿大数学奥林匹克，1996 年）

［解］　由已知

$$f(n)=\sum_{k=1}^{m}(r_k n-[r_k n]).$$

因为　$0\leqslant r_k n-[r_k n]<1$，对所有 $1\leqslant k\leqslant m$，

所以　$0\leqslant f(n)\leqslant m-1$.

下面证明上式两边的界是可以达到的.

对 $1\leqslant k\leqslant m$，设 $r_k=\dfrac{a_k}{b_k}$. 记 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 的最小公倍数为 $l=[b_1,b_2,\cdots,b_m]=b_k c_k$，其中 a_k,b_k,c_k 都是整数，因此

$$f(l)=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{a_k}{b_k}\cdot b_kc_k-\left[\frac{a_k}{b_k}\cdot b_kc_k\right]\right)=0,$$

且

$$\begin{aligned}f(l-1)&=\sum_{k=1}^{m}(a_kc_k-r_k-[a_kc_k-r_k])\\&=\sum_{k=1}^{m}(1-r_k)\\&=m-1.\end{aligned}$$

故 $f(n)$ 的最小值为 0,最大值为 $m-1$.

6·116　设 $A=\{1,2,3,\cdots,17\}$,对于映射 $f:A\to A$,记 $f^{[1]}(x)=f(x),f^{[k+1]}(x)=f(f^{[k]}(x)),k\in N$.

设从 A 到 A 的一一映射 f 满足条件:存在自然数 M,使得:

(1) 当 $m<M,1\leqslant i\leqslant 16$ 时,有

$$f^{[m]}(i+1)-f^{[m]}(i)\not\equiv\pm 1\pmod{17},$$

$$f^{[m]}(1)-f^{[m]}(17)\not\equiv\pm 1\pmod{17};$$

(2) 当 $1\leqslant i\leqslant 16$ 时,有

$$f^{[M]}(i+1)-f^{[M]}(i)\equiv 1\text{ 或 }-1\pmod{17},$$

$$f^{[M]}(1)-f^{[M]}(17)\equiv 1\text{ 或 }-1\pmod{17}.$$

试对满足上述条件的一切 f,求所对应的 M 的最大可能值,并证明你的结论.

(中国中学生数学冬令营,1997年)

[解]　所求 M 的最大可能值 $M_0=8$.

先证 $M_0\geqslant 8$.

事实上,可令映射　$f(i)\equiv 3i-2\pmod{17}$,

其中 $i\in A,f(i)\in A$.

若 $f(i)\equiv f(j)\pmod{17}$,则

$$3i-2\equiv 3j-2\pmod{17}$$

$$i\equiv j\pmod{17},$$

所以　$i=j$.

映射 f 为从 A 到 A 的一一映射.

又由映射 f 的定义,易知

$$f^{[n]}(i)\equiv 3^n\cdot i-3^n+1\pmod{17}.$$

若 $f^{[M]}(i+1)-f^{[M]}(i)\equiv 1$ 或 $-1 \pmod{17}$,

则 $[3^M(i+1)-3^M+1]-[3^M\cdot i-3^M+1]\equiv 1$ 或 $-1,\pmod{17}$,

即 $3^M\equiv 1$ 或 $-1\pmod{17}$.

同时,若 $f^{[M]}(-1)-f^{[M]}(17)\equiv 1$ 或 $-1\pmod{17}$

则 $1-[3^M\times 17-3^M+1]\equiv 1$ 或 $-1\pmod{17}$

即 $3^M\equiv 1$ 或 $-1\pmod{17}$.

但 $3^1\equiv 3,3^2\equiv 9,3^3\equiv 10,3^4\equiv 13,3^5\equiv 5,3^6\equiv 15,3^7\equiv 11,$ $3^8\equiv -1\pmod{17}$, 故得

$$M_0\geqslant 8.$$

再证 $M_0\leqslant 8$.

任作一个凸 17 边形 $A_1A_2\cdots A_{17}$,记作 G.我们先规定,当 $i+1=18$ 时,取 $i+1$ 为 1;当 $i-1=0$ 时,取 $i-1$ 为 17.然后按如下规则连线段:若 $1\leqslant m<M_0$, $f^{[m]}(i)=a$, $f^{[m]}=b$ 时,就连线段 A_aA_b.

显然所连线段必为 G 的对角线.可以证明:所连的对角线没有重复.事实上,若有两条连线相同,即存在 i,j 及 $M_0>p>q>0$,使

$$\begin{cases}f^{[p]}(i)=f^{[q]}(j),\\ f^{[p]}(i+1)=f^{[q]}(j+1)\text{ 或 }f^{[p]}(i+1)=f^{[q]}(j-1).\end{cases}$$

于是有

$$\begin{cases}f^{[p-q]}(i)=j,\\ f^{[p-q]}(i+1)=j+1\text{ 或 }j-1.\end{cases}$$

注意到 $M_0>p-q>0$,这显然与 M_0 的定义矛盾.

故所连对角线没有重复.

但 G 共有 17×7 条对角线,所以

$$17\times(M_0-1)\leqslant 17\times 7,$$

$$M_0\leqslant 8.$$

综上所述,所求的 M 的最大可能值 $M_0=8$.

6·117 设实数 $x_1,x_2,\cdots,x_{1997}$ 满足如下两个条件:

(1) $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\leqslant x_i\leqslant\sqrt{3}\quad(i=1,2,\cdots,1997)$;

(2) $x_1+x_2+\cdots+x_{1997}=-318\sqrt{3}$.

试求：$x_1^{12}+x_2^{12}+\cdots+x_{1997}^{12}$ 的最大值，并说明理由.

（中国中学生数学冬令营，1997 年）

[解] 满足题设条件的任何一组 $x_1,x_2,\cdots,x_{1997}$ 之中，若有这样的 x_i 和 x_j：

$$\sqrt{3}>x_i\geqslant x_j>-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

我们记 $x_i+x_j=2m,$

$x_i-x_j=2h.$

则 $x_i=m+h,x_j=m-h,$

$$x_i^{12}+x_j^{12}=(m+h)^{12}+(m-h)^{12}$$
$$=2\sum_{0\leqslant k=2l\leqslant 12}C_{12}^k m^{12-k}h^k.$$

在和值 $x_i+x_j=2m$ 不变的情况下，$x_i^{12}+x_j^{12}$ 随 $h>0$ 的增大而增大. 约定取

$$h=\min\left\{\sqrt{3}-m,m-\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\},$$

则 $x_i^{12}+x_j^{12}$ 达到最大值.

因此，所求的 12 次方幂和的最大值只能在以下情形达到：至多只有一个变元取值于 $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{3}\right)$，其余变元取值都是 $\sqrt{3}$ 或 $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

设有 u 个变元取值为 $-\frac{1}{\sqrt{3}}$，v 个变元取值为 $\sqrt{3}$，w 个变元取值于 $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{3}\right)$. 显然

$$w=0 \text{ 或 } 1.$$

当 $w=1$ 时，设这个变元的取值为 t. 于是，我们有

$$\begin{cases}u+v+w=1997, & ①\\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot u+\sqrt{3}v+tw=-318\sqrt{3}. & ②\end{cases}$$

② $\times\sqrt{3}+$ ① 得：

$$4v+(\sqrt{3}t+1)w=1043.$$

因为 $(\sqrt{3}t+1)w=1043-4v$ 是整数，并且

$$0 \leqslant (\sqrt{3}t+1)w < 4,$$

所以$(\sqrt{3}t+1)w$是1043除以4所得的余数.由此可得

$$w=1, t=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

代入①和②,解得

$$u=1736, v=260.$$

因此,$x_1^{12}+x_2^{12}+\cdots+x_{1997}^{12}$的最大值为

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{12}\cdot u+(\sqrt{3})^{12}\cdot v+t^{12}$$

$$=\frac{1736+4096}{729}+729\times 260$$

$$=189548.$$

6·118 $x_1, x_2, \cdots, x_{1993}$满足

$$|x_1-x_2|+|x_2-x_3|+\cdots+|x_{1992}-x_{1993}|=1993,$$

$$y_k=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}, (k=1,2,\cdots,1993)$$

则$|y_1-y_2|+|y_2-y_3|+\cdots+|y_{1992}-y_{1993}|$

的最大可能值是多少?

(第3届中国澳门数学奥林匹克,1993年)

[解]

$$|y_k-y_{k+1}|=\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}-\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}}{k+1}\right|$$

$$=\frac{1}{k(k+1)}|(x_1-x_{k+1})+(x_2-x_{k+1})+\cdots+(x_k-x_{k+1})|$$

$$\leqslant\frac{1}{k(k+1)}(|x_1-x_2|+2|x_2-x_3|+\cdots+k|x_k-x_{k+1}|)$$

$$=\frac{1}{k(k+1)}\sum_{i=1}^{k}i|x_i-x_{i+1}|,$$

于是 $|y_1-y_2|+|y_2-y_3|+\cdots+|y_{1992}-y_{1993}|$

$$=\sum_{k=1}^{1992}|y_k-y_{k+1}|$$

$$= \sum_{k=1}^{1992} \sum_{i=1}^{k} \frac{i}{k(k+1)} | x_i - x_{i+1} |$$

$$= \sum_{i=1}^{1992} \sum_{k=1}^{1992} \frac{i}{k(k+1)} | x_i - x_{i+1} |$$

$$= \sum_{i=1}^{1992} i\left[\frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(i+1)(i+2)} + \cdots + \frac{1}{1992 \cdot 1993}\right] \cdot | x_i - x_{i+1} |$$

$$= \sum_{i=1}^{1992} i\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{1993}\right) \cdot | x_i - x_{i+1} |$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{1992} \left(1 - \frac{1}{1993}\right) \cdot | x_i - x_{i+1} |$$

$$= \left(1 - \frac{1}{1993}\right) \cdot \sum_{i=1}^{1992} | x_i - x_{i+1} |$$

$$= \left(1 - \frac{1}{1993}\right) \cdot 1993$$

$$= 1992.$$

另一方面,若令 $x_1 = t + 1993, x_2 = x_3 = \cdots = x_{1993} = t$,

则 $| y_k - y_{k+1} | = \frac{i}{k(k+1)} \cdot | x_1 - x_2 | = \frac{1993}{k(k+1)}$

$$\sum_{k=1}^{1992} | y_k - y_{k+1} | = 1993 \cdot \sum_{k=1}^{1992} \frac{1}{k(k+1)} = 1992.$$

故 $\sum_{k=1}^{1992} | y_k - y_{k+1} |$ 的最大值为 1992.

6·119　每一个大于 2 的自然数 n 都可以表示成若干个两两不等的自然数的和.设个数的最大值为 $A(n)$.求 $A(n)$(用 n 表示).

(德国数学奥林匹克,1993 年)

[解]　设 $n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{A(n)}, a_1 < a_2 < \cdots < a_{A(n)}$ 均为自然数.

显然,$a_1 \geqslant 1, a_2 \geqslant 2, \cdots, a_{A(n)} \geqslant A(n)$,因此,$n \geqslant 1 + 2 + \cdots + A(n) = \frac{1}{2} A(n)(A(n) + 1)$,　　(*)

从而,自然数 $A(n) \leqslant \left[\frac{\sqrt{8n+1} - 1}{2}\right]$.

又 $n=1+2+\cdots+\left(\left[\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}\right]-1\right)$

$$+\left(\left[\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}\right]+a\right),$$

其中 a 为整数.

由(*)可知 $a\geqslant 0$.所以

$$A(n)\geqslant\left[\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}\right].$$

综上所述,$A(n)=\left[\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}\right]$.

6·120 设 N 是自然数集,R 是实数集,S 是满足以下两个条件的函数 $f:N\to R$ 的集合:

(1) $f(1)=2$;

(2) $f(n+1)\geqslant f(n)\geqslant\frac{n}{n+1}f(2n),n=1,2,\cdots$

试求最小的自然数 M,使得对任何 $f\in s$ 及任何 $n\in N$,都有

$$f(n)<M.$$

(中国国家队选拔赛,1996 年)

[解] 首先估计 $|f(n)|$ 的上界.

鉴于 f 的单调性,只需考察 $|f(2^k)|$ 的上界.由已知条件(1)和(2)得

$$\begin{aligned}f(2^{k+1})&\leqslant\left(1+\frac{1}{2^k}\right)f(2^k)\\&\leqslant\left(1+\frac{1}{2^k}\right)\left(1+\frac{1}{2^{k-1}}\right)f(2^{k-1})\\&\cdots\\&\leqslant 2\lambda_k,\end{aligned}$$

其中 $\lambda_k=\left(1+\frac{1}{2^k}\right)\left(1+\frac{1}{2^{k-1}}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)(1+1)$.

通过对前几个 λ_k 的计算,我们猜测

$\lambda_k<5,k=1,2,\cdots$.

为了证明这一猜测,我们来证明一个加强命题:

$$\lambda_k\leqslant 5\left(1-\frac{1}{2^k}\right),k=2,3,\cdots$$

事实上，$k=2$ 时，加强命题显然成立，因为

$$\lambda_2=(1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)=5\left(1-\frac{1}{2^2}\right).$$

假设已证得 $\lambda_m\leqslant 5\left(1-\frac{1}{2^m}\right)$，则

$$\begin{aligned}\lambda_{m+1}&=\lambda_m\cdot\left(1+\frac{1}{2^{m+1}}\right)\\&\leqslant 5\left(1-\frac{1}{2^m}\right)\left(1+\frac{1}{2^{m+1}}\right)\\&=5\left(1-\frac{1}{2^m}+\frac{1}{2^{m+1}}-\frac{1}{2^{2m+1}}\right)\\&=5\left(1-\frac{1}{2^{m+1}}-\frac{1}{2^{2m+1}}\right)\\&<5\left(1-\frac{1}{2^{m+1}}\right).\end{aligned}$$

至此，我们已证明，对任何 $k\in N$，必有

$$\lambda_k<5.$$

对任何 $f\in s$ 和任何 $n\in N$，存在自然数 k，使 $n<2^{k+1}$，因而 $f(n)\leqslant f(2^{k+1})\leqslant 2\lambda_k<10$.

为了证明题目所求的最小自然数 $M=10$，还需构造一个适合题目条件的函数 f_0，该函数在某处的值大于 9.

注意到 $2\lambda_5>9$，我们定义一个函数 $f_0:N\to R$ 如下：

$$\begin{cases}f_0(1)=2\\f_0(n)=2\lambda_k,\text{其中 }2^k<n\leqslant 2^{k+1},k=0,1,2,\cdots\lambda_0=2.\end{cases}$$

对任何自然数 n，显然有

$$f_0(n+1)\geqslant f_0(n).$$

尚需验证

$$f_0(n)\geqslant\frac{n}{n+1}f_0(2n).$$

设 $k\in N\cup\{0\}$，且 $2^k<n\leqslant 2^{k+1}$，则

$$2^{k+1}<2n\leqslant 2^{k+2}.$$

于是，$f_0(2n)=2\lambda_{k+1}=\left(1+\frac{1}{2^{k+1}}\right)\cdot 2\lambda_k\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)f_0(n)$

即 $$f_0(n) \geqslant \frac{n}{n+1} f_0(2n).$$

因此 $f_0 \in s$.

因为 $f_0(2^6) = 2\lambda_5 > 9$,所以题目所求的最小自然数 $M = 10$.

6·121 设 $a_1, a_2, \cdots, a_{10}$ 是任意10个两两不同的自然数,它们的和为 1995. 试求

$$a_1 a_2 + a_2 a_3 + \cdots + a_9 a_{10} + a_{10} a_1$$

的最小值.

(中国中学生数学冬令营,1995 年)

[**解**] 将10个自然数按顺时针方向依次写在一个圆周上,于是题中的表达式就是每两个相邻之数的乘积的总和,以下简称为"和值".

将10个两两不同的自然数的和记为 N,则 $N \geqslant 55$. 将和为 N 的任意10个两两不同的自然数所对应的"和值"的最小值记为 $S(N)$.

先考察 $N = 55$ 的情形.

显然,此时 $\{a_1, a_2, \cdots, a_{10}\} = \{1, 2, \cdots, 10\}$.

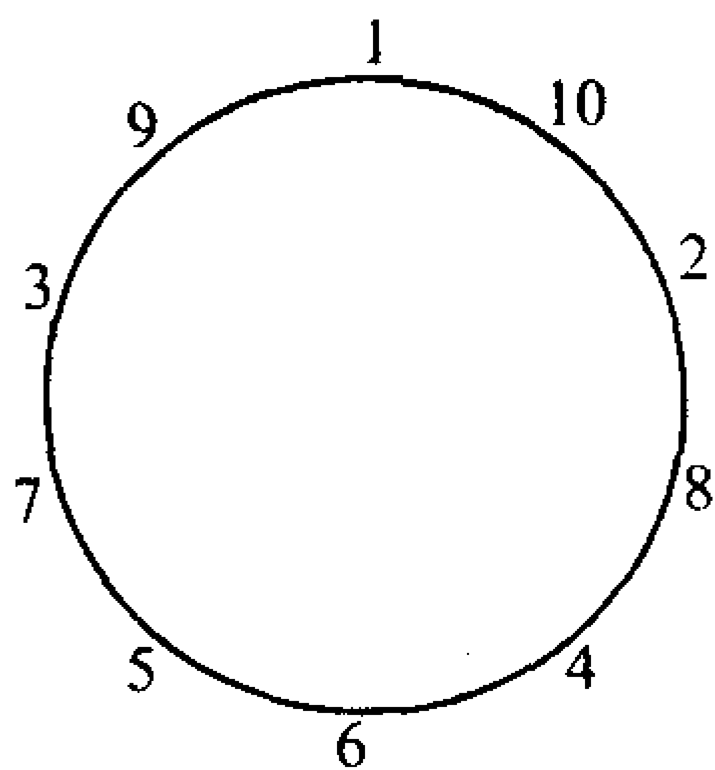


图 1

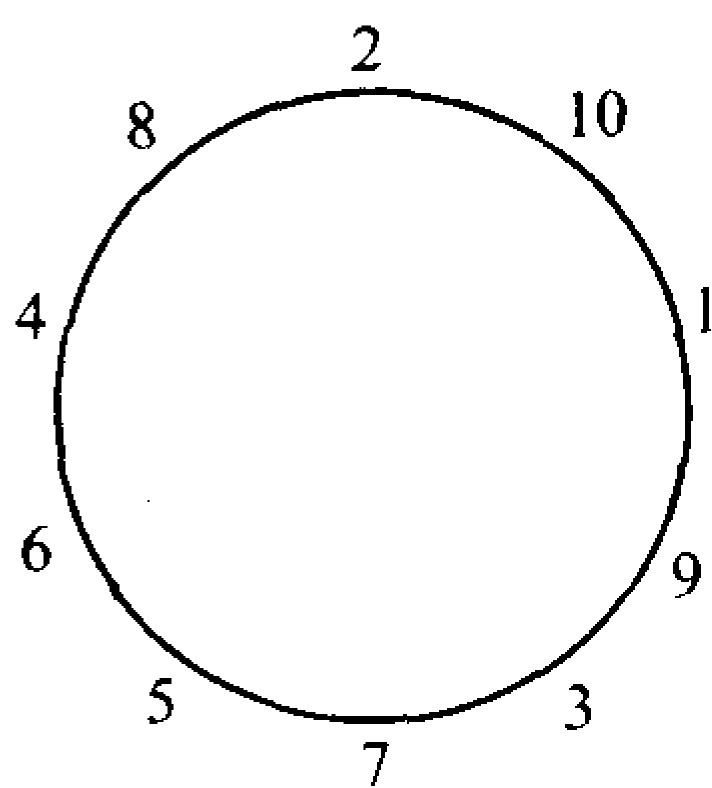


图 2

我们来证明,当10个数如图1或图2排列时,"和值"最小.

设这10个数任意地排列在圆周上,且不同于图1和图2,不失一般性. 可设 $a_1 = 10$(如图3)如果 $a_2 \neq 1$ 而 $a_j = 1, j \neq 2$. 我们就将$(a_2, a_3, \cdots, a_j)$这一段整个地按倒过来的顺序排列,变为$(a_j, a_{j-1}, \cdots, a_2)$,并保持其余各数不动,得到图4,并把这个过程称为一次操作. 操作前后,"和值"的变化是

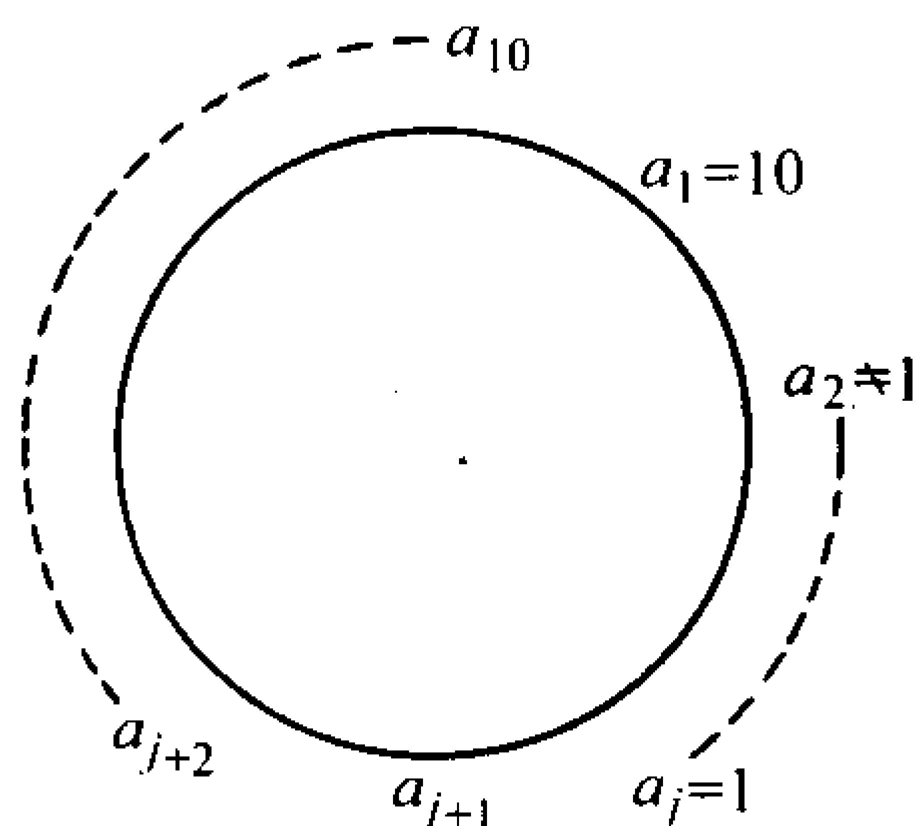


图 3

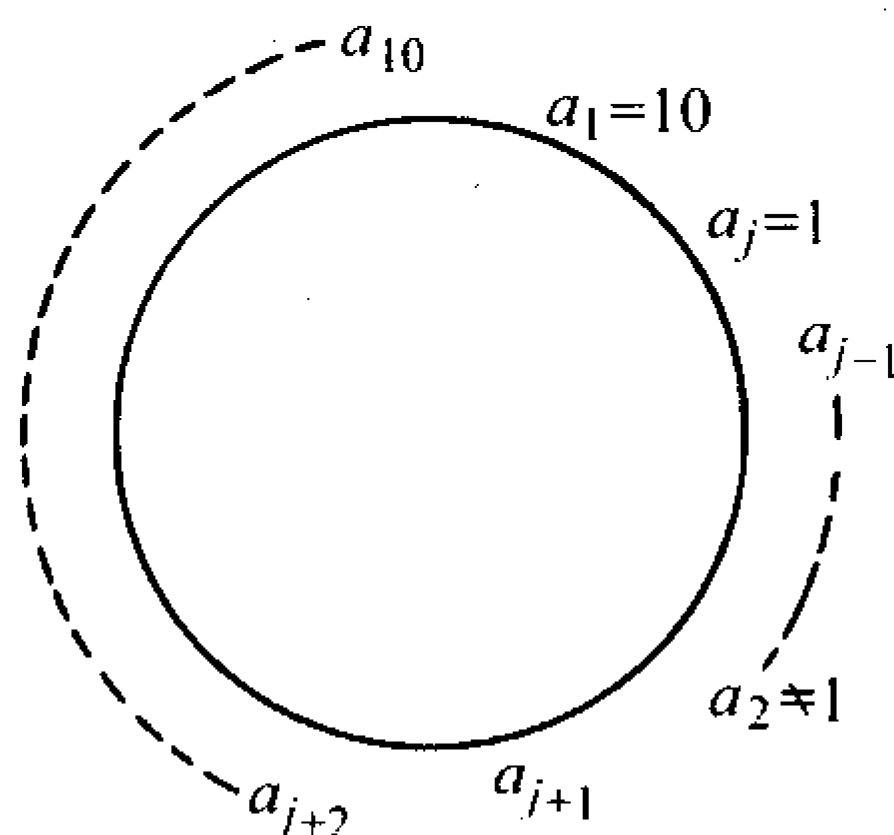


图 4

$$10a_2 + a_{j+1} - (10 + a_2a_{j+1}) = (a_2 - 1)(10 - a_{j+1}) \geqslant 0,$$

"和值"仅当 $a_j = a_{10} = 1$ 时不变,其他情况都下降了.

将图4中的字母按顺时针方向从 a_1 开始,重新标上 $b_1, b_2, \cdots, b_{10}$. 则 $b_1 = 10, b_2 = 1$. 如果 $b_{10} \neq 2, b_j = 2, 3 \leqslant j \leqslant 9$(如图5),我们就将 $(b_j, b_{j+1}, \cdots, b_{10})$ 这一段的顺序倒过来,变为 $(b_{10}, \cdots b_{j+1}, b_j)$,并保持其余各数不动,得到图6,这次操作前后,"和值"的变化是

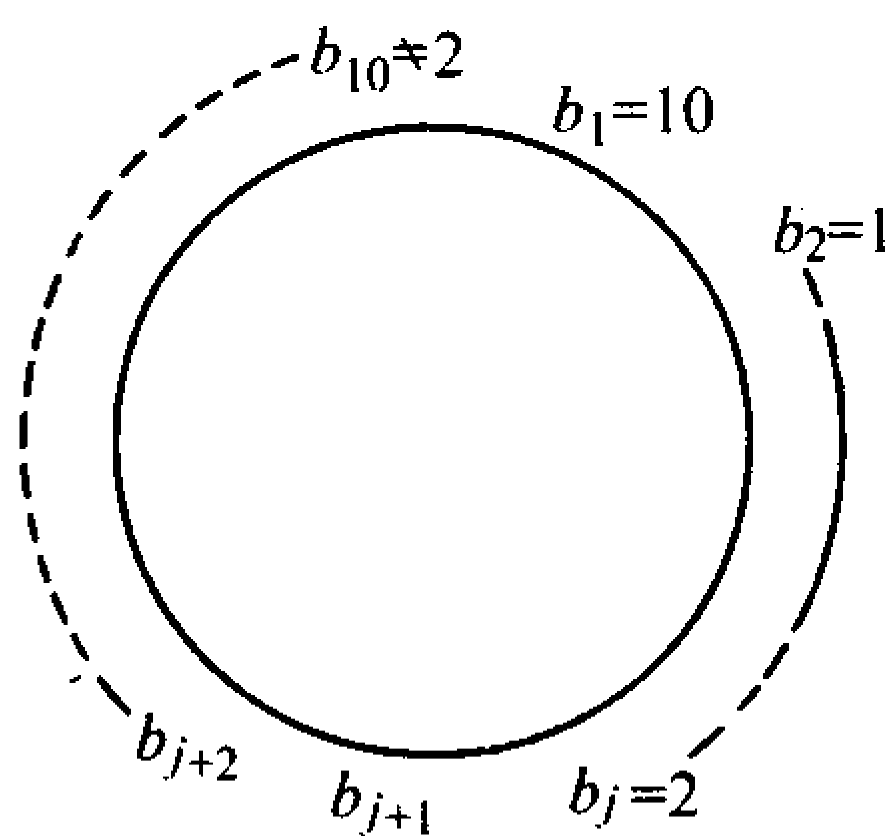


图 5

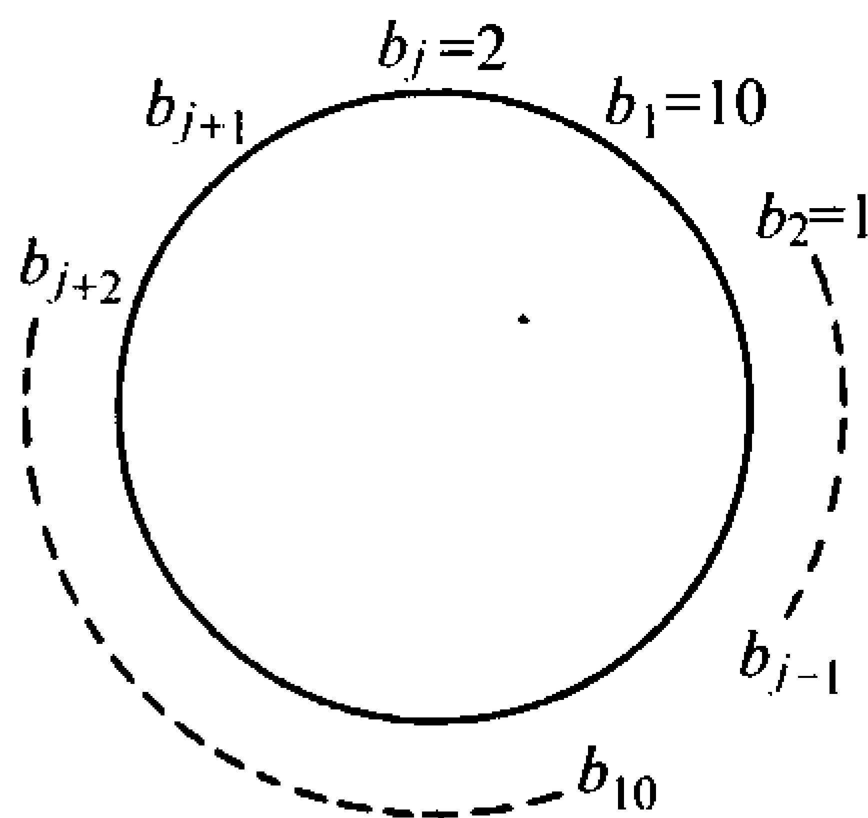


图 6

$$10b_{10} + 2b_{j-1} - (2 \times 10 + b_{10} \cdot b_{j-1})$$
$$= (b_{10} - 2)(10 - b_{j-1}) > 0,$$

可见,"和值"下降.

如果图6仍不同于图2,那么可以用类似于上面的操作,使它一步一步地变为图2,而每一步的变化都使"和值"下降.

注意到图 1 与图 2 的排列所对应的“和值”是相等的.因此,当 $N=55$ 时,仅当 10 个数如图 1 或图 2 排列时,其“和值”最小,因此

$$S(55)=10\times1+1\times9+9\times3+3\times7+7\times5+5\times6+6\times4+4\times8+8\times2+2\times10=224.$$

接着考察 $N>55$ 的情形.

此时,和为 N 的十个两两不同的自然数不仅在排列顺序上可以不同,而且在 N 的分拆方式上也可以不同,因此,我们在讨论“和值”的最小值时,就必须对 N 的一切可能的分拆方式的所有不同的排列形式进行考察.

我们对 N 的任何一种分拆后的在圆周上的任何一种排列,都以 a_1 表示十个数中的最大的一个,并按顺时针方向将 10 个数依次记为 a_1, $a_2,\cdots,a_{10}$.我们用

$$N=a_1+a_2,\cdots+a_{10} \quad ①$$

不仅表示相等关系,而且表示右端 10 个两两不同的自然数中以 a_1 为最大,并且在圆周上的排列顺序如上所述.

因为 $N>55$,所以当这 10 个数是连续的 10 个自然数时,其中的最小数 $a_{i_0}>1$;而当这 10 个数不是 10 个连续的自然数时,其中必有某个数 a_{i_0} 比所有小于它的数都至少大 2.这样,我们就得到了关于 $N-1$ 的一种分拆和排列方式

$$N-1=a_1+\cdots+a_{i_0-1}+(a_{i_0}-1)+a_{i_0+1}+\cdots+a_{10} \quad ②$$

其中 $a_0=a_{10}$.这就是说,对于每一个 ① 式,都至少有一个 ② 式与之对应.所以

$$S(N)-S(N-1)\geqslant\min\left(a_{i_0-1}+a_{i_0+1}\right)\geqslant2+1=3,$$

于是,就有

$$S(N)\geqslant S(55)+3(N-55)=3N+79.$$

另一方面,当

$$(a_1,a_2,\cdots,a_{10})=(N-45,1,9,3,7,6,5,4,8,2)$$

时,确有“和值”为 $3N+79$.

故 $S(N)=3N+79$.

特别地,就有

$$S(1995)=3\times1995+79=6064.$$

6·122　试求

$$\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{10}\sum_{k=1}^{10}|(x+y-10i)(3x-6y-36j)(19x+95y-95k)k|$$

的最小值,其中 x,y 是任意实数.

(中国中学生数学冬令营,1995年)

[解]　记题中表达式为 $F(x,y)$,则

$$F(x,y)=57\prod_{i=1}^{3}f_i(x,y),$$

其中

$$f_1(x,y)=\sum_{i=1}^{10}|x+y-10i|,$$

$$f_2(x,y)=\sum_{j=1}^{10}|x-2y-12j|,$$

$$f_3(x,y)=\sum_{k=1}^{10}|x+5y-5k|k.$$

设 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$ 为 n 个实数,记

$$\begin{cases}\mu=a_{m+1}, & \text{当 } n=2m+1 \text{ 时},\\ a_m\leqslant\mu\leqslant a_{m+1}, & \text{当 } n=2m \text{ 时}.\end{cases}$$

并把上面方式定义的 μ 称为有序数组 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$ 的中位数.不难证明:对一切实数 t 均有

$$g(t)=\sum_{i=1}^{n}|t-a_i|\geqslant\sum_{i=1}^{n}|\mu-a_i|=g(\mu).$$

这就是说,函数 $g(t)$ 在 $t=\mu$ 时达到最小值.因此

当 $(x,y)\in D_1=\{(x,y)\mid 50\leqslant x+y\leqslant60\}$ 时,$f_1(x,y)$ 达到最小值;

当 $(x,y)\in D_2=\{(x,y)\mid 60\leqslant x-2y\leqslant72\}$ 时,$f_2(x,y)$ 达到最小值;

当 $(x,y)\in D_3=\{(x,y)\mid x+5y=35\}$ 时,$f_3(x,y)$ 达到最小值.

又因为 $(55,-4)\in D_1\cap D_2\cap D_3$,所以 f_1,f_2,f_3 在点 $(55,-4)$ 处同时达到最小值,从而 $F(x,y)$ 在点 $(55,-4)$ 处达到最小值

$F(55,-4)=57\prod_{i=1}^{3}f_i(55,-4)=2394\times10^6$.

6·123 设复数 $z=x+iy(x,y\in R)$ 满足 $|z-i|\leqslant1$.求 $A=x(|z-i|^2-1)$ 的最大值、最小值及相应的 z 值.

（中国河北省高中数学竞赛,1994 年）

[解] 设 $z-i=x+(y-1)i=r(\cos\theta+i\sin\theta)$.

则 $\begin{cases}|z-i|=r\leqslant1,0\leqslant r\leqslant1,\\ x=r\cos\theta\end{cases}$

于是 $A=r\cos\theta(r^2-1)=r(r^2-1)\cos\theta$,

$$A^2=r^2(r^2-1)^2\cdot\cos^2\theta,$$

$$\begin{aligned}A^2&\leqslant r^2(r^2-1)^2\\&=\frac{1}{2}\cdot2r^2\cdot(1-r^2)(1-r^2)\\&\leqslant\frac{1}{2}\left[\frac{2r^2+(1-r^2)+(1-r^2)}{3}\right]^3\\&=\frac{4}{27},\end{aligned}$$

$$-\frac{2\sqrt{3}}{9}\leqslant A\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

当且仅当 $\cos\theta=\pm1$ 且 $2r^2=1-r^2$ 时,上式取等号.

即 $\cos\theta=-1,r=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时,$A=\frac{2\sqrt{3}}{9}$;

$\cos\theta=1,r=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时,$A=-\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

也就是说,$z=-\frac{\sqrt{3}}{3}+i$ 时,A 取最大值 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$;

$z=\frac{\sqrt{3}}{3}+i$ 时,A 取最小值 $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

第 4 节 整数集上的函数方程

6·124 设 $f(n)$ 是定义在所有正整数上且取正整数值的函数.对所有正整数 m,n,有

$$f(f(m)+f(n))=m+n.$$

求 $f(1988)$ 的所有可能值.

(墨西哥数学奥林匹克,1988 年)

[解] 设 $f(1)=t$.如果 $f(m)=n$,则

$$f(2n)=f(f(m)+f(m))=2m. \quad ①$$

特别地,当 $m=1,n=t$ 时

$$f(2t)=2 \quad ②$$

我们证明 $t=1$,不然的话,设

$$t=b+1,b\in N \quad ③$$

又设 $f(b)=c,c\in N$,则 $f(2c)=2b$,并且

$$2c+2t=f(f(2c)+f(2t))=f(2b+2)=f(2t)=2,$$

即 $t+c=1$,矛盾.于是 $f(1)=1$.如果

$$f(n)=n \quad ④$$

则 $f(n+1)=f(f(n)+f(1)=n+1$.所以④对一切自然数 n 成立,特别地

$$f(1988)=1988.$$

6・125 设 M 是满足 $f(0)\neq 0$ 与

$f(n)f(m)\equiv f(n+m)+f(n\dot{-}m),n,m\in Z$ 的函数 $f:Z\to R$ 之集合,试求

(1) 满足 $f(1)=\dfrac{5}{2}$ 的所有函数 $f(n)\in M$;

(2) 满足 $f(1)=\sqrt{3}$ 的所有函数 $f(n)\in M$.

(前民主德国数学竞赛,1982 年)

[解] 在题中关于函数 $f(n)\in M$ 的恒等式中,取 $n=m=0$,得到 $(f(0))^2=2f(0)$.但 $f(0)\neq 0$.因此 $f(0)=2$.其次,在恒等式中取 $m=1$,得到

$$f(n)f(1)\equiv f(n+1)+f(n-1),n\in Z.$$

如果给出函数 $f(n)$ 在点 $n=0$ 与 $n=1$ 上的值,则由上面的恒等式可以惟一确定 $f(2)$ 与 $f(-1)$ 的值,然后又可确定 $f(3)$ 与 $f(-2)$ 的值,等等,即可对每个 $n\in Z$ 确定 $f(n)$ 的值,于是,因为 $f(0)=2$,且 $f(1)=\dfrac{5}{2}$(在(1)中)或 $f(1)=\sqrt{3}$(在(2)中),所以函数 $f(n)$ 由题中条件惟一确定,下面证明函数

$$f(n)=2^n+2^{-n} \text{ 与 } f(n)=2\cos\frac{\pi n}{6}$$

分别满足(1)与(2)的全部条件.事实上,有

$$(1)\ f(0)=2^0+2^0\neq 0, f(1)=2^1+2^{-1}=\frac{5}{2},$$

$$\begin{aligned} f(n)f(m) &= (2^n+2^{-n})(2^m+2^{-m}) \\ &= (2^{n+m}+2^{-n-m})+(2^{n-m}+2^{m-n}) \\ &= f(n+m)+f(n-m). \end{aligned}$$

其中 $n,m\in Z$.

$$(2)\ f(0)=2\cos 0\neq 0, f(1)=2\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}.$$

$$\begin{aligned} f(n)f(m) &= 4\cos\frac{\pi n}{6}\cos\frac{\pi m}{6} \\ &= 2\cos\frac{\pi(n+m)}{6}+2\cos\frac{\pi(n-m)}{6} \\ &= f(n+m)+f(n-m). \end{aligned}$$

其中 $n,m\in Z$.

6·126 求所有满足

$f(n+m)+f(n-m)\equiv f(3n), n,m\in Z^*$ (Z^* 是非负整数集), $n\geqslant m$ 的函数 $f:Z^*\to R$.

(奥地利-波兰数学竞赛,1979年)

[解] 在关于 $f(x)$ 的恒等式中令 $m=0$,得到 $2f(n)\equiv f(3n)$, $n\in Z^*$.当 $n=m=0$ 时,有 $f(0)=0$.其次,在恒等式中令 $n=m$,得到 $f(2n)+f(0)\equiv f(3n)$,即 $f(2n)\equiv f(3n)$.于是,一方面对任意 $m\in Z^*$ 有

$$f(4m)=f(6m)=f(9m),$$

而另一方面,在原恒等式中,取 $n=3m$,得到

$$f(4m)+f(2m)=f(9m).$$

因此,对任意 $m\in Z^*$,都有 $f(2m)=0$.于是,对任意 $n\in Z^*$,都有

$$f(n)=\frac{1}{2}f(3n)=\frac{1}{2}f(2n)=0.$$

也就是说,只有当 $f(n)\equiv 0$ 时才能(且实际上也)满足原恒等式.

6·127 设 $n\in Z$,函数 $f:Z\to R$ 满足

$$f(n)=\begin{cases} n-10, \text{当 } n>100 \text{ 时}, \\ f(f(n+11)), \text{当 } n\leqslant 100 \text{ 时}. \end{cases}$$

证明,对任意 $n\leqslant 100$,都有 $f(n)=91$.

（前南斯拉夫数学奥林匹克,1983年）

［证］ 首先,设 $n\leqslant 100$ 与 $n+11>100$,即 $90\leqslant n\leqslant 100$,于是

$$f(n)=f(f(n+11))=f(n+11-10)=f(n+1).$$

因此 $f(90)=f(91)=\cdots=f(100)=f(101)=91.$

现在设 $n<90$.取 $m\in N$,使得 $90\leqslant n+11m\leqslant 100$,则有

$$\begin{aligned} f(n) &= f^{(2)}(n+11)=\cdots=f^{(m+1)}(n+11m) \\ &= f^{(m)}(f(n+11m)) \\ &= f^{(m)}(91)=91. \end{aligned}$$

这就证明,对任意 $n\leqslant 100$,都有 $f(n)=91$.

6·128 函数 $f,g,h:N\to N$ 满足下述三个条件:

(1) 对不同的 $n\in N$,$h(n)$ 取不同的值;

(2) 函数 $g(n)$ 的值域是 N;

(3) $f(n)\equiv g(n)-h(n)+1, n\in N$.

证明:$f(n)\equiv 1, n\in N$.

（罗马尼亚数学竞赛,1979年）

［证］ 首先证明,$g(n)\equiv h(n), n\in N$.由此及条件(3)即可得到,

$$f(n)\equiv g(n)-h(n)+1\equiv 1, n\in N.$$

设有某个 $n\in N$,使 $g(n)\neq h(n)$.因为 $f(n)\geqslant 1$,所以对任意 $n\in N$,有

$$h(n)=g(n)+1-f(n)\leqslant g(n),$$

于是,$h(n)<g(n)=k$.根据条件(2),存在 $n_1,\cdots,n_{k-1}\in N$,使得当 $i=1,\cdots,k-1$ 时,$g(n_i)=i$,从而 $h(n_i)<k$.于是 $h(n_1),\cdots,h(n_{k-1}),h(n)$ 这 k 个数都属于集合 $\{1,\cdots,k-1\}$,由狄利克雷原理 $h(n_1),h(n_2),\cdots,h(n_{k-1}),h(n)$ 中必有两个相等,与条件(1)矛盾.结论证毕.

6·129 考虑非常量函数 $f(n,m)$,它定义在所有整数对的集合上,取值为整数且满足

$$f(n,m)=\frac{1}{4}(f(n-1,m)+f(n+1,m)+f(n,m-1)+f(n,m+1)),n,m\in Z.$$

证明:(1) 这样的函数存在;

(2) 对每个 $k\in Z$,任意一个这样的函数既取大于 k 的值,也取小于 k 的值.

(罗马尼亚数学奥林匹克,1978 年)

[证] (1) 例如函数 $f(n,m)=n,n,m\in Z$ 即满足题中所有的条件.

(2) 设结论不正确,即对某个 $k\in Z$,存在满足题中条件的某个函数 $f(n,m)$,它的每个值都不超过 k(不小于 k 的情形与此相仿),则在 $f(n,m)(n,m\in Z)$ 的值中总有最大的.设其最大值为 $l=f(n_0,m_0)$,于是所有 $f(n_0\pm1,m_0)$,$f(n_0,m_0\pm1)$ 都等于 l,否则有

$$f(n_0,m_0)=\frac{1}{4}(f(n_0-1,m_0)+f(n_0+1,m_0)+f(n_0,m_0-1)+f(n_0,m_0+1))<l.$$

反复应用这一结果,得到:对任意 $n,m\in N$,有

$$\begin{aligned}l&=f(n_0,m_0)=f(n_0\pm1,m_0)=f(n_0\pm2,m_0)=\cdots\\&=f(n_0\pm n,m_0)=f(n_0\pm n,m_0\pm1)\\&=f(n_0\pm n,m_0\pm2)\\&=\cdots=f(n_0\pm n,m_0\pm m).\end{aligned}$$

因此,$f(n,m)\equiv l$,与题设矛盾.

6·130 设函数

$$f_k(x,y)=\frac{x^k+y^k+(-1)^k(x+y)^k}{k},k\in Z,k\neq0.$$

求所有非零的整数对(m,n),使得 $m\leqslant n,m+n\neq0$,并且

$$f_m(x,y)f_n(x,y)\equiv f_{m+n}(x,y),$$

其中 $x,y\in R,xy(x+y)\neq0$.

提示:数对 $m=2,n=3$ 与 $m=2,n=5$ 满足所说的条件.

(第 11 届美国数学奥林匹克,1982 年)

[解] 设数对(n,m)满足 $m\leqslant n,nm(m+n)\neq0$,且

$$f_m(x,y)f_n(x,y)\equiv f_{m+n}(x,y),x,y\in R,xy(x+y)\neq0.$$

其中 $$f_k(x,y)=\frac{x^k+y^k+(-1)^k(x+y)^k}{k},k\in Z,k\neq 0.\quad ①$$

首先,当 $k=1$ 时,有

$$f_1(x,y)\equiv 0,x,y\in R.$$

其次,对 k 的其他不同取值范围,给出三个极限公式.如果 $k<0$,则对固定的 $y=y_0\neq 0$,有

$$\lim_{x\to\infty}x^k=\lim_{x\to\infty}(x+y_0)^k=0.$$

从而 $\lim\limits_{x\to\infty}f_k(x,y_0)=\frac{1}{k}y_0^k$, ②

如果 $k\in N$ 是偶数,则

$$f_k(x,y)\equiv\frac{1}{k}\left(2x^k+2y^k+\sum_{i=1}^{k-1}C_k^ix^iy^{k-i}\right),$$

从而 $$\lim_{x\to\infty}\frac{f_k(x,y_0)}{x^k}=\frac{2}{k}.\quad ③$$

最后,如果 $k\in N$ 是奇数,且 $k\neq 1$,则

$$f_k(x,y)=-\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k-1}C_k^ix^iy^{k-i},$$

从而 $$\lim_{x\to\infty}\frac{f_k(x,y_0)}{x^{k-1}}=-y_0\quad ④$$

下面证明除提示中的数对(2,3)与(2,5)外,只有(-1,3)满足题中条件.分几种情形讨论

(1)$m,n\in N$ 都是偶数,则由式③及 f 所满足的恒等式,可得

$$\begin{aligned}\frac{2}{m+n}&=\lim_{x\to\infty}\frac{f_{m+n}(x,y_0)}{x^{m+n}}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{f_m(x,y_0)}{x^m}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{f_n(x,y_0)}{x^n}\\&=\frac{4}{mn},\end{aligned}$$

由此得到 $\frac{m+n}{2}=\frac{mn}{4}$,

即 $$\left(\frac{m}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-1\right)=1,$$

从而 $$\frac{m}{2}=\frac{n}{2}=2.$$

所以 $\quad m=n=4$,但这是不可能的,因为

$$\begin{aligned}f_4(1,1)f_4(1,1)&=\frac{(2+2^4)^2}{4^2}=\frac{81}{4}\neq\frac{129}{4}=\frac{2+2^8}{8}\\&=f_8(1,1)\\&=f_{4+4}(1,1).\end{aligned}$$

(2) $m,n\in N$ 都是奇数,则由式④及 f 所满足的恒等式,当 $m,n\neq 1$ 时,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{f_{m+n}(x,y_0)}{x^{m+n}}&=\lim_{x\to\infty}\frac{(x,y_0)f_n(x,y_0)}{x^{m+n}}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\frac{f_m(x,y_0)}{x^{n-1}}\cdot\frac{f_m(x,y_0)}{x^{n-1}}=0.\end{aligned}$$

因为 $f_1(x,y)\equiv 0$,所以上式对 $m=n=1$ 也成立,但 $m+n\in N$ 是偶数,所以由式③,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f_{m+n}(x,y_0)}{x^{m+n}}=\frac{2}{m+n}\neq 0.$$

矛盾.

(3) $m,n\in N$ 有一个是偶数(记为 p)而另一个是奇数(记为 q).如果 $q=1$,则 $f_q(1,1)=0$,且由题中的恒等式

$$f_{p+q}(1,1)=\frac{2-2^{p+q}}{p+q}=0.$$

从而 $2-2^{p+q}=0$,但 $p+q>1$,所以不可能,于是 $q>1$,因此由式③与④得到

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{f_p(x,y_0)f_q(x,y_0)}{x^{p+q-1}}&=\lim_{x\to\infty}\frac{f_p(x,y_0)}{x^p}\lim_{x\to\infty}\frac{fq(x,y_0)}{x^{q-1}}\\&=-\frac{2y_0}{p},\end{aligned}$$

因为 $p+q$ 是奇数,所以由式④

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f_{p+q}(x,y_0)}{x^{p+q-1}}=-y_0,$$

从而 $p=2$.由恒等式得到

$$\frac{3(2-2^q)}{q}=f_2(1,1)f_q(1,1)=f_{2+q}(1,1)=\frac{2-2^{2+q}}{2+q},$$

从而 $\quad 3(2+q)(2-2^q)=q(2-2^{2+q})$,

即 $\qquad 3+q=(6-q)2^{q-2}$,

因此,$q<6$.因为 q 是奇数,且 $q>1$,所以 $q\in\{3,5\}$,这就是提示中所说的情形.容易验证,数对(2,3)与(2,5)确实满足题中要求.

(4)$m<0$ 且 $n\in N$ 是偶数.因为 $n>m+n$,所以不论 $m+n$ 的符号和奇偶性如何,都有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f_{m+n}(x,y_0)}{x^n}=0,$$

另一方面,由式②与③,有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f_m(x,y_0)f_n(x,y_0)}{x^n}=\lim_{x\to\infty}f_m(x,y_0)\lim_{x\to\infty}\frac{f_n(x,y_0)}{x^n}$$
$$=\frac{2y_0^m}{mn}\neq 0.$$

(5)$m>0$,且 $n<N$ 是奇数.如果 $n=1$,则 $f_n(1,1)=0$,由恒等式与式②得到

$$f_{m+n}(1,1)=\frac{2+(-1)^{m+n}2^{m+n}}{m+n}=0.$$

但这是不可能的,因 $m+n<0$,因此 $n\neq 1$.于是,一方面,由式②与④得到

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f_m(x,y_0)f_n(x,y_0)}{x^{x-1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}f_m(x,y_0)\lim_{x\to\infty}\frac{f_n(x,y_0)}{x^{n-1}}=\frac{-y_0^{m+1}}{m}\neq 0.$$

另一方面,因为 $m+n<n$,且 $n-1\in N$ 是偶数,所以由④及式③得到

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f_{m+n}(x,y_0)}{x^{n-1}}=\begin{cases}0,\text{当 } m+n<n-1\text{ 时},\\ \dfrac{2}{n-1},\text{当 } m+n=n-1\text{ 时}.\end{cases}$$

由此可见,$m+n=n-1$ 且 $\dfrac{-y^{m+1}}{y}=\dfrac{2}{n-1}$.

即 $m=-1$ 且 $1=\dfrac{2}{n-1}$,即 $m=-1$ 且 $n=3$.由于

$$f_{-1}(x,y)f_3(x,y)\equiv\frac{x^{-1}+y^{-1}-(x+y)^{-1}}{-1}\cdot\frac{x^3+y^3-(x+y)^3}{3}$$

$$= \frac{y(x+y)+x(x+y)-xy}{-xy(x+y)} \cdot \frac{-3x^2y-3xy^2}{3}$$
$$= x^2+y^2+xy$$
$$= \frac{x^2+y^2+(x+y)^2}{2}$$
$$= f_2(x,y) \equiv f_{-1+3}(x,y).$$
所以$(-1,3)$满足题中条件.

(6)$m,n<0$,则由式②,有

$$\lim_{x\to\infty} f_m(x,y_0)f_n(x,y_0) = \frac{y_0^{m+n}}{mn}$$

与

$$\lim_{x\to\infty} f_{m+n}(x,y_0) = \frac{y_0^{m+n}}{m+n}.$$

因为 $mn>0$, $m+n>0$,所以

$$\frac{y_0^{m+n}}{mn} \neq \frac{y_0^{m+n}}{m+n},$$

从而 $f_m(x,y)f_n(x,y) \neq f_{m+n}(x,y)$ 矛盾.

于是,所有满足条件的数对(m,n)是$(2,3)$,$(2,5)$和$(-1,3)$.

6·131　设S是所有整数对的集合的子集,如果函数$f:S\to S$可逆并且对任意$(n,m)\in S$,

$$f(n,m)\in\{(n-1,m),(n+1,m),(n,m-1),(n,m+1)\},$$

则函数$f(n,m)$称为万有的.证明:如果至少存在一个万有函数,则存在万有函数$f(n,m)$,它满足恒等式

$$f(f(n,m))\equiv(n,m),(n,m)\in S.$$

(奥地利-波兰数学竞赛,1978年)

[证]　点$(n,m)\in S$依其和数$n+m$为偶数或为奇数而分别称为偶点或奇点.设万有函数$g(n,m)$存在,则其反函数$g^{-1}(n,m)$也是万有的.定义函数$f(n,m)$如下:当$(n,m)\in S$时,

$$f(n,m)=\begin{cases} g(n,m), 如果(n,m)是偶点, \\ g^{-1}(n,m), 如果(n,m)是奇点. \end{cases}$$

这就证明了恒等式

$$f(f(n,m))\equiv(n,m),(n,m)\in S.$$

由此即知,函数$f(n,m)$是可逆的.为了验证函数是万有的,只需注意,

函数 $g(n,m)$ 与 $g^{-1}(n,m)$ 都是万有的.

6·132　证明:$f(n)=1-n$ 是惟一的定义在整数集上且满足下述条件的整值函数:

(1) 对一切整数 n,$f(f(n))=n$;

(2) 对一切整数 n,$f(f(n+2)+2)=n$;

(3) $f(0)=1$.

(第 53 届普特南数学竞赛,1993 年)

[证]　若 $f(n)=1-n$,则

$$f(f(n))=f(1-n)=1-(1-n)=n,$$

因此(1)成立.又有

$$f(f(n+2)+2)=f((-n-1)+2)=f(1-n)=n,$$

因此(2)成立.又有

$$f(0)=1-0=1,$$

因此(3)成立.

故 $f(n)=1-n$ 满足题目中的三个条件.

反过来,若函数 $f(x)$ 满足题目中的三个条件,则由(2)得

$$f(f(f(n+2)+2))=f(n),$$

再由(1)得

$$f(n+2)+2=f(n),$$

$$f(n+2)=f(n)-2.$$

由上式可得,当 n 是偶数时,

$$f(n)=f(0)-n=1-n;$$

当 n 是奇数时,

$$f(n)=f(1)-(n-1)=(1-1)-(n-1)=1-n.$$

因此,对于任意整数 n,都有

$$f(n)=1-n.$$

6·133　设 N_0 表示非负整数的集合.求一个从 N_0 到 N_0 的双射 f,使得对所有 $m,n\in N_0$,均有

$$f(3mn+m+n)=4f(m)f(n)+f(m)+f(n).$$

(第 37 届国际数学奥林匹克预选题,1996 年)

[解]　设 $a_1<a_2<a_3<\cdots$ 为所有 $3k+1$ 型的素数,$b_1<b_2<b_3<\cdots$ 为所有 $3k+2$ 型的素数,$c_1<c_2<c_3<\cdots$ 为所有 $4k+1$ 型

的素数. $d_1 < d_2 < d_3 < \cdots$ 为所有 $4k+3$ 型的素数.

我们定义 $f: N_0 \to N_0$ 如下:

$f(0)=0$,当 $n>0$ 时,设 $3n+1$ 的标准分解式为

$$a_{i_1}^{\alpha_1} a_{i_2}^{\alpha_2} \cdots a_{i_r}^{\alpha_r} \cdot b_{j_1}^{\beta_1} b_{j_2}^{\beta_2} \cdots b_{j_s}^{\beta_s},$$

其中 $i_1 < i_2 < \cdots < i_r, j_1 < j_2 < \cdots < j_s, \alpha_1, \cdots, \alpha_r > 0, \beta_1, \cdots, \beta_s > 0$,且 $\beta_1 + \cdots + \beta_s$ 为偶数. 定义

$$f(n) = \frac{C_{i_1}^{\alpha_1} C_{i_2}^{\alpha_2} \cdots C_{i_r}^{\alpha_r} \cdot d_{j_1}^{\beta_1} d_{j_2}^{\beta_2} \cdots d_{j_s}^{\beta_s} - 1}{4}.$$

下面证明 f 满足题中的条件.

事实上,由于 $C_{i_1}, C_{i_2}, \cdots, C_{i_r}$ 为 $4k+1$ 型素数, $d_{j_1}, d_{j_2}, \cdots, d_{j_s}$ 为 $4k+3$ 型素数,且 $\beta_1 + \cdots + \beta_s$ 为偶数,则 $C_{i_1}^{\alpha_1} C_{i_2}^{\alpha_2} \cdots C_{i_r}^{\alpha_r} \cdot d_{j_1}^{\beta_1} d_{j_2}^{\beta_2} \cdots d_{j_s}^{\beta_s}$ 为 $4k+1$ 型的正整数,因此

$$f(n) \in N_0.$$

另一方面,对任何正整数 m. 设 $4m+1$ 的标准分解式为

$$C_{i_1}^{\alpha_1} C_{i_2}^{\alpha_2} \cdots C_{i_r}^{\alpha_r} \cdot d_{j_1}^{\beta_1} d_{j_2}^{\beta_2} \cdots d_{j_s}^{\beta_s},$$

则存在惟一的正整数

$$n = \frac{a_{i_1}^{\alpha_1} a_{i_2}^{\alpha_2} \cdots a_{i_r}^{\alpha_r} \cdot b_{j_1}^{\beta_1} b_{j_2}^{\beta_2} \cdots b_{j_s}^{\beta_s} - 1}{3},$$

使得

$$f(n) = m.$$

因此, f 为双射.

对于任意 $m, n \in N_0$,若 m, n 中至少有一个为零,则显然满足

$$f(3mn+m+n) = 4f(m)f(n) + f(m) + f(n).$$

若 m, n 都是正整数. 设

$$3m+1 = a_{i_1}^{\alpha_1} \cdots a_{i_r}^{\alpha_r} \cdot b_{j_1}^{\beta_1} \cdots b_{j_s}^{\beta_s},$$

$$3n+1 = a_{h_1}^{\gamma_1} \cdots a_{h_t}^{\gamma_t} \cdot b_{l_1}^{\delta_1} \cdots b_{l_u}^{\delta_u}.$$

则

$$f(3mn+m+n) = f\left(\frac{(3m+1)(3n+1)-1}{3}\right)$$

$$= \frac{C_{i_1}^{\alpha_1} \cdots C_{i_r}^{\alpha_r} \cdot d_{j_1}^{\beta_1} \cdots d_{j_s}^{\beta_s} \cdot C_{h_1}^{\gamma_1} \cdots C_{h_t}^{\gamma_t} \cdot d_{l_1}^{\delta_1} \cdots d_{l_u}^{\delta_u} - 1}{4}$$

$$= \frac{\left(4 \cdot \frac{C_{i_1}^{\alpha_1} \cdots C_{i_r}^{\alpha_r} \cdot d_{j_1}^{\beta_1} \cdots d_{j_s}^{\beta_s} - 1}{4} + 1\right) \cdot \left(4 \cdot \frac{C_{h_1}^{\gamma_1} \cdots C_{h_t}^{\gamma_t} \cdot d_{l_1}^{\delta_1} \cdots d_{l_u}^{\delta_u} - 1}{4} + 1\right) - 1}{4}$$

$$= \frac{[4f(m) + 1][4f(n) + 1]}{4}$$

$$= 4f(m)f(n) + f(m) + f(n).$$

故 f 符合题中的条件，即为所求.

6·134 设 $S = \{0,1,2,3,\cdots\}$ 是所有非负整数的集合. 找出所有在 S 上定义、取值于 S 中的满足下面条件的函数 f:

$$f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n)$$

对所有 $m, n \in S$ 成立.

（第 37 届国际数学奥林匹克，1996 年）

[解] 设 $f: S \to S$ 满足

$$f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n) \qquad ①$$

对所有 $m, n \in S$ 成立.

取 $m = n = 0$，得 $f(f(0)) = f(f(0)) + f(0)$，从而有

$$f(0) = 0.$$

在 ① 中取 $m = 0$，得

$$f(f(n)) = f(n) \quad (\text{对任 } n \in S \text{ 成立}).$$

于是 ① 式化为

$$f(m + f(n)) = f(m) + f(n)$$

对所有 $m, n \in S$ 成立.

记 f 的值域为 T，即

$$T = \{f(n) \mid n \in S\}.$$

显然，如果某个 $n \in S$，使 $f(n) = n$，则 $n \in T$.

反之，对于 T 中的任何数 n，由 $n \in T$ 可知，存在 $k \in S$，使 $n = f(k)$.

于是，我们有

$$f(n) = f(f(k)) = f(k) = n.$$

因此 f 的值域 T 也就是 f 的全体不动点组成的集合.

首先，对于 T 中任意两个数(可以相同)，它们的和仍在 T 中. 事实上，若 $m, n \in T$，则 $f(m) = m, f(n) = n$. 于是

$$f(m+n)=f(m+f(n))=f(m)+f(n)=m+n,$$

即 $m+n\in T$.

其次,当两个数一个在 T 中,另一个不在 T 中时,这两个数的和必定不在 T 中.事实上,若 $m\notin T$,$n\in T$,则

$$\begin{aligned}f(m+n)&=f(m+f(n))\\&=f(m)+f(n)=f(m)+n\\&\neq m+n,\end{aligned}$$

所以 $m+n\notin T$.

第一种情况:如果 $T=\{0\}$.显然,由于 f 的值域只有一个数 0,故

$$f(n)=0,\text{对任 } n\in S,$$

即 $$f(n)\equiv 0.$$

第二种情况:如果 $1\in T$.由于 T 对加法封闭,即 T 中任意两个数之和在 T 中,可见

$$T=S,$$

即 S 中每一个数都是 f 的不动点.这时

$$f(n)=n,\text{对任 } n\in S,$$

即 f 是"恒等"函数.

第三种情况:在上述两种情况之外,则 T 中有自然数,但 $1\notin T$.记 T 中最小自然数为 $n_0(n_0\geqslant 2)$.

由于 $n_0\in T$,且 T 对加法封闭,因此

$$Kn_0\in T,\text{对任 } K\in S.$$

又由于 n_0 是 T 中最小自然数,$1,2,\cdots,n_0-1$ 都不在 T 中,因此,若

$$n=Kn_0+r\in S \text{ 且 } 1\leqslant r\leqslant n_0-1,$$

则 $n\notin T$.

故此时 T 中都是 n_0 的倍数.于是存在 $a_1,a_2,\cdots,a_{n_0-1}\in S$(可以有相同的数),使

$$f(1)=a_1n_0,f(2)=a_2n_0,\cdots,f(n_0-1)=a_{n_0-1}n_0.$$

这时,对任何 $n=Kn_0+r\in S$,有

$$\begin{aligned}f(n)&=f(r+Kn_0)=f(r+f(Kn_0))=f(r)+f(Kn_0)\\&=a_rn_0+Kn_0\quad(\text{记 } a_0=0).\end{aligned}$$

以上证明了满足条件的函数 f 只可能具有以下三种形式:

第一种:$f(n)=0$,对任 $n\in S$.

第二种：$f(n)=n$，对任 $n\in S$.

第三种：任取自然数 $n_0\geqslant 2$，再任取 S 中 n_0-1 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_{n_0-1}$，并令 $a_0=0$，若 $n=Kn_0+r$（其中 $K\in S,0\leqslant r\leqslant n_0-1$），

则 $$f(n)=a_rn_0+Kn_0.$$

下面验证，具有上述三种形式的函数都满足题设的条件.

显然，具有第一种和第二种形式的函数满足条件 ①.

对于第三种形式的函数 f，它的值域

$$T=\{Kn_0\mid K\in S\}$$

并且对于任何 $m,n\in S$，设 $m=Kn_0+r$，其中 $0\leqslant r\leqslant n_0-1$，$K\in S$，再设 $f(n)=K_1n_0$，于是我们有

$$\begin{aligned}f(m+f(n))&=f(Kn_0+r+K_1n_0)\\&=f((K+K_1)n_0+r)\\&=a_rn_0+(K+K_1)n_0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(f(m))+f(n)&=f(f(Kn_0+r))+K_1n_0\\&=f(a_rn_0+Kn_0)+K_1n_0\\&=a_rn_0+Kn_0+K_1n_0\\&=a_rn_0+(K+K_1)n_0,\end{aligned}$$

所以 $$f(m+f(n))=f(f(m))+f(n),$$

即 ① 式对任何 $m,n\in S$ 都成立.

综上所述，以上三种形式的函数就是本题所求的全部函数.

6・135 设 N 是全部正整数的集合，f 是从 N 到 N 本身的函数，且对于 N 中的任何 s 和 t，皆满足

$$f(t^2f(s))=s(f(t))^2.$$

试在所有的函数 f 中，确定 $f(1998)$ 可能达到的最小值.

（第 39 届国际数学奥林匹克，1998 年）

[解] 设 f 满足题目的条件，则

$$f(t^2f(s))=s(f(t))^2. \qquad ①$$

令 $t=1$，得

$$f(f(s))=s(f(1))^2. \qquad ②$$

令 $s=1$，代入 ① 得

$$f(t^2(f(1))=(f(t))^2. \qquad ③$$

记 $f(1)=K$，将 ② 和 ③ 化为

$$f(f(s)) = K^2 s, \quad ④$$

$$f(Kt^2) = (f(t))^2. \quad ⑤$$

令 $s = 1$,代入 ④ 得

$$f(K) = K^2.$$

令 $s = f(K)$ 代入 ① 得

$$f(t^2K^3) = K^2 f(t)^2.$$

另一方面,由 ⑤ 式得

$$f(t^2K^3) = f(K(Kt)^2) = (f(Kt))^2,$$

比较以上两式,我们有

$$(f(Kt))^2 = K^2(f(t))^2,$$

$$f(Kt) = Kf(t) \quad ⑥$$

将 ⑥ 代入 ⑤

$$Kf(t^2) = (f(t))^2$$

在上式中将 t 用 $t^2, t^4, \cdots, t^{2^{m-1}}$ 代替,分别得

$$Kf(t^4) = (f(t^2))^2,$$

$$Kf(t^8) = (f(t^4))^2,$$

……

$$Kf(t^{2^m}) = (f(t^{2^{m-1}}))^2,$$

将这列式子的第一个平方并与第二个比较得

$$K^3 f(t)^4 = (f(t))^4,$$

再平方,并与这列式子的第三个比较得

$$K^7 f(t^8) = (f(t))^8,$$

依次类推,最后可得

$$K^{2^m-1} f(t^{2^m}) = (f(t))^{2^m}. \quad ⑦$$

这里 m 是任一正整数.

取 K 的任一素因子 p,设 $p^\alpha \parallel K, p^\beta \parallel f(t)$.

由 ⑦ 得

$$\alpha(2^m - 1) \leqslant \beta \cdot 2^m,$$

即 $$\frac{\beta}{\alpha} \geqslant \frac{2^m - 1}{2^m},$$

两边取极限,得

$$\frac{\beta}{\alpha} \geqslant \lim_{m \to \infty} \frac{2^m - 1}{2^m} = 1,$$

即 $\quad \beta \geqslant \alpha.$

由上式及 p 的任意性可知

$$K \mid f(t)$$

于是设

$$g(t) = \frac{f(t)}{K}.$$

显然,$g(t)$ 也是从 N 到 N 的函数.

由 ⑥ 及 $g(t)$ 的定义知

$$f(t^2 f(s)) = f(t^2 \cdot Kg(s))$$
$$= Kf(t^2 g(s)) = K^2 g(t^2 g(s)),$$
$$s(f(t))^2 = K^2 s(g(t))^2,$$

再由 ① 及以上两式得

$$g(t^2 g(s)) = s(g(t))^2. \qquad ⑧$$

这表明,g 也是一个满足题目条件的函数,且 $g(1) = 1$. 于是,前面关于函数 f 的结果对 g 都适用,只需注意此时 $K = g(1) = 1$.

由 ④ 和 ⑤ 得

$$g(g(s)) = s, \qquad ⑨$$
$$g(t^2) = (g(t))^2. \qquad ⑩$$

在 ⑧ 中,用 $g(s)$ 代替 s,有

$$g(t^2 s) = g(s)(g(t))^2. \qquad ⑪$$

应用 ⑩ 和 ⑪,可知:对于任意的 $a, b \in N$,

$$(g(ab))^2 = g(a^2 b^2)$$
$$= g(a^2) \cdot (g(b))^2 = (g(a))^2 \cdot (g(b))^2,$$

即 $\quad g(ab) = g(a) \cdot g(b). \qquad ⑫$

由 ⑨ 可知,g 是单射. 特别地,对所有的 $a \neq 1$,都有 $g(a) \neq 1$.

由 ⑫ 可知,a 是合数时,$g(a)$ 必是合数.

又由 $g(g(p)) = p$ 可知,如果 p 是素数,那么 $g(p)$ 一定是素数.

因为 $1998 = 2 \times 3^3 \times 37$,所以

$$f(1998) = Kg(1998) = K \cdot g(2) \cdot (g(3))^3 \cdot g(37)$$
$$\geqslant (2^3 \cdot 3 \cdot 5) \cdot K = 120K \geqslant 120.$$

另一方面,作函数 f 如下:

$$f(1)=1,$$
$$f(2)=3,$$
$$f(3)=2,$$
$$f(5)=37,$$
$$f(37)=5,$$
$$f(p)=p \quad (p\text{ 是其他素数时}),$$
$$f(n)=(f(p_1))^{\alpha_1}\cdot(f(p_2))^{\alpha_2}\cdots(f(p_l))^{\alpha_l},$$

其中 n 的标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_l^{\alpha_l}$.

在上述定义下,容易验证这样的 f 符合题目的条件,且有

$$f(1998)=120.$$

综上所述,$f(1998)$ 的最小值为 120.

6·136　设 N 是自然数的集合. 设 $f:N\to N$ 适合条件: $f(1)=1$,且对任意自然数 n 都有

$$\begin{cases}3f(n)f(2n+1)=f(2n)(1+3f(n)),\\ f(2n)<6f(n).\end{cases}$$

试求方程

$$f(k)+f(l)=293, k<l$$

的所有解.

(中国中学生数学冬令营,1995 年)

[解]　由条件可知,对一切 $n\in N$,有

$$1\leqslant 3f(n)(f(2n+1)-f(2n))=f(2n)<6f(n). \tag{①}$$

因此

$$1\leqslant f(2n+1)-f(2n)<2,$$
$$f(2n+1)=f(2n)+1. \tag{②}$$

将 ② 代入 ① 得到

$$f(2n)=3f(n). \tag{③}$$

利用 ② 和 ③,通过数学归纳法可以证明

$$f(2^{n_1}+2^{n_2}+\cdots+2^{n_s})=3^{n_1}+3^{n_2}+\cdots+3^{n_s},$$

这里的非负整数 $n_1,n_2,\cdots,n_s$ 适合

$$0\leqslant n_1<n_2<\cdots<n_s.$$

记 $k = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \cdots + 2^{n_s},$

$l = 2^{m_1} + 2^{m_2} + \cdots + 2^{m_t},$

其中 $n_1 < n_2 < \cdots < n_s, m_1 < m_2 < \cdots < m_t$.

当 $K < l$ 时,显然有 $f(k) < f(l)$.注意到

$$293 = 3^5 + 3^3 + 2 \times 3^2 + 3 + 2 \times 3^0,$$

而其中的 $3^5 = 243$ 必然是 $f(l)$ 的一个加项,3^2 和 3^0 必然是 $f(k)$ 和 $f(l)$ 中每一个的加项,只有 3^3 和 3 不确定.因此,$f(k)$ 和 $f(l)$ 只有以下 4 种情况:

$$\begin{cases} f(k) = 3^2 + 3^0, \\ f(l) = 3^5 + 3^3 + 3^2 + 3 + 3^0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(k) = 3^3 + 3^2 + 3^0, \\ f(l) = 3^5 + 3^2 + 3 + 3^0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(k) = 3^2 + 3 + 3^0, \\ f(l) = 3^5 + 3^3 + 3^2 + 3^0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(k) = 3^3 + 3^2 + 3 + 3^0, \\ f(l) = 3^5 + 3^2 + 3^0. \end{cases}$$

相应地,我们得到所给方程的全部解:

$$\begin{cases} k = 2^2 + 2^0 = 5, \\ l = 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1 = 47; \end{cases}$$

$$\begin{cases} k = 2^3 + 2^2 + 2^0 = 13, \\ l = 2^5 + 2^2 + 2 + 2^0 = 39; \end{cases}$$

$$\begin{cases} k = 2^2 + 2 + 2^0 = 7, \\ l = 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^0 = 45; \end{cases}$$

$$\begin{cases} k = 2^3 + 2^2 + 2 + 2^0 = 15, \\ l = 2^5 + 2^2 + 2^0 = 37. \end{cases}$$

6・137 给定正整数集合上的一个函数 $f(n)$,满足下述条件:

$f(n) = n - 12$,当 $n > 2000$ 时;

$f(n) = f(f(n + 16)$,当 $n \leqslant 2000$ 时.

(1) 求 $f(n)$.

(2) 求方程 $f(n) = n$ 的所有解.

(中国香港数学奥林匹克,1994 年)

[**解**] (1) 由已知,

$$f(2000)=f(f(2016))=f(2004)=1992,$$
$$f(1999)=f(f(2015))=f(2003)=1991,$$
$$f(1998)=f(f(2014))=f(2002)=1990,$$
$$f(1997)=f(f(2013))=f(2001)=1989,$$
$$f(1996)=f(f(2012))=f(2000)=1992,$$
$$f(1995)=f(f(2011))=f(1999)=1991,$$
$$f(1994)=f(f(2010))=f(1998)=1990,$$
$$f(1993)=f(f(2009))=f(1997)=1989,$$
$$f(1992)=f(f(2008))=f(1996)=1992,$$
$$f(1991)=f(f(2007))=f(1995)=1991,$$
$$f(1990)=f(f(2006))=f(1994)=1990,$$
$$f(1989)=f(f(2005))=f(1993)=1989,$$
$$f(1988)=f(f(2004))=f(1992)=1992,$$
$$f(1987)=f(f(2003))=f(1991)=1991,$$
$$f(1986)=f(f(2002))=f(1990)=1990,$$
$$f(1985)=f(f(2001))=f(1989)=1989,$$
$$f(1984)=f(f(2000))=f(1992)=1992,$$
$$f(1983)=f(f(1999))=f(1991)=1991,$$
$$f(1982)=f(f(1998))=f(1990)=1990,$$
$$f(1981)=f(f(1997))=f(1989)=1989.$$

于是,我们猜想:对非负整数 $k\leqslant 499$, $m\in\{0,1,2,3\}$,有

$$f(2000-4k-m)=1992-m.$$

下面用数学归纳法来证明这个猜想成立.

当 $K=0,1,2,3$ 时,对于任意的 $m\in\{0,1,2,3\}$,我们已经验证猜想成立.

设当 $k\leqslant t(t\geqslant 3)$ 时,猜想成立.

则当 $k=t+1$ 时,

$$\begin{aligned}1&\leqslant[2000-4(t+1)-m]+16\\&=2000-4(t-3)-m\\&\leqslant 2000,\end{aligned}$$

因此,由已知条件和归纳假设,有

$$\begin{aligned}f(2000-4(t+1)-m)&=f(f(2000-4(t-3)-m))\\&=f(1992-m)\\&=f(2000-4\cdot 2-m)\\&=1992-m.\end{aligned}$$

所以,猜想对于任意非负整数 $k\leqslant 499$ 和 $m\in\{0,1,2,3\}$ 都成立.从而有

$$f(n)=\begin{cases}n-12,当 n>2000 时;\\1992-m,当 n=2000-4K-m 时.\end{cases}$$

这里 K 是非负整数,$m\in\{0,1,2,3\}$,且 $K\leqslant 499$.

(2) 若 $f(n)=n$,则必有 $n\leqslant 2000$.

设 $$n=2000-4k-m,$$

则有

$$1992-m=2000-4k-m,$$

因此

$$k=2,$$

从而

$$n=1992-m,m\in\{0,1,2,3\},$$

所以满足 $f(n)=n$ 的全部E 整数n 是 1992,1991,1990,1989.

6·138 S 是所有非负整数的集合.求所有函数 $f:S\to S$,$g:S\to S$,$h:S\to S$ 满足下述两个条件:

(1) 对任何 $m,n\in S$,$f(m+n)=g(m)+h(n)+2mn$.

(2) $g(1)=h(1)=1$.

(韩国数学奥林匹克,1994 年)

[解] 在条件(1)中,令 $n=0$,有

$$f(m)=g(m)+h(0),$$

即

$$g(m)=f(m)-h(0). \quad ①$$

在条件(1)中,令 $m=0$,有

$$f(n)=g(0)+h(n),$$

即

$$h(n)=f(n)-g(0). \quad ②$$

在条件(1)中,令 $m=n=0$,有

$$f(0)=g(0)+h(0). \qquad ③$$

将①、②、③代入条件(1)中,得

$$f(m+n)=f(m)+f(n)+2mn-f(0).$$

(题目中含3个函数的方程,现在已被我们化为只含一个函数的方程了).

在上式中,令 $m=1$,得

$$f(n+1)=f(n)+2n+(f(1)-f(0)).$$

在上式中,依次用 $n-1,n-2,\cdots,0$ 来代替式中的 n,分别得 n 个等式:

$$f(n)=f(n-1)+2(n-1)+(f(1)-f(0)),$$
$$f(n-1)=f(n-2)+2(n-2)+(f(1)-f(0)),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f(2)=f(1)+2\cdot 1+(f(1)-f(0)),$$
$$f(1)=f(0)+2\cdot 0+(f(1)-f(0)).$$

将这 n 个等式相加,得

$$f(n)=f(0)+2\cdot[1+2+\cdots+(n-1)]+n(f(1)-f(0)),$$

即

$$f(n)=n(n-1)+nf(1)-(n-1)f(0). \qquad ④$$

在①式中,令 $m=1$,有

$$g(1)=f(1)-h(0).$$

在②式中,令 $n=1$,有

$$h(1)=f(1)-g(0).$$

利用条件(2),将以上两式化为

$$f(1)=h(0)+1=g(0)+1.$$

于是

$$h(0)=g(0).$$

令

$$h(0)=g(0)=a(a\text{ 为非负整数}),$$

代入③得

$$f(0)=2a,$$

且有

$$f(1)=h(0)+1=a+1,$$

将以上两式代入④得

$$f(n)=n(n-1)+n(a+1)-(n-1)\cdot 2a,$$

即

$$f(n)=n^2-an+2a. \quad ⑤$$

将上式代入①、②分别得

$$g(n)=n^2-an+a \quad ⑥$$

和

$$h(n)=n^2-an+a. \quad ⑦$$

下面我们来讨论 a 的取值范围.

显然,当 n 是非负整数时,如果 $g(n)$ 是非负整数,那么 $f(n)$, $g(n)$,$h(n)$ 都是非负整数.因此,只需对 $g(n)$ 展开讨论.

如果 $a=2k$(k 是非负整数),那么

$$g(n)=n^2-2kn+2k=(n-k)^2-k^2+2k,$$

因此,$g(n)$ 的最小值为

$$g(k)=-k^2+2k,$$

由题意

$$g(k)\geqslant 0,$$

所以

$$k=0,1,2,$$

从而

$$a=0,2,4.$$

如果 $a=2k+1$(k 是非负整数),那么

$$g(n)=n^2-(2k+1)n+(2k+1)$$
$$=\left(n-\frac{2k+1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}(2k+1)^2+(2k+1),$$

注意到 n 是非负整数,因此 $g(n)$ 的最小值为

$$g(k)=g(k+1)=-k^2+k+1$$

由题意

$$g(k)\geqslant 0,$$

即

$$g(k)=-k^2+k+1=-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}\geqslant 0,$$

所以

$$k = 0,1.$$

从而

$$a = 1,3.$$

反过来,当 $a \in \{0,1,2,3,4\}$ 时,经检验可知,函数

$$f(n) = n^2 - an + 2a,$$

$$g(n) = h(n) = n^2 - an + a,$$

符合题目的所有条件.

因此,本题所求的全部解是

$$f(n) = n^2 - an + 2a,$$

$$g(n) = h(n) = n^2 - an + a,$$

其中 $a \in \{0,1,2,3,4\}$.

6·139 求一个函数 $f(m,n)$,满足下述条件:对每对非负整数 m,n,

(1) $2f(m,n) = 2 + f(m+1,n-1) + f(m-1,n+1)$, $(m \geqslant 1, n \geqslant 1)$;

(2) $f(m,0) = f(0,n) = 0$.

(韩国数学奥林匹克,1993年)

[解] 由(1)

$$f(m,n) - f(m-1,n+1)$$
$$= f(m+1,n-1) - f(m,n) + 2,$$

在上式中,用 $m-k, n+k$(非负整数 $k \leqslant m$)分别代替 m,n,得

$$f(m-k,n+k) - f(m-k-1,n+k+1)$$
$$= f(m-k+1,n+k-1) - f(m-k,n+k) + 2,$$

在上式中依次令 $k = 0,1,2,\cdots,m-1$,得 m 个等式,再把这 m 个等式相加,得

$$\sum_{K=0}^{m-1}\{f(m-k,n+k) - f(m-k-1,n+k+1)\}$$
$$= \sum_{K=0}^{m-1}\{f(m-k+1,n+k-1) - f(m-k,n+k) + 2\},$$

利用(2),并化简,有

$$f(m,n) = f(m+1,n-1) - f(1,n+m-1) + 2m,$$

即

$$f(m+1,n-1)-f(m,n)=f(1,n+m-1)-2m, \quad ①$$

在上式中,我们用 $m+k, n-k$(非负整数 $k \leqslant n$)分别代替 m,n,有

$$f(m+k+1,n-k-1)-f(m+k,n-k)$$
$$=f(1,n+m-1)-2(m+k),$$

在上式中依次令 $k=0,1,2,\cdots,n-1$,得到 n 个等式,再把这 n 个等式相加,得

$$\sum_{K=0}^{n-1}\{f(m+k+1,n-k-1)-f(m+k,n-k)\}$$
$$=nf(1,n+m-1)-2\sum_{K=0}^{n-1}(m+k),$$

利用(2),并化简,有

$$-f(m,n)=nf(1,n+m-1)-2mn-n(n-1),$$

即

$$f(m,n)=(2m+n-1)n-nf(1,n+m-1). \quad ②$$

在 ① 式中,我们再用 $m-k, n+k$(非负整数 $k \leqslant m$)分别代替 m,n,有

$$f(m-k+1,n+k-1)-f(m-k,n+k)$$
$$=f(1,n+m-1)-2(m-k),$$

在上式中,依次令 $k=1,2,\cdots,m$,得到 m 个等式,再把这些等式相加,有

$$\sum_{K=1}^{m}\{f(m-k+1,n+k-1)-f(m-k,n+k)\}$$
$$=mf(1,n+m-1)-2\sum_{K=1}^{m}(m-k),$$

利用(2),并化简,得

$$f(m,n)=mf(1,n+m-1)-m(m-1) \quad ③$$

②$\cdot m+$③$\cdot n$,得

$$(m+n)f(m,n)=mn(m+n),$$

因此当 m,n 不全为零时,我们有

$$f(m,n)=mn$$

由(2)可知,上式对 $m=0$ 且 $n=0$ 也成立.

经检验,函数 $f(m,n)=mn$ 确实满足题目中的所有条件.

因此,所求函数为 $f(m,n)=mn$.

第5节 有理数集上的函数方程

6・140 求所有满足 $f(1)=2$ 与

$f(xy)\equiv f(x)f(y)-f(x+y)+1, x,y\in Q$ 的函数 $f:Q\to Q$(Q 为有理数集).

(卢森堡国际数学竞赛,1980年)

[**解**] 在原恒等式中令 $y=1$,便得到恒等式

$$f(x)\equiv f(x)f(1)-f(x+1)+1, x\in Q.$$

即
$$f(x+1)\equiv f(x)+1.$$

从而,对所有 $x\in Q, n\in Z$,有 $f(x+n)=f(x)+n$.
因此

$$f(n)=f(1)+n-1=n+1.$$

其次,在原恒等式中取 $x=\frac{1}{n}, y=n, x\in Z$,得到

$$f\left(\frac{1}{n}\cdot n\right)=f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f(n)-f\left(\frac{1}{n}+n\right)+1,$$

从而
$$2=f\left(\frac{1}{n}\right)(n+1)-f\left(\frac{1}{n}\right)-n+1,$$

即
$$f\left(\frac{1}{n}\right)=1+\frac{1}{n}.$$

最后取 $x=p, y=\frac{1}{q}, p\in Z, q\in N$,得到

$$f\left(p\cdot\frac{1}{q}\right)=f(p)\cdot f\left(\frac{1}{q}\right)-f\left(p+\frac{1}{q}\right)+1.$$

由此得到
$$f\left(\frac{p}{q}\right)=(p+1)\left(\frac{1}{q}+1\right)-\frac{1}{q}-p$$
$$=\frac{p}{q}+1.$$

于是,只有函数 $f(x)=x+1$ 满足题中所有条件.

6・141 设 Q^+ 是全体正有理数所成的集合,试作函数 $f:Q^+\to Q^+$,使得对任何 $x,y\in Q^+$,都有

$$f(xf(y)) = f(x)/y.$$

（第 31 届国际数学奥林匹克，1990 年）

［解］ 设 f 满足

$$f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y}, x, y \in Q^+. \quad ①$$

若 $y_1, y_2 \in Q^+$，使得 $f(y_1) = f(y_2)$，则由 ① 得

$$\frac{f(x)}{y_1} = f(xf(y_1)) = f(xf(y_2)) = \frac{f(x)}{y_2},$$

因为 $f(x) \neq 0$，所以 $y_1 = y_2$. 可见 f 是 $Q^+ \to Q^+$ 的单射.

在 ① 中令 $x = y = 1$，得 $f(f(1)) = f(1)$. 因为 f 为单射，所以 $f(1) = 1$.

于是，对任何 $y \in Q^+$，我们由 ① 可得

$$f(f(y)) = \frac{f(1)}{y} = \frac{1}{y}. \quad ②$$

$$f\left(\frac{1}{y}\right) = f(f(f(y))),$$

由 ② 得

$$f(f(f(y))) = \frac{1}{f(y)},$$

因此 $$f\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{f(y)}. \quad ③$$

在 ① 中令 $y = f\left(\frac{1}{t}\right)$，得

$$f(xt) = f\left(x \cdot f\left(f\left(\frac{1}{t}\right)\right)\right) = f(x \cdot f(y)) = \frac{f(x)}{y}$$

$$= \frac{f(x)}{f\left(\frac{1}{t}\right)} = f(x) \cdot f(t),$$

即 $$f(xt) = f(x) \cdot f(t) \quad ④$$

反过来，容易证明，当函数 $f: Q^+ \to Q^+$ 满足 ② 与 ④ 时，f 也满足 ①.

设 P 是全体素数所成的集合，对于任一自然数 k，P_k 表示从小到大排列的第 k 个素数. 我们定义函数 $g: P \to Q^+$ 如下：

$$g(p_k)=\begin{cases}p_{k+1}, k\text{ 为奇数时;}\\ \dfrac{1}{p_{k-1}}, k\text{ 为偶数时.}\end{cases}$$

利用函数 g,定义函数 $f: Q^+ \to Q^+$ 如下:若 $x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$,其中 α_i 是整数,$i = 1,2,\cdots,s$,则定义

$$f(x) = (g(p_1))^{\alpha_1} \cdot (g(p_2))^{\alpha_2} \cdots (g(p_s))^{\alpha_s}. \qquad ⑤$$

下面我们来证明上面定义的 $f(x)$,符合本题的要求.

事实上,由于 α_i 可以为正整数、负整数或零,因此⑤式对所有 $x \in Q^+$ 都有意义.

显然⑤式定义的 $f(x)$ 满足④式.

注意到,根据 f,g 的定义可得

$$f(g(p_k)) = g(g(p_k)) = \frac{1}{p_k}(k = 1,2,\cdots),$$

因此 $f(f(x)) = (f(g(p_1)))^{\alpha_1} \cdot (f(g(p_2)))^{\alpha_2} \cdot \cdots \cdot (f(g(p_s)))^{\alpha_s}$

$$= \left(\frac{1}{p_1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{1}{p_2}\right)^{\alpha_2} \cdot \cdots \cdot \left(\frac{1}{p_s}\right)^{\alpha_s}$$

$$= \frac{1}{p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \cdots \cdot p_s^{\alpha_s}}$$

$$= \frac{1}{x}.$$

所以⑤式定义的 f 也满足②式.

于是由⑤式定义的 f 必满足①式.

6・142　记 p 是正有理数集合,令 $f: p \to p$ 满足

$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$,　$f(2x) = 2f(f(x)), x \in p$. 试求函数 $f(x)$,并说明理由.

(第4届爱尔兰数学奥林匹克,1991年)

[解]　令 $x = 1$,则 $f(1) + f\left(\frac{1}{1}\right) = 1$.

所以　$f(1) = \frac{1}{2}$.

$$f(2) = 2f(f(1)) = 2f\left(\frac{1}{2}\right).$$

在 $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$ 中,令 $x=2$ 得

$$f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right)=1.$$

所以 $\quad 3f\left(\frac{1}{2}\right)=1,$

从而得 $\quad f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}, f(2)=\frac{2}{3}.$

又 $\quad f(4)=2f(f(2))=2f\left(\frac{2}{3}\right),$

$$f(1)=2f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=2f\left(\frac{1}{3}\right).$$

因此 $\quad f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{4}.$

$$f\left(\frac{2}{3}\right)=2f\left(f\left(\frac{1}{3}\right)\right)=2f\left(\frac{1}{4}\right).$$

于是由 $\quad f(4)+f\left(\frac{1}{4}\right)=1$ 可得

$$5f\left(\frac{1}{4}\right)=1, f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{5}.$$

$$f(4)=\frac{4}{5}, f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{5}.$$

我们猜想 $\quad f(x)=\frac{x}{x+1}.$

经检验,函数 $f(x)=\frac{x}{x+1}$ 满足

$$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=1$$

和 $\quad f(2x)=2f(f(x)).$

因此,函数 $f(x)=\frac{x}{x+1}$ 是问题的一个解.

现在,我们来证明满足条件的函数是惟一的.

设 $x=\frac{p}{q}$ 为一正有理数,其中 p,q 是正整数,且 $(p,q)=1$.

我们令 $t(x)=p+q$,显然 $t(x)\geqslant 2$ 并且

$t(x)=2\Rightarrow x=1.$

$t(x)=3\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$ 或 2.

$t(x)=4\Rightarrow x=\dfrac{1}{3}$ 或 3.

$t(x)=5\Rightarrow x=\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{2}$ 或 4.

当 $t(x)\leqslant 3$ 时,我们已经证得 $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$.

假设当 $t(x)<n$ 时,我们有 $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$.

当 $t(x)=n$ 时,分以下几种情形讨论:

情形(1). p,q 为奇数且 $p<q$.

此时,令 $y=\dfrac{p}{q-p}$,则

$$t(y)\leqslant p+(q-p)=q<p+q=t(x).$$

于是,由归纳假设可得

$$f(y)=\frac{p}{(q-p)+p}=\frac{p}{q}.$$

由于 $q-p$ 为偶数,因此

$$2y=\frac{2p}{q-p}=\frac{p}{\frac{q-p}{2}}.$$

且 $f(2y)=\dfrac{2y}{2y+1}=\dfrac{2p}{p+q}$.

又由 $f(2y)=2f(f(y))$ 得

$$\frac{p}{p+q}=2f\left(\frac{p}{q}\right).$$

所以 $f\left(\dfrac{p}{q}\right)=\dfrac{p}{p+q}$,

即 $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$.

情形(2). p,q 全为奇数且 $q<p$.

由(1)知 $f\left(\dfrac{q}{p}\right)=\dfrac{q}{p+q}$,

再由 $f\left(\dfrac{q}{p}\right)+f\left(\dfrac{p}{q}\right)$

得 $f\left(\frac{p}{q}\right)=1-\frac{q}{q+p}=\frac{p}{p+q}$,

即 $f(x)=\frac{x}{x+1}$.

这样,p,q 都为奇数时,格式成立.

情形(3). p,q 之一为偶数.

此时,不妨设 p 为偶数,记 $p_1=p,q_1=q,p_1=2^kp_2$(k 为一个正整数,p_2 为奇数),则

$$f\left(\frac{p}{q}\right)=f\left(2^k\frac{p_2}{q}\right)=2f\left(f\left(\frac{2^{k-1}p_2}{q}\right)\right).$$

又因为 $t(2^{k-1}p_2/q)=2^{k-1}p_2+q<t(x)$,

所以 $f(2^{k-1}p_2/q)=2^{k-1}p_2/(2^{k-1}p_2+q)$.

当 $y=2^{k-1}p_2/(2^{k-1}p_2+q)$ 时,因为 p,q 互素,所以 $2^{k-1}p_2,2^{k-1}p_2+q$ 也互素,于是可得

$$\begin{aligned}t(y)&=2^{k-1}p_2+(2^{k-1}p_2+q)\\&=2^kp_2+q=p+q=n.\end{aligned}$$

若 $k>1$,则 $2^{k-1}p_2$ 也为偶数,重复以上过程可得

$$\begin{aligned}f\left(\frac{p}{q}\right)&=2f(2^{k-2}p_2/(2^{k-2}p_2+q))\\&=2^2f(2^{k-2}p_2/((2^{k-1}+2^{k-2})p_2+q)\\&=\cdots\cdots\\&=2^kf(p_2/((2^k-1)p_2+q).\end{aligned}$$

令 $Z=p_2/((2^k-1)p_2+q)$,则

$$\begin{aligned}t(Z)&=p_2+(2^k-1)p_2+q\\&=2^kp_2+q=p+q=n.\end{aligned}$$

记 $Z=p_2/q_2$,其中 $q_2=(2^k-1)p_2+q$ 为偶数

记 $q_2=2^lq_3$,其中 l 为一个正整数,q_3 为一奇数.

对 q_2/p_2 进行同样讨论可知

$$\begin{aligned}f(Z)&=1-f(1/Z)\\&=1-2^lf(q_3/((2^l-1)q_3+p_2))\end{aligned}$$

令 $p_3=(2^l-1)q_3+p_2$,则 p_3 为偶数,且

$$p_3+q_3=2^lq_3+p_2=q_2+p_2=p+q=n.$$

对 $W = q_3/p_3$ 作同样的讨论.

记 $p_3 = 2^m p_4$ 可知

$$
\begin{aligned}
f(W) &= 1 - f(1/W) \\
&= 1 - 2^m f(p_4/((2^m - 1)p_4 + q_3)) \\
&= 1 - 2^m f(p_4/q_4).
\end{aligned}
$$

其中 $q_4 = (2^m - 1)p_4 + q_3$ 为偶数,且 $t(p_4/q_4) = p_4 + q_4 = n$.

继续这一过程可得一序列:$p_1/q_1, p_2/q_2, p_3/q_3, p_4/q_4, p_5/q_5$,…… 其中 $p_i + q_j = n, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$,…… 是偶数,并且

$$
\begin{aligned}
& p_1 = 2^{k_1} p_2, q_2 = 2^{k_2} q_3, p_3 = 2^{k_3} p_4, \\
& q_4 = 2^{k_4} q_5, p_5 = 2^{k_5} p_6, q_6 = 2^{k_6} q_7, \cdots\cdots \\
& f(p_1/q_1) = 2^{k_1} f(p_2/q_2), \\
& f(p_2/q_2) = 1 - 2^{k_2} f(q_3/p_3), \\
& f(q_3/p_3) = 1 - 2^{k_3} f(p_4/q_4), \\
& f(p_4/q_4) = 1 - 2^{k_4} f(q_5/p_5), \\
& \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots
\end{aligned}
$$

集合$\{a/b \mid a, b$ 为正整数,$(a,b) = 1$,且 $a + b = n\}$ 为有限集,而 $p_1/q_1, p_2/q_2, p_3/q_3, \cdots$ 是无限的,因此,其中必有相同的项,即存在正整数 $r, s(r < s)$,使 $p_r/q_r = p_s/q_s$.

不妨设 r 为奇数(r 为偶数时,可进行类似讨论),我们令

$$
\begin{aligned}
& W_j = f(p_j/q_j) \text{ 可得} \\
& W_r = 2^{k_r} W_{r+1}, \\
& 1 - W_{r+1} = 2^{k_r+1}(1 - W_{r+2}), \\
& W_{r+2} = 2^{k_{r+2}} W_{r+3}), \\
& 1 - W_{r+3} = 2^{k_{r+3}}(1 - W_{r+4}), \cdots\cdots
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
W_r &= 2^{kr}[2^{k_{r+1}} W_{r+2} - (2^{k_{r+1}} - 1)] \\
&= 2^{k_r + k_{r+1} + k_{r+2} + k_{r+3}} W_{r+4} - 2^{k_r + k_{r+1} + k_{r+2}}(2^{k_{r+3}} - 1) - 2^{k_r}(2^{k_{r+1}} \\
&\quad - 1) \\
&= \cdots\cdots \\
&= 2^{k_r + k_{r+1} + \cdots + k_{s-1}} W_s - L,
\end{aligned}
$$

其中 L 为一个整数.

因为 $W_s = W_r$，且系数 $2^{k_r+k_{r+1}+\cdots+k_s} \neq 1$，所以，$W_r$ 的表示惟一. 即函数值 $f(pr/qr)$ 惟一确定.

又因为可从 $f(pr/qr)$ 开始可以推出 $f(p_{r-1}/q_{r-1})$，$f(p_{r-2}/q_{r-2})$，… 以及 $f(p_{r+1}/q_{r+1})$…… 故序列 $f(p_j/q_j)$ 是惟一确定的.

从而问题的解惟一.

因为 $W_j = p_j/p_j + q_j$ 是一个解，并且又是惟一解. 所以 $f(p/q) = p/(p+q)$

故问题仅有惟一解 $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

6・143　设函数 $f(x,y)$ 定义在所有有理数对的集合上，只取正值并且满足下述 3 个恒等式

$$f(xy,z) \equiv f(x,z)f(y,z);$$
$$f(z,xy) \equiv f(z,x)f(z,y);$$
$$f(x,1-x) \equiv 1, x,y,z \in Q.$$

则　$f(x,x) \equiv 1; f(x,-x) \equiv 1, f(x,y)f(y,x) \equiv 1, x,y \in Q.$

（波兰数学奥林匹克，1977 年）

[证]　在第一个恒等式中取 $x = y = 0$ 与 $x = y = 1$，则得到 $f(0,z) = 1$ 与 $f(1,z) = 1$. 其次，取 $x = y = -1$，则得到

$$1 = f(1,z) = f(-1,z)f(-1,z) = (f(-1,z))^2,$$

因此，$f(-1,z) = 1$. 同理，由第二个恒等式可得 $f(z,0) = f(z,1) = f(z,-1) = 1$，由此得到

$$f(0,0) = 1, f(0,z)f(z,0) = 1.$$

下面证明，恒等式对非零的 x 与 y 成立. 当 $x \neq 0$ 时有　$1 = f(1,z) = f(x,z)f\left(\dfrac{1}{x},z\right)$,

因此　$f(x,z) = \dfrac{1}{f\left(\dfrac{1}{x},z\right)}$,

其次，我们得到

$$1 = \frac{1}{f(x,1-x)} = f\left(\frac{1}{x},1-x\right) = f\left(\frac{1}{x},\frac{1-x}{x}\cdot x\right)$$
$$= f\left(\frac{1}{x},\frac{1-x}{x}\right)f\left(\frac{1}{x},x\right).$$

但由于

$$f\left(\frac{1}{x},\frac{1-x}{x}\right)=f\left(\frac{1}{x},(-1)\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$=f\left(\frac{1}{x},-1\right)\cdot f\left(\frac{1}{x},1-\frac{1}{x}\right),$$

所以 $f\left(\frac{1}{x},x\right)=1.$

于是有 $f(x,x)=\dfrac{1}{f\left(\frac{1}{x},x\right)}=1,$

$$f(x,-x)=f(x,x)\cdot f(x,-1)=1.$$

最后,当 $x\neq 0,y\neq 0$ 时,有

$$f(x,y)=f(x,y)f\left(\frac{1}{y},y\right)=f\left(\frac{x}{y},y\right)=f\left(\frac{x}{y},y\right)f\left(\frac{x}{y},\frac{x}{y}\right)$$

$$=f\left(\frac{x}{y},x\right)=f\left(\frac{x}{y},x\right)f\left(\frac{1}{x},x\right)$$

$$=\frac{1}{f(y,x)}.$$

因此 $f(x,y)f(y,x)=1.$

第6节 实数集上的函数方程

6·144 求所有满足

$$f(x+y)\equiv f(x)+f(y)+2xy,x,y\in R$$

的任意次可微的函数 $f:R\to R$.

(比利时数学奥林匹克,1977年)

[解] 在题中的恒等式中令 $x=y=0$ 得到 $f(0)=2f(0)$,即 $f(0)=0$.对任意 $x\in R$,由恒等式

$$f(x+y)-f(x)\equiv f(y)+2xy,y\in R$$

得到 $f'(x)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(x+y)-f(x)}{y}\equiv\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(y)+2xy}{y}$

$$=2x+\lim_{y\to 0}\frac{f(y)-f(0)}{y}=2x+f'(0).$$

因此,所求的函数满足

$$f(x)=f(x)-f(0)=\int_0^x f'(x)dx=x^2+f'(0)x.$$

注意,对每个 $a\in R$,函数 $f(x)=x^2+ax$ 满足题中的恒等式.

6·145 证明:不存在连续函数 $f:R\to R$,使得当且仅当满足 $f(x+1)$ 为无理数的 $x\in R$,有 $f(x)$ 是有理数.

(罗马尼亚数学奥林匹克,1979年)

[证] 设题中所说的函数 $f(x)$ 存在,考虑连续函数

$$g(x)=f(x+1)-f(x) \text{ 与 } h(x)=f(x+1)+f(x)$$

它们不可能同时为常量,否则

$$f(x)\equiv\frac{h(x)-g(x)}{2}$$

就成为常量了.不妨设 $h(x)$ 不是常量函数,即存在 x_1 与 x_2,使得 $h(x_1)<h(x_2)$.于是,存在有理数 $r\in[h(x_1),h(x_2)]$,由函数 $h(x)$ 的连续性,所以存在 $x_0\in[x_1,x_2]$ 使得 $h(x_0)=r$,于是 $f(x_0+1)+f(x_0)=r$.因此 $f(x_0+1)$ 与 $f(x_0)$ 要么都是有理数,要么都是无理数,矛盾.

6·146 设 $I=(0,1]$,对给定的 $a\in(0,1)$,定义函数 $f:I\to I$ 如下:

$$f(x)=\begin{cases}x+(1-a), & \text{当 } 0<x\leqslant a \text{ 时},\\ x-a, & \text{当 } a<x\leqslant 1 \text{ 时}.\end{cases}$$

证明:对任意区间 $J\subset I$,存在 $n\in N$,使得交集 $f^n(J)\cap J$ 非空.

(波兰数学奥林匹克,1976年)

[证] 设存在长为 d 的区间 $J\subset I$,使得对任意 $n\in N$,都有 $f^n(J)\cap J=\phi$,则对任意 $m,n\in N$,有

$f^{m+n}(J)\cap f^m(J)=f^m(f^n(J)\cap J)=f^m(\phi)=\phi$,因此,集合 $f(J),f^2(J),\cdots,f^n(J)$ 两两不交.另一方面,对任意 $n\in N$,每个集合 $f^n(J)$ 是 I 中若干个长度之和为 d 的区间之并,因此,它们不可能都是两两不交的,矛盾.结论证毕.

6·147 求所有满足

$xf(y)+yf(x)\equiv(x+y)f(x)f(y)$,$x,y\in R$ 的函数 $f:R\to R$.

(保加利亚数学竞赛,1968年)

[解]　在题中的恒等式中令 $x = y = 1$,则得 $2f(1) = 2(f(1))^2$,即 $f(1) = 0$ 或 $f(1) = 1$.分别考察这两种情形如下:

(1) 如果 $f(1) = 0$,则在恒等式中令 $y = 1$,使得 $f(x) \equiv 0$.

(2) 如果 $f(1) = 1$,则仍令 $y = 1$,得到

$$f(x) + x \equiv (x+1)f(x).$$

即　$x(f(x) - 1) \equiv 0.$

因此对任意 $x \neq 0$,都有 $f(x) = 1$.于是,关于函数 $f(x)$ 有两种可能:要么 $f(x) \equiv 0$,要么

$$f(x) = \begin{cases} 1, 当\ x \neq 0\ 时, \\ a, 当\ x = 0\ 时. \end{cases}$$ 其中 $a \in R$.经验证,它们满足题中条件.

6·148　求所有满足

$$\sin x + \cos y \equiv f(x) + f(y) + g(x) - g(y), x, y \in R$$ 的函数 $f(x)$ 与 $g(x)(x \in R)$.

(全苏数学奥林匹克,1984 年)

[解]　在恒等式中,令 $x = y$ 得到

$$f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{2}.$$

于是　$\sin x + \cos y \equiv \dfrac{\sin x + \cos x}{2} + \dfrac{\sin y + \cos y}{2} + g(x) - g(y)$

即　$g(x) - \dfrac{1}{2}\sin x + \dfrac{1}{2}\cos x \equiv g(y) - \dfrac{1}{2}\sin y + \dfrac{1}{2}\cos y.$

记　$h(x) = g(x) - \dfrac{1}{2}\sin x + \dfrac{1}{2}\cos x.$

则对任意 $x, y \in R$ 都有 $h(x) = h(y)$.这表明 $h(x) \equiv C$.因此,满足题中条件的函数对是

$$f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{2}, g(x) = \frac{\sin x - \cos x}{2} + c.$$

其中 c 为常数.

6·149　证明:存在函数 $f: N \to N$ 使得

$$f(f(n)) \equiv n^2, n \in N.$$

(罗马尼亚数学奥林匹克,1978 年)

[证]　设数列 $n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = 5, \cdots$ 依次递增且取遍所有不

代数卷

是整数平方的自然数,令

$$n_{k,m}=(n_k)^{2^m},\text{其中 } k\in N, m\in Z^+.$$

则 $n_{k,m+1}=(n_{k,m})^2$,且每个 $n>1$ 都对应惟一一个数对 k, m,使得 $n=n_{k,m}$ 定义函数 $f(n)$ 如下:

$$f(1)=1, f(n_{k,m})=\begin{cases}n_{k+1,m}, \text{当 } k \text{ 为奇数时},\\ n_{k-1,m+1}, \text{当 } k \text{ 为偶数时},\end{cases}$$ 其中 $k\in N, m\in Z^+$,则

$$f(f(n))\equiv n^2, n\in N.$$

6・150　f 和 g 是 $(-\infty,+\infty)$ 上定义的实函数,而且对所有的 x 和 y 成立方程:

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)g(y).$$

试证若 $f(x)$ 不恒为 0,且 $|f(x)|\leqslant 1$ 对所有 x 成立,则有
$|g(x)|\leqslant 1$ 对所有 y 都成立.

(第 14 届国际数学奥林匹克,1972 年)

[证]　设 $M=\sup|f(x)|$,则由题设 $M>0$.对任意 δ,$0<\delta<M$,可以找到 x,使得

$$|f(x)|>M-\delta.\text{此时对任意 } y,$$
$$\begin{aligned}2M&\geqslant|f(x+y)|+|f(x-y)|\\&\geqslant|f(x+y)+f(x-y)|\\&=2|f(x)||g(y)|\\&\geqslant 2(M-\delta)|g(y)|.\end{aligned}$$

于是 $|g(y)|\leqslant M(M-\delta)^{-1}$.由于 δ 是任意的,故 $|g(y)|\leqslant 1$.

6・151　设 k 是正整数,求一切多项式

$$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n,$$

使得 a_i 是实数 $(i=0,1,2,\cdots,n)$,并且满足等式

$$p(p(x))=[p(x)]^k.$$

(第 7 届加拿大数学奥林匹克,1975 年)

[解]　如果 $p(x)=c$(常数),那么

$$c=c^k.$$

因此,当 $k=1$ 时,$p(x)$ 为任意常数;

当 $k\neq 1$ 时,$p(x)=0$ 或 $p(x)=1$.

如果 $p(x) \neq c$(常数),那么 $p(x)$ 就可取到无穷多个值.这样,就有无穷多个值 y,使得

$$p(y) = y^k.$$

从而对于一切 x,都有

$$p(x) = x^k \qquad (k \geqslant 1).$$

6·152　求所有从实数集到实数集的,满足下列条件的函数 f

(1) $f(x)$ 严格增;

(2) 对所有实数 x, $f(x) + g(x) = 2x$,这里 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数.

(第 1 届亚太地区数学奥林匹克,1989 年)

[解]　我们证明 $f(x) - x = c$,其中 $c = f(0)$.

事实上,若令 $S_c = \{x \mid f(x) - x = c\}$,则 $0 \in s_c$, s_c 非空.

如果 $a \in s_c$,那么 $f(a) = a + c$,从而 $g(a + c) = a$, $f(a + c) = 2(a + c) - a = (a + c) + c$,即 $a + c \in s_c$.

设 $c' < c$,可证 $s_{c'}$ 一定是空集.为此,我们取 $a \in s_c$,若 b 满足 $a \leqslant b < a + (c - c')$,则 $a + c' \leqslant b + c' < a + c = f(a) \leqslant f(b)$,所以 $b \notin s_c'$.

如果 b 满足 $a + (k - 1)(c - c') \leqslant b < a + k(c - c')$ 时, $b \notin s_{c'}$,那么在 $a + k(c - c') \leqslant b < a + (k + 1)(c - c')$ 时, $(a + c) + (k - 1)(c - c') \leqslant b + c' < (a + c) + k(c - c')$.由归纳假设(用 $a + c \in s_c$ 代替 a) $b + c' \notin s_{c'}$.从而 $b \notin s_{c'}$ ($b \in s_{c'} \Rightarrow b + c' \in s_{c'}$).于是所有 $\geqslant a$ 的实数都 $\notin s_{c'}$.

如果有实数 $b \in s_{c'}$,那么 $b + c', b + 2c', \cdots, \in s_{c'}$,但这串数中必有 $\geqslant a$ 的,这与上面所证矛盾.因此 $s_{c'}$ 是空集.

如果 $c' > c$ 并且 $s_{c'}$ 不是空集,那么上面的证明表明 s_c 将是空集,矛盾.因此,对于一切 $c' \neq c$, $s_{c'}$ 是空集.换言之, s_c 包含所有实数,因此, $f(x) = x + c$.

6·153　证明:如果函数 $f: R \to R$ 满足下面两个恒等式中的一个,则必满足另一个:

$$f(x + y) \equiv f(x) + f(y), x, y \in R,$$

$$f(xy + x + y) \equiv f(xy) + f(x) + f(y), x, y \in R.$$

(前南斯拉夫数学奥林匹克,1979 年)

代数卷

[证] 如果函数 $f(x)$ 满足第一个恒等式,则

$$f(xy+x+y)\equiv f(xy)+f(x+y)$$
$$\equiv f(xy)+f(x)+f(y),x,y\in R,$$

即 $f(x)$ 也满足第二个恒等式.现在设函数 $f(x)$ 满足第二个恒等式,其中令 $y=u+v+uv$,得到

$$f(x+u+vuv+xu+xv+xuv)$$
$$\equiv f(x)+f(u+v+uv)+f(xu+xv+xuv).$$

对 $f(u+v+uv)$ 应用恒等式,上式化为

$$f(x+u+v+xu+xv+uv+xuv)$$
$$\equiv f(x)+f(u)+f(v)+f(uv)+f(xu+xv+xuv). \quad ①$$

在恒等式①中变换变量 x,u 的位置得到

$$f(x+u+v+xu+xv+uv+xuv)$$
$$\equiv f(x)+f(u)+f(v)+f(xv)+f(xu+uv+xuv), \quad ②$$

由恒等式①和②,得到

$$f(uv)+f(xu+xv+xuv)\equiv f(xv)+f(xu+uv+xuv). \quad ③$$

在恒等式③中令 $x=1$,便有

$$f(uv)+f(u+v+uv)\equiv f(v)+f(u+2uv),$$

即 $f(uv)+f(u)+f(v)+f(uv)\equiv f(v)+f(u+2uv).$

从而 $f(u)+2f(uv)\equiv f(u+2uv). \quad ④$

在恒等式④中令 $u=0$,得 $f(0)=3f(0)$,

因此 $f(0)=0. \quad ⑤$

在恒等式④中令 $u=-1$,得到 $f(-u)\equiv f(u)+2f(-u)$,因此

$$f(-u)=-f(u).$$

在恒等式④中令 $v=-\frac{1}{2}$,得到

$$f(0)\equiv f(u)+2f\left(-\frac{u}{2}\right), \quad ⑥$$

由式⑤与⑥,得到

$$f(u)\equiv 2f\left(\frac{u}{2}\right),\text{即 } f(2u)\equiv 2f(u). \quad ⑦$$

由恒等式⑦、④有

$$f(u+2uv)\equiv f(u)+f(2uv),$$

在此方程中令 $2v=t$,得到

$$f(u+ut)\equiv f(u)+f(ut). \tag{⑧}$$

于是,当 $x\neq 0$ 时,由恒等式⑧,有

$$f(x+y)\equiv f\left(x+x\cdot\frac{y}{x}\right)\equiv f(x)+f\left(x\cdot\frac{y}{x}\right)$$
$$\equiv f(x)+f(y).$$

而 $x=0$ 时,由式⑤,上一恒等式成立.这就证明,函数 $f(x,y)$ 满足第一个恒等式.

6・154 求所有满足

$$f(x)+f^{-1}(x)\equiv 2x, x\in R$$

的单调可逆函数 $f:R\to R$.

(法国数学奥林匹克,1979年)

[解] 设 $f(x)$ 满足题中条件,考虑函数 $g(x)=f(x)-x$.首先证明对任意 $k\in Z^+$,有

$$f(x+kg(x))\equiv x+(k+1)g(x), x\in R.$$

当 $k=0$ 时,恒等式 $f(x)\equiv x+g(x)$ 成立,设恒等式对某个 $k\in N$ 成立,即有

$$f(x+kg(x))\equiv x+(k+1)g(x).$$

由此知 $f^{-1}(x+(k+1)g(x))\equiv x+kg(x)$,

由题中条件可知,对所有 $x\in R$,有

$$\begin{aligned}f(x+(k+1)g(x))&\equiv 2(x+(k+1)g(x))-f^{-1}(x+(k+1)g(x))\\&\equiv 2(x+(k+1)g(x))-(x+kg(x))\\&\equiv x+(k+2)g(x).\end{aligned}$$

即恒等式对 $k+1$ 也成立.由此还推知,对所有 $k\in N$ 有恒等式

$$f^{-1}(x+kg(x))\equiv x+(k-1)g(x), x\in R. \tag{①}$$

同理可证,对所有 $k\in Z^+$,有

$$f^{-1}(x-(k-1)g(x))\equiv x-kg(x), x\in R.$$

由此得到,对所有 $k\in N$,有

$$f(x-kg(x))\equiv x-(k-1)g(x), x\in R. \tag{②}$$

其次,注意函数 $f(x)+f^{-1}(x)\equiv 2x$ 是严格递增的,而由 $f(x)$ 单调可逆可知,$f(x)$ 是严格单调的.由于 $f(x)$ 与 $f^{-1}(x)$ 同增减,所以 $f(x)$ 是严格递增的,从而,当 k 是非零整数时,$f^k(x)$ 也是严格递增的.最后

证明 $g(x)$ 是常量函数,否则,存在 $x_1, x_2 \in R, x_1 \neq x_2$ 使得 $g(x_1) < g(x_2)$. 由此,存在 $k \in N$ 使得

$$k(g(x_2) - g(x_1)) > |x_2 - x_1| > 0,$$

即 $\quad x_1 - kg(x_1) > x_2 - kg(x_2)$,

或 $\quad x_2 + kg(x_2) > x_1 + kg(x_1)$.

由式②,当 $i = 1,2$ 时,有

$$\begin{aligned} f^{-k}(x_i - kg(x_i)) &\equiv f^{-k+1}(x_i + (-k+1)g(x_i)) \\ &\equiv f^{-k+2}(x_i + (-k+2)g(x_i)) \\ &\equiv \cdots \equiv f^{-1}(x_i - g(x_i)) \\ &\equiv x_i. \end{aligned}$$

因此推得 $x_1 > x_2$,与 $x_2 - x_1 > 0$ 矛盾.同理可证,后一情形也不可能.这就证明,$g(x) \equiv c$,从而

$$f(x) \equiv x + c, x \in R.$$

注意,对任意 $c \in R$,函数 $f(x) \equiv x + c$ 满足题中条件.

6・155 (1) 证明如果连续函数 $f: R \to R$ 满足

$$f(f(f(x))) \equiv x, x \in R,$$

则对任意 $x \in R$ 都有

$$f(x) = x.$$

(2) 举出满足条件 $g(x) \neq x$ 与 $g(g(g(x)))$, $x \in R$ 的(间断)函数 $g: R \to R$ 的例子.

(罗马尼亚数学奥林匹克,1982 年)

[证] (1) 首先证明函数 $f(x)$ 是 $R \to R$ 的单射,即对任意的 $x, y \in R, x \neq y$,都有 $f(x) \neq f(y)$.

事实上,设对 $x, y \in R, u = f(x) = f(y)$,则

$$x = f^3(x) = f^2(u) = f^3(y) = y.$$

其次证明 $f(x)$ 是严格单调的.否则存在 $x_1 < x_2 < x_3$,使得要么

$$f(x_1) < f(x_2), f(x_2) > f(x_3),$$

要么 $\quad f(x_1) > f(x_2), f(x_2) < f(x_3)$.

无论哪种情形,都有 $u \in R$,它既介于 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 之间,也介于 $f(x_2)$ 与 $f(x_3)$ 之间.这样,由于 $f(x)$ 是连续函数,对区间$[x_1, x_2]$与$[x_2, x_3]$分别应用连续函数的介值定理,便知存在 $x_4 \in (x_1, x_2)$ 与 x_5

$\in (x_2, x_3)$,使得 $f(x_4) = u$ 与 $f(x_5) = u$,不可能.最后证明 $f(x) = x, x \in R$.否则,有 $x_0 \in R$ 使 $f(x_0) \neq x_0$.不妨设 $f(x_0) > x_0$.由于 $f(x)$ 要么是严格递增的,要么是严格递减的,在前一情形下,有

$$x_0 < f(x_0) < f(f(x_0)) = f^2(x_0) < f(f^2(x_0)) = f^3(x_0) = x_0$$

而在后一情形下,有

$$f(x_0) > f^2(x_0).$$

从而 $\quad x_0 = f(f^2(x_0)) > f^2(f^2(x_0)) = f(x_0) > x_0.$

总之都不可能.

(2) 函数

$$g(x) = \begin{cases} x, 如果\ x \notin \{1,2,3\}, \\ 2, 如果\ x = 1, \\ 3, 如果\ x = 2, \\ 1, 如果\ x = 3, \end{cases} \qquad x \in R.$$

满足题中所有条件.

6・156　求所有满足

$$f(xy) \equiv xf(y) + yf(x), x, y > 1$$

的连续函数 $f:(1, +\infty) \to R$.

（奥地利数学奥林匹克,1975 年）

[解]　首先证明对任意 $k > 0$,都有

$$f(x^k) \equiv kx^{k-1}f(x), 其中\ x > 1.$$

证明分三步进行:

(1) 设 $k \in N$,如果 $k = 1$,则有 $f(x^1) = 1 \cdot x^0 \cdot f(x)$,设恒等式对某个 $k \in N$ 成立.因为

$$f(x^{k+1}) \equiv f(x^k \cdot x) \equiv x^k f(x) + xf(x^k) \equiv x^k f(x) + xkx^{k-1}f(x) \equiv (k+1)x^k f(x).$$

所以恒等式对 $k+1$ 也成立.于是,恒等式对任意 $k \in N$ 成立.

(2) 设 $k \in Q, k > 0$,即 $k = \frac{p}{q}$,其中 $p, q \in N$,由(1)有

$$f(x^p) \equiv px^{p-1}f(x)$$

$$f((x^{\frac{p}{q}})^q) \equiv q(x^{\frac{p}{q}})^{q-1}f(x^{\frac{p}{q}});$$

这两个恒等式的左端相等,所以有

$$f(x^{\frac{p}{q}}) \equiv \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1} f(x).$$

(3) 设 $k \in R, k > 0$,则取正有理数列 $k_1, k_2, \cdots$ 使得

$$\lim_{n \to \infty} k_n = k.$$

因为函数 $f(x)$ 连续,所以对任意 $x > 1$,有

$$f(x^k) = \lim_{n \to \infty} f(x^{k_n}) = \lim_{n \to \infty} k_n x^{k_n - 1} f(x) = k x^{k-1} f(x).$$

其次,由已证的恒等式容易求出函数 $f(x)$ 的表达式. 事实上,记 $t = \ln x$,即 $x = e^t$,则得到

$$f(x) = f(e^t) = t e^{t-1} f(e) = \ln x \cdot \frac{x}{e} f(e).$$

另一方面,对任意 $c \in R$,函数 $f(x) = cx\ln x$ 满足题中条件.

6・157　设 $f:[0, +\infty) \to [0, +\infty)$ 是连续函数,证明:

(1) 如果 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(f(x)) = +\infty$,则 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

(2) 对函数 $f:(0, +\infty) \to (0, +\infty)$,命题(1) 不成立.

(罗马尼亚数学奥林匹克,1981 年)

[证]　(1) 设 $f = [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ 是连续函数,且

$$\lim_{x \to +\infty} f(f(x)) = +\infty.$$

倘若题中结论不成立,则存在 $N > 0$,使得对任意 $n \in N$,都可找到 $x_n > n$,使得 $f(x_n) \in [0, N]$. 因为函数 $f(f(x))$ 是连续的,即在闭区间 $[0, N]$ 上是有界的. 因此,存在 M,使得当 $f(x) \leqslant N$ 时,都有 $f(f(x)) \leqslant M$. 因此,对每个 $n \in N$,存在 $x_n > n$,使得 $f(f(x_n)) \leqslant M$,与题中条件

$$\lim_{x \to +\infty} f(f(x)) = +\infty$$

矛盾,所以　$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

(2) 反例如下:取 $f(x) \equiv \dfrac{1}{x}$,

则 $f:(0, +\infty) \to (0, +\infty)$,满足 $f(f(x)) \equiv x$,从而

$$\lim_{x \to +\infty} f(f(x)) = +\infty,$$

但是　$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

6・158　设函数 $f: R \to R$ 定义如下:如果 x 为无理数,则 $f(x) = 0$;如果 $p \in Z, q \in Z$,且分数 $\dfrac{p}{q}$ 是既约的,则

$$f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{1}{q^3}.$$

证明:这个函数在每个点 $x=\sqrt{k}$ 处可微,其中 k 是自然数但不是整数的平方.

(罗马尼亚数学奥林匹克,1978 年)

[证] 下面证明,如果 $k\in N$ 不是整数的平方,则 $f'(\sqrt{k})=0$,因为 $\sqrt{k}\notin Q$,故 $f(\sqrt{k})=0$.余下的是证明极限

$$\lim_{x\to\sqrt{k}}\frac{f(x)-f(\sqrt{k})}{x-\sqrt{k}}$$

存在且等于 0.取定任意的 $\varepsilon>0$,则只有有限个分数 $\frac{p}{q}$(从此恒设 $p\in Z,q\in N$,且 $(p,q)=1$)满足条件

$$0<q<\frac{1}{\varepsilon},与\left|\frac{p}{q}-\sqrt{k}\right|<1.$$

因此,存在 $\delta\in(0,1)$,使得在区间 $I_\delta=(\sqrt{k}-\delta,\sqrt{k}+\delta)$ 中没有具有上述性质的分数,如果 $x=\frac{p}{q}\in I_\delta$ 是既约分数,则

$$q\geqslant\frac{1}{\varepsilon},且\left|\sqrt{k}+\frac{p}{q}\right|<\sqrt{k}+(\sqrt{k}+\delta)<2\sqrt{k}+1.$$

因为 $kq^2-p^2\in Z\setminus\{0\}$,所以 $|kq^2-p^2|\geqslant1$,因此有

$$\left|\frac{f(x)}{x-\sqrt{k}}\right|=\left|\frac{f\left(\frac{p}{q}\right)}{\frac{p}{q}-\sqrt{k}}\right|=\frac{1}{q^3}\frac{\left|\sqrt{k}+\frac{p}{q}\right|}{\left|k^2-\frac{p^2}{q^2}\right|}$$

$$=\frac{1}{q}\frac{\left|\sqrt{k}+\frac{p}{q}\right|}{|q^2k-p^2|}<\varepsilon(2\sqrt{k}+1).$$

又如果 $x\in I_\delta\setminus\{\sqrt{k}\}$ 是无理数,则 $f(x)=0$,且

$$\left|\frac{f(x)}{x-\sqrt{k}}\right|=0.$$

结论证毕.

6·159 函数 $f,g:R\to R$ 不是常数并且满足

$$f(x+y) \equiv f(x)g(y)+g(x)f(y), \quad g(x+y) \equiv g(x)g(y)-f(x)f(y), \quad x,y \in R.$$

求 $f(0)$ 与 $g(0)$ 的所有可能值.

（第 5 届美国数学奥林匹克，1976 年）

[解] 在题中两个恒等式中都令 $x=y=0$，得到

$$f(0)=2f(0)g(0) \text{ 与 } g(0)=(g(0))^2-(f(0))^2.$$

因为 $\quad g(0) \neq \frac{1}{2}$，

否则由第二个等式得

$$(f(0))^2=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}<0.$$

所以由第一个等式得到，$f(0)=0$，从而由第二个等式得到 $g(0)=1$ 或 $g(0)=0$. 但是后一情形是不可能的，否则在第一个恒等式中取 $y=0$，便有

$$f(x) \equiv f(x)g(0)+g(x)f(0) \equiv 0,$$

与 $f(x)$ 不是常数的假设矛盾. 于是惟一可能的是 $f(0)=0, g(0)=1$. 函数 $f(x)=\sin x, g(x)=\cos x$ 即是一例.

6・160 (1) 设函数 $f(x)$ 对所有 $x>0$ 有定义，且满足下面条件：

① 函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格递增；

② 对所有 $x>0$，均有 $f(x)>-\frac{1}{x}$；

③ 对所有 $x>0$，均有 $f(x)f\left(f(x)+\frac{1}{x}\right)=1$.

求函数值 $f(1)$.

(2) 给出一个满足(1) 中三个条件的函数.

（全苏数学奥林匹克，1988 年）

[解] (1) 设 $f(1)=a$，则由题目条件 ③，当 $x=1$ 时，有 $af(a+1)=1$. 即 $f(a+1)=\frac{1}{a}$.

再令 $x=a+1$，则由条件 ③ 得到

$$f(a+1)f\left(f(a+1)+\frac{1}{a+1}\right)=1,$$

即 $\quad f\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}\right)=a,$

因此 $f\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}\right)=f(1).$

由条件 ① 得到 $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}=1,$

解得 $a=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$

如果 $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2},$

则 $1<a=f(1)<f(1+a)=\frac{1}{a}<1,$

矛盾.因此 $f(1)=a=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$

(2) 记 $a=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$,并且设 $f(x)=\frac{a}{x}$,则当 $0<x_1<x_2$ 时,

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{a(x_1-x_2)}{x_1x_2}>0,$$

即 $f(x_2)>f(x_1)$.因此 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格递增,即 $f(x)$ 满足条件 ①;由于

$$f(x)+\frac{1}{x}=\frac{3-\sqrt{5}}{2x},$$

所以 $f(x)$ 满足条件 ②;最后,由于

$$f(x)f\left(f(x)+\frac{1}{x}\right)=\frac{a}{x}\cdot\frac{a}{\frac{a}{x}+\frac{1}{x}}=\frac{a^2}{a+1}=1,$$

即 $f(x)$ 满足条件 ③.所以函数

$$f(x)=\frac{a}{x}$$

合乎题中 3 个条件.

6·161 设 R 是全体实数的集合,试求出所有的函数 $f:R\to R$,使得对于 R 中的一切 x 和 y,都有

$$f(x^2+f(y))=y+(f(x))^2.$$

(第 33 届国际数学奥林匹克,1992 年)

[解] 记 $t=f^2(0)$,$f^{(2)}(x)=f[f(x)]$,在函数方程

$$f(x^2+f(y))=y+f^2(x) \qquad ①$$

中令 $x=0$,得

$$f^{(2)}(y)=y+t. \qquad ②$$

从而 ② 及 ①

$$\begin{aligned}x^2+f^{(2)}(y)+t&=f^{(2)}[x^2+f^{(2)}(y)]\\&=f[f(y)+(f(x))^2]\\&=f[f^2(x)+f(y)]\\&=y+[f^{(2)}(x)]^2,\end{aligned}$$

即 $\qquad x^2+y+2t=y+(x+t)^2,$

亦即 $\qquad 2t=t^2+2tx.$

由于此式对任意 $x\in R$ 成立,故必 $t=0$,即 $f(0)=0$,于是 ② 成为

$$f^{(2)}(y)=y \qquad (y\in R), \qquad ③$$

又对任意 $x\geqslant 0$,由 ③ 与 ① 有:

$$\begin{aligned}f(x+y)&=f(x+f^{(2)}(y))\\&=f(y)+f^2(\sqrt{x}).\end{aligned}$$

令 $y=0$,得 $f(x)=f^2(\sqrt{x})\geqslant 0 \quad (x\geqslant 0)$.

所以 $\qquad f(x+y)=f(x)+f(y)\geqslant f(y) \quad (x\geqslant 0)$.

这就是说,$f(x)$ 是 R 上的非降函数,即若 $x\geqslant y$,则 $f(x)\geqslant f(y)$.

最后证明对一切 $x\in R$,有 $f(x)=x$.

事实上,若存在 $z\in R$,使 $f(z)\neq z$,若 $z<f(z)$,则 $f(z)\leqslant f^{(2)}(z)=z$ 矛盾;若 $f(z)<z$,则 $z=f^{(2)}(z)\leqslant f(z)$ 矛盾.

易验证函数 $f(x)=x$ 满足 ①.

6·162 求适合以下条件的所有函数 $f:[1,\infty)\to[1,\infty)$

(1)$f(x)\leqslant 2(x+1)$;

(2)$f(x+1)=\dfrac{1}{x}[(f(x))^2-1]$.

(第9届中国中学生数学冬令营,1994年)

[证] 显然函数 $f(x)=x+1$ 为所求的一个解.

下面证明 $f(x)=x+1$ 是本题的惟一解,即证

$$g(x)=f(x)-(x+1)=0$$

恒成立.

事实上,我们可把 $f(x)$ 的条件

$$\begin{cases}1 \leqslant f(x) \leqslant 2(x+1), \\ f(x+1)=\dfrac{(f(x))^{2}-1}{x}.\end{cases}$$

转变为 $g(x)$ 之条件

$$1 \leqslant g(x)+x+1 \leqslant 2(x+1),$$

$$g(x+1)+x+2=\frac{(g(x)+(x+1))^{2}-1}{x}.$$

即 $\quad -x \leqslant g(x) \leqslant x+1,$

$$\begin{aligned} g(x+1) &= \frac{(g(x))^{2}+2(x+1) g(x)+(x+1)^{2}-1-x(x+2)}{x} \\ &= \frac{(g(x))^{2}+2(x+1) g(x)}{x} \\ &= \frac{g(x)[g(x)+x+x+2]}{x}. \end{aligned}$$

注意到 $\quad g(x)+x \geqslant 0$,所以有

$$g(x)=\frac{x g(x+1)}{g(x)+x+x+2}.$$

因此由 $\quad -x-1 \leqslant g(x) \leqslant x+1$ 有

$$|g(x)| \leqslant x+1.$$

从而有

$$\begin{aligned} |g(x)| &= \frac{x|g(x+1)|}{(g(x)+x)+x+2} \leqslant \frac{x|g(x+1)|}{x+2} \\ &\leqslant \frac{x(x+2)}{x+2}=x. \end{aligned}$$

于是由 $\quad |g(x)| \leqslant x$ 推出 $|g(x+1)| \leqslant x+1$.

从而有

$$|g(x)| \leqslant \frac{x(x+1)}{x+2}.$$

由此得 $\quad |g(x+1)| \leqslant \dfrac{(x+1)(x+2)}{x+3}$

有 $\quad |g(x)| \leqslant \dfrac{\dfrac{x(x+1)(x+2)}{x+3}}{x+2}=\dfrac{x(x+1)}{x+3}.$

设 n 为自然数, $|g(x)| \leqslant \dfrac{x(x+1)}{x+n}$,

则 $$|g(x+1)| \leqslant \frac{(x+1)(x+2)}{x+n+1},$$

于是 $$|g(x)| \leqslant \frac{x|g(x+1)|}{x+2}$$
$$\leqslant \frac{x(x+1)(x+2)}{(x+2)(x+n+1)} = \frac{x(x+1)}{x+n+1}.$$

由数学归纳法原理,对一切自然数都有

$$|g(x)| \leqslant \frac{x(x+1)}{x+n}.$$

取 $n \to \infty$,便推出

$$|g(x)| \leqslant 0, \text{即 } g(x) = 0 \text{ 恒成立}.$$

这就证明了

$$f(x) = x+1$$

为惟一解.

6·163　设 $I=[0,1]$,$G=\{(x,y) \mid x \in I, y \in I\}$,求 G 到 I 的所有映射 f,使得对任何 $x,y,z \in I$,都有

(1) $f(f(x,y),z) = f(x,f(y,z))$;

(2) $f(x,1) = x$,$f(1,y) = y$;

(3) $f(zx,zy) = z^k f(x,y)$,其中 k 是与 x,y,z 都无关的正数.

（第 6 届中国中学生数学冬令营,1991 年）

[解]　由条件(3)和(2)有

$$f(x,y) = y^k f\left(\frac{x}{y},1\right) = y^{k-1}x, 0 \leqslant x \leqslant y, 0 < y, \quad ①$$

$$f(x,y) = x^k f\left(1,\frac{y}{x}\right) = x^{k-1}y, 0 \leqslant y \leqslant x, 0 < x, \quad ②$$

取 $0 < x < y$ 且 x 充分小,使得 $y^{k-1}x < z$,$x < z^{k-1}y$,
由条件(1)和①式又有

$$\begin{aligned} z^{k-1}y^{k-1}x &= f(y^{k-1}x,z) = f(f(x,y),z) \\ &= f(x,f(y,z)) \\ &= f(x,z^{k-1}y) \\ &= (z^{k-1}y)^{k-1}x. \end{aligned}$$

由此得到 $(k-1)(k-2)=0$,解得 $k_1=1$,$k_2=2$.将 k_1 和 k_2 的值分别代入①和②式,得到

$$f_1(x,y)=\begin{cases}x, 当 0\leqslant x\leqslant y, y>0;\\ y, 当 0\leqslant y\leqslant x, x>0.\end{cases} \quad ③$$

$$f_2(x,y)=xy, 当 (x,y)\neq(0,0). \quad ④$$

当 $x=y=0$ 时,由条件(3)直接得到

$$f(0,0)=f(z\cdot 0, z\cdot 0)=z^k f(0,0).$$

其中 $z\in I$ 是任意的,故必有 $f(0,0)=0$. 这意味着对由③和④式给出的函数 $f_1(x,y)$ 和 $f_2(x,y)$ 应补充定义 $f_1(0,0)=0, f_2(0,0)=0$.

容易验证,这两个函数都满足条件(1)～(3).

6・164 求所有在正实数集上定义的函数 f,它们取正实数值,并且满足条件

(1) 对所有正数 x,y, $f(xf(y))=yf(x)$;

(2) 当 $x\to\infty$ 时, $f(x)\to 0$.

(第24届国际数学奥林匹克,1983年)

[解] 在(1)中取 $y=x$,得

$$f(xf(x))=xf(x), \quad ①$$

对于任一 x,令 $xf(x)=a$, ②

则①成为 $f(a)=a$ ③

在(1)中取 $x=y=a$,得

$$f(af(a))=af(a),$$

用③代入得 $f(a^2)=a^2$;

由归纳法,对于所有正整数 n,

$$f(a^n)=a^n. \quad ④$$

在(1)中取 $x=1, y=a$,得

$$f(f(a))=af(1),$$

用③代入得 $a=f(a)=af(1)$;

由②, x 和 $f(x)$ 按定义都是正数,所以 a 也是正数,可用 a 除上式两端得

$$1=f(1). \quad ⑤$$

在(1)中取 $x=a^{-1}, y=a$,得

$$f(a^{-1}f(a))=af(a^{-1}),$$

用③代入得 $f(a^{-1}a)=af(a^{-1})$,

再用⑤代入得 $f(1)=1=af(a^{-1})$,

$$f(a^{-1}) = a^{-1};$$

由归纳法,对于所有正整数 n,

$$f(a^{-n}) = a^{-n}. \qquad ⑥$$

现再利用题设条件(2)来考虑 a 的值.

若 $a > 1$,则由④当 $n \to \infty$ 时

$$a^n \to \infty, f(a^n) \to \infty,\text{与(2)矛盾};$$

若 $a < 1$,则由⑥当 $n \to \infty$ 时

$$a^{-n} \to \infty, f(a^{-n}) \to \infty,\text{与(2)矛盾}.$$

由此可知 $a = 1$.再由②中 x 的任意性,可知对于所有 x,

$$xf(x) = 1 \text{ 即 } f(x) = 1/x.$$

经检验,$f(x) = 1/x$ 确实满足条件(1)和(2).

6・165　设 n 为一个给定的自然数,求所有连续函数 $f(x)$,使得

$\binom{n}{0} f(x) + \binom{n}{1} f(x^2) + \binom{n}{2} f(x^{2^2}) + \cdots + \binom{n}{n-1} f(x^{2^{n-1}}) + \binom{n}{n} f(x^{2^n}) = 0.$

(第6届朝鲜数学奥林匹克,1992年)

[解]　设 $g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(x^{2^k}) = 0$,

则
$$g_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} f(x^{2^k})$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} f(x^{2^{k-1}})$$

由于
$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k},$$

因此
$$g_{n-1}(x) + g_{n-1}(x^2) = g_n(x) = 0.$$

这样
$$g_{n-1}(-x) + g_{n-1}((-x)^2) = g_n(-x) = 0.$$

所以
$$g_{n-1}(-x) = g_{n-1}(x).$$

即　g_{n-1} 是偶函数.不妨设 $x \geqslant 0$,以 $x = 0,1$ 代入

$$g_{n-1}(x) + g_{n-1}(x^2) = 0,$$

可得
$$g_{n-1}(0) = g_{n-1}(1) = 0.$$

从
$$g_{n-1}(x) = -g_{n-1}(x^2) \text{ 知}$$
$$g_{n-1}(x^2) = -g_{n-1}(x^{2^2}),$$

$$g_{n-1}(x^{2^2}) = -g_{n-1}(x^{2^3}),$$

……

$$g_{n-1}(x^{2^{k-1}}) = -g_{n-1}(x^{2^k}).$$

因此 $\quad g_{n-1}(x) = (-1)^k g_{n-1}(x^{2^k}).$

若 $0 \leqslant x < 1$，则 $x^{2^k} \to 0, (k \to \infty)$，由 $g_{n-1}(x)$ 的连续性知，$g_{n-1}(x) = \pm g_{n-1}(0) = 0$，从 $g_{n-1}(x^2) = -g_{n-1}(x)$ 还可知：

$$g_{n-1}(x) = -g_{n-1}(x^{\frac{1}{2}});$$

$$g_{n-1}(x^{\frac{1}{2}}) = -g_{n-1}(x^{2^{\frac{1}{2}}}), \cdots, g_{n-1}(x^{\frac{1}{2^{k-1}}})$$

$$= -g_{n-1}(x^{2^{\frac{1}{k}}}),$$

因而 $g_{n-1}(x) = (-1)^k g_{n-1}(x^{2^{\frac{1}{k}}}).$

若 $x \geqslant 1$，则 $x^{2^{\frac{1}{k}}} \to 1(k \to \infty)$，仍由 $g_{n-1}(x)$ 的连续性可知：$g_{n-1}(x) = \pm g_{n-1}(1) = 0$. 因而 $g_{n-1}(x) = 0(x \geqslant 0)$，且由于 $g_{n-1}(x)$ 为偶函数知，对所有 x：$g_{n-1}(x) = 0$.

重复以上过程可得：$g_n(x) = g_{n-1}(x) = \cdots = g_0(x) = 0$，而 $g_0(x) = f(x)$，所以满足条件的连续函数只能为零函数.

6·166　设 f 为定义于非负实数集上且在其中取值的函数，求所有满足下列条件的 f：

(i) $f(xf(y)) \cdot f(y) = f(x+y)$；

(ii) $f(2) = 0$；

(iii) $f(x) \neq 0$，当 $0 \leqslant x < 2$.

（第 27 届国际数学奥林匹克，1986 年）

[解]　设 f 满足已知条件.

当　$x \geqslant 2$ 时，我们有

$$\begin{aligned} f(x) &= f((x-2)+2) \\ &= f((x-2)f(2)) \cdot f(2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

所以　$f(x) = 0$；

若　$0 \leqslant x < 2$. 我们设 $y \geqslant 2 - x$. 于是

$$x+y\geqslant 2,$$
$$f(x+y)=0.$$
$$f(yf(x))\cdot f(x)=f(y+x)=f(x+y)=0.$$

由已知，$f(x)\neq 0$，当 $0\leqslant x<2$ 时.

因此 $$f(yf(x))=0,$$
$$yf(x)\geqslant 2,$$
$$y\geqslant \frac{2}{f(x)}.$$

这就是说，由 $y\geqslant 2-x$，可得 $y\geqslant \frac{2}{f(x)}$. 但由上述推理过程的可逆性知，由 $y\geqslant \frac{2}{f(x)}$，也可得 $y\geqslant 2-x$. 因此，我们有

$$2-x=\frac{2}{f(x)},$$
$$f(x)=\frac{2}{2-x},\quad 0\leqslant x<2 \text{ 时}.$$

综上所述，满足条件的函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{2-x}, & 0\leqslant x<2 \text{ 时};\\ 0, & x\geqslant 2 \text{ 时}.\end{cases}$$

6・167　f 是定义在 $(1,+\infty)$ 上且在 $(1,+\infty)$ 中取值的函数，满足条件：对任何 $x,y>1$ 及 $u,v>0$，都有

$$f(x^u y^v)\leqslant f(x)^{\frac{1}{4u}}f(y)^{\frac{1}{4v}}.$$

试确定所有这样的函数 f.

（第 4 届中国中学生数学冬令营，1989 年）

［解］　设 f 满足题中的条件，则有

$$f(x^u y^v)\leqslant f(x)^{\frac{1}{4u}}f(y)^{\frac{1}{4v}}. \quad ①$$

取 $u=\frac{1}{2}$ 得

$$f(x^{\frac{1}{2}}y^v)\leqslant f(x)^{\frac{1}{2}}f(y)^{\frac{1}{4v}}, \quad ②$$

取 v 使　$y^v=x^{\frac{1}{2}}$　$(x>1,y>1)$，

即　$$v=\frac{\ln x}{2\ln y}.$$

于是 $f(x) \leqslant f(x)^{\frac{1}{2}} \cdot f(y)^{\frac{\ln y}{2\ln x}}$,

$$f(x)^{\frac{1}{2}} \leqslant f(y)^{\frac{\ln y}{2\ln x}},$$

$$f(x)^{\ln x} \leqslant f(y)^{\ln y}. \qquad ③$$

由对称性得 $f(y)^{\ln y} \leqslant f(x)^{\ln x}$. ④

由 ③ 和 ④ 得 $f(x)^{\ln x} = f(y)^{\ln y}$.

这说明 $f(x)^{\ln x}$ 是一个常数$C(C > 1)$,即

$$f(x)^{\ln x} = C,$$

$$f(x) = C^{\frac{1}{\ln x}} \quad (C > 1). \qquad ⑤$$

反过来,若 $f(x) = C^{\frac{1}{\ln x}} \quad (C > 1)$,则对于 $x, y > 1, u, v > 0$,我们有

$$f(x^u y^v) = C^{\frac{1}{\ln(x^u y^v)}} = C^{\frac{1}{u\ln x + v\ln y}}.$$

由于 $(u\ln x + v\ln y)^2 \geqslant 4uv\ln x\ln y$,

因此 $$\frac{1}{u\ln x + v\ln y} \leqslant \frac{u\ln x + v\ln y}{4uv\ln x\ln y} = \frac{1}{4v\ln y} + \frac{1}{4u\ln x}.$$

于是 $$f(x^u y^v) = C^{\frac{1}{u\ln x + v\ln y}} \leqslant C^{\frac{1}{4u\ln x} + \frac{1}{4v\ln y}} = C^{\frac{1}{4u\ln x}} \cdot C^{\frac{1}{4v\ln y}} = f(x)^{\frac{1}{4u}} \cdot f(y)^{\frac{1}{4v}}.$$

所以,满足题中条件的函数是

$$f(x) = C^{\frac{1}{\ln x}} \quad (C > 0).$$

6・168 求所有具有下述性质的 $d \in (0,1]$:如果 $f(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上且 $f(0) = f(1)$ 的任意一个连续函数,则存在 $x_0 \in [0, 1-d]$ 使得

$$f(x_0) = f(x_0 + d).$$

（澳大利亚数学奥林匹克，1982 年）

［解］ 首先说明对任意 $k \in N, d = \frac{1}{k}$ 都满足题中条件，设 $f(x)$ 是满足题中条件的任意一个连续函数，因为 $f(0) = f(1)$，所以 $d = 1$ 满足条件，考虑自然数 $k > 1$，作函数

$$g(x) = f\left(x + \frac{1}{k}\right) - f(x),$$

它在区间$[0, \frac{k-1}{k}]$上有定义. 因为

$$g(0) = f\left(\frac{1}{k}\right) - f(0),$$

$$g\left(\frac{1}{k}\right) = f\left(\frac{2}{k}\right) - f\left(\frac{1}{k}\right),$$

……

$$g\left(\frac{k-1}{k}\right) = f(1) - f\left(\frac{k-1}{k}\right)$$

之和等于 0. 若每一个都等于 0，则命题成立. 否则，其中既有非正的数，也有非负的数. 因此，由函数 $g(x)$ 的连续性，存在 x_0，使得 $g(x_0) = 0$，即

$$f\left(x_0 + \frac{1}{k}\right) = f(x_0).$$

这表明，对每个 $k \in N, d = \frac{1}{k}$ 满足题中的条件. 其次证明，任意一个不能表示成$\frac{1}{k}(k \in N)$ 的 $d \in [0,1]$，设

$$\frac{1}{k+1} < d < \frac{1}{k}.$$

则 $\qquad kd < 1 < (k+1)d.$

并考虑定义在区间$[0,d]$上且满足等式

$$f(0) = 0, \quad f(1 - kd) = -k, \quad f(d) = 1$$

的任一连续函数 $f(x)$，把这个函数延拓至区间$[0,1]$，使得对每个 $x \in [0,1]$ 都满足 $f(x) = f(x - d) + 1$，这样得到的函数是连续的，并且

$$f(1) = f(1 - d) + 1 = f(1 - 2d) + 2$$

$$= \cdots = f(1-kd)+k = 0 = f(0),$$
而对任意 $x \in [0,1-d]$,都有
$$f(x+d) = f(x)+1 \neq f(x).$$
这表明,d 不满足题中的条件.

6・169 对给定的递增函数 $f:R \to R$,定义函数 $g(x,y)$ 如下:
$$g(x,y) = \frac{f(x+y)-f(x)}{f(x)-f(x-y)}, x \in R, y > 0.$$
设当 $x=0$ 时对所有 $y>0$ 与当 $x \neq 0$ 时对所有 $y \in (0,|x|]$ 都有
$$2^{-1} < g(x,y) < 2.$$
证明对所有 $x \in R, y>0$,有
$$14^{-1} < g(x,y) < 14.$$
(瑞士数学奥林匹克,1977 年)

[证] 记 $h(x,y) = f(y)-f(x)$,则函数 $h(x,y)$ 对变量 y 递增而对变量 x 递减,且对所有 $y>x$,有 $h(x,y)>0$,以及
$$g(x,y) \equiv \frac{h(x,x+y)}{h(x-y,x)}.$$
首先证明对每个 $x \in R, y>0$,有 $g(x,y)<14$,如果 $x-y \geqslant 0$ 或 $x+y \leqslant 0$,则由条件,有 $h(x,x+y) < 2h(x-y,x)$,此外,对每个 $y>0$ 都有 $h(0,y)<2h(-y,0)$.因此剩下两种情形:(1)$x-y<0<x$;(2)$x<0<x+y$.注意,对所有 $x \geqslant 0, y>0$,有
$$h(x+y,x+3y) < 6h(x,x+y) \quad ①$$
事实上,有
$$h(x+y,x+2y) < 2h(x,x+y),$$
$$h(x+2y,x+3y) < 2h(x+y,x+2y) < 4h(x,x+y),$$
由此得到
$$\begin{aligned}h(x+y,x+3y) &= h(x+y,x+2y)+h(x+2y,x+3y)\\ &< 6h(x,x+y),\end{aligned}$$
考虑情形(1),如果
$$x-y<0 \leqslant x-\frac{y}{2},$$
则由 ① 式可得
$$h(x,x+y) < 6h(x-\frac{y}{2},x) < 6h(x-y,x) < 14h(x-y,x);$$

第六章 函数

如果 $x-\frac{y}{2}<0<x,$

则 $x<y-x<x+y<3(y-x),$

再由式①,便得到

$$h(y-x,x+y)<h(y-x,3(y-x))<6h(0,y-x).$$

又因为 $h(x,y-x)<h(0,y-x)$,所以得到

$$\begin{aligned}h(x,x+y)&=h(x,y-x)+h(y-x,x+y)\\&<7h(0,y-x)<14h(x-y,0)\\&<14h(x-y,x).\end{aligned}$$

在情形(2),有

$$h(x,0)<2h(2x,x)<2h(x-y,x);$$

$$h(0,x+y)<2h(-x-y,0)<2h(x-y,0)$$
$$=2h(x-y,x)+2h(x,0)<6h(x-y,x).$$

因此,上两式相加 $h(x,x+y)<8h(x-y,x)$. 总之,有

$h(x,x+y)<14h(x-y,x)$. 由此得到 $g(x,y)<14$. 其次证明,对所有 $x\in R,y>0$,有

$$g(x,y)>\frac{1}{14}.$$

考虑递增函数 $f_1(x)=-f(-x)$,并令

$$\begin{aligned}g_1(x,y)&=\frac{f_1(x+y)-f_1(x)}{f_1(x)-f_1(x-y)}\\&=\frac{-f(-x-y)+f(-x)}{-f(-x)+f(-x+y)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g_1(-x,y)&=\frac{-f(x-y)+f(x)}{-f(x)+f(x+y)}\\&=\frac{1}{g(x,y)}.\end{aligned}$$

因为 $g(x,y)=\frac{1}{g_1(-x,y)},$

所以当 $x=0$ 时对所有的 $y>0$ 而当 $x\neq 0$ 时对所有的 $y\in(0,|x|)$ 都有

$$\frac{1}{2}<g(x,y)<2.$$

于是,如上所证,对函数 $g_1(x,y)$,有 $g_1(x,y)<14$. 其中 $x\in R,y>$

0. 由此得到

$$g(x,y)=\frac{1}{g_1(x,y)}>\frac{1}{14}.$$

6·170　求所有函数 $f:R\to R$，对所有实数 x，满足：

$$f(\sqrt{2}x)+f((4+3\sqrt{2})x)=2f((2+\sqrt{2})x).$$

（越南国家代表队选拔赛，1994 年）

[解]　令 $x=0$，代入原方程得一个恒等式，因此，$f(0)$ 可以是任意实数. 记

$$f(0)=a, a \text{ 为任意实数}.$$

令

$$t=(2+\sqrt{2})x,$$

注意到

$$4+3\sqrt{2}=(2+\sqrt{2})(\sqrt{2}+1),$$

所以原方程可化为

$$f\left(\frac{\sqrt{2}t}{2+\sqrt{2}}\right)+f((\sqrt{2}+1)t)=2f(t). \qquad ①$$

下面讨论 $x>0$ 的情况.

当 $x>0$ 时，$t>0$. 于是，我们可以令

$$t=(\sqrt{2}-1)^u, u\in R,$$

则

$$\frac{\sqrt{2}t}{2+\sqrt{2}}=(\sqrt{2}-1)t=(\sqrt{2}-1)^{u+1}.$$

将以上两式代入 ①，有

$$f((\sqrt{2}-1)^{u+1})+f((\sqrt{2}-1)^{u-1})=2f((\sqrt{2}-1)^u), \qquad ②$$

令

$$g(u)=f((\sqrt{2}-1)^u), \qquad ③$$

代入 ② 式，得

$$g(u+1)+g(u-1)=2g(u) \qquad ④$$

令

$$h(u)=g(u+1)-g(u),$$

代入 ④ 式，有

$$h(u)=h(u-1).$$

对正整数 n 用数学归纳法,很容易得到

$$h(u+n)=h(u),n\in N$$

和

$$h(u-n)=h(u),n\in N.$$

于是,对于任意正整数 n,我们有

$$\begin{aligned}&g(u+n)-g(u)\\&=[g(u+n)-g(u+n-1)]+[g(u+n-1)-g(u+n-2)]+\cdots\cdots+[g(u+1)-g(u)]\\&=h(u+n-1)+h(u+n-2)+\cdots+h(u)\\&=nh(u).\end{aligned}$$

利用上式,即得

$$g(u)-g(u-n)=nh(u-n)=nh(u) \quad ⑤$$

在[0,1)上任意定义一个函数 $h(u)$,然后,对于任意整数 n,令

$$h(u+n)=h(u),u\in[0,1).$$

换句话说,将[0,1)上的函数 $h(u)$ 周期地延拓到整个 R 上,得到了定义在 R 上的一个周期函数 $h(u)$.

于是,利用⑤式,有

$$g(u)=\begin{cases}g(u),当\ u\in[0,1),\\g(u-n)+nh(u),u\in[n,n+1).\end{cases} \quad ⑥$$

这里 n 是任意非零整数,在[0,1)上函数 $g(u)$ 可以任意定义.

再利用③式,得

$$f(x)=g(\log_{\sqrt{2}-1}x),x>0.$$

下面讨论 $x<0$ 的情况.

当 $x<0$ 时,令

$$-(2+\sqrt{2})x=t=(\sqrt{2}-1)^u$$

将上式代入原方程,得

$$f\left(\frac{-\sqrt{2}t}{2+\sqrt{2}}\right)+f(-(\sqrt{2}+1)t)=2f(-t),$$

以及

$$f(-(\sqrt{2}-1)^{u+1})+f(-(\sqrt{2}-1)^{u-1})=2f(-(\sqrt{2}-1)^u).$$

再令 $\quad g(u)=f(-(\sqrt{2}-1)^u)$

同样可得在 $x>0$ 的情况中也曾得到过的等式

$$g(u+1)+g(u-1)=2g(u).$$

于是,与在 $x>0$ 的情况中一样,可以定义出 $h(u)$ 和 $g(u)$,从而得

$$f(x)=g(\log_{\sqrt{2}-1}|x|),x<0.$$

综上所述,我们有

$$f(x)=\begin{cases}a,\text{当 } x=0 \text{ 时},a \text{ 为任意实数}\\ g(\log_{\sqrt{2}-1}|x|),\text{当 } x\neq 0 \text{ 时}\end{cases}$$

这里函数 g 满足 ⑥ 式.

6·171 求所有次数大于等于1的实系数多项式 $f(x)$,满足方程

$$f(x^2)=f(x)f(x-1),$$

并证明你的结论.

(爱尔兰数学奥林匹克,1994年)

[解] 由给定的方程可以知道,如果 x 是多项式 $f(x)$ 的根,那么 x^2 也是多项式 $f(x)$ 的根.如果 $f(x)$ 的非零根 x_0 的模长不等于1,那么 $x_0^2,x_0^4,x_0^8,x_0^{16},\cdots$ 的模长两两不同,且都是 $f(x)$ 的根.此与多项式的根的个数等于多项式的次数矛盾.因此 $f(x)$ 的根 x 满足条件:

$$x=0 \text{ 或 } |x|=1. \quad ①$$

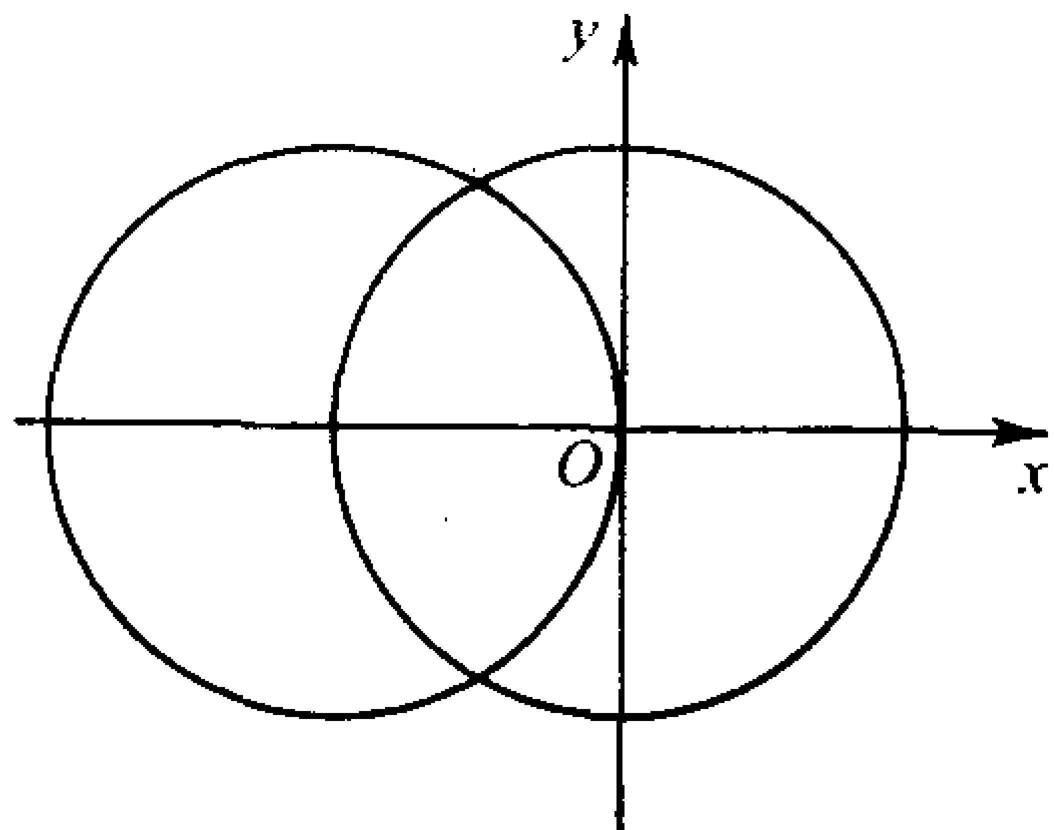
用 $x+1$ 代替原方程中的 x,得

$$f((x+1)^2)=f(x+1)\cdot f(x),$$

由此可以看出,如果 x 是多项式 $f(x)$ 的根,那么 $(x+1)^2$ 也是多项式 $f(x)$ 的根.由结论 ① 可得

$$x=-1 \text{ 或 } |x+1|=1. \quad ②$$

将条件 ① 表示在复平面上,是"以原点为心,以1为半径的圆,再加上一点(原点)";将条件 ② 表示在同一个复平面上,是"以点 $x=-1$ 为心,以1为半径的圆,再加上一点 $x=-1$".它们的公共部分是四个点:



$x_1=0,\quad x_2=-1,$

$$x_3=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$x_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

如果 $x_2 = -1$ 是 $f(x)$ 的根,那么 x_2^2 也是 $f(x)$ 的根,从而 $(x_2^2 + 1)^2$ 也是 $f(x)$ 的根.但

$$|(x_2^2 + 1)^2| = 4 \neq 0 \text{ 或 } 1$$

矛盾.所以 x_2 不是 $f(x)$ 的根.因此,$f(x)$ 只有根 x_1, x_3, x_4.注意到 x_3 和 x_4 是一对共轭复根,故可设

$$f(x) = rx^s(x - x_3)^t(x - x_4)^t,$$

这里 r 是非零实数,s,t 是非零整数.

将 x_3 与 x_4 的值代入,得

$$f(x) = rx^s(x^2 + x + 1)^t \quad ③$$

将 ③ 代入原方程,得

$$rx^{2s}(x^4 + x^2 + 1)^t$$
$$= rx^s(x^2 + x + 1)^t \cdot r(x-1)^s((x-1)^2 + (x-1) + 1)^t,$$

即

$$rx^{2s}(x^4 + x^2 + 1)^t = r^2x^s(x-1)^s \cdot (x^4 + x^2 + 1)^t,$$

由此得

$$r = 1, s = 0.$$

代入 ③,有

$$f(x) = (x^2 + x + 1)^t, t \in N.$$

这就是所求的所有的多项式.

6·172 试确定所有的实系数多项式 $p(x)$ 使得

$$tp(t-1) = (t-2)p(t)$$

对所有实数 t 都成立.

(澳大利亚数学奥林匹克,1995 年)

[解] 令 $t = 2$,得 $2p(1) = 0$, $p(1) = 0$, 1 是多项式 $p(x)$ 的根.

令 $t = 1$,得 $p(0) = -p(1) = 0$,因此 0 也是多项式 $p(x)$ 的根.

令 $p(x) = x(x-1)q(x)$,则

$$t(t-1)(t-2)q(t-1) = (t-2)\cdot t(t-1)q(t)$$
$$q(t-1) = q(t), t \neq 0,1,2.$$

依次令 $t = 4,5,6,\cdots\cdots$ 可得

$$q(x) = q(3), x = 4,5,6,\cdots$$

即　$q(x)-q(3)=0$ 有无穷多个根,

故　$q(x)\equiv q(3)$.

记 $q(3)=c$,则得

$$p(x)=cx(x-1),c\in R.$$

另一方面,若 $p(x)=cx(x-1),c\in R$,显然满足题目的条件.

因此,问题的答案为

$$p(x)=cx(x-1),c\in R.$$

6·173　证明:不存在对任意实数 x 均满足

$$f[f(x)]=x^2-1996$$

的函数 $f(x)$.

(世界城市际数学联赛,1996年)

[证]　若存在满足条件的函数 $f(x)$,我们令

$$g(x)=f[f(x)]=x^2-1996.$$

设 a,b 是　$x=x^2-1996$　的两个实根,则 a,b 是函数 $g(x)$ 的不动点.

设　$f(a)=p$,则

$$f[f(p)]=f[f(f(a))]=f(a)=p,$$

从而 p 也是 $g(x)$ 的不动点,$p\in\{a,b\}$.

同理,$f(b)\in\{a,b\}$.

令 $h(x)=g[g(x)]=(x^2-1996)^2-1996$.

因为　$h(x)=x$,

即　$(x^2-1996)^2-1996=x$

等价于　$(x^2-x-1996)(x^2+x-1995)=0$

所以,$h(x)$ 有四个不动点 a,b,c,d.

又由　$h[g(c)]=g(g(g(c)))=g[h(c)]=g(c)$

得知 $g(c)$ 是 $h(x)$ 的不动点.

由于 $g(c)=c^2-1996$,又 $c^2+c-1995=0$,因此 $g(c)=-c-1$.

显然 $g(c)\neq a,g(c)\neq b,g(c)\neq c$.所以 $g(c)=d$.同理 $g(d)=c$.

设 $f(c)=r$.则

$$h[f(c)]=f[h(c)]=f(c),$$

因此 r 也是 $h(x)$ 的不动点.

若 $r \in \{a,b\}$,则 $d = g(c) = f(f(c)) = f(r) \in \{a,b\}$,矛盾.

若 $r = c$,则 $g(c) = f(f(c)) = f(r) = f(c) = r = c$,矛盾.

若 $r = d$,则 $d = g(c) = f(f(c)) = f(r) = f(d)$,

$$d = f(d) = f(f(d)) = g(d)$$

矛盾.

综上所述,满足条件的函数 $f(x)$ 不存在.

6·174　设 R 是实数集合,是否存在函数 $f:R \to R$,同时满足以下三个条件:

(a) 存在一个正数 M,使得对所有的 x,都有 $-M \leqslant f(x) \leqslant M$;

(b) $f(1)$ 的值是 1;

(c) 如果 $x \neq 0$,则

$$f\left(x + \frac{1}{x^2}\right) = f(x) + \left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]^2.$$

(第 36 届国际数学奥林匹克预选题,1995 年)

[**解**]　不存在.

事实上,如果存在 $f:R \to R$ 满足所有的条件,那么由(a),存在$\frac{1}{4}$的整数倍 c,使得

$$\begin{cases} f(x) < c,\text{对任 } x \in R \text{ 成立;} \\ f(x_0) \geqslant c - \frac{1}{4},\text{对某个 } x_0 \in R \text{ 成立.} \end{cases}$$

由(c)和(b)可知

$$f(2) = f\left(1 + \frac{1}{1^2}\right) = f(1) + \left[f\left(\frac{1}{1}\right)\right]^2 = 2,$$

因此　$c > 2, c - \frac{1}{4} > 0$.

由 c 和 x_0 的定义及(c)可知

$$c > f\left(x_0 + \frac{1}{x_0^2}\right) = f(x_0) + \left[f\left(\frac{1}{x_0}\right)\right]^2$$

$$\geqslant c - \frac{1}{4} + \left[f\left(\frac{1}{x_0}\right)\right]^2,$$

即 $\left[f\left(\frac{1}{x_0}\right)\right]^2 \leqslant \frac{1}{4}$,

于是得

$$f\left(\frac{1}{x_0}\right) \geqslant -\frac{1}{2}.$$

再由 c 和 x_0 的定义及(c),得

$$\begin{aligned} c > f\left(\frac{1}{x_0} + x_0^2\right) &= f\left(\frac{1}{x_0}\right) + [f(x_0)]^2 \\ &\geqslant -\frac{1}{2} + \left(c - \frac{1}{4}\right)^2 \\ &= -\frac{1}{2} + c^2 - \frac{1}{2}c + \frac{1}{16} \\ &= c^2 - \frac{1}{2}c - \frac{7}{16}, \end{aligned}$$

从而有

$$\frac{7}{16} > c^2 - \frac{1}{2}c - c = c\left(c - 1\frac{1}{2}\right) > 2 \cdot \frac{1}{2} = 1,$$

矛盾.

故满足题设条件的函数 f 不存在.

6·175 设 f 是 $R \to R$ 的函数,且

(1) 对于任意 $x, y \in R$,

$$f(x) + f(y) + 1 \geqslant f(x + y) \geqslant f(x) + f(y);$$

(2) 对于任意 $x \in [0,1)$,有 $f(0) \geqslant f(x)$;

(3) $-f(-1) = f(1) = 1$.

求出所有满足条件的函数 f.

(亚太地区数学奥林匹克,1994 年)

[解] 从(1)和(2)可得

$$2f(0) + 1 \geqslant 2f\left(\frac{1}{2}\right) + 1 \geqslant f(1) \geqslant f(1) + f(0),$$

但由(3)可知 $f(1) = 1$,因此上式可化为

$$2f(0) \geqslant 0 \geqslant f(0),$$

从而有 $f(0) \geqslant 0 \geqslant f(0)$,

$$f(0) = 0.$$

再由(2),对于任意 $x \in (0,1)$,有

$$f(x) \leqslant 0.$$

若存在 $x \in (0,1)$ 使 $f(x) < 0$,则 $f(1-x) \leqslant 0$,从而由(1)可得

$$1 > f(x) + f(1-x) + 1 \geqslant f(1) = 1,$$

矛盾.所以,对于任意 $x \in [0,1)$.都有

$$f(x) = 0. \qquad ①$$

由(1)得,对任意的 $x \in R$,都有

$$f(x+1) \geqslant f(x) + f(1) = f(x) + 1.$$

又由(1)和(3)可得,对任意的 $x \in R$,都有

$$f(x) \geqslant f(x+1) + f(-1) = f(x+1) - 1.$$

由以上两式得,对任意的 $x \in R$,有

$$f(x+1) = f(x) + 1. \qquad ②$$

由①和②可得,对任意的 $x \in R$,有

$$f(x) = [x].$$

6·176　设函数 $f: R \to R$ 适合条件

$$f(x^3 + y^3) = (x+y)\left((f(x))^2 - f(x) \cdot f(y) + (f(y))^2\right),$$
$$x, y \in R \qquad ①$$

试证对一切 $x \in R$,都有

$$f(1996x) = 1996f(x).$$

（中国中学生数学冬令营,1996年）

[证]　在①中令 $x = y = 0$,得到 $f(0) = 0$.

在①中令 $y = 0$,得到

$$f(x^3) = x \cdot (f(x))^2, x \in R. \qquad ②$$

将上式改写成

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}}\left(f\left(x^{\frac{1}{3}}\right)\right)^2, x \in R \qquad ②'$$

可见,当 $x \geqslant 0$ 时,$f(x) \geqslant 0$;当 $x \leqslant 0$ 时,$f(x) \leqslant 0$.

令　$S = \{a \mid a > 0 \text{ 且 } f(ax) = af(x), x \in R\}$,

显然 $1 \in S$.

下面我们先证明若 $a \in S$,则 $a^{\frac{1}{3}} \in S$.

事实上,若 $a \in S$,则由②和 S 的定义有

$$ax(f(x))^2 = af(x^3) = f(ax^3) = f\left(\left(a^{\frac{1}{3}}x\right)^3\right)$$

$$= a^{\frac{1}{3}}x(f(a^{\frac{1}{3}}x))^2,$$

约去公因式，得到

$$(a^{\frac{1}{3}}f(x))^2 = (f(a^{\frac{1}{3}}x))^2,$$

由于 $f(x)$ 与 x 广义同号，$f(a^{\frac{1}{3}}x)$ 与 $a^{\frac{1}{3}}x$ 广义同号，即与 x 广义同号，因此

$$a^{\frac{1}{3}}f(x) = f(a^{\frac{1}{3}}x), x \in R, \qquad ③$$

即 $\quad a^{\frac{1}{3}} \in S.$

我们接着再证若 $a, b \in S$，则 $a + b \in S$.

事实上，若 $a, b \in S$，则利用 ① ~ ③，可得

$$\begin{aligned}
&f((a+b)x)\\
&= f((a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}})^3 + (b^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}})^3)\\
&= (a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}})\{(f(a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}))^2 - f(a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}})\cdot\\
&\quad f(b^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}) + (f(b^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}))^2\}\\
&= (a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}})\cdot x^{\frac{1}{3}}\cdot(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}})\cdot(f(x^{\frac{1}{3}}))^2\\
&= (a+b)\cdot f(x), x \in R,
\end{aligned}$$

所以有 $\quad a + b \in S.$

因为 $1 \in S$，所以 $1 + 1 = 2 \in S$，依此类推，可知任意自然数 $n \in S$. 特别地，有 $1996 \in S$，即 $\quad f(1996x) = 1996f(x)$.

6・177 (a) 是否存在函数 $f: R \to R, g: R \to R$，使得对所有的 $x \in R$，有

$$f(g(x)) = x^2, g(f(x)) = x^3?$$

(b) 是否存在函数 $f: R \to R, g: R \to R$，使得对所有的 $x \in R$，有

$$f(g(x)) = x^2, g(f(x)) = x^4?$$

（第 38 届国际数学奥林匹克预选题，1997 年）

[解] (a) 如果这样的函数 f, g 存在，由

$$g(f(x)) = x^3$$

可知，$x_1 \neq x_2$ 时，$f(x_1) \neq f(x_2)$.

因此，$f(0), f(1), f(-1)$ 是三个不同的实数.

另一方面，由题设要求，可得

$$(f(x))^2 = f(g(f(x))) = f(x^3),$$

将 $x = 0,1,-1$,分别代入上式,得

$$(f(0))^2 = f(0),$$
$$(f(1))^2 = f(1),$$
$$(f(-1))^2 = f(-1).$$

因此 $f(0),f(1),f(-1)$ 最多取两个实数值 0 或 1,矛盾.

故这样的 f,g 不存在.

(b) 这样的函数 f,g 存在. 可构造下面的例子.

先对区间$(1,+\infty)$,试着寻找 $F,G:(1,+\infty)\to(1,+\infty)$,满足

$$F(G(x)) = x^2, G(F(x)) = x^4, x > 1 \quad ①$$

注意到对数可把平方运算变为加倍运算,把加倍运算(或乘以任何常数的运算)变为位移一个常数,于是对于 $x\in(1,+\infty)$,我们有

$$\log_2\log_2 F(G(x)) = 1 + \log_2\log_2 x,$$
$$\log_2\log_2 G(F(x)) = 2 + \log_2\log_2 x,$$
$$F(G(x)) = 2^{2^{1+\log_2\log_2 x}},$$
$$G(F(x)) = 2^{2^{2+\log_2\log_2 x}}.$$

令

$$F(x) = 2^{2^{a+b\log_2\log_2 x}},$$
$$G(x) = 2^{2^{c+d\log_2\log_2 x}},$$

则

$$F(G(x)) = 2^{2^{a+bc+bd\log_2\log_2 x}},$$
$$G(F(x)) = 2^{2^{c+da+bd\log_2\log_2 x}}.$$

于是 a,b,c,d 应满足

$$\begin{cases} bd = 1 \\ a + bc = 1 \\ c + da = 2, \end{cases}$$

这个方程组的解很多. 取其中一个解

$$b = \frac{1}{2}, d = 2, a = 1, c = 0.$$

于是有

$$F(x) = 2^{2^{1+\frac{1}{2}\log_2 \log_2 x}}, x \in (1, +\infty);$$

$$G(x) = 2^{2^{2\log_2 \log_2 x}}, x \in (1, +\infty).$$

显然它们满足 ①，并且它们还可以简化成

$$F(x) = 2^{\sqrt[2]{\log_2 x}}, G(x) = 2^{(\log_2 x)^2}, x \in (1, +\infty).$$

剩下的工作是把它们的定义域扩展到 R. 为此，我们定义

$$\widetilde{F}(x) = \begin{cases} F(x) & x \in (1, +\infty), \\ \dfrac{1}{F\left(\dfrac{1}{x}\right)} & x \in (0,1), \\ 1 & x = 1; \end{cases}$$

$$\widetilde{G}(x) = \begin{cases} G(x) & x \in (1, +\infty), \\ \dfrac{1}{G\left(\dfrac{1}{x}\right)} & x \in (0,1), \\ 1 & x = 1. \end{cases}$$

接着再定义

$$f(x) = \begin{cases} \widetilde{F}(|x|) & x \in R \setminus \{0\}, \\ 0 & x = 0; \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \widetilde{G}(|x|) & x \in R \setminus \{0\}. \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

则容易验证，f, g 符合 (b) 的条件.

6·178　设 R 是全体实数的集合，R^+ 是所有正实数组成的子集合. α, β 是给定实数，寻找所有函数 $f: R^+ \to R$，使得对 R^+ 内所有 x 和 y，有

$$f(x)f(y) = y^\alpha f\left(\frac{x}{2}\right) + x^\beta f\left(\frac{y}{2}\right).$$

（第 35 届国际数学奥林匹克预选题，1994 年）

［解］　在题目所给的函数方程中，令 $y = x$，得

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{(f(x))^2}{x^\alpha + x^\beta} \qquad ①$$

在 ① 中把 x 改写为 y，得

$$f\left(\frac{y}{2}\right)=\frac{(f(y))^2}{y^\alpha+y^\beta} \quad ②$$

把 ① 和 ② 代入原函数方程,得

$$f(x)\cdot f(y)=\frac{y^\alpha}{x^\alpha+x^\beta}(f(x))^2+\frac{x^\beta}{y^\alpha+y^\beta}(f(y))^2 \quad ③$$

在上式中交换 x 和 y 的位置,得

$$f(y)f(x)=\frac{x^\alpha}{y^\alpha+y^\beta}(f(y))^2+\frac{y^\beta}{x^\alpha+x^\beta}(f(x))^2 \quad ④$$

③ + ④ 得

$$2f(x)f(y)=\frac{y^\alpha+y^\beta}{x^\alpha+x^\beta}(f(x))^2+\frac{x^\alpha+x^\beta}{y^\alpha+y^\beta}(f(y))^2,$$

去分母,得

$$2(x^\alpha+x^\beta)f(y)\cdot(y^\alpha+y^\beta)f(x)$$
$$=(y^\alpha+y^\beta)^2(f(x))^2+(x^\alpha+x^\beta)^2(f(y))^2,$$

即 $$((y^\alpha+y^\beta)f(x)-(x^\alpha+x^\beta)f(y))^2=0,$$

$$\frac{f(x)}{x^\alpha+x^\beta}=\frac{f(y)}{y^\alpha+y^\beta}$$

在上式中,令 $y=1,\frac{f(1)}{2}=\lambda$,则

$$\frac{f(x)}{x^\alpha+x^\beta}=\lambda,$$

$$f(x)=\lambda(x^\alpha+x^\beta) \quad ⑤$$

若 $\lambda=0$,则 $f(x)=0$ 显然是原函数方程的一个解.

若 $\lambda\neq 0$,先考虑 $\alpha\neq\beta$ 的情况.

此时,我们有

$$f(y)=\lambda(y^\alpha+y^\beta),$$

$$f\left(\frac{x}{2}\right)=\lambda\left(\left(\frac{x}{2}\right)^\alpha+\left(\frac{x}{2}\right)^\beta\right),$$

$$f\left(\frac{y}{2}\right)=\lambda\left(\left(\frac{y}{2}\right)^\alpha+\left(\frac{y}{2}\right)^\beta\right).$$

代入原函数方程,得

$$\lambda^2(x^\alpha+x^\beta)(y^\alpha+y^\beta)$$
$$=\lambda y^\alpha\lambda\left(\left(\frac{x}{2}\right)^\alpha+\left(\frac{x}{2}\right)^\beta\right)+\lambda x^\beta\left(\left(\frac{y}{2}\right)^\alpha+\left(\frac{y}{2}\right)^\beta\right),$$ 由于 $\lambda\neq$

0,上式两端同乘以$\frac{1}{\lambda}$,并整理得

$$\left(\lambda-\frac{1}{2^{\alpha}}\right)x^{\alpha}y^{\alpha}+\left(\lambda-\frac{1}{2^{\beta}}-\frac{1}{2^{\alpha}}\right)x^{\beta}y^{\alpha}+\lambda x^{\alpha}y^{\beta}+\left(\lambda-\frac{1}{2^{\beta}}\right)x^{\beta}y^{\beta}=0. \quad ⑥$$

不妨设 $\alpha>\beta$($\alpha<\beta$ 时,完全类似地可证).

上式两端同乘以$\frac{1}{x^{\alpha}y^{\alpha}}$,得

$$\left(\lambda-\frac{1}{2^{\alpha}}\right)+\left(\lambda-\frac{1}{2^{\beta}}-\frac{1}{2^{\alpha}}\right)x^{\beta-\alpha}+\lambda y^{\beta-\alpha}+\left(\lambda-\frac{1}{2^{\beta}}\right)x^{\beta-\alpha}y^{\beta-\alpha}=0.$$

令 $x\to+\infty$,$y\to+\infty$,得

$$\lambda=\frac{1}{2^{\alpha}}.$$

将上式代入 ⑥ 得

$$-\frac{1}{2^{\beta}}x^{\beta}y^{\alpha}+\frac{1}{2^{\alpha}}x^{\alpha}y^{\beta}+\left(\frac{1}{2^{\alpha}}-\frac{1}{2^{\beta}}\right)x^{\beta}y^{\beta}=0,$$

在上式中令 $x=y$,并在两端同乘以$\frac{1}{y^{2\beta}}$,得

$$-\frac{1}{2^{\beta}}y^{\alpha-\beta}+\frac{1}{2^{\alpha}}+y^{\alpha-\beta}+\left(\frac{1}{2^{\alpha}}-\frac{1}{2^{\beta}}\right)=0,$$

令 $y\to0$,得$\frac{1}{2^{\alpha}}-\frac{1}{2^{\beta}}=0$,矛盾.

这就是说,若 $\lambda\neq0$,必有 $\alpha=\beta$.

下面考虑 $\lambda\neq0$,且 $\alpha=\beta$ 的情况.此时,我们有

$$f(x)=2\lambda x^{\alpha},$$
$$f(y)=2\lambda y^{\alpha},$$
$$f\left(\frac{x}{2}\right)=2\lambda\left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha},$$
$$f\left(\frac{y}{2}\right)=2\lambda\left(\frac{y}{2}\right)^{\alpha}.$$

将以上四式代入原函数方程,得

$$4\lambda^{2}x^{\alpha}y^{\alpha}=2^{1-\alpha}\lambda x^{\alpha}y^{\alpha}+2^{1-\alpha}\lambda x^{\alpha}y^{\alpha},$$

从而有

$$4\lambda^{2}=2^{2-\alpha}\lambda,$$

由于 $\lambda \neq 0$，因此

$$\lambda = \frac{1}{2^{\alpha}},$$

即此时函数方程有解

$$f(x) = 2^{1-\alpha}x^{\alpha}.$$

综上所述，函数方程当 $\alpha \neq \beta$ 时仅有一个解 $f(x) = 0$；而当 $\alpha = \beta$ 时有两个解，$f(x) = 0$ 和 $f(x) = 2^{1-\alpha}x^{\alpha}$.

6・179　求所有函数 $f: R \to R$，使得

$$xf(x) - yf(y) = (x - y)f(x + y).$$

（保加利亚数学奥林匹克，1994 年）

[解]　若 f 是实常值函数，即 $f(x)$ 恒等于某个实常数 b，那么显然适合给定的函数方程.

设 f 不是实常值函数.

记过两个点 $(x, f(x))$ 与 $(y, f(y))$ 的直线为 $l_{x,y}$.

$l_{x,y}$ 的直线方程为

$$\frac{y^{*} - f(x)}{x^{*} - x} = \frac{f(y) - f(x)}{y - x},$$

其中 (x^{*}, y^{*}) 是直线 $l_{x,y}$ 上流动点的坐标. 由题目条件可得

$$(x - y)f(x) + yf(x) - yf(y) = (x - y)f(x + y),$$

$$y(f(x) - f(y)) = (x - y)(f(x + y) - f(x)),$$

当 $y \neq 0$ 时，有

$$\frac{f(x + y) - f(x)}{(x + y) - x} = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

因此点 $(x + y, f(x + y))$ 在直线 $l_{x,y}$ 上.

设 $x \neq 0$，则利用上面的结论可知，在直线 $l_{x,2x}$ 上，有点 $(3x, f(x))$，$(4x, f(x))$，……，$(nx, f(nx))$，$n \in N$. 同理，在直线 $l_{y,2y}$ 上，有点 $(ny, f(ny))$，$n \in N$.

因为点 $(x + y, f(x + y))$ 在直线 $l_{x,y}$ 上，所以

$$l_{x,y} \equiv l_{x,x+y} \equiv l_{y,x+y}.$$

由此可知，在直线 $l_{x,y}$ 上有点

$$(2x + y, f(2x + y)), (2y + x, f(2y + x)).$$

又因为 $l_{2x,y}$ 上有点 $(2x + y, f(2x + y))$，所以 $(2x, f(2x))$ 在

$l_{y,2x+y}$ 上,即在 $l_{x,y}$ 上.所以

$$l_{x,y} \equiv l_{x,2x}.$$

同理

$$l_{x,y} \equiv l_{y,2y}.$$

记 $l = l_{x,y}$,因为 $x \neq 0$,取 $y = -x$,$x + y = 0$,所以直线 l 上有点$(0, f(0))$.因此,对于任一实数 x,点$(x, f(x))$在这条直线 l 上.于是有实数 a, b 满足

$$f(x) = ax + b, a \neq 0.$$

容易验证,当 $f(x) = ax + b, a \neq 0$ 时,适合题目所给的函数方程.

综上所述,适合所给函数方程的所有函数为

$$f(x) = ax + b, \quad a, b \in R.$$

6・180　确定所有的函数 $f: R \to R$,其中 R 是实数集,使得对任意 $x, y \in R$,恒有

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$$

成立.

(第 40 届国际数学奥林匹克,1999 年)

[解]　记

$$A = Imf$$

为函数 f 的像集合,并记

$$f(0) = c.$$

在给定函数方程中,令 $x = y = 0$,有

$$f(-c) = f(c) + c - 1,$$

所以

$$c \neq 0.$$

在给定函数方程中,令 $x = f(y)$,有

$$f(0) = f(x) + x^2 + f(x) - 1,$$

即

$$f(x) = \frac{c+1}{2} - \frac{x^2}{2}, x \in A. \quad ①$$

在给定函数方程中,令 $y = 0$,有

$$f(x - c) = f(c) + cx + f(x) - 1,$$

即

$$f(x-c)-f(x)=cx+f(c)-1, x\in R.$$

由于 $c\neq 0$,因此

$$\{cx+f(c)-1 \mid x\in R\}=R,$$

从而有

$$\{f(x-c)-f(x) \mid x\in R\}=R.$$

由于式可知,对于任一实数 x,都存在 $y_1=f(x^*-c)$ 和 $y_2=f(x^*)$,使得 $x=y_1-y_2$. 再由 ① 式,得

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y_1-y_2) \\ &= f(y_2)+y_1y_2+f(y_1)-1 \\ &= \frac{c+1}{2}-\frac{y_2^2}{2}+y_1y_2+\frac{c+1}{2}-\frac{y_1^2}{2}-1 \\ &= c-\frac{1}{2}(y_1-y_2)^2 \\ &= c-\frac{x^2}{2}, \end{aligned}$$

即

$$f(x)=c-\frac{x^2}{2}, \quad x\in R. \qquad ②$$

比较 ① 和 ②,得

$$c=1.$$

于是,有

$$f(x)=1-\frac{x^2}{2}, \quad x\in R. \qquad ③$$

反过来,容易验证函数 ③ 满足题目的条件. 因此,所求的函数为 ③.

第七章　概　　率

7·1　一张圆桌边有9把椅子,4人随机地就坐,问没有两人相邻的概率是多少?

(新加坡中学数学竞赛,1987年)

[解]　第一个人可坐任意位置,其余三人总共有8·7·6种围坐方法.

另一方面,若要求没有两人相邻,那么第一个人可坐任意位置,其余3人按顺时针间隔相坐有6种方法,最后多余一把椅子可以有4个位置,这样方法总数是$4\cdot 6=24$.

所以所求概率为$\frac{24}{8\cdot 7\cdot 6}=\frac{1}{14}$.

7·2　在集合$\left\{-3,-\frac{5}{4},-\frac{1}{2},0,\frac{1}{3},1,\frac{4}{5},2\right\}$中不放回地取两个数,求所取两个数为一对正交直线斜率的概率.

(美国 Mathcounts 数学竞赛试题,1988年)

[解]　两个数为一对正交直线的斜率,即两个数的乘积为-1.满足这个条件的数对有:-3和$\frac{1}{3}$,$-\frac{5}{4}$和$\frac{4}{5}$,$-\frac{1}{2}$和2,共3对.

在8个数中取两个数,共有$C_8^2=\frac{8\times 7}{2}=28$种取法,故所求概率为$\frac{3}{28}$.

7·3　抛掷一个硬币,每次正面出现得1分,反面出现得2分,试

证恰好得到 n 分的概率是$\frac{1}{3}\left[2+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right]$.

（第 12 届加拿大数学奥林匹克，1980 年）

[证] 令 p_n 表示恰好得到 n 分的概率.

不恰好得到 n 分的惟一情况是得到 $n-1$ 分以后再掷出一次反面.

因为“不恰好得到 n 分”的事件的概率是 $1-p_n$，“恰好得到 $n-1$ 分”的概率是 p_{n-1}. “掷出一次反面”的概率是$\frac{1}{2}$，所以有

$$1-p_n=\frac{1}{2}p_{n-1},$$

$$p_n-\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}p_{n-1}+\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(p_{n-1}-\frac{2}{3}\right),$$

于是 $\left\{p_n-\frac{2}{3}\right\}$ 是以 $p_1-\frac{2}{3}=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{6}$ 为首项，以 $-\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列.

$$p_n-\frac{2}{3}=-\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

$$p_n=\frac{1}{3}\left[2+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right].$$

7・4 将$\frac{n(n+1)}{2}$个不同的数随机地排成如图的三角形阵. 设 M_k 为第 k 行(从上往下)的最大数，试求 $M_1<M_2<\cdots<M_n$ 的概率.

```
      *
    *   *
   *  *  *
 … … … …
* * * … * * *
```

（第 22 届加拿大数学奥林匹克，1990 年）

[解] 记所求概率为 p_n，则 $p_1=1$.

对于 $n+1$ 行的表，最大数$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$应在第 $n+1$ 行，其概率为

$$\frac{n+1}{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}=\frac{2}{n+2}.$$

然后可任意地填满第 $n+1$ 行，最后，余下的 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个数填入前 n 行. 符合要求的概率为 p_n 故 $p_{n+1}=\frac{2}{n+2}p_n$.

所以
$$p_n=\frac{2}{n+1}\cdot\frac{2}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}p_1=\frac{2^n}{(n+1)!}$$

7·5　把一枚质地均匀的硬币抛掷 5 次，正面朝上恰为一次的可能性不为 0，而且与正面朝上恰好二次的概率相同.

令既约分数 $\frac{i}{j}$ 为硬币在 5 次抛掷中有 3 次正面朝上的概率，求 $i+j$ 的值.

（第 7 届美国数学邀请赛，1989 年）

[解]　令 r 为掷硬币一次正面朝上的概率，则在 n 次掷硬币中，有 k 次正面朝上的概率为：

$$C_n^k r^k(1-r)^{n-k}.$$

由题意，可得方程

$$C_5^1 r(1-r)^4=C_5^2 r^2(1-r)^3.$$

解得　$r=0,\frac{1}{3}$ 或 1.

由题意，概率不为 0 或 1，因此 $r=\frac{1}{3}$.

并且 5 次掷中 3 次正面朝上的概率为

$$\frac{i}{j}=C_5^3 r^3(1-r)^2=10\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{40}{243}.$$

所以　$i+j=283$.

7·6　假设一个随机数选择器只能从 1，2，…，9 这九个数字中选一个，并且以等概率作这些选择. 试确定在 n 次选择（$n>1$）后，选出的 n 个数的乘积能被 10 整除的概率.

（第 1 届美国数学奥林匹克，1972 年）

[解]　为使选出的 n 个数的乘积能被 10 整除，其中至少有一次选择 5，并且至少有一次选择偶数 2，4，6，8 之一.

设事件 A 表示没有一次选择 5，事件 B 表示没有一次选择偶数，约

定 $p(E)$ 表示事件 E 的概率.则所求的概率是 $1-P(A\cup B)$,从而有

$$\begin{aligned}&1-p(A\cup B)\\&=1-p(A)-p(B)+p(A\cap B)\\&=1-\left(\frac{8}{9}\right)^n-\left(\frac{5}{9}\right)^n+\left(\frac{4}{9}\right)^n\\&=1-\frac{8^n+5^n-4^n}{9^n}.\end{aligned}$$

于是选出的 n 个数的乘积能被10整除的概率为 $1-\dfrac{8^n+5^n-4^n}{9^n}$.

7·7 在给定的圆周上随机地选择 A,B,C,D,E,F 六个点,这些点的选择是独立的,而且相对于弧长而言是等可能的.求三角形 ABC,三角形 DEF 不相交(即没有公共点)的概率.

(第12届美国数学奥林匹克,1983年)

[解] 注意到分布在圆周上的六个不同的点的循环排列数为

$$p_5^5=5!=120.$$

并且由于分布的对称性,这些排列有相同的概率,其中三角形 ABC 和三角形 DEF 不相交的不同的排列数是

$$p_3^3\cdot p_3^3=3!\times3!=36.$$

这是由 A,B,C 的内部顺序和 D、E、F 的内部顺序决定的.

因此,三角形 ABC 与三角形 DEF 不相交的概率是:

$$p=\frac{36}{120}=\frac{3}{10}.$$

7·8 若任意从 10^{99} 的正约数中选取一个,它正好也是 10^{88} 的倍数的概率为 $\dfrac{m}{n}$,其中 m 和 n 互质,求 $m+n$.

(第6届美国数学邀请赛,1988年)

[解] 10^{99} 的约数都具有

$$2^a\cdot5^b$$

的形式,其中 a 和 b 满足 $0\leqslant a\leqslant99,0\leqslant b\leqslant99$.

因此 10^{99} 有

$$(99+1)(99+1)=100\times100$$

个正约数.

在这些正约数中，要成为 $10^{88}=2^{88}\cdot 5^{88}$ 的倍数必须满足

$$88\leqslant a\leqslant 99, 88\leqslant b\leqslant 99.$$

即 a 和 b 各有 12 种选择.

因此所求的概率为：

$$\frac{m}{n}=\frac{12\times 12}{100\times 100}=\frac{9}{625}.$$

所以 $\quad m+n=625+9=634.$

7·9　一个园丁要把三棵枫树，四棵橡树，五棵桦树栽成一行，他随机地确定这些树的排列顺序，各种不同的安排都是等概率的. 用 $\frac{m}{n}$ 表示任何两棵桦树都不相邻的概率(化成最简分数以后)，求 $m+n$.

（第 2 届美国数学邀请赛，1984 年）

［解］ 12 棵树的不同排列顺序共有 12!种.

共有 7 棵非桦树(3 棵枫树和 4 棵橡树)，为使任何两棵桦树不相邻，可把 5 棵桦树放在非桦树的空档中，由于 7 棵非桦树共有 8 个空档，所以 5 棵桦树的安排方法有

$$p_8^5=8\times 7\times 6\times 5\times 4(\text{种}).$$

而 7 棵非桦树的排列方法有 $p_7^7=7!$(种).

因此任两棵桦树不相邻的排法共有

$$7!\cdot 8\times 7\times 6\times 5\times 4(\text{种}).$$

于是所求的概率是

$$p=\frac{7!\cdot 8\times 7\times 6\times 5\times 4}{12!}=\frac{7}{99}.$$

即 $\quad \frac{m}{n}=\frac{7}{99}.$

$$m+n=99+7=106.$$

7·10　某艘渔船未经外国允许在该国领海上捕鱼，每撒一次网将使该国的捕鱼量蒙受一个价值相同的损失. 在每次撒网期间渔船被外国海岸巡逻队拘留的概率等于 $1/k$，这里 k 是某个国家的自然数. 假定在每次撒网期间由渔船被拘留或不被拘留所组成的事件是与其前的捕鱼过程无关的. 若渔船被外国海岸巡逻队拘留，则原先捕获的鱼全部没收，并且今后不能再来捕鱼. 船长打算捕完第 n 网后离开外国领海. 因为决不能排除渔船被外国海岸巡逻队拘留的

可能性，所以捕鱼所得收益是一个随机变量．求数 n，使捕鱼收益的期望值达到最大．

（波兰数学奥林匹克，1976 年）

［解］ 渔船第一次撒网时没被拘留的概率等于 $1-\frac{1}{k}$，因为每次撒网期间被拘留或未被拘留的事件是独立的，所以撒了 n 次网而未被拘留的概率等于 $\left(1-\frac{1}{k}\right)^n$．因此，撒 n 次网收益期望值等于

$$f(n)=wn\left(1-\frac{1}{k}\right)^n, \qquad ①$$

这里 w 是撒一次网的收益．

问题归结为确定使 $f(n)$ 达到最大值的自然数 n．

由 $f(n)$ 的表达式 ① 知

$$\begin{aligned}f(n+1)&=w(n+1)\left(1-\frac{1}{k}\right)^{n+1}\\&=wn\left(1-\frac{1}{k}\right)^n\cdot\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)\\&=f(n)\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\\&=f(n)\left[1+\frac{(k-1)-n}{kn}\right].\end{aligned}$$

因为 $1+\frac{(k-1)-n}{kn}\geqslant 1$ 等价于 $k-1-n\geqslant 0$ 或 $n\leqslant k-1$，因此

$f(n+1)>f(n)$，当 $n=1,2,\cdots,k-2$ 时；

$f(n+1)=f(n)$，当 $n=k-1$ 时；

$f(n+1)<f(n)$，当 $n=k,k+1,\cdots$ 时．

因此，当 $n=k-1$ 时 f 达到最大值．

7・11 设正四面体的四个顶点是 A,B,C,D，各棱长度为 1 米．有一个小虫从 A 点开始按以下规则前进：在每一个顶点处用同样的概率选择通过这个顶点的三条棱之一，并一直爬到这个棱的尽头，设它爬了 7 米以后恰好位于顶点 A 的概率是

$$p=\frac{n}{729}.$$

求 n 的值.

(第3届美国数学邀请赛,1985年)

[解1]　设 a_n 表示小虫走过 n 米后又达到 A 点的概率($n=0,1,2,\cdots$).

若小虫爬过 $n-1$ 米而不在 A 点,则概率是

$$1-a_{n-1},$$

而从 A 外的一点向 A 爬来的概率是 $\frac{1}{3}$,因此有

$$a_n=\frac{1}{3}(1-a_{n-1}). \qquad ①$$

又知 $a_0=1$,即小虫从 A 出发,我们可以逐步由 ① 算出

$$a_1=0,a_2=\frac{1}{3},a_3=\frac{2}{9},a_4=\frac{7}{27},$$

$$a_5=\frac{20}{81},a_6=\frac{61}{243},a_7=\frac{182}{729},$$

由 $$a_7=\frac{n}{729}=\frac{182}{729}$$

得 $$n=182.$$

[解2]　也可由 ① 求出 a_n 的通项公式

$$a_n-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}\left(a_{n-1}-\frac{1}{4}\right),\text{从而有}$$

$$a_n-\frac{1}{4}=\left(-\frac{1}{3}\right)^n\left(a_0-\frac{1}{4}\right),\text{即 } a_n-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^n,$$

所以 $$a_n=\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{4}\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

即 $$a_n=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n,$$

算出 $$a_7=\frac{182}{729}.$$

从而 $$n=182.$$

7·12　对一个由互不相同的实数组成的已知序列 $r_1,r_2,r_3,\cdots,r_n$,进行一次操作是指将其第二项与第一项比,当且仅当第二项较小时,将它们互换位置;如此继续下去,直到将最后一项与它新的前一项比,当且仅且最后一项较小时,将它们互换位置,例如下图显示了序列

1,9,8,7 是如何通过一次操作转换成序列 1,8,7,9 的. 每步所比较的两数用"——"在它们下面标出.

$\underline{1\quad 9}\quad 8\quad 7$

$1\quad \underline{9\quad 8}\quad 7$

$1\quad 8\quad \underline{9\quad 7}$

$1\quad 8\quad 7\quad 9$

显然,任一已知序列均可通过一次或多次这样的操作,使最后排成一列递增序列.

现假设 $n = 40$, 且 $r_1, r_2, \cdots, r_{40}$ 互不相同, 并随机地排列, 设 $\frac{p}{q}$(既约分数)表示通过一次操作将原来第 20 项(r_{20})换至第 30 项的概率,求 $p + q$ 的值.

(第 5 届美国数学邀请赛,1987 年)

[解] 我们注意这样一个事实:

按题中定义的操作对任一序列

$r_1, r_2, \cdots, r_k$

施行一次后,最后一个数必然是序列中最大的一个数.

因此,在一个初始序列

$r_1, r_2, \cdots, r_{20}, \cdots, r_{30}, r_{31}, \cdots, r_{40}$ 中, r_{20} 要通过一次操作换到第 30 个位置的充要条件是:

在前 31 个数 $r_1, r_2, \cdots, r_{30}, r_{31}$ 中, r_{31} 是最大的一个数, r_{20} 是仅小于 r_{31} 的第二个大的数.

故所求概率为: $\frac{p}{q} = \frac{29!}{31!} = \frac{1}{31 \times 30} = \frac{1}{930}$.

所以 $\quad p + q = 931$.

7·13 某生物学家想要计算湖中鱼的数目;在 5 月 1 日他随机地捞出 60 条鱼并给它们做了标记,然后放回湖中,在 9 月 1 日他又随机地捉了 70 条鱼,发现其中有 3 条有标记,他假定在 5 月 1 日时湖中的鱼有 25% 在 9 月 1 日时已经不在湖中了(由于死亡或移居),9 月 1 日湖中的鱼的 40% 在 5 月 1 日时不在湖里(由于新出生或刚刚迁入湖中),并且在 9 月 1 日捞的鱼能代表整个湖中鱼的情况,问 5 月 1 日

湖中有多少鱼?

（第8届美国数学邀请赛,1990年）

[解] 在5月1日作标记的60条鱼,在9月1日还在湖中的可能有

$$60(1-25\%)=45(\text{条}).$$

这45条鱼中,捞出3条有标记的鱼,所以捞出的有标记的鱼占整个有标记的鱼的$\frac{3}{45}=\frac{1}{15}$.

这三条有标记的鱼是在捞出70条鱼中发现的,而70条鱼中有60%的鱼5月1日在湖里,即在5月1日在湖里的有

$$70(1-40\%)=42(\text{条}).$$

于是9月1日的湖中有5月1日的鱼共

$$42\div\frac{1}{15}=630(\text{条}).$$

而5月1日的鱼中只有$(1-25\%)$的鱼是9月1日湖中的鱼,设5月1日湖中有x条鱼,则

$$x(1-25\%)=630,$$
$$x=840(\text{条}).$$

所以5月1日湖中有840条鱼.

7·14 一个均匀的硬币投掷十次,令$\frac{i}{j}$为正面不连着出现的概率,其i、j无公因数,求$i+j$.

（第8届美国数学邀请赛,1990年）

[解] 投十次硬币,正面不连续出现的可能性有如下各种情况:

10次都是反面的可能性有1种;

9次是反面,1次是正面的可能性有C_{10}^{1}种;

8次是反面,2次是正面,则正面不连续的可能性只能把出现这两次正面的投掷插入8次反面投掷的空当之中,所以有C_{9}^{2}种可能;

同样,7次反面,3次正面有C_{8}^{3}种可能;

6次反面,4次正面有C_{7}^{4}种可能;

5次反面,5次正面有C_{6}^{5}种可能.

而不大于 4 次反面的投掷中,不会出现正面都不连续的情况.

又因为十次投掷硬币共有 $2^{10}=1024$ 种可能.

所以所求的概率为

$$\frac{i}{j}=\frac{1+C_{10}^{1}+C_{9}^{2}+C_{8}^{3}+C_{7}^{4}+C_{6}^{5}}{1024}$$

$$=\frac{144}{1024}$$

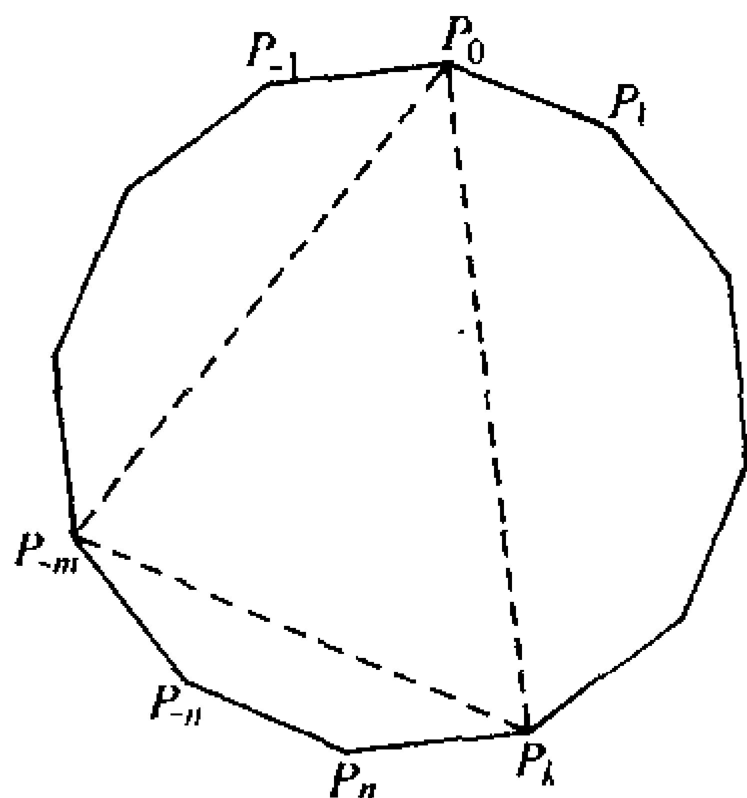
$$=\frac{9}{64},$$

于是 $\quad i+j=73.$

7・15 在一个给定的正 $2n+1$ 边形的顶点中随机地选取三个不同的顶点,如果一切这种取法的可能性是相等的.求这个正多边形的中心位于随机所取的三点构成的三角形内部的概率.

(第 2 届美国数学奥林匹克,1973 年)

[解] 先固定三角形的一个顶点,记为 p_0,在 p_0 两侧的顶点依次记为 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 及 $p_{-1},p_{-2},\cdots,p_{-n}$.



要使正多边形的中心在三角形的内部,必须且只需三角形的其余两顶点一为 $p_k(k>0)$,一为 $p_{-m}(m>0)$,且 $k+m>n$.

因此对于每一个固定的 k,这样的三角形共有 k 个:

$$\triangle p_0p_kp_{-(n-k+1)},\triangle p_0p_kp_{-(n-k+2)},\cdots,$$

$\triangle p_0p_kp_{-n}$.(k 取 $1,2,\cdots,n$),则

$$\sum_{k=1}^{n}k=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

因为共有 $2n+1$ 个顶点,所以含有正多边形中心的三角形共有

$$\frac{(2n+1)n(n+1)}{2\times 3}=\frac{(2n+1)\cdot n\cdot(n+1)}{6}$$

个,而由 $2n+1$ 个顶点组成的所有三角形共有

$$C_{2n+1}^{3}=\frac{(2n+1)\cdot 2n\cdot(2n-1)}{6}.$$

因此所求的概率为

$$\frac{\frac{(2n+1)n(n+1)}{6}}{\frac{(2n+1)\cdot 2n\cdot(2n-1)}{6}}=\frac{n+1}{2(2n-1)}.$$

7·16　一副纸牌共有 N 张，其中有三张 A，现随机地洗牌（假定纸牌可能的分布都有相等的机会），然后从顶上开始一张接一张地翻牌，直到翻到第二张 A 出现为止. 求证翻过的纸牌数的期望（平均）值是$\frac{N+1}{2}$.

（第 4 届美国数学奥林匹克，1975 年）

［证］　设 x_1,x_2,x_3 表示三张 A 在任一分发中由上数起的位置，即三张 A 依次是第 x_1 张、第 x_2 张和第 x_3 张.

那么这种分发的逆分发，即从最后一张牌发起，那么第二张 A 在序列中的位置是

$$x'_2 = N+1-x_2.$$

于是不管 N 是奇数还是偶数，平均位置是

$$\frac{x_2+(N+1-x_2)}{2}=\frac{N+1}{2}.$$

显然这就是所求的翻过的纸牌数的期望值.

7·17　父亲、母亲、儿子决定举行某种游戏的家庭比赛，每局由两人参加，没有和局. 因为父亲是最弱手，所以让他选定第一局的两个参加者. 每局获胜者与未参加此局比赛的人进行下一局的比赛，在比赛中某人首先获胜两局就算取得锦标. 如果儿子是最强的，那么从直观上看，父亲若决定自己与母亲进行首局比赛将使他获得锦标的概率最大. 试证这种策略确实是最优的（假定任一选手每局战胜其他选手的概率在整个比赛过程中不变）.

（第 3 届美国数学奥林匹克，1974 年）

［证］　设 F、M、S 分别表示父亲、母亲和儿子. 又用记号 $W>L$ 表示某一局 W 战胜 L.

如果 F 与 M 进行首局比赛，那么对于下述三种相互独立的情况的任一种，F 总能获得锦标：

(1) $F>M,F>S$；

(2) $F>M,S>F,M>S,F>M$；

(3) $M > F, S > M, F > S, F > M$.

如果 F 与 S 进行首局比赛，与上面的情况类似，F 在下列三种情况下的任一种可以获得锦标：

(4) $F > S, F > M$;

(5) $F > S, M > F, S > M, F > S$;

(6) $S > F, M > S, F > M, F > S$.

如果 M 与 S 进行首局比赛，那么 F 在以下两种情况的任一种可以获得锦标：

(7) $S > M, F > S, F > M$;

(8) $M > S, F > M, F > S$.

设 $F > M$ 的概率为 $\overline{FM}$，其余类推.

注意到 $\quad \overline{FM} + \overline{MF} = 1$.

如果 F 与 M 进行首届比赛，那么 F 获锦标的概率是

$$P_{FM} = (\overline{FM} \cdot \overline{FS}) + (\overline{FM} \cdot \overline{SF} \cdot \overline{MS} \cdot \overline{FM}) + (\overline{MF} \cdot \overline{SM} \cdot \overline{FS} \cdot \overline{FM}).$$

如果 F 与 S 进行首局比赛，那么 F 获得锦标的概率是

$$P_{FS} = (\overline{FS} \cdot \overline{FM}) + (\overline{FS} \cdot \overline{MF} \cdot \overline{SM} \cdot \overline{FS}) + (\overline{SF} \cdot \overline{MS} \cdot \overline{FM} \cdot \overline{FS}).$$

如果 M 与 S 进行首局比赛，那么 F 获得锦标的概率是

$$\begin{aligned} P_{MS} &= (\overline{SM} \cdot \overline{FS} \cdot \overline{FM}) + (\overline{MS} \cdot \overline{FM} \cdot \overline{FS}) \\ &= \overline{FS} \cdot \overline{FM}(\overline{SM} + \overline{MS}) \\ &= \overline{FS} \cdot \overline{FM}. \end{aligned}$$

显然 $\quad P_{MS} < \min\{P_{FM} \cdot P_{FS}\}$

下面比较 P_{FM} 和 P_{FS}.

$$\begin{aligned} P_{FM} - P_{FS} &= (\overline{FM} \cdot \overline{SF} \cdot \overline{MS} \cdot \overline{FM}) + (\overline{MF} \cdot \overline{SM} \cdot \overline{FS} \cdot \overline{FM}) \\ &\quad - (\overline{FS} \cdot \overline{MF} \cdot \overline{SM} \cdot \overline{FS}) - (\overline{SF} \cdot \overline{MS} \cdot \overline{FM} \cdot \overline{FS}) \\ &= (\overline{FM} - \overline{FS})(\overline{SF} \cdot \overline{MS} \cdot \overline{FM} + \overline{MF} \cdot \overline{SM} \cdot \overline{FS}). \end{aligned}$$

由于 S 是最强的，$\overline{FM} > \overline{FS}$,

所以 $\quad P_{FM} > P_{FS}$.

即 F 与 M 进行首局比赛的策略是最优的.

7・18　给定三个全等的 n 面骰子，它们的对应面标上同样的任意整数. 证明如果随机投掷它们，那么向上的三个面上的数字之和能被

3 整除的概率大于或等于$\frac{1}{4}$.

（第 8 届美国数学奥林匹克，1979 年）

[证] 设 n 面骰子上有 n_0 个面上的整数能被 3 整除，有 n_1 个面上的整数被 3 除余 1，有 n_2 个面上的整数被 3 除余 2. 其中

$$n_0 \geqslant 0, n_1 \geqslant 0, n_2 \geqslant 0,$$

$$n_0 + n_1 + n_2 = n.$$

先考虑掷骰子的一切可能结果.

由于是随机投掷，因此每一个骰子都可使 n 个面的任何一个面向上，有 n 种结果，又由于每个骰子都是互相独立的，所以掷骰子的一切可能结果的种数是

$$n \cdot n \cdot n = n^3 = (n_1 + n_2 + n_3)^3.$$

再考虑向上三面整数之和能被 3 整除的各种可能的种数有下面 n 种情形.

三个数都是 3 的倍数，共有 n_0^3 种；

三个数都是被 3 除余 1 的数，共有 n_1^3 种；

三个数都是被 3 除余 2 的数，共有 n_2^3 种；

一个数是 3 的倍数（共 n_0 种），一个数是被 3 除余 1 的数（共 n_1 种），一个数是被 3 除余 2 的数（共 n_2 种），并考虑所有不同顺序，则共有 $p_3^3 n_0 n_1 n_2 = 6 n_0 n_1 n_2$ 种.

于是三个数之和被 3 整除的各种结果总数为

$$n_0^3 + n_1^3 + n_2^3 + 6 n_0 n_1 n_2.$$

因此，所求事情的概率是

$$p = \frac{n_0^3 + n_1^3 + n_2^3 + 6 n_0 n_1 n_2}{(n_0 + n_1 + n_2)^3}.$$

下面我们证明 $p \geqslant \frac{1}{4}$，即证明

$$4(n_0^3 + n_1^3 + n_2^3 + 6 n_0 n_1 n_2) \geqslant (n_0 + n_1 + n_2)^3$$

$$4(n_0^3 + n_1^3 + n_2^3 + 6 n_0 n_1 n_2) - (n_0 + n_1 + n_2)^3$$

$$= 3(n_0^3 + n_1^3 + n_2^3 + 6 n_0 n_1 n_2 - n_0 n_1^2 - n_0 n_2^2 - n_1 n_2^2 - n_1 n^2 -$$

$$n_2n_0^2 - n_2n_1^2)$$

$$= 3[n_0^3 - n_0(n_1 - n_2)^2 + n_1^3 - n_1(n_0 - n_2)^2 + n_2^3 - n_2(n_0 - n_1)^2]$$

$$= 3[n_0(n_0 + n_1 - n_2)(n_0 - n_1 + n_2) + n_1(n_1 + n_0 - n_2)(n_1 - n_0 + n_2) + n_2(n_2 + n_0 - n_1)(n_2 - n_0 + n_1)] \quad ①$$

考虑到 n_0, n_1, n_2 的对称性,不妨设 $n_0 \geqslant n_1 \geqslant n_2$.

当 $n_0 \leqslant n_1 + n_2$ 时,由于①式中各数 $n_0, n_1, n_2, n_0 + n_1 - n_2, n_0 - n_1 + n_2, n_1 + n_0 - n_2, n_1 - n_0 + n_2, n_2 + n_0 - n_1, n_2 - n_0 + n_1$ 均为非负数,所以①式非负.

当 $n_0 > n_1 + n_2$ 时,由于 n_0, n_1, n_2 是整数,则

$$n_0 \geqslant n_1 + n_2 + 1.$$

由①式得

$$4(n_0^3 + n_1^3 + n_2^3 + 6n_0n_1n_2) - (n_0 + n_1 + n_2)^3$$
$$\geqslant 3[(n_1 + n_2 + 1)(n_0 + n_1 - n_2)(n_0 - n_1 + n_2) + n_1(n_1 + n_0 - n_2)(n_1 - n_0 + n_2) + n_2(n_2 + n_0 - n_1)(n_2 - n_0 + n_1)]$$
$$= (n_0 + n_1 - n_2)(n_0 - n_1 + n_2) + n_1(n_0 + n_1 - n_2) \cdot 2n_2 + n_2(n_0 + n_2 - n_1) \cdot 2n_1$$
$$\geqslant 0.$$

所以①式非负.因此有 $P \geqslant \frac{1}{4}$.

7·19 沿山溪游动的鲑鱼必须闯过两道瀑布.在这个试验中,鲑鱼闯过第一道瀑布的概率是 $p > 0$,闯过第二道瀑布的概率是 $q > 0$.假定闯过瀑布的试验是独立的.试求,在 n 次试验中鲑鱼不能闯过两道瀑布的条件下,鲑鱼在 n 次试验中不能闯过第一道瀑布的概率.

(波兰数学奥林匹克,1974 年)

[解] 设 A_n 是鲑鱼在 n 次试验中不能闯过第一道瀑布的事件,B_n 是在 n 次试验中不能闯过两道瀑布的事件.因为在一次试验中不能闯过第一道瀑布的概率是 $1 - p$,而且试验是独立的,所以

$$p(A_n)=(1-p)^n. \qquad ①$$

事件 B_n 由下列事件组成：鲑鱼在 n 次试验中不能闯过第一道瀑布，或者鲑鱼在第 k 次试验($1\leqslant k\leqslant n$)中闯过第一道瀑布，但在后 $n-k$ 次试验中没有闯过第二道瀑布.因此

$$p(B_n)=(1-p)^n+\sum_{k=1}^{n}(1-p)^{k-1}p(1-q)^{n-k}. \qquad ②$$

如果 $p=q$，那么 ② 式右边变成

$$\begin{aligned}p(B_n)&=(1-p)^n+\sum_{k=1}^{n}(1-p)^{n-1}p\\&=(1-p)^n+np(1-p)^{n-1}.\end{aligned} \qquad ③$$

如果 $q=1$，那么鲑鱼一次试验就闯过第二道瀑布，所以

$$p(B_n)=(1-p)^n+(1-p)^{n-1}p=(1-p)^{n-1}. \qquad ④$$

因此，如果鲑鱼在 n 次试验中不能闯过第一道瀑布，或者仅仅在第 n 次试验中闯过第一道瀑布，那么事件 B_n 发生.

但若规定 $0^0=1$，④ 式可由 ② 式推出.

若 $p\neq q$ 且 $q<1$，那么运用等比级数求和公式可将 ② 式右边变换为

$$\begin{aligned}p(B_n)&=(1-p)^n+p(1-q)^{n-1}\frac{1-\left(\frac{1-p}{1-q}\right)^n}{1-\left(\frac{1-p}{1-q}\right)}\\&=(1-p)^n+(1-q)^n\frac{p}{p-q}\left[1-\left(\frac{1-p}{1-q}\right)^n\right]\\&=(1-p)^n+\frac{p}{p-q}[(1-q)^n-(1-p)^n]\\&=\frac{p(1-q)^n-q(1-p)^n}{p-q}.\end{aligned}$$

于是在这种情形下，

$$p(B_n)=\frac{p(1-q)^n-q(1-p)^n}{p-q}. \qquad ⑤$$

如果事件 A_n 不发生，那么事件 B_n 更不会发生.因此 $A_n\cap B_n=A_n$.依据条件概率公式，得

$$p(A_n \mid B_n) = \frac{p(A_n \cap B_n)}{p(B_n)} = \frac{p(A_n)}{p(B_n)}. \qquad ⑥$$

当 $n = 1$ 时,由已知条件知 $p(A_n) = 1 - p, p(B_n) = 1$.代入⑥式得 $p(A_n \mid B_n) = 1 - p$.下面我们假定 $n \geqslant 2$.

注意到,若 $p \neq q$,则 $p(B_n) \neq 0$.事实上,如果 $p(B_n) = 0$,那么由⑤式可得 $p(1-q)^n = q(1-p)^n$,因此

$$\frac{p}{q} = \left(\frac{1-p}{1-q}\right)^n. \qquad ⑦$$

但若 $p < q$,那么 $1 - p > 1 - q$,因而等式⑦不成立.若 $p > q$,同样的道理,等式⑦也不成立.

如果 $p = q$,且 $p(B_n) = 0$,那么由③式推知 $p = 1$.因此,当且仅当 $p = q = 1$ 时,条件概率 $p(A_n \mid B_n)$ 不存在.现计算其他情形.

当 $p = q < 1$ 时,由①,③,⑥式得

$$p(A_n \mid B_n) = \frac{1-p}{1-p+np} = \frac{1-p}{1+(n-1)p}.$$

而当 $p < q = 1$ 时,由①,④,⑥式得

$$p(A_n \mid B_n) = 1 - p.$$

当 $p \neq q < 1$ 时,应用①,⑤,⑥式求得

$$p(A_n \mid B_n) = \frac{(1-p)^n(p-q)}{p(1-q)^n - q(1-p)^n} = \frac{(p-q)\left(\frac{1-p}{1-q}\right)^n}{p - q\left(\frac{1-p}{1-q}\right)^n}.$$

7·20　一种单人纸牌游戏,其规则如下:将6对不相同的纸牌放入一个书包中,游戏者每次随机地从书包中抽牌并放回,不过当抽到成对的牌时,就将其放到一边.如果游戏者每次总取三张牌,若抽到的三张牌中两两互不成对,游戏就结束,否则抽牌继续进行,直到书包中没有纸牌为止.设书包空的概率为 $\frac{p}{q}$,这里 p、q 为互质正整数,求 $p + q$.

(第12届美国数学邀请赛,1994年)

[解]　设书包中有 n 对互不相同的牌,其中 $n \geqslant 2$,则前三张牌中有2张成对的概率为

$$\frac{\text{取3张中有2张成对的取法种数}}{\text{取3张牌的取法种数}}$$

$$= \frac{C_n^1 \cdot C_{2n-2}^1}{C_{2n}^3}$$

$$= \frac{3}{2n-1}$$

设 $P(n)$ 是当书包中有 n 对互不相同的牌时，按题中规则开始抽牌，使书包空的概率.

显然

$$\begin{cases} P(2) = 1 \\ P(n) = \dfrac{3}{2n-1} \cdot P(n-1), n \geqslant 3. \end{cases}$$

反复利用这个递归公式可得

$$P(n) = \frac{3}{2n-1} \cdot \frac{3}{2n-3} \cdot \cdots \cdot \frac{3}{5} \cdot P(2).$$

令 $n = 6$，得

$$P(6) = \frac{3}{11} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{5} \cdot P(2)$$

$$= \frac{9}{385}.$$

即 $\frac{p}{q} = \frac{9}{385}$.

故 $p + q = 9 + 385 = 394$.

第八章　数列

第1节　求值与求通项公式

8·1　把所有3的方幂及任意有限个互不相等的3的方幂之和排成一个递增序列：

$$1,3,4,9,10,12,13,\cdots$$

求这个序列的第100项.

（第4届美国数学邀请赛，1986年）

［解］　该序列第 n 项记为 a_n. 显然 a_n 是正整数，且它的三进位表示中用到的数码只有0和1. 反之，任何自然数，如果其三进位表示中只用到数码0和1，则该数必是这个数列的一项. 由此可得 n 的二进位表示恰是 a_n 的3进位表示. 由于100的二进位表示为1100100，所以

$$a_n = 3^6 + 3^5 + 3^2 = 981.$$

8·2　数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1 = 1989^{1989}$，对于 $n > 1$，a_n 等于 a_{n-1} 的各位数字之和. 试求 a_5.

（第21届加拿大数学奥林匹克，1989年）

［解］　由于 $a_1 = 1989^{1989} < 10^{4\cdot 1989}$，

所以　　$a_2 \leqslant 9\cdot(4\cdot 1989 + 1) < 80000$，

即 a_2 至多是5位数. 由此可知

$$a_3 \leqslant 45,\quad a_4 \leqslant 12,\quad a_5 \leqslant 9.$$

由于　$9 \mid 1989$，所以 $9 \mid a_5$，又显然　$a_5 \neq 0$，从而 $a_5 = 9$.

8·3　设数列 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ 满足

$$3x_n - x_{n-1} = n, n = 2,3,\cdots$$

且 $$|x_1| < 1971.$$

试求出 x_{1971},要求精确到 0.000001.

(第 34 届莫斯科数学奥林匹克,1971 年)

[解] 显然数列 $y_n = \frac{1}{2}n - \frac{1}{4}, n = 1,2,3,\cdots$ 满足

$$3y_n - y_{n-1} = n, n = 2,3,\cdots$$

所以 $$|y_n - x_n| = \frac{1}{3}|y_{n-1} - x_{n-1}|,$$

由此可知 $$|y_{1971} - x_{1971}| = \left(\frac{1}{3}\right)^{1970}|y_1 - x_1| < \left(\frac{1}{3}\right)^{1970} \cdot 1972.$$

因此 $y_{1971} = 985.250000$ 是 x_{1971} 精确到 0.000001 的近似值.

8·4 设正整数数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_{n+3} = a_{n+2}(a_{n+1} + 2a_n), n = 1,2,\cdots$$

且 $a_6 = 2288$. 求 a_1, a_2, a_3.

(中国四川省高中数学联赛,1988 年)

[解] 由递推关系可得

$$\begin{aligned} a_6 &= a_5(a_4 + 2a_3) = a_4(a_3 + 2a_2)(a_4 + 2a_3) \\ &= a_3(a_2 + 2a_1)(a_3 + 2a_2)[a_3(a_2 + 2a_1) + 2a_3] \\ &= a_3^2(a_3 + 2a_2)(a_2 + 2a_1)(a_2 + 2a_1 + 2). \end{aligned}$$

因为 $a_6 = 2288 = 2^4 \times 11 \times 13$,所以由 $a_2 + 2a_1 + 2$ 与 $a_2 + 2a_1$ 相差 2,且都是 2288 的因子,则只能有

$$a_2 + 2a_1 = 11, a_2 + 2a_1 + 2 = 13.$$

从而 $$a_3^2(a_3 + 2a_2) = 2^4,$$

由此可得 a_3 只能为 1 或 2. 若 $a_3 = 1$,则 $a_2 = \frac{12}{5}$ 不是自然数,矛盾!所以 $a_3 = 2, a_2 = 1$. 再由 $a_2 + 2a_1 = 11$,得 $a_1 = 5$.

8·5 将与 105 互素的所有正整数从小到大排成数列,试求这个数列的第 1000 项.

(中国高中数学联赛,1994 年)

[解] 该数列记为 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 不超过 105 而且与 105 互素的正整数的个数为

$$105-\left(\frac{105}{3}+\frac{105}{5}+\frac{105}{7}\right)+\left(\frac{105}{15}+\frac{105}{35}+\frac{105}{21}\right)-1=48.$$

由于 $1000=20\times 48+40$,从而

$$a_{1000}=20\times 105+a_{40}=2100+a_{40}.$$

再由 $a_{48}=104, a_{47}=103, a_{46}=101, a_{45}=97, a_{44}=94, a_{43}=92,$

$$a_{42}=89, a_{41}=88, a_{40}=86,$$

所以 $a_{1000}=2186.$

8·6 设数列 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ 满足

$$a_0=a_1=11, a_{m+n}=\frac{1}{2}(a_{2m}+a_{2n})-(m-n)^2, m, n\geqslant 0.$$

求 a_{45}.

(前苏联教育部推荐试题,1991 年)

[解] 由 $a_1=a_{1+0}=\frac{1}{2}(a_2+a_0)-1$,所以 $a_2=13$.

对于 $n\geqslant 1$ 由假设可知

$$a_{2n}=a_{n+1+n-1}=\frac{1}{2}(a_{2n+2}+a_{2n-2})-4,$$

所以记 $b_n=a_{2n}$ 得到

$$b_0=11, b_1=13, 且 \quad b_{n+1}=2b_n-b_{n-1}+8, n\geqslant 1.$$

由此可得 $\sum_{k=1}^{n} b_{k+1}=2\sum_{k=1}^{n} b_k-\sum_{k=1}^{n} b_{k-1}+8n,$

即 $b_{n+1}=b_n+b_1-b_0+8n=b_n+8n+2.$

于是得到 $b_{n+1}=b_1+2n+8\sum_{k=1}^{n} k=4n^2+6n+13.$

再由 $b_0=11, b_1=13$,从而

$$b_n=4(n-1)^2+6(n-1)+13=4n^2-2n+11, n=0,1,2,\cdots$$

即 $a_{2n}=4n^2-2n+11, n=0,1,2,\cdots.$

对任何 $n\geqslant 0$,利用假设可得

$$\begin{aligned} a_n=a_{n+0} &=\frac{1}{2}(a_{2n}+a_0)-n^2 \\ &=\frac{1}{2}(4n^2-2n+11+11)-n^2 \\ &=n^2-n+11. \end{aligned}$$

从而 $a_{45} = 45 \cdot 44 + 11 = 1991.$

8·7 已给 $a_1 = 1996,$

$$a_k = [\sqrt{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}}], k = 2,3,\cdots$$

其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数.试求 a_{1966}.

(第 29 届莫斯科数学奥林匹克,1966 年)

[解] $a_1 = 1966 = 44^2 + 30$,所以 $a_2 = a_3 = 44$ 且

$$a_1 + a_2 + a_3 = 45^2 + 29.$$

由此可知 $a_4 = a_5 = 45$ 且

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 46^2 + 28.$$

依此类推可得 $a_{60} = a_{61} = 73$ 且

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{61} = 74^2.$$

于是 $a_{62} = a_{63} = a_{64} = 74$ 且

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{64} = 75^2 + 73.$$

重复前面的证明可得 $a_{65} = a_{66} = 75, \cdots, a_{209} = a_{210} = 147,$ $a_{211} = a_{212} = a_{213} = 148$ 且

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{213} = 149^2 + 147.$$

一般地用归纳法易证,数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 从第 2 项起单调不减,取遍不小于 44 的所有自然数.进一步形如 $2^n \cdot 74$ 的数被连续取三次(n 是非负整数),其余的数均被连续取两次.由此不难算出

$$a_{1966} = 1024.$$

8·8 设 x_1, x_2 是小于 1000 的两个自然数,令

$x_3 = |x_1 - x_2|, x_4 = \min\{|x_1 - x_2|, |x_1 - x_3|, |x_2 - x_3|\}\cdots,$ $x_k = \min\{|x_i - x_j| \mid 1 \leqslant i, j \leqslant k-1, i \neq j\}, \cdots$ 求证:$x_{21} = 0$.

(第 10 届全苏数学奥林匹克,1976 年)

[证] 不妨设 $x_1 \geqslant x_2$,显然 $x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots$ 是非负整数列且 $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant x_4 \geqslant \cdots$ 进一步有

$$x_k \leqslant x_{k-2} - x_{k-1}, k = 3,4,\cdots \quad ①$$

假设 $x_{21} \neq 0$,则 $x_{21} \geqslant 1$ 且 $x_1 > x_2 > x_3 > \cdots > x_{20} \geqslant x_{21}$.

令 $y_1 = x_{21}, y_2 = x_{20}, \cdots, y_{20} = x_2, y_{21} = x_1$,则 $y_1 \geqslant 1, y_2 \geqslant 1$ 且由 ① 可得

$$y_k \geqslant y_{k-1} + y_{k-2}, k = 3,4,\cdots,21.$$

令数列$\{z_k\}$满足 $z_1 = z_2 = 1, z_k = z_{k-1} + z_{k-2}, k = 3,4,\cdots$

显然 $y_k \geqslant z_k, k = 1,2,\cdots,21$. $\{z_k\}$是斐波那契数列,易知 $z_{21} > 1000$,从而 $x_1 = y_{21} > 1000$ 矛盾!所以 $x_{21} = 0$.

8·9、设 $a_n = \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}, n = 1,2,3,\cdots$ 求 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{99}$.

(前南斯拉夫数学奥林匹克,1976 年)

[解] 由于

$$a_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} = \frac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2 n - n^2(n+1)}$$
$$= \frac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{n(n+1)} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

所以 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{99} = \sum\limits_{n=1}^{99}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{100}} = \dfrac{9}{10}$.

8·10 设数列$\{a_n\}$满足

$$a_n = a_{n-1} - a_{n-2}, n \geqslant 3.$$

如果它的前 1492 项之和为 1985,前 1985 项之和是 1492,求它的前 2001 项之和.

(第 3 届美国数学邀请赛,1985 年)

[解] 对于任意自然数 n,由假设可得

$$a_n, a_{n+1}, a_{n+2} = a_{n+1} - a_n, a_{n+3} = a_{n+2} - a_{n+1} = -a_n,$$
$$a_{n+4} = a_{n+3} - a_{n+2} = -a_{n+1}, a_{n+5} = a_n - a_{n+1}, a_{n+6} = a_n.$$

由此还可得 $a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4} + a_{n+5} = 0$.

记数列前 λ 项之和为 S_n. 由于 $1492 = 6 \times 248 + 4, 1985 = 6 \times 330 + 5$,所以

$$1985 = S_{1492} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2a_2 - a_1,$$
$$1492 = S_{1985} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = a_2 - a_1.$$

解得 $a_1 = -999, a_2 = 493$. 又 $2001 = 6 \times 333 + 3$,所以

$$S_{2001} = a_1 + a_2 + a_3 = 2a_2 = 986.$$

8·11 $n^2(n \geqslant 4)$ 个正数排成 n 行 n 列:

$$a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\cdots a_{1n},$$
$$a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\cdots a_{2n},$$
$$a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\cdots a_{3n},$$
$$a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}\cdots a_{4n},$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_{n1}a_{n2}a_{n3}a_{n4}\cdots a_{nn}.$$

其中每一行的数成等差数列,每一列的数成等比数列,并且所有公比相等.已知

$$a_{24}=1,a_{42}=\frac{1}{8},a_{43}=\frac{3}{16},$$

求 $$a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}.$$

(中国高中数学联赛,1990年)

[解] 由于每行数都成等差数列,且 $a_{42}=\frac{1}{8}$,$a_{43}=\frac{3}{16}$,所以第四行数的公差为$\frac{1}{16}$,同时

$$a_{4k}=\frac{k}{16},k=1,2,3,4,\cdots,n.$$

再由每列数成等比数列,且所有公比相等,利用 $a_{24}=1,a_{44}=\frac{1}{4}$ 可知共同的公比为$\frac{1}{2}$.于是可得 $a_{kk}=\left(\frac{1}{2}\right)^{k-4}\frac{k}{16},k=1,2,3,4,\cdots,n.$

由此可知 $$\sum_{k=1}^{n}a_{kk}=\sum_{k=1}^{n}k\left(\frac{1}{2}\right)^{k}.$$

记 $S=\sum_{k=1}^{n}a_{kk}$,则

$$\frac{s}{2}=\sum_{k=1}^{n}k\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}=\sum_{k=2}^{n}(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k}+n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1},$$

从而 $$\frac{s}{2}=s-\frac{s}{2}=\frac{1}{2}+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}-n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}=1-\frac{n+2}{2^{n+1}}.$$

于是 $$s=2-\frac{n+2}{2^n}.$$

8・12　设 $a_0=1, a_1=2$,且

$$n(n+1)a_{n+1}=n(n-1)a_n-(n-2)a_{n-1}, n=1,2,3,\cdots$$

求

$$\frac{a_0}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{50}}{a_{51}}.$$

(第 8 届加拿大数学奥林匹克,1976 年)

[解]　用归纳法可以证明

$$a_n=\frac{1}{n!}, n=2,3,\cdots \qquad ①$$

事实上,当 $n=2$ 时,由递推公式及 $a_0=1, a_1=2$,立即可知 $a_2=\frac{1}{2}$.
若 $n\leqslant k$ 时,① 成立,其中 $k\geqslant 2$,则由

$$\begin{aligned}k(k+1)a_{k+1}&=k(k-1)a_k-(k-2)a_{k-1}\\&=k(k-1)\frac{1}{k!}-(k-2)\frac{1}{(k-1)!}\\&=\frac{1}{(k-1)!},\end{aligned}$$

可得　$a_{k+1}=\dfrac{1}{(k+1)!}$.

从而当　$n=k+1$ 时,① 也成立.

由 ① 可知

$$\frac{a_0}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{50}}{a_{51}}=\frac{1}{2}+4+3+4+\cdots+51=1327\frac{1}{2}.$$

8・13　设数列 $\{x_n\}$ 满足:$x_1=\frac{1}{2}$,且

$$x_{k+1}=x_k+x_k^2, k=1,2,\cdots$$

求　$\dfrac{1}{x_1+1}+\dfrac{1}{x_2+1}+\cdots+\dfrac{1}{x_{100}+1}$ 的整数部分.

(第 7 届城市邀请赛,1985 年 ～ 1986 年)

[解]　由递推关系易知

$$0<x_k<x_{k+1}, k=1,2,\cdots$$

由于　$x_{k+1}=x_k+x_k^2$,所以

$$\frac{1}{x_{k+1}}=\frac{1}{x_k}-\frac{1}{x_k+1},$$

从而 $\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{x_k+1}=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_{101}}$.

再由 $x_1=\frac{1}{2},x_2=\frac{3}{4},x_3=\frac{3}{4}+\frac{9}{16}=\frac{21}{16}>1,x_{101}>x_3$ 可知

$$1<\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_{101}}<2,$$

于是 $\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\cdots+\frac{1}{x_{100}+1}$ 的整数部分为 1.

8・14 已给数列 0,1,1,2,3,5,8,… 自第 3 项起,每一项都等于前面两项之和.问在此数列的前 100000001 项中,是否会有某一项的末尾 4 位数全为 0?

(第 9 届莫斯科数学奥林匹克,1946 年)

[解] 会有.事实上,记已给的数列为 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 对于 $n=1,2,\cdots$ 令

$$b_n=\begin{cases}a_n, & a_n<10^3;\\ a_n \text{ 的末尾四位数}, & a_n\geqslant 10^3.\end{cases}$$

显然 $0\leqslant b_n<10^4$,且

$$b_n\equiv b_{n-1}+b_{n-2}(\bmod 10^4),n=3,4,\cdots \quad ①$$

考虑有序数对 $(b_1,b_2),(b_2,b_3),\cdots,(b_{10^8},b_{10^8+1})$,由抽屉原理可知存在 $1\leqslant k<m\leqslant 10^8$ 使得

$$b_k=b_m,b_{k+1}=b_{m+1}.$$

记 $l=m-k$,由 ① 和一切 b_n 满足 $0\leqslant b_n<10^4$ 可得

$$b_n=b_{n+l},n=1,2,3,\cdots$$

由于 $1\leqslant l\leqslant 10^8-1$,所以存在 l 使得

$$18\leqslant 1+l\leqslant 10^8 \text{ 且 } b_{1+l}=b_1=0.$$

因为当 $n\geqslant 18$ 时,$a_n>10^3$,从而 a_{1+l} 的末尾四位数全为 0.

8・15 设 $a_1=3,b_1=100$,对于 $n\geqslant 1$

$$a_{n+1}=3^{a_n},b_{n+1}=100^{b_n}.$$

求满足 $b_m>a_{100}$ 的最小正整数 m.

(加拿大国家集训队训练题,1988 年)

[解] 由于 $3^3<100$,从而易知 $b_{99}>a_{100}$,

所以 $m\leqslant 99$.

另一方面用归纳法可以证明

$$a_{n+2} > 6b_n, n \geqslant 1. \qquad ①$$

代数卷

事实上,当 $n = 1$ 时,由 $a_3 = 3^{27} > 6b_1 = 600$ 可知①成立.设当 $n = k$ 时,①成立.当 $n = k + 1$ 时,由

$$a_{k+3} = 3^{a_{k+2}} > 3^{6b_k} > 6 \cdot 100^{b_k} = 6b_{k+1}.$$

可知①也成立.所以①对任何自然数 n 成立.

由①可得 $b_{98} < a_{100}$,所以 $m > 98$.总之得

$$m = 99.$$

8・16 设 $a_1, a_2, \cdots, a_8$ 是8个不全为0的实数,记 $C_n = a_1^n + a_2^n + \cdots + a_8^n, n = 1,2,3,\cdots$ 已知数列 $\{C_n\}$ 中有无穷多项等于0,求使得 $C_n = 0$ 的所有自然数 n.

(第9届国际数学奥林匹克,1967年)

[解] 当 n 是偶数时,由于 $a_1, a_2, \cdots, a_8$ 不全为0,所以 $C_n > 0$.由假设可知存在无穷多个奇自然数 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ 使得 $C_{n_k} = 0, k = 1,2,\cdots$

令
$$M_1 = \max_{1 \leqslant i \leqslant 8} |a_i|.$$

显然 $M_1 > 0$ 且当 $|a_i| < M_1$ 时 $\lim\limits_{k \to \infty} \left(\frac{a_i}{M_1}\right)^{n_k} = 0$.

用 l_1 和 l'_1 分别表示 $a_1, a_2, \cdots, a_8$ 中取值 M_1 的个数和取值 $-M_1$ 的个数,则 $l_1 + l'_1 > 0$ 且

$$0 = \frac{C_{n_k}}{M_1^{nk}} = \sum_{i=1}^{8} \left(\frac{a_i}{M}\right)^{n_k} = (l_1 - l'_1) + \sum_{|a_i| < M_1} \left(\frac{a_i}{M_1}\right)^{n_k}.$$

令 $k \to +\infty$ 可得 $l_1 = l'_1$.显然 $1 \leqslant l_1 \leqslant 4$.若 $l_1 < 4$,不妨设 $a_1 = \cdots = a_{l_1} = M_1, a_{l_1+1} = \cdots = a_{2l_1} = -M_1$,对于任何奇自然数 n 有 $C_n = a_{2l_1+1}^n + \cdots + a_8^n$.重复以上证明(最多4次)可知存在 $1,2,\cdots,8$ 的一个排列 $i_1, i_2, \cdots, i_8$ 使得 $a_{i_1} + a_{i_2} = a_{i_3} + a_{i_4} = a_{i_5} + a_{i_6} = a_{i_7} + a_{i_8} = 0$,从而对任何奇自然数 n 都有 $C_n = 0$.

综上所述所求之 n 为全部奇自然数.

8・17 对于每一个正整数 x,令 $g(x)$ 表示 x 的最大奇约数.设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{g(x)}, & \text{如果 } x \text{ 为偶数,}\\ 2^{\frac{x+1}{2}}, & \text{如果 } x \text{ 为奇数.}\end{cases}$$

构造序列:$x_1=1, x_{n+1}=f(x_n), n=1,2,\cdots$ 求证数 1992 出现在该序列中,求最小的 n,使得 $x_n=1992$,并说明这样的 n 是否惟一.

(第 33 届国际数学奥林匹克预选题,1992 年)

[证] 对于某个正整数 n 和非负整数 k,如果 $x_n=2^k$,则

$$x_{n+1}=3\cdot 2^{k-1}, x_{n+2}=5\cdot 2^{k-2}, \cdots, x_{n+k}=2^{k+1},$$

从而 $x_{n+k+1}=2^{k+1}$. 由此用归纳法易证

$$x_{\frac{1}{2}k(k+1)+s}=(2s-1)2^{k-s+1},$$

其中 $k=0,1,2,3,\cdots, s=1,2,\cdots,k+1$. 于是每一个正整数都在该序列中出现一次,所以存在惟一的 n,使得

$$x_n=1992.$$

再由 $1992=249\times 2^3$,可求出

$$s=125, k=127.$$

从而 $n=\dfrac{1}{2}(127\times 128)+125=8253.$

8·18 在一个有穷实数列中,任意 7 个连续项之和都是负数,而任意 11 个连续项之和都是正数.问这样的数列最多能有多少项.

(第 19 届国际数学奥林匹克,1977 年)

[解] 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是满足题设条件的数列.如果 $7<k\leqslant n-3$,由 $a_{k-7}+a_{k-6}+\cdots+a_{k-1}<0$ 和 $a_{k-7}+a_{k-6}+\cdots+a_{k-1}+a_k+a_{k+1}+a_{k+2}+a_{k+3}>0$ 可知

$$a_k+a_{k+1}+a_{k+2}+a_{k+3}>0. \quad ①$$

如果 $4<k\leqslant n-6$,由 ① 得 $a_{k+3}+a_{k+4}+a_{k+5}+a_{k+6}>0$,再由 $a_k+a_{k+1}+\cdots+a_{k+6}<0$,则

$$a_k+a_{k+1}+a_{k+2}<0. \quad ②$$

由此可证 $n\leqslant 16$. 事实上,若 $n\geqslant 17$,由 ① 和 ② 可得

$$a_8+a_9+a_{10}+a_{11}>0, a_8+a_9+a_{10}<0, \text{所以 } a_{11}>0.$$

同理 $a_{12}>0, a_{13}>0$,但由 ② 得 $a_{11}+a_{12}+a_{13}<0$ 矛盾!

$n=16$ 的例子:

$5,5,-13,5,5,5,-13,5,5,-13,5,5,5,-13,5,5.$

总之,满足题设的数列最多有16项.

8·19 已给 $S=\{1,2,3,4\}$.设 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 是 S 中的数所组成的数列,而且包含$(1,2,3,4)$的不以1结尾的所有排列,即如果(b_1,b_2,b_3,b_4)是$(1,2,3,4)$的一个排列,且 $b_4\neq1$,则存在 $1\leqslant i_1<i_2<i_3<i_4\leqslant k$,使得

$$(a_{i_1},a_{i_2},a_{i_3},a_{i_4})=(b_1,b_2,b_3,b_4).$$

求这种数列项数 k 的最小值.

(中国上海市数学竞赛,1991年)

[解] 由于 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 包含$(1,2,3,4)$的第2个数为1的所有排列,从而存在

$$1\leqslant i_1<i_2<i_3<i_4<i_5<\cdots<i_m\leqslant k,$$

使得$(a_{i_1},a_{i_2},a_{i_3})$是$(2,3,4)$的一个排列,$a_{i_4}=1,a_{i_5},\cdots,a_{i_m}$ 是$\{2,3,4\}$中的数组成的数列,且包含$\{2,3,4\}$的所有两个元素的排列.易知,$a_{i_5},\cdots,a_{i_m}$ 最少有5项,即 $m\geqslant9$.显然,在数列 $a_{i_1},\cdots,a_{i_m}$ 中任增加一项,不可能具有题中所要求的性质,所以 $k\geqslant11$.

另一方面,容易验证:数列

$$1,3,2,4,1,2,3,1,4,3,2$$

包含$(1,2,3,4)$的不以1结尾的所有排列.于是项数 k 的最小值为11.

8·20 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是各项都不大于 M 的正整数序列且满足

$$x_k=|x_{k-1}-x_{k-2}|,k=3,4,\cdots,n. \quad ①$$

试问这样的序列最多有多少项?

(第30届莫斯科数学奥林匹克,1967年)

[解] 由①得 $x_k<\max\{x_{k-1},x_{k-2}\}$.由此可知任意一个满足①的正整数序列仅有有限项且其最大项只能在前两项达到.对于一个这样的序列,如果 $x_{n-1}\neq x_n$,则可补上 $x_{n+1}=|x_n-x_{n-1}|$,否则 $x_{n-1}=x_n$,序列的项数不能再增加.以下仅讨论满足①且项数不能再增加的正整数序列.

对任何自然数 m,记首项是1,最大项为 m,满足①的正整数序列的项数为 l_m.显然

$$l_1=2,l_2=4.$$

当 $m>2$ 时,由 $1,m,m-1,1,m-2,\cdots$ 可知

$$l_m=3+l_{m-2}.$$

从而
$$l_m=\begin{cases}\dfrac{3m+1}{2}, & m\text{ 为奇数},\\ \dfrac{3m+2}{2}, & m\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

对于 $m>1$ 的正整数,由于 $m-1,m,1,m-1,\cdots$ 所以首项是 $m-1$,最大项为 m,满足 ① 的正整数序列之项数

$$\sigma_m=\begin{cases}\dfrac{3m+3}{2}, & m>1\text{ 且为奇数},\\ \dfrac{3m+2}{2}, & m\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

补充 $\sigma_1=2$,用归纳法可以证明最大项为 m,满足 ① 的正整数序列的项数最大值是 σ_m.

事实上,当 $m=1,2,3$ 时,容易验证命题成立.假设当 $m\leqslant l(l\geqslant 3)$ 时命题成立.任取一个最大项为 $l+1$ 且满足条件 ① 的序列 $x_1,x_2,\cdots,x_n$.若 $x_1=l,x_2=l+1$,由上面的讨论可知 $n=\sigma_{l+1}$,其余情况用归纳假设易知

$$n\leqslant 3+\sigma_{l-1}=\sigma_{l+1}.$$

于是命题对 $m=l+1$ 也成立.

综上所述,所求之项数的最大值为

$$\sigma_M=\begin{cases}2, & M=1;\\ \dfrac{3M+3}{2}, & M\text{ 为大于 1 的奇数};\\ \dfrac{3M+2}{2}, & M\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

8·21 求整数 k,使得 $36+k,300+k,596+k$ 是一等差数列中连续三项的平方.

(第 7 届美国数学邀请赛,1989 年)

[解] 由 k 所满足的条件可知存在实数 n 和 d 使得

$$\begin{cases}(n-d)^2=36+k, & ①\\ n^2=300+k, & ②\\ (n+d)^2=596+k. & ③\end{cases}$$

③ - ① 得 $nd = 140$.

$2\cdot$② - ① - ③ 得 $d^2 = 16$.

由此可知 $n^2 = 35^2 = 1225$,所以

$$k = n^2 - 300 = 925.$$

8・22 设有 3 个数 x,y,z.将它们两两之差的绝对值分别记为 x_1,y_1,z_1.再将 x_1,y_1,z_1 两两之差的绝对值分别记为 x_2,y_2,z_2.如此下去,进行 n 步后发现所得 $x_n = x,y_n = y,z_n = z$.若已知 $z = 1$,试求 x 和 y.

(第 19 届莫斯科数学奥林匹克,1956 年)

[解] 显然 $x = x_n \geqslant 0, y = y_n \geqslant 0, z = z_n \geqslant 0$.

对于任意两个非负实数 a,b,易知

$$|a-b| \leqslant \max(a,b),$$

且等号成立的充要条件是 a,b 中至少有一个为 0.由此可知,x,y,z 中至少有一个为 0,而且 $x_k,y_k,z_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 中也至少有一个为 0.从而 x,y,z 中还必有两个相等.根据以上分析,再进行简单验证可得

$$(x,y) = (0,0) 或 (0,1) 或 (1,0).$$

8・23 已给实数 α,β,使得 $\alpha\beta > 0$.求具有如下性质的实数 r 所组成的集合:不存在满足

$$x_0 = r, x_{n+1} = \frac{x_n+\alpha}{\beta x_n+1}, n = 0,1,2,\cdots$$

的无穷数列 $\{x_n\}$.

(第 30 届国际数学奥林匹克预选题,1989 年)

[解] 记所求之集合为 M,函数

$$f(x) = \frac{x+\alpha}{\beta x+1} \quad \left(x \neq -\frac{1}{\beta}\right).$$

如果 $\alpha\beta = 1$,则对于任何 $x \neq -\dfrac{1}{\beta}$ 都有

$$f(x) = \frac{x+\alpha}{\beta x+1} = \alpha = \frac{1}{\beta} \neq -\frac{1}{\beta},$$

从而对任意 $r \neq -\dfrac{1}{\beta}$,满足题设条件的数列 $\{x_n\}$ 存在.由此可知 $M = \left\{-\dfrac{1}{\beta}\right\}$ 为一单点集.

设　$\alpha\beta \neq 1$,首先考虑 $\alpha > 0, \beta > 0$ 的情况. 记

$f^{[0]}(x) = x, f^{[1]}(x) = f(x), f^{[n+1]}(x) = f(f^{[n]}(x)), n = 1,2,\cdots$

显然　$M = \left\{ r \in R \mid \text{存在非负整数} k, \text{使得 } f^{[k]}(r) = -\frac{1}{\beta} \right\}$.

函数 $f(x)$ 的反函数为

$$g(x) = \frac{x - \alpha}{1 - x\beta} \quad \left(x \neq \frac{1}{\beta}\right).$$

由 $\alpha\beta \neq 1$ 易知$\frac{1}{\beta}$ 不属于函数$f(x)$的值域,所以

$$f^{[k]}(r) = -\frac{1}{\beta} \Leftrightarrow r = g^{[k]} = \left(-\frac{1}{\beta}\right).$$

于是　$M = \{r_0, r_1, r_2, \cdots\}$,

其中　$r_0 = g^{[0]}\left(-\frac{1}{\beta}\right) = -\frac{1}{\beta}, r_n = g^{[n]}\left(-\frac{1}{\beta}\right), n = 1,2,3,\cdots$

由于　$\alpha, \beta > 0$,从而 $x \leqslant 0$

有　$g(x) = \dfrac{x - \alpha}{1 - x\beta} < 0$,

于是　$r_0, r_1, r_2, \cdots$ 都是负数. 记 $b = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} > 0$,则

$$\frac{r_{n+1} + b}{r_{n+1} - b} = \frac{r_n - \alpha + b - br_n\beta}{r_n - \alpha - b + br_n\beta} = \frac{r_n(1 - \sqrt{\alpha\beta}) + b(1 - \sqrt{\alpha\beta})}{r_n(1 + \sqrt{\alpha\beta}) - b(1 + \sqrt{\alpha\beta})}$$

$$= \frac{r_n + b}{r_n - b} \cdot \frac{1 - \sqrt{\alpha\beta}}{1 + \sqrt{\alpha\beta}} = \cdots = \left(\frac{1 - \sqrt{\alpha\beta}}{1 + \sqrt{\alpha\beta}}\right)^{n+1} \frac{r_0 + b}{r_0 - b}$$

$$= \left(\frac{1 - \sqrt{\alpha\beta}}{1 + \sqrt{\alpha\beta}}\right)^{n+1} \cdot \frac{-\frac{1}{\beta} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}}{-\frac{1}{\beta} - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}} = \left(\frac{1 - \sqrt{\alpha\beta}}{1 + \sqrt{\alpha\beta}}\right)^{n+2}.$$

记　$\lambda = \dfrac{1 - \sqrt{\alpha\beta}}{1 + \sqrt{\alpha\beta}}$,显然 $|\lambda| < 1$,于是

$$r_n = -\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \frac{1 + \lambda^{n+1}}{1 - \lambda^{n+1}}, n = 0,1,2,3,\cdots$$

若 $\alpha\beta \neq 1$ 且 $\alpha < 0, \beta < 0$,同理可证

$$M=\{r_0,r_1,r_2,\cdots\},$$

其中 $r_n=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\frac{1+\lambda^{n+1}}{1-\lambda^{n+1}},n=0,1,2,3,\cdots$

$$\lambda=\frac{1-\sqrt{\alpha\beta}}{1+\sqrt{\alpha\beta}}.$$

8·24 设 r 是实数,数列 $\{x_n\}$ 满足:$x_0=0,x_1=1$,且 $x_{n+2}=rx_{n+1}-x_n,n\geqslant 0$.问 r 取何值时,使得

$$x_1+x_3+\cdots+x_{2m-1}=x_m^2,\text{对任意 } m\geqslant 1.$$

(加拿大国家集训队训练题,1992 年)

[解] 所给递推关系的特征方程是

$$\lambda^2-r\lambda+1=0,$$

它的根为 $\frac{1}{2}(r\pm\sqrt{r^2-4})$.

若 $r=2$,则特征根为重根 1,此时

$$x_n=n,n=0,1,2,\cdots$$

若 $r=-2$,则 $\lambda=-1$ 是重特征根,此时

$$x_n=(-1)^{n+1}n,n=0,1,2,\cdots.$$

在这两种情况下都有

$$x_1+x_3+\cdots+x_{2m-1}=1+3+\cdots+2m-1=m^2=x_m^2.$$

若 $r^2\neq 4$,则有两个不同的特征根 λ_1,λ_2(λ_1,λ_2 不一定是实数).由于 $\lambda_1\lambda_2=1$,所以记

$$z=\lambda_1,\frac{1}{z}=\lambda_2.$$

此时 $z\neq 1$,且

$$x_n=c_1z^n+c_2z^{-n},n=0,1,2,\cdots$$

其中 c_1,c_2 是由 $x_0=0$ 和 $x_1=1$ 所决定的常数(也不一定是实数).由此可得

$$\sum_{k=1}^{m}x_{2k-1}=c_1\sum_{k=1}^{m}z^{2k-1}+c_2\sum_{k=1}^{m}z^{1-2k}$$

$$=c_1\frac{z(z^{2m}-1)}{z^2-1}+c_2\frac{z^{-1}(z^{-2m}-1)}{z^{-2}-1}$$

由 $x_0=c_1+c_2=0$ 可知,$c_1=-c_2=c$,则

$$\sum_{k=1}^{m} x_{2k-1} = c\frac{z(z^{2m}-1)}{z^2-1} - c\frac{z(z^{-2m}-1)}{1-z^2}$$

$$= \frac{cz}{z^2-1}(z^{2m}-2+z^{-2m})$$

$$= \frac{cz}{z^2-1}(z^m - z^{-m})^2.$$

再由 $x_1 = c(z - z^{-1}) = \frac{c(z^2-1)}{z} = 1$ 立即得到

$$\sum_{k=1}^{m} x_{2k-1} = c^2(z^m - z^{-m})^2 = x_m^2.$$

总之,当 r 为任意实数时均有

$$x_1 + x_3 + \cdots + x_{2m-1} = x_m^2.$$

8·25 设 $p_0 > 2$ 是给定的素数,数列 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ 满足 $a_0 = 0$, $a_1 = 1$,且

$$a_{n+1} = 2a_n + (a-1)a_{n-1}, n = 1,2,\cdots$$

其中自然数 a 是参数.求满足以下两个条件的 a 的最小值.

(i) 如果 p 是素数,且 $p \leqslant p_0$,则 $p \mid a_p$;

(ii) 如果 p 是素数,且 $p > p_0$,则 $p \nmid a_p$.

(第 23 届国际数学奥林匹克预选题,1982 年)

[解] 由递推关系及 $a_0 = 0, a_1 = 1$ 可得

$$a_n = \frac{1}{2\sqrt{a}}[(1+\sqrt{a})^n - (1-\sqrt{a})^n].$$

从而对于任何奇素数 p,

$$a_p = \frac{1}{2\sqrt{a}}\left[\sum_{k=0}^{p} C_p^k a^{\frac{k}{2}} - \sum_{k=0}^{p}(-1)^k C_p^k a^{\frac{k}{2}}\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{a}}\left(2p\sqrt{a} + 2C_p^3 a^{\frac{3}{2}} + \cdots + 2C_p^{p-2} a^{\frac{p-2}{2}} + 2C_p^p a^{\frac{p}{2}}\right)$$

$$= p + C_p^3 a + \cdots + C_p^{p-2} a^{\frac{p-3}{2}} + a^{\frac{p-1}{2}}.$$

由于 $C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!}$,所以对于 $1 \leqslant k \leqslant p-1$ 有

$$p \mid C_p^k.$$

由此可得

$$p \mid a_p \Leftrightarrow p \mid a^{\frac{p-1}{2}} \Leftrightarrow p \mid a.$$

再由 $a_2 = 2$，于是所求 a 的最小值是 $[3, p_0]$ 中所有素数的乘积.

8・26　已知数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^2 a_n, n \geqslant 1.$$

求 a_n 的通项公式.

（第7届加拿大数学奥林匹克，1975年）

［解］　当 $n \geqslant 2$ 时，由于

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^2 a_n,$$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} = (n-1)^2 a_{n-1},$$

所以 $$a_n = n^2 a_n - (n-1)^2 a_{n-1}.$$

由此可得 $$a_n = \frac{n-1}{n+1} a_{n-1}, n = 2, 3, \cdots$$

于是得到 $$a_n = \frac{1}{n(n+1)}, n = 1, 2, 3, \cdots$$

8・27　设正数列 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ 满足 $a_0 = a_1 = 1$ 且

$$\sqrt{a_n a_{n-2}} - \sqrt{a_{n-1} a_{n-2}} = 2a_{n-1}, n = 2, 3, \cdots$$

求该数列的通项公式.

（中国高中数学联赛，1993年）

［解］　由于当 $n \geqslant 2$ 时，

$$\sqrt{a_n} = \sqrt{a_{n-1}} + \frac{2a_{n-1}}{\sqrt{a_{n-2}}},$$

所以令 $b_n = \sqrt{\frac{a_n}{a_{n-1}}}$ 可得 $b_1 = 1$，且

$$b_n = 1 + 2b_{n-1}, n = 2, 3, \cdots$$

由此易得 $b_n = 2^n - 1, n = 1, 2, \cdots$

于是有 $$\sqrt{a_n} = (2^n - 1)\sqrt{a_{n-1}},$$

从而所求之通项公式为

$$a_n = \prod_{k=1}^{n} (2^k - 1)^2, n = 1, 2, 3, \cdots$$

8・28　设数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_1 = 2, x_2 = 3$，且

$$\begin{cases} x_{2m+1} = x_{2m} + x_{2m-1}, m \geqslant 1, \\ x_{2m} = x_{2m-1} + 2x_{2m-2}, m \geqslant 2. \end{cases}$$

求 x_n 的通项公式.

（澳大利亚数学奥林匹克,1983 年）

［解］　由递推关系当 $m \geqslant 2$ 时有

$$x_{2m+1} = x_{2m} + x_{2m-1} = 2x_{2m-1} + 2x_{2m-2},$$

又　$$x_{2m-2} = x_{2m-1} - x_{2m-3},$$

所以　$$x_{2m+1} = 4x_{2m-1} - 2x_{2m-3}.$$

令 $a_m = x_{2m-1}$,则

$$a_{m+1} = 4a_m - 2a_{m-1}, m \geqslant 2.$$

同理令 $b_m = x_{2m}$ 也可得

$$b_{m+1} = 4b_m - 2b_{m-1}, m \geqslant 2.$$

数列$\{a_m\}$与$\{b_m\}$有相同的递推关系,其特征方程是

$$\lambda^2 - 4\lambda + 2 = 0,$$

$\lambda = 2 \pm \sqrt{2}$ 为其特征根.于是

$$\left.\begin{array}{l} a_m = \alpha_1(2+\sqrt{2})^m + \beta_1(2-\sqrt{2})^m, \\ b_m = \alpha_2(2+\sqrt{2})^m + \beta_2(2-\sqrt{2})^m. \end{array}\right. m = 1,2,\cdots$$

其中 $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ 为待定常数.再由

$$a_1 = x_1 = 2, a_2 = x_3 = x_2 + x_1 = 5,$$

$$b_1 = x_2 = 3, b_2 = x_4 = x_3 + 2x_2 = 11,$$

可算出　$$\alpha_1 = \frac{1}{4}(3-\sqrt{2}), \beta_1 = \frac{1}{4}(3+\sqrt{2}),$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{4}(1+2\sqrt{2}), \beta_2 = \frac{1}{4}(1-2\sqrt{2}).$$

所以

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{4}(3-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})^m + \frac{1}{4}(3+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})^m, n = 2m-1, \\ \frac{1}{4}(1+2\sqrt{2})(2+\sqrt{2})^m + \frac{1}{4}(1-2\sqrt{2})(2-\sqrt{2})^m, n = 2m. \end{cases}$$

8·29　设数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 满足:$a_1 = 1$,

$$a_{n+1} = \frac{1}{16}(1 + 4a_n + \sqrt{1+24a_n}), n = 1,2,\cdots$$

求其通项公式.

(前联邦德国数学奥林匹克,1986 年)

[解] 令 $b_n = \sqrt{1 + 24a_n}$,
则当 $n > 1$ 时,由数列$\{a_n\}$的递推关系可得

$$\begin{aligned} b_n^2 &= 1 + 24a_n = 1 + \frac{24}{16}(1 + 4a_{n-1} + \sqrt{1 + 24a_{n-1}}) \\ &= \frac{1}{4}(10 + 24a_{n-1} + 6\sqrt{1 + 24a_{n-1}}) \\ &= \frac{1}{4}(\sqrt{1 + 24a_{n-1}} + 3)^2 \\ &= \frac{1}{4}(3 + b_{n-1})^2, \end{aligned}$$

所以 $$b_n = \frac{1}{2}(3 + b_{n-1}),$$

即 $$b_n - 3 = \frac{1}{2}(b_{n-1} - 3).$$

再由 $b_1 = \sqrt{1 + 24a_1} = \sqrt{1 + 24} = 5$,从而

$$b_n = 3 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}, n = 1,2,3,\cdots$$

由此可知对于 $n = 1,2,3,\cdots$ 有

$$a_n = \frac{1}{24}(b_n^2 - 1) = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}.$$

8·30 设 $\alpha = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$, $f(n) = [\alpha n]$,令

$$F(k) = \min\{n \in N; f^{(k)}(n) > 0\},$$ 对于任意 $k \in N$,
其中 $f^{(k)} = f0f0\cdots0f$ 为 f 的 k 次复合,求 $F(k)$ 的表达式.

(中国国家集训队测验题,1991 年)

[解] 显然 $f(1) = [\alpha] = 0$, $f(2) = [3 - \sqrt{5}] = 0$, $f(3) = 1$,所以$F(1) = 3$. 从而可得

$$f(f(n)) > 0 \Leftrightarrow f(n) = [\alpha n] \geqslant 3.$$

又 $[\alpha n] \geqslant 3 \Leftrightarrow n\alpha \geqslant 3 \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{3}{\alpha} = \dfrac{3(3 + \sqrt{5})}{2} \Leftrightarrow n \geqslant 8$,由此可得 $F(2) = 8$. 设 $F(1), F(2), \cdots, F(k-1), F(k)$ 均已求出,则

$$f^{(k+1)}(n) > 0 \Leftrightarrow f(n) \geqslant F(k),$$

又 $f(n)=[\alpha n]\geqslant F(k)\Leftrightarrow n\geqslant\frac{3+\sqrt{5}}{2}F(k)$,

从而 $F(k+1)$ 是不小于$\frac{3+\sqrt{5}}{2}F(k)$最小整数,或者说 $F(k)$ 是不超过 $\frac{2}{3+\sqrt{5}}F(k+1)=\frac{3-\sqrt{5}}{2}F(k+1)$的最大整数.注意到$\frac{3+\sqrt{5}}{2}F(k)$是无理数,上述结论可表示为

$$F(k+1)=\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}F(k)\right]+1, \quad ①$$

$$F(k)=\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}F(k+1)\right], \quad ②$$

其中 $k=1,2,3,\cdots$ 当 $k\geqslant 2$ 时,由 ① 可得

$$F(k+1)=\left[3F(k)-\frac{3-\sqrt{5}}{2}F(k)\right]+1,$$

由于$\frac{3-\sqrt{5}}{2}F(k)$也是无理数,所以

$$F(k+1)=3F(k)-\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}F(k)\right].$$

再由 ② 可得 $\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}F(k)\right]=F(k-1)$,于是

$$F(k+1)=3F(k)-F(k-1). \quad ③$$

补充 $F(0)=1$,则 ③ 式对于 $k\geqslant 1$ 都成立.递推公式 ③ 的特征方程为 $\lambda^2-3\lambda+1=0$,其特征根为$\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$,所以

$$F(k)=A\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^k+B\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^k.$$

再由 $F(0)=1,F(1)=3$,可算出

$$A=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{2},B=-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{2},$$

于是

$$F(k)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1},$$

其中 $k=0,1,2,\cdots$

8·31 A 和 E 为正八边形一组相对顶点.一只青蛙从 A 点开始跳跃,如果青蛙在任一个不是 E 的顶点,那么它可以跳到两个相邻顶点中的任一个,当它跳到 E 点时就停在那里.设 e_n 表示经过 n 步到达 E 点的不同路线的条数,求证:

$$e_{2n-1}=0, e_{2n}=\frac{1}{\sqrt{2}}[(2+\sqrt{2})^{n-1}-(2-\sqrt{2})^{n-1}], n=1,2,\cdots$$

(一个 n 步到达 E 点的路线是指该正八边形顶点的一个序列(p_0, $p_1,p_2,\cdots,p_n$)满足

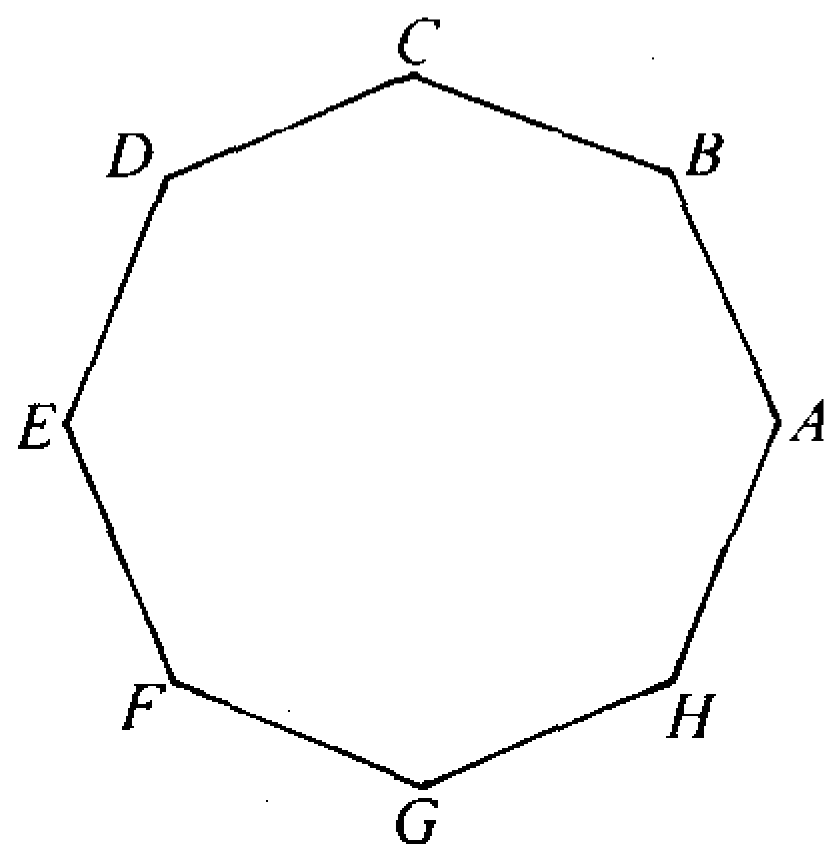
(i) $p_0=A, p_n=E$;

(ii) 对每个 $i, 0\leqslant i\leqslant n-1, p_i\neq E$;

(iii) 对每个 $i, 0\leqslant i\leqslant n-1, p_i$ 与 p_{i+1} 是相邻顶点.)

(第21届国际数学奥林匹克,1979年)

[解] 正八边形的八个顶点分别记为 A,B,C,D,E,F,G,H(如图).顶点 A 赋值 O. B,C,D 分别赋值 1,2,3. H,G,F 分别赋值 $-1,-2,-3$.一条从 A 点 k 步到达 E 点的路线对应一有序数组(x_1, $x_2,\cdots,x_k$)满足



(1) $x_i=1$ 或 $-1, i=1,2,\cdots,k$;

(2) 对于每个 $l, 1\leqslant l\leqslant k-1$,

$$\left|\sum_{i=1}^{k}x_i\right|<4;$$

(3) $\left|\sum_{i=1}^{k}x_i\right|=4$.

由于当 k 为奇数时, $\sum_{i=1}^{k}x_i$ 是奇数,所以不存在 k 步到达 E 点的路线.由此即得

$$e_{2n-1}=0, n=1,2,3,\cdots$$

设 k 为偶数.记 $a_n=e_{2n}$,显然 $a_1=e_2=0, a_2=e_4=2$.由对称性,自 c 点 $2n$ 步到达 E 点不同路线的条数与自 G 点 $2n$ 步到达 E 点不同路线的条数相同,记此数为 b_n.设($x_1,x_2,x_3,x_4,\cdots,x_{2n+1},x_{2n+2}$)

是一条自 A 点 $2n+2$ 步到达 E 点的路线.若 $x_1=1,x_2=-1$ 或 $x_1=-1,x_2=1$,由 $x_1+x_2=0$ 可得$(x_3,x_4,\cdots,x_{2n+1},x_{2n+2})$是一条自 A 点 $2n$ 步到达E 点的路线.反之,若$(x_3,x_4,\cdots,x_{2n+1},x_{2n+2})$是自 A 点 $2n$ 步到达E 点的路线,只要 $x_1+x_2=0,x_1,x_2\in\{-1,1\}$,则$(x_1,x_2,x_3,x_4,\cdots,x_{2n+1},x_{2n+2})$是自 A 点$2n+2$步到达 E 点的路线.若 $x_1=x_2=1$,则$(x_3,x_4,\cdots,x_{2n+1},x_{2n+2})$是自 C点$2n$ 步到达E 点的路线.若 $x_1=x_2=-1$,则$(x_3,x_4,\cdots,x_{2n+1},x_{2n+2})$是自 G点$2n$ 步到达 E 点的路线.由此得

$$a_{n+1}=2a_n+2b_n,$$

同理 $\quad b_{n+1}=a_n+2b_n.$

因此 $\quad a_{n+1}-b_{n+1}=a_n$,于是

$$a_{n+1}=4a_n-2(a_n-b_n)=4a_n-2a_{n-1},n=2,3,\cdots.$$

由此可知 a_n 的通项公式为$a_n=\lambda(2+\sqrt{2})^n+\mu(2-\sqrt{2})^n$,其中 λ,μ 是待定常数.再由 $a_1=0,a_2=2$ 可求得

$$\lambda=\frac{1}{\sqrt{2}(2+\sqrt{2})},\mu=\frac{-1}{\sqrt{2}(2-\sqrt{2})},$$

所以

$$e_{2n}=a_n=\frac{1}{\sqrt{2}}[(2+\sqrt{2})^{n-1}-(2-\sqrt{2})^{n-1}],n=1,2,\cdots$$

8·32 设 $a_1=a_2=\dfrac{1}{3}$,且当 $n=3,4,5,\cdots$ 时

$$a_n=\frac{(1-2a_{n-2})a_{n-1}^2}{2a_{n-1}^2-4a_{n-2}a_{n-1}^2+a_{n-2}}.$$

(i) 求数列$\{a_n\}$的通项公式.

(ii) 证明:$\dfrac{1}{a_n}-2$是整数的平方.

(中国国家集训队测验题,1993 年)

[解] 用归纳法易证

$$0<a_n<\frac{1}{2},n=1,2,3,\cdots$$

令 $b_n=\dfrac{1}{a_n}-2$,则 $b_n>0$.由递推公式可得

$$\frac{1}{a_n}=\frac{2a_{n-1}^2-4a_{n-2}a_{n-1}^2+a_{n-2}}{(1-2a_{n-2})a_{n-1}^2}=2+\frac{a_{n-2}}{(1-2a_{n-2})a_{n-1}^2},$$

即 $$b_n=\frac{1}{b_{n-2}a_{n-1}^2}=\frac{(b_{n-1}+2)^2}{b_{n-2}},$$

由此可得 $$\sqrt{b_nb_{n-2}}=b_{n-1}+2.$$

用 $n+1$ 代替 n,则 $$\sqrt{b_{n+1}b_{n-1}}=b_n+2.$$

于是有 $$\sqrt{b_{n+1}b_{n-1}}-\sqrt{b_nb_{n-2}}=b_n-b_{n-1},$$

从而 $$\sqrt{b_{n-1}}(\sqrt{b_{n+1}}+\sqrt{b_{n-1}})=\sqrt{b_n}(\sqrt{b_n}+\sqrt{b_{n-2}}).$$

令 $c_n=\dfrac{\sqrt{b_n}+\sqrt{b_{n-2}}}{\sqrt{b_{n-1}}}$, $n=3,4,\cdots$ 则

$$c_{n+1}=c_n=\cdots=c_3=\frac{\sqrt{b_3}+\sqrt{b_1}}{\sqrt{b_2}}.$$

由于 $a_1=a_2=\dfrac{1}{3}$,所以 $b_1=b_2=1, b_3=\dfrac{(b_2+2)^2}{b_1}=9.$

因此 $c_n=4, n=3,4,5,\cdots$ 即

$$\sqrt{b_n}=4\sqrt{b_{n-1}}-\sqrt{b_{n-2}}, n=3,4,5,\cdots \qquad ①$$

由于 $\sqrt{b_1}=\sqrt{b_2}=1$,从而用归纳法易知 $\sqrt{b_n}$ 是正整数,即 $b_n=\dfrac{1}{a_n}-2$ 是平方数,(ii) 的结论得证.

递推关系 ① 的特征方程为 $\lambda^2-4\lambda+1=0$,其特征根为 $2\pm\sqrt{3}$,所以

$$\sqrt{b_n}=\alpha(2+\sqrt{3})^n+\beta(2-\sqrt{3})^n, n=1,2,\cdots$$

其中 α,β 为待定常数.由 $\sqrt{b_1}=\sqrt{b_2}=1$ 可算出

$$\alpha=\frac{3}{2}-\frac{5}{6}\sqrt{3}, \beta=\frac{3}{2}+\frac{5}{6}\sqrt{3}.$$

由此可得

$$\begin{aligned}b_n&=[\alpha(2+\sqrt{3})^n+\beta(2-\sqrt{3})^n]^2\\&=\alpha^2(2+\sqrt{3})^{2n}+\beta^2(2-\sqrt{3})^{2n}+2\alpha\beta(2+\sqrt{3})^n(2-\sqrt{3})^n\\&=\alpha^2(7+4\sqrt{3})^n+\beta^2(7-4\sqrt{3})^n+2\alpha\beta\\&=\left(\frac{13}{3}-\frac{5}{2}\sqrt{3}\right)(7+4\sqrt{3})^n+\left(\frac{13}{3}+\frac{5}{2}\sqrt{3}\right)(7-4\sqrt{3})^n+\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

于是所求之通项公式为

$$a_n = (b_n + 2)^{-1}$$
$$= \left(\left(\frac{13}{3} - \frac{5}{2}\sqrt{3}\right)(7 + 4\sqrt{3})^n + \left(\frac{13}{3} + \frac{5}{2}\sqrt{3}\right)(7 - 4\sqrt{3})^n + \frac{7}{3}\right)^{-1},$$

其中 $n = 1,2,\cdots$.

8·33　实数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 由下述等式定义：

$$a_{n+1} = 2^n - 3a_n, n = 0,1,2,\cdots$$

(1) 求依赖于 a_0 和 n 的 a_n 的表达式.

(2) 求 a_0，使得对任何正整数 n，$a_{n+1} > a_n$.

（保加利亚数学奥林匹克，1994 年）

[解]　(1) 由数列的定义可知

$$a_n = 2^{n-1} - 3a_{n-1},$$
$$-3a_{n-1} = -3 \cdot 2^{n-2} + 3^2 a_{n-2},$$
$$3^2 a_{n-2} = 3^2 \cdot 2^{n-3} - 3^3 a_{n-3},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(-1)^{n-1}3^{n-1}a_1 = (-1)^{n-1}3^{n-1}2^0 + (-1)^n \cdot 3^n a_0.$$

将以上这些等式相加，得

$$a_n = 2^{n-1} - 3 \cdot 2^{n-2} + 3^2 \cdot 2^{n-3} - \cdots + (-1)^{n-1} \cdot 3^{n-1} \cdot 2^0 + (-1)^n \cdot 3^n a_0$$
$$= \frac{2^{n-1} \cdot \left[1 - \left(-\frac{3}{2}\right)^n\right]}{1 - \left(-\frac{3}{2}\right)} + (-1)^n \cdot 3^n a_0$$
$$= \frac{1}{5}[2^n + (-1)^{n-1}3^n] + (-1)^n \cdot 3^n \cdot a_0.$$

$$(2)\ a_{n+1} - a_n = \frac{1}{5}[2^{n+1} + (-1)^n \cdot 3^{n+1}] + (-1)^{n+1} \cdot 3^{n+1} \cdot a_0$$
$$- \frac{1}{5}[2^n + (-1)^{n-1} \cdot 3^n] - (-1)^n \cdot 3^n a_0$$
$$= \frac{1}{5}[2^n + (-1)^n \cdot 4 \cdot 3^n] + (-1)^{n+1} \cdot 4 \cdot 3^n \cdot a_0$$

$$= \frac{1}{5} \cdot 2^n + (-1)^n \cdot 4 \cdot 3^n \left(\frac{1}{5} - a_0\right),$$

则 $$\frac{1}{3^n}(a_{n+1} - a_n) = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + (-1)^n \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{5} - a_0\right),$$

由上式可知,若$\frac{1}{5} - a_0 \neq 0$,那么存在非常大的 n(奇数或偶数),能使 $a_{n+1} - a_n < 0$,此与题目的要求矛盾.若$\frac{1}{5} - a_0 = 0$,即 $a_0 = \frac{1}{5}$,那么 $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{5} \cdot 2^n > 0$ 对任何正整数 n 都成立.

故所求的 $a_0 = \frac{1}{5}$.

8・34 实数列 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 满足下述等式:

$a_0 = a$,这里 a 是一个实数,

$$a_n = \frac{a_{n-1}\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - a_{n-1}}, n \in N.$$

求 a_{1994}.

(保加利亚数学奥林匹克,1994 年)

[解] 经计算,可得

$$a_1 = \frac{a\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - a},$$

$$a_2 = \frac{a_1\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - a_1} = \frac{(a\sqrt{3} + 1)\sqrt{3} + (\sqrt{3} - a)}{\sqrt{3}(\sqrt{3} - a) - (a\sqrt{3} + 1)}$$

$$= \frac{a + \sqrt{3}}{1 - a\sqrt{3}},$$

$$a_3 = \frac{a_2\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - a_2} = \frac{(a + \sqrt{3})\sqrt{3} + (1 - a\sqrt{3})}{\sqrt{3}(1 - a\sqrt{3}) - (a + \sqrt{3})}$$

$$= -\frac{1}{a}.$$

由此即得

$$a_6 = -\frac{1}{-\frac{1}{a}} = a.$$

可见,数列 $a_0,a_1,a_2,\cdots$ 是一个周期数列,周期为 6.

因为　$1994=6\times332+2$,所以

$$a_{1994}=a_2=\frac{a+\sqrt{3}}{1-a\sqrt{3}}.$$

8·35　整数列 $u_0,u_1,u_2,u_3,\cdots$ 满足 $u_0=1$,且对于每个正整数 n,

$$u_{n+1}u_{n-1}=ku_n,$$

这里 k 是某个固定的正整数.如果

$$u_{2000}=2000,$$

求 k 的所有可能的值.

(英国数学奥林匹克,1994 年)

[**解**]　记 $u_1=u$.由题设

$$u_2=\frac{ku_1}{u_0}=ku.$$

如果 $u=0$,那么 $u_1=0,u_2=0$.若 $u_{t-1}=0$,则有 $ku_t=u_{t-1}\cdot u_{t+1}=0$,从而 $u_t=0$.故对任意正整数 n,$u_n=0$.此与 $u_{2000}=2000$ 矛盾.因此,$u\neq0$.

由题设,经计算得

$$u_3=\frac{ku_2}{u_1}=k^2,\qquad u_4=\frac{ku_3}{u_2}=\frac{k^2}{u},$$

$$u_5=\frac{ku_4}{u_3}=\frac{k}{u},\qquad u_6=\frac{ku_5}{u_4}=1,$$

$$u_7=\frac{ku_6}{u_5}=u.$$

由此可见,给定数列是一个周期数列,并且周期为 6.于是由

$$2000=6\times333+2$$

可知

$$u_{2000}=u_2=ku,$$

因此 k 应满足

$$\begin{cases}ku=2000,\\ \dfrac{k}{u}\ 是整数,\end{cases}$$

其中 k,u 都是正整数.

将 $k=uu_5$ 代入,得

$$u^2\cdot u_5=2000,$$

$$u^2\cdot u_5=2^4\cdot 5^3.$$

u^2 的全部可能值为 $1,2^2,2^4,5^2,2^2\cdot 5^2,2^4 5^2$,从而 u 的全部可能值为 $1,2,2^2,5,2\cdot 5,2^2\cdot 5$;$k$ 的全部可能值为 2000,1000,500,400,200,100.

8·36　设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和

$$S_n=2a_n-1,(n=1,2,\cdots)$$

数列 $\{b_n\}$ 满足

$$b_1=3,b_{k+1}=a_k+b_k,(k=1,2,\cdots).$$

求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

（中国高中数学联赛,1996 年）

[解]　由 $s_n=2a_n-1$ 可知,

$$a_1=2a_1-1,$$

$$a_1=1.$$

又　$a_k=s_k-s_{k-1}=(2a_k-1)-(2a_{k-1}-1)=2a_k-2a_{k-1},$

所以　$a_k=2a_{k-1}.$

可见,数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1,公比为 2 的等比数列.

由　$b_{k+1}=a_k+b_k$ 可得

$$\begin{cases}b_2=a_1+b_1,\\ b_3=a_2+b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ b_n=a_{n-1}+b_{n-1}.\end{cases}$$

将这一组等式相加,

$$b_n=s_{n-1}+b_1=\frac{2^{n-1}-1}{2-1}+3=2^{n-1}+2.$$

所以数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和

$$S'_n=1+2+\cdots+2^{n-1}+2n=2^n+2n-1.$$

第 2 节　证明一般项的性质

8·37　数列 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 满足

$$a_1 = a_2 = 1, a_n = \frac{a_{n-1}^2 + 2}{a_{n-2}}, \text{对于任意 } n \geqslant 3.$$

证明数列中的所有数都是整数.

（第 26 届莫斯科数学奥林匹克，1963 年）

［证］ 用归纳法易证

$$a_n > 0, n = 1,2,3,\cdots$$

对于 $n \geqslant 3$，由递推公式可得

$$\begin{cases} a_n a_{n-2} = a_{n-1}^2 + 2, \\ a_{n+1} a_{n-1} = a_n^2 + 2. \end{cases}$$

于是 $$a_{n+1}a_{n-1} - a_n a_{n-2} = a_n^2 - a_{n-1}^2,$$

即 $$\frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{a_n} = \frac{a_n + a_{n-2}}{a_{n-1}}, n = 3,4,\cdots$$

依此递推可得 $$\frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{a_n} = \frac{a_3 + a_1}{a_2},$$

又 $a_3 = 3$，所以 $a_{n+1} = 4a_n - a_{n-1}, n = 2,3,4,\cdots$

由于 $a_1 = a_2 = 1$，用归纳法易证对任何自然数 n，a_n 都是正整数.

8·38 求证：在数列

$$a_k = [2^k \sqrt{2}], k = 1,2,3,\cdots$$

中有无穷多个合数.

（第 34 届莫斯科数学奥林匹克，1971 年）

［证］ 由假设可知

$$2^k \sqrt{2} = a_k + \lambda_k, k = 1,2,3,\cdots$$

其中 λ_k 是 $(0,1)$ 内的无理数. 若 $0 < \lambda_k < \frac{1}{2}$，则 $a_{k+1} = 2a_k$ 是偶数. 若 $\frac{1}{2} < \lambda_k < 1$，则 $a_{k+1} = 2a_k + 1$ 且

$$\lambda_{k+1} = 2\lambda_k - 1 = \lambda_k - (1 - \lambda_k).$$

如果仍有 $\frac{1}{2} < \lambda_{k+1} < 1$，则 $a_{k+2} = 2a_{k+1} + 1$ 且

$$\lambda_{k+2} = \lambda_{k+1} - (1 - \lambda_{k+1}) = \lambda_k - 3(1 - \lambda_k).$$

由此易知存在 $m \in N$ 使得

$$0 < \lambda_{k+m} < \frac{1}{2},$$

从而 a_{k+m+1} 是偶数.所以数列$\{a_k\}$中有无穷多个偶数.

代数卷

8·39 设非零数列 $a_1,a_2,\cdots$ 满足:$a_1,a_2,\dfrac{a_1^2+a_2^2+b}{a_1a_2}$ 都是整数,且

$$a_{n+2}=\frac{a_{n+1}^2+b}{a_n},n=1,2,\cdots$$

其中 b 是某个给定的整数.求证:数列$\{a_n\}$的每一项都是整数.

(奥地利数学奥林匹克,1972年)

[证] 设 $n\geqslant 2$,由递推公式可得

$$b=a_{n+2}a_n-a_{n+1}^2=a_{n+1}a_{n-1}-a_n^2,$$

从而
$$a_n(a_{n+2}+a_n)=a_{n+1}(a_{n+1}+a_{n-1}),$$

即
$$\frac{a_{n+2}+a_n}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{a_n},n=2,3,\cdots$$

令 $c_n=\dfrac{a_{n+2}+a_n}{a_{n+1}}$,则

$$c_n=c_1=\frac{a_3+a_1}{a_2}=\frac{a_1^2+a_2^2+b}{a_1a_2}.$$

由假设可知 c_1 是整数,且

$$a_{n+2}=c_1a_{n+1}-a_n,n=1,2,3,\cdots$$

再由 a_1,a_2 是整数可得$\{a_n\}$的每一项都是整数.

8·40 求证:数列

$$a_n=\frac{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}},n=0,1,2,\cdots$$

的每一项都是整数,并求所有使 a_n 被3整除的 n.

(前捷克斯洛伐克数学奥林匹克,1968年)

[证] 显然 $a_0=0,a_1=1$.由于 $2+\sqrt{3}$ 和 $2-\sqrt{3}$ 是方程 $x^2-4x+1=0$ 的两个根,从而数列$\{a_n\}$满足递推关系

$$a_{n+2}=4a_{n+1}-a_n,n=0,1,2,\cdots$$

由此易知$\{a_n\}$的每一项都是整数.

由递推关系可得

$$a_{n+2}\equiv a_{n+1}-a_n(\bmod 3),n=0,1,2,\cdots$$

若有 k 使得 $a_{k+1}\equiv a_{k+2}\not\equiv 0\ (\bmod 3)$,则 $a_{k+3}\equiv 0\ (\bmod 3)$,且 $a_{k+4}\equiv$

$a_{k+5} \equiv -a_{k+2} \not\equiv 0 \pmod 3$，从而又可推出 $a_{k+6} \equiv 0 \pmod 3$. 依此类推用归纳法可知，对于 $m \in N, 3 \mid a_{k+m} \Leftrightarrow 3 \mid m$. 由于 $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 4 \equiv 1 \pmod 3$，所以 $3 \mid a_n \Leftrightarrow 3 \mid n$.

8·41　设 $a_0 = 0$，且对 $n = 0,1,2,\cdots$ 有

$$a_{n+1} = (k+1)a_n + k(a_n+1) + 2\sqrt{k(k+1)a_n(a_n+1)},$$

其中 k 是给定的自然数. 求证：对于 $n \geqslant 0$，a_n 是整数.

（第 26 届国际数学奥林匹克预选题，1985 年）

［证］　由归纳法易知

$$0 = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots$$

由于

$$a_{n+1} - (k+1)a_n - k(a_n+1) = 2\sqrt{k(k+1)a_n(a_n+1)},$$

等式两端平方可得

$$a_{n+1}^2 + (2k^2+2k+1)a_n^2 + 2k^2 a_n + k^2 - (4k+2)a_n a_{n+1}$$
$$-2ka_{n+1}(Gn+1) + 2k(k+1)a_n(a_n+1) = 4k(k+1)a_n(a_n+1),$$

经整理得

$$a_n^2 + a_{n+1}^2 - (4k+2)a_n a_{n+1} - 2k(a_n + a_{n+1}) + k^2 = 0.$$

用 $n-1$ 代替 n，则

$$a_{n-1}^2 + a_n^2 - (4k+2)a_{n-1}a_n - 2k(a_{n-1} + a_n) + k^2 = 0$$

上述两式相减给出

$$a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2 - (4k+2)a_n(a_{n+1} - a_{n-1}) - 2k(a_{n+1} - a_{n-1}) = 0.$$

由于 $a_{n+1} - a_{n-1} > 0$，所以消去 $a_{n+1} - a_{n-1}$ 可得

$$a_{n+1} + a_{n-1} - (4k+2)a_n - 2k = 0,$$

即　$a_{n+1} = (4k+2)a_n - a_{n-1} + 2k, n = 1,2,\cdots$

再由 $a_0 = 0, a_1 = k$，k 为自然数立即可知对一切非负整数 n，a_n 是整数.

8·42　已知正数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1 = a_2 = 1, a_3 = 249$，且

$$a_{n+3} = \frac{1991 + a_{n+2}a_{n+1}}{a_n}, n = 1,2,\cdots$$

求证：对于所有的 $n \in N$，a_n 是整数.

（全苏数学冬令营，1991 年）

［证］　由假设可知

$$a_n a_{n+3} = 1991 + a_{n+2}a_{n+1},$$

$$a_{n+1}a_{n+4} = 1991 + a_{n+3}a_{n+2}.$$

两式相减得

$$a_{n+1}a_{n+4} - a_n a_{n+3} = a_{n+3}a_{n+2} - a_{n+2}a_{n+1},$$

即 $$\frac{a_{n+4}+a_{n+2}}{a_{n+3}} = \frac{a_{n+2}+a_n}{a_{n+1}}, n = 1,2,3,\cdots$$

从而,当 n 是奇数时,

$$\frac{a_{n+2}+a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_3+a_1}{a_2} = 250,$$

即 $$a_{n+2} = 250a_{n+1} - a_n. \qquad ①$$

当 n 为偶数时,

$$\frac{a_{n+2}+a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_4+a_2}{a_3},$$

又 $$a_4 = \frac{1991 + a_3a_2}{a_1} = 2240, \frac{a_4+a_2}{a_3} = \frac{2241}{249} = 9,$$

所以 $$a_{n+2} = 9a_{n+1} - a_n. \qquad ②$$

由 ① 和 ②,用归纳法易证所有的 a_n 皆为整数.

8・43　整数列 $\{a_n\}$ 满足:

$$a_1 = 2, a_2 = 7, -\frac{1}{2} < a_{n+1} - \frac{a_n^2}{a_{n-1}} \leqslant \frac{1}{2}, n \geqslant 2.$$

求证:对所有 $n > 1$, a_n 是奇数.

(第 29 届国际数学奥林匹克候选题,1988 年)

[证]　易证 $\{a_n\}$ 为正整数列,进一步用归纳法可以证明

$$a_n \geqslant 3a_{n-1}, n \geqslant 2. \qquad ①$$

事实上,当 $n = 2$ 时,① 显然成立.设对于 $n = k(k \geqslant 2)$① 成立,根据假设可得

$$a_{k+1} > \frac{a_k^2}{a_{k-1}} - \frac{1}{2} \geqslant 3a_k - \frac{1}{2},$$

所以 $a_{k+1} \geqslant 3a_k$,即对于 $n = k+1$,① 也成立.

不难算出 $a_1 = 2, a_2 = 7, a_3 = 25, a_4 = 89$.可以证明数列 $\{a_n\}$ 满足递推关系

$$a_n = 3a_{n-1} + 2a_{n-2}, n = 3,4,5,\cdots \qquad ②$$

显然当 $n=3$ 时,② 成立.设当 $n=k(k\geqslant 3)$ 时,② 成立.于是

$$\frac{a_k^2}{a_{k-1}}=\frac{a_k(3a_{k-1}+2a_{k-2})}{a_{k-1}}=3a_k+\frac{2a_ka_{k-2}}{a_{k-1}}$$
$$=3a_k+2a_{k-1}+\frac{2a_ka_{k-2}-2a_{k-1}^2}{a_{k-1}}.$$

由 ① 及假设可得

$$\left|\frac{2a_ka_{k-2}-2a_{k-1}^2}{a_{k-1}}\right|=\frac{2a_{k-2}}{a_{k-1}}\left|\frac{a_ka_{k-2}-a_{k-1}^2}{a_{k-2}}\right|$$
$$=\frac{2a_{k-2}}{a_{k-1}}\left|a_k-\frac{a_{k-1}^2}{a_{k-2}}\right|\leqslant\frac{1}{3},$$

从而 $$\left|\frac{a_k^2}{a_{k-1}}-3a_k-2a_{k-1}\right|\leqslant\frac{1}{3}.$$

由于 $$\left|a_{k+1}-\frac{a_k^2}{a_{k-1}}\right|\leqslant\frac{1}{2},$$

所以 $$a_{k+1}=3a_k+2a_{k-1},$$

即对于 $n=k+1$,② 也成立.于是对一切 $n\geqslant 3$,② 都成立,由此可知 $a_n\equiv a_{n-1}(\bmod 2)$, $n=3,4,\cdots$ 因此当 $n>1$ 时,a_n 与 $a_2=7$ 同为奇数.

8・44 设数列 $\{a_n\}$ 满足:

$$a_1=1,a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+\frac{1}{4a_n},n=1,2,\cdots$$

求证:当 $n>1$ 时,$\sqrt{\dfrac{2}{2a_n^2-1}}$ 为自然数.

(全苏数学冬令营,1991 年)

[证] 用归纳法易知

$$a_n>\frac{\sqrt{2}}{2},对于任意\ n\geqslant 1. \qquad ①$$

令 $b_n=\sqrt{\dfrac{2}{2a_n^2-1}}$,由于当 $n\geqslant 2$ 时,

$$2a_n^2-1=2\left(\frac{a_{n-1}}{2}+\frac{1}{4a_{n-1}}\right)^2-1=2\left(\frac{a_{n-1}}{2}-\frac{1}{4a_{n-1}}\right)^2,$$

又由 ① 知$\frac{a_{n-1}}{2}-\frac{1}{4a_{n-1}}>0$,所以

$$b_n=\frac{1}{\frac{a_{n-1}}{2}-\frac{1}{4a_{n-1}}}=\frac{4a_{n-1}}{2a_{n-1}^2-1}=2b_{n-1}^2a_{n-1}.$$

再由 $a_{n-1}^2=\frac{1}{b_{n-1}^2}+\frac{1}{2}$ 可得

$$b_n^2=4b_{n-1}^4a_{n-1}^2=4b_{n-1}^2\left(1+\frac{1}{2}b_{n-1}^2\right),$$

从而当 $n\geqslant 3$ 时,将$\frac{1}{2}b_{n-1}^2=2b_{n-2}^2\left(1+\frac{1}{2}b_{n-2}^2\right)$代入上式得到

$$b_n^2=4b_{n-1}^2(1+2b_{n-2}^2+b_{n-2}^4)=4b_{n-1}^2(b_{n-2}^2+1)^2,$$

即 $$b_n=2b_{n-1}(b_{n-2}^2+1),n=3,4,5,\cdots \qquad ②$$

由 $b_1=\sqrt{2},b_2=4,b_3=24$ 及 ② 可知,当 $n>1$ 时,$b_n=\sqrt{\frac{2}{2a_n^2-1}}$ 为自然数.

8·45 设 r 是正整数,数列$\{a_n\}$满足:

$$a_1=1,a_{n+1}=\frac{na_n+2(n+1)^{2r}}{n+2},n=1,2,\cdots$$

求证:每个 a_n 都是正整数,并且求所有 n,使得 a_n 是偶数.

(第 1 届中国台北市数学奥林匹克,1992 年)

[证] 由于

$$(n+2)a_{n+1}=na_n+2(n+1)^{2r},$$

所以 $$(n+2)(n+1)a_{n+1}=(n+1)na_n+2(n+1)^{2r+1}.$$

令 $$b_n=(n+1)na_n,n=1,2,3,\cdots$$

则 $$b_{n+1}=b_n+2(n+1)^{2r+1}.$$

于是由 $b_1=2$ 可得

$$b_n=2\sum_{k=1}^{n}k^{2r+1},n=1,2,\cdots$$

当 $n=1$ 时,由 $b_1=2$ 显然可知 $1\cdot(1+1)\mid b_1$.设 $n>1$,由于

$$b_n=2n^{2r+1}+\sum_{k=1}^{n-1}(k^{2r+1}+(n-k)^{2r+1}),$$

又 $2r+1$ 为奇数可推出

$$n \mid k^{2r+1}+(n-k)^{2r+1},$$

所以 $\quad n \mid b_n.$

另一方面由

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}(k^{2r+1}+(n+1-k)^{2r+1})$$

和 $\quad n+1 \mid k^{2r+1}+(n+1-k)^{2r+1}$

可知 $\quad n+1 \mid b_n.$

再由 n 与 $n+1$ 互素可得

$$n(n+1) \mid b_n, n=1,2,3,\cdots$$

即 $\quad a_n=\dfrac{b_n}{n(n+1)}$ 为正整数.

以下讨论 a_n 的奇偶性. 当 n 为偶数时,显然 a_n 与 $\dfrac{b_n}{n}$ 同奇偶,又 $\dfrac{b_2}{2}=1+2^{2r+1}$,且当 $n>2$ 时有

$$\begin{aligned} b_n &= 2n^{2r+1}+\sum_{k=1}^{n-1}(k^{2r+1}+(n-k)^{2r+1}) \\ &= 2n^{2r+1}+2\sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}}(k^{2r+1}+(n-k)^{2r+1})+2\cdot\left(\frac{n}{2}\right)^{2r+1}, \end{aligned}$$

所以 $\dfrac{b_n}{n}$ 与 $\left(\dfrac{n}{2}\right)^{2r}$ 同奇偶. 由此立即可得

$$a_n=\begin{cases} 偶数, 当\ n\equiv 0(\bmod 4), \\ 奇数, 当\ n\equiv 2(\bmod 4). \end{cases}$$

当 n 为奇数时,显然 a_n 与 $\dfrac{b_n}{n+1}$ 同奇偶. 由于 $b_1=2$,且当 $n>1$ 时,

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{k=1}^{n}(k^{2r+1}+(n+1-k)^{2r+1}) \\ &= 2\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(k^{2r+1}+(n+1-k)^{2r+1})+2\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2r+1}, \end{aligned}$$

从而 $\dfrac{b_n}{n+1}$ 与 $\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^{2r}$ 同奇偶,于是

$$a_n=\begin{cases} 偶数, 当\ n\equiv 3(\bmod 4), \\ 奇数, 当\ n\equiv 1(\bmod 4). \end{cases}$$

代数卷

总之,当且仅当 $n\equiv 0$ 或 $3(\mathrm{mod}4)$ 时,a_n 是偶数.

8·46 设数列 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 满足

$$a_1=a_2=1,a_n=a_{n-1}+a_{n-2},n=3,4,5,\cdots$$

求证,对任何自然数 k,a_{5k} 都可被5整除.

(第24届莫斯科数学奥林匹克,1961年)

[证] 用归纳法.当 $k=1$ 时,由

$$a_5=a_4+a_3=a_3+2a_2+a_1=3a_2+2a_1=5,$$

可知 $5\mid a_5$,设对某个自然数 k,$5\mid a_{5k}$.

由于
$$\begin{aligned}a_{5k+5}&=a_{5k+4}+a_{5k+3}\\&=a_{5k+3}+2a_{5k+2}+a_{5k+1}\\&=a_{5k+2}+3a_{5k+1}+3a_{5k}+a_{5k-1}\\&=8a_{5k}+5a_{5k-1},\end{aligned}$$

所以 $5\mid a_{5k+5}$.于是对任何自然数 k 都有 $5\mid a_{5k}$.

8·47 求证:数列

$$a_n=\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n-2,n=1,2,\cdots$$

的每一项都是自然数,而且当 n 为偶数或奇数时,a_n 分别具有形式 $5m^2$ 或 m^2,其中 $m\in N$.

(前捷克斯洛伐克数学奥林匹克,1978年)

[证] 显然 $a_1=1,a_2=5$.由于 $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ 和 $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ 是方程 $x^2-3x+1=0$ 的两个根,所以

$$a_{n+2}+2=3(a_{n+1}+2)-(a_n+2),$$

即
$$a_{n+2}=3a_{n+1}-a_n+2,n=1,2,\cdots$$

由此易知数列 $\{a_n\}$ 的每一项都是整数,又

$$a_n>2\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{n}{2}}-2=0,$$

所以 $\{a_n\}$ 的每一项都是自然数.

易知
$$a_{2n}=\left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]^2.$$

令 $b_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$,则 $b_1=1,b_2=3$,且

$$b_{n+2}=3b_{n+1}-b_n, n=1,2,\cdots$$

从而$\{b_n\}$的每一项都是整数.显然有 $b_n>0$,于是 $b_n\in N$,且 $a_{2n}=5b_n^2$.

由于$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$,所以

$$\begin{aligned}a_{2n-1}&=\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}+\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{-1}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}-2\\&=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}-2\\&=\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]^2.\end{aligned}$$

令 $c_n=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n$,则 $c_1=1,c_2=4$,且

$$c_{n+2}=3c_{n+1}-c_n, n=1,2,\cdots$$

从而$\{c_n\}$的每一项都是整数.

显然有 $c_n>0$,于是 $c_n\in N$ 且 $a_{2n-1}=c_n^2$.

8·48 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为

$$a_n=[n\sqrt{2}], n=0,1,2,\cdots$$

求证:$\{a_n\}$有无穷多项是完全平方数.

(第 30 届国际数学奥林匹克候选题,1989 年)

[证] 任取正奇数 m,则存在自然数 x_m,y_m,使得

$$(\sqrt{2}+1)^m=x_m\sqrt{2}+y_m.$$

由于 $(\sqrt{2}+1)^m+(\sqrt{2}-1)^m=2x_m\sqrt{2}$,所以

$$(\sqrt{2}-1)^m=x_m\sqrt{2}-y_m.$$

由此可得 $2x_m^2-y_m^2=1$.

于是 $y_m^4<2x_m^2y_m^2=y_m^4+y_m^2<(y_m^2+1)^2$,

即 $y_m^2<\sqrt{2}x_my_m<y_m^2+1$.

取 $n=x_my_m$,则

$$a_n=[\sqrt{2}x_my_m]=y_m^2.$$

8·49 设 a_n 为下述自然数N的个数:N的十进制表示中的各位

数字之和为 n,且每位数字只能取 1,3 或 4.求证:a_{2n} 是完全平方数.

(中国高中数学联赛,1991 年)

代数卷

[证] 显然 $a_1=1,a_2=1,a_3=2,a_4=4$,且

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-3}+a_{n-4},n>4. \quad ①$$

只需证当 $n\geqslant 3$ 时,a_{2n} 是完全平方数.由 ① 可得

$$\begin{aligned}a_{2n}&=a_{2n-1}+a_{2n-3}+a_{2n-4}\\&=a_{2n-2}+a_{2n-4}+a_{2n-5}+a_{2n-3}+a_{2n-4},\end{aligned}$$

又 $$a_{2n-2}=a_{2n-3}+a_{2n-5}+a_{2n-6},$$

所以 $$a_{2n}=2a_{2n-2}+2a_{2n-4}-a_{2n-6}.$$

令 $b_n=a_{2n}$,则 $b_1=1,b_2=4,b_3=9$,且

$$b_n=2b_{n-1}+2b_{n-2}-b_{n-3},n>3. \quad ②$$

另一方面,补充 $a_0=1,a_{-1}=0$,则 ① 对于 $n>2$ 成立.令 $c_n=a_n+a_{n-2}$,则 $c_1=1,c_2=2$,且由 ① 可知

$$c_n=c_{n-1}+c_{n-2},n>2. \quad ③$$

由此可得 $c_3=3$,且

$$c_n^2=(c_{n-1}+c_{n-2})^2=2c_{n-1}^2+2c_{n-2}^2-(c_{n-1}-c_{n-2})^2.$$

由 ③,则 $c_{n-1}-c_{n-2}=c_{n-3}$.于是 $c_1^2=1,c_2^2=4,c_3^2=9$,且

$$c_n^2=2c_{n-1}^2+2c_{n-2}^2-c_{n-3}^2,n>3. \quad ④$$

比较 ② 和 ④ 及其初值可得 $b_n=c_n^2$,即

$$a_{2n}=(a_n+a_{n-2})^2,n=1,2,\cdots$$

8・50 已知$\{a_0,a_1,a_2,\cdots\}$是整数列且满足

(1)$a_{n+1}=3a_n-3a_{n-1}+a_{n-2},n=2,3,\cdots$

(2)$2a_1=a_0+a_2-2$,

(3) 对任何 $m\in N$,存在 k,使得

$$a_k,a_{k+1},\cdots,a_{k+m-1}$$

都是完全平方数.

求证:数列$\{a_0,a_1,a_2,\cdots\}$的所有项都是完全平方数.

(第 7 届中国中学生数学冬令营,1992 年)

[证 1] 由(1)知,当 $n\geqslant 2$ 时有

$$a_{n+1}-a_n=2(a_n-a_{n-1})-(a_{n-1}-a_{n-2}).$$

令 $d_n=a_n-a_{n-1},n=1,2,\cdots$,则上式化为

$$d_{n+1}-d_n=d_n-d_{n-1}.$$

由此可得

$$d_{n+1}-d_n=d_n-d_{n-1}=\cdots=d_2-d_1,$$

又由(2)

$$d_2-d_1=a_2-2a_1+a_0=2,$$

所以 $\quad d_n=d_1+2(n-1),n=1,2,3,\cdots$

于是可得

$$a_n=a_0+\sum_{k=1}^{n}d_k=a_0+d_1n+n(n-1),$$

即 $\quad a_n=n^2+bn+c,n=0,1,2,\cdots \qquad ①$

其中 $b=d_1-1=a_1-a_0-1,c=a_0$.由(3)知,存在非负整数 t,使得 a_t 和 a_{t+2} 都是完全平方数,

从而 $\quad a_{t+2}-a_t\not\equiv 2(\mathrm{mod}4)$.

再由①得

$$a_{t+2}-a_t=4t+4+2b,$$

于是 b 为偶数.令 $b=2\lambda$,则①化为

$$a_n=(n+\lambda)^2+c-\lambda^2,n=0,1,2,\cdots \qquad ②$$

显然只需再证 $c-\lambda^2=0$.

若不然,有 $c-\lambda^2\neq 0$,则 $c-\lambda^2$ 的不同约数只有有限多个,记其个数为 m.由①知存在 n_0,使当 $n\geqslant n_0$ 时,数列 $\{a_n\}$ 严格单调增加.又由假设条件(3)知当 $k\geqslant n_0$ 时,使得

$$a_{k+i}=p_i^2,i=0,1,2,\cdots,m.$$

其中 p_i 是正整数且 $p_0<p_1<\cdots<p_m$.再由②得

$$\begin{aligned}c-\lambda^2&=p_i^2-(k+i+\lambda)^2\\&=(p_i-k-i-\lambda)(p_i+k+i+\lambda),i=0,1,2,\cdots,m.\end{aligned}$$

由此可知 $c-\lambda^2$ 至少有 $m+1$ 个不同的约数,矛盾.

[证2] 与[证1]相同可得

$$a_n=n^2+bn+c=\left(n+\frac{b}{2}\right)^2+c-\frac{b^2}{4},n=0,1,2,\cdots$$

其中 $b=a_1-a_0-1,c=a_0$.由此容易证明,存在 n_0,使得当 $n>n_0$ 时,$\{a_n\}$ 严格递增且满足

$$\left(n+\frac{b-1}{2}\right)^2<a_n<\left(n+\frac{b+1}{2}\right)^2.$$

由假设条件(3)知存在 $t>n_0$,使 a_t 是完全平方数,于是有

$$t+\frac{b-1}{2}<\sqrt{at}<t+\frac{b+1}{2}.$$

故 b 为偶数且

$$a_t=\left(t+\frac{b}{2}\right)^2.$$

又 $a_t=\left(t+\frac{b}{2}\right)^2+c-\frac{b^2}{4}$,从而 $c-\frac{b^2}{4}=0$. 于是

$$a_n=\left(n+\frac{b}{2}\right)^2+c-\frac{b^2}{4}=\left(n+\frac{b}{2}\right)^2, n=0,1,2,\cdots$$

即所有 a_n 都是完全平方数.

8·51　设整数列$\{a_n\}$满足:

$$a_0=0, a_1=1, a_n=2a_{n-1}+a_{n-2}, n=2,3,4,\cdots$$

求证:$2^k \mid a_n \Leftrightarrow 2^k \mid n, k=0,1,2,\cdots$

(第 29 届国际数学奥林匹克候选题,1988 年)

[证]　只需证 $k\geqslant 1$ 的情况. 由递推公式可得

$$a_n\equiv a_{n-2}(\mathrm{mod}2), n=2,3,4,\cdots$$

又 $a_0=0, a_1=1$,所以

$$2\mid a_n \Leftrightarrow 2\mid n,$$

即 $k=1$ 时,结论成立. 以下证 $k>1$ 的情况. 由递推公式和 $a_0=0, a_1=1$ 不难得到通项公式

$$a_n=\frac{\sqrt{2}}{4}[(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n],$$

于是
$$a_{2^m n}=\frac{\sqrt{2}}{4}[(1+\sqrt{2})^{2^m n}-(1-\sqrt{2}^{2^m n}].$$

记
$$(1+\sqrt{2})^{2m}+(1-\sqrt{2})^{2^m}=2\sum c_{2^m}^k 2^{\frac{k}{2}}=2b_{2^m},$$

其中 $\sum$ 关于一切$[0,2^m]$中的偶数求和,又

$$(1+\sqrt{2})^{2^m}\cdot(1-\sqrt{2})^{2^m}=\begin{cases}-1, m=0,\\ 1, m>0,\end{cases}$$

所以
$$[\lambda-(1+\sqrt{2})^{2^m}][\lambda-(1-\sqrt{2})^{2^m}]=\begin{cases}\lambda^2-2b_{2^m}\lambda-1, m=0,\\ \lambda^2-2b_{2^m}\lambda+1, m>0.\end{cases}$$

由此可得数列$\{a_{2^m n}\}$, $n=0,1,2,\cdots$ 的递推公式为

$$a_{2^m n}=\begin{cases}2b_{2^m}a_{2^m(n-1)}+a_{2^m(n-2)}, m=0,\\ 2b_{2^m}a_{2^m(n-1)}-a_{2^m(n-2)}, m>0.\end{cases}$$

考虑数列 $\quad b_n=\frac{1}{2}[(1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n], n=0,1,2,\cdots$

易知 $\quad b_0=b_1=1, b_n=2b_{n-1}+b_{n-2}$,对于任意 $n\geqslant 2$.

从而对任何非负整数 n, b_n 是奇数.从递推公式可得,当 $m\geqslant 1$ 时有

$$a_{2^m}=a_{2^{m-1}\cdot 2}=2b_{2^{m-1}}a_{2^{m-1}}\pm a_0=2b_{2^{m-1}}a_{2^{m-1}},$$

于是 $\quad a_{2^m}=2^m b_{2^{m-1}}b_{2^{m-2}}\cdots b_1$.

由于 $b_1,b_2,\cdots,b_{2^{m-1}}$ 都是奇数,所以

$$2^m \parallel a_{2^m},$$

即 $\quad 2^m\mid a_{2^m}$ 但 $2^{m+1}\nmid a_{2^m}$.再由递推公式可得

$$2^m\mid a_{2^m n} \text{ 且 } a_{2^m(n+2)}\equiv a_{2^m n}(\bmod 2^{m+1}), n=0,1,2\cdots.$$

再由 $2^{m+1}\mid a_0=0, 2^{m+1}\nmid a_{2^m}$ 得到,对任何 $m\geqslant 1$ 有

$$2^{m+1}\mid a_{2^m n}\Leftrightarrow 2\mid n.$$

任取自然数 $k>1$.若 $2^k\mid n$,则 $n=2^{k-1}l$,其中 l 是偶数,由上述结果可得 $2^k\mid a_n$.反之若 $2^k\nmid n$,则存在 $0\leqslant m\leqslant k-1$ 使得 $n=2^m l$,其中 l 为奇数,于是 $2^{m+1}\nmid a_n$,又 $k\geqslant m+1$,所以 $2^k\nmid a_n$.以上说明对于 $k>1$,结论也成立.

8·52 在正整数集上定义函数 $f(n)$ 如下:

$$f(n)=\begin{cases}\frac{n}{2}, & \text{当 } n \text{ 为偶数},\\ n+3, & \text{当 } n \text{ 为奇数},\end{cases}$$

(1) 证明对任何正整数 m,数列

$$a_0=m, a_1=f(m), \cdots, a_n=f(a_{n-1}), \cdots$$

中总有一项为 1 或 3.

(2) 在所有正整数中,哪些 m 使上述数列必然出现 3?哪些 m 使上述数列必然出现 1?

(中国高中数学联赛,1979 年)

[解] (1) 由于$\{a_n\}$是自然数列,所以必有最小值 a_{n_0}.如果 $a_n>3$,当 a_n 是偶数时,$a_{n+1}=\frac{a_n}{2}<a_n$,当 a_n 是奇数时,$a_{n+2}=\frac{a_n+3}{2}<$

a_n. 由此可知 $a_{n_0} \leqslant 3$. 又若 $a_{n_0} = 2$，则 $a_{n_0+1} = 1$ 矛盾！所以 a_{n_0} 必等于 1 或 3.

(2) 由 $f(n)$ 的定义易知

$$3 \mid a_n \Leftrightarrow 3 \mid a_{n+1}, n = 0,1,2,\cdots$$

于是若 $3 \mid m = a_0$，则 $3 \mid a_n, n = 0,1,2,\cdots$ 所以 $\{a_n\}$ 中没有等于 1 的项，由(1)可知必有等于 3 的项. 若 $3 \nmid m$，则 $3 \nmid a_n, n = 0,1,2,\cdots$ 从而数列 $\{a_n\}$ 中没有等于 3 的项，由(1)可知必有等于 1 的项.

8·53 已知 $a_1 = 1, a_2 = 2$,

$$a_{n+2} = \begin{cases} 5a_{n+1} - 3a_n, & a_n \cdot a_{n+1} \text{ 为偶数}, \\ a_{n+1} - a_n, & a_n \cdot a_{n+1} \text{ 为奇数}. \end{cases}$$

求证：对一切 $n \in N, a_n \neq 0$.

（中国高中数学联赛，1988 年）

［证］ 由 a_1 是奇数，a_2 是偶数及递推公式易知在数列 $\{a_n\}$ 中任意相邻两项不能全是偶数. 可以证明 $4 \nmid a_n, n = 1,2,3,\cdots$，由此即得对任意 $n \in N, a_n \neq 0$. 事实上若不然，则集合 $\{n \in N \mid 4 \mid a_n\}$ 非空，记 $n_0 = \min\{n \in N \mid 4 \mid a_n\}$. 由于 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 7$，所以 $n_0 > 3$. 由于 a_{n_0} 是偶数，a_{n_0-1}, a_{n_0-2} 不全是偶数，由递推公式可知 a_{n_0-1}, a_{n_0-2} 全是奇数. 同理可知 a_{n_0-3} 是偶数. 所以

$$a_{n_0} = a_{n_0-1} - a_{n_0-2}, a_{n_0-1} = 5a_{n_0-2} - 3a_{n_0-3}.$$

由此得 $$a_{n_0} = 4a_{n_0-2} - 3a_{n_0-3}.$$

由于 $4 \mid a_{n_0}$，从而 $4 \mid a_{n_0-3}$，与 n_0 的最小性矛盾！

8·54 已知对任何 $n \in N, a_n > 0$ 且

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2.$$

求证：$a_n = n, n = 1,2,3,\cdots$

（中国高中数学联赛，1989 年）

［证］ 用归纳法. 当 $n = 1$ 时，由 $a_1^3 = a_1^2$ 且 $a_1 > 0$，则 $a_1 = 1$. 设当 $n \leqslant m$ 时，$a_n = n$. 因为

$$\sum_{k=1}^{m} a_k^3 + a_{m+1}^3$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{m+1} a_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{m} a_k\right)^2 + 2a_{m+1}\left(\sum_{k=1}^{m} a_k\right) + a_{m+1}^2,$$

又

$$\sum_{k=1}^{m} a_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{m} a_k\right)^2 \text{ 和 } a_{m+1} > 0\text{,所以}$$

$$a_{m+1}^2 - a_{m+1} - 2\sum_{k=1}^{m} a_k = 0.$$

根据归纳假设$\sum_{k=1}^{m} a_k = \sum_{k=1}^{m} k = \frac{1}{2}m(m+1)$,从而

$$a_{m+1} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4m(m+1)}) = m + 1.$$

于是对于任何 $n \in N$ 有 $a_n = n$.

8・55 有穷数列 $a_1, a_2, \cdots a_n$ 称之为p-均等的,如果所有如下形式的和彼此相等

$$a_k + a_{k+p} + a_{k+2p} + \cdots, k = 1,2,\cdots,p.$$

求证:如果一个项数为 50 的有穷数列对于 $p = 3,5,7,11,13,17$ 都是 p-均等的,则该数列各项都为 0.

(列宁格勒数学奥林匹克,1991 年)

[证] 设 $p > 1$ 为自然数,复数 z 满足

$$z^p = 1 \text{ 且 } z \neq 1,$$

则 $$1 + z + z^2 + \cdots + z^{p-1} = 0.$$

于是 $$a_1 + a_{1+p} + a_{1+2p} + \cdots = a_1 + a_{1+p}z^p + a_{1+2p}z^{2p} + \cdots$$

$$z(a_2 + a_{2+p} + a_{2+2p} + \cdots) = a_2 z + a_{2+p}z^{p+1} + a_{2+2p}z^{2p+1} + \cdots$$

……

$$z^{p-1}(a_p + a_{2p} + a_{3p} + \cdots) = a_p z^{p-1} + a_{2p}z^{2p-1} + a_{3p}z^{3p-1} + \cdots$$

进一步如果 $a_1, a_2, \cdots a_n$ 是 p-均等的,则

$$a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + \cdots + a_n z^{n-1} = 0.$$

由此可知,若 $a_1, a_2, \cdots, a_{50}$ 关于 $p = 3,5,7,11,13,17$ 都是 p-均等的,则多项式 $f(x) = a + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{50}x^{49}$ 至少有 $2+4+6+10+12+16 = 50$ 个复根,所以必有

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{50} = 0.$$

8・56 设 n 为非负整数,记

$$(1+4\sqrt[3]{2}-4\sqrt[3]{4})^n = a_n + b_n\sqrt[3]{2} + c_n\sqrt[3]{4},$$

其中 a_n,b_n,c_n 是整数.求证:如果 $c_n=0$,则 $n=0$.

(第 30 届国际数学奥林匹克候选题,1989 年)

[证] 由于

$$a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt[3]{2}+c_{n+1}\sqrt[3]{4}=(a_n+b_n\sqrt[3]{2}+c_n\sqrt[3]{4})(1+4\sqrt[3]{2}-4\sqrt[3]{4}),$$

所以 $$a_{n+1}=a_n-8b_n+8c_n, n=0,1,2,\cdots$$

又 $a_0=1$,从而 a_n 全是奇数.

对于每一个非零整数 k,则存在非负整数 l 和奇数 k',使得

$$k=2^l\cdot k'.$$

定义 $f(k)=l$.

首先可以证明当 $n=2^m$ 时,$m=0,1,2,\cdots,b_n$ 和 c_n 都是非零整数,且

$$f(b_n)=f(c_n)=m+2. \quad ①$$

事实上,若 $m=0$,则 $n=1$.易知 $b_1=4,c_1=-4$,所以 ① 成立.记

$$a=a_{2^m}, b=b_{2^m}, c=c_{2^m},$$

$$A=a_{2^{m+1}}, B=b_{2^{m+1}}, C=c_{2^{m+1}},$$

则 $$A+B\sqrt[3]{2}+C\sqrt[3]{4}=(a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4})^2.$$

由此可得 $$A=a^2+2bc,$$
$$B=2ab+2c^2,$$
$$C=2ac+b^2.$$

由于 a 是奇数,所以当 $f(b)=f(c)=m+2$ 时,易知

$$f(B)=f(C)=m+3.$$

于是用归纳法可证对任意 $n=2^m(m\geqslant 0)$,① 都成立.

其次,由

$$a_{n+m}+b_{n+m}\sqrt[3]{2}+c_{n+m}\sqrt[3]{4}$$
$$=(a_n+b_n\sqrt[3]{2}+c_n\sqrt[3]{4})(a_m+b_m\sqrt[3]{2}+c_m\sqrt[3]{4}),$$

可得

$$a_{n+m}=a_na_m+2b_nc_m+2b_mc_n,$$
$$b_{n+m}=a_nb_m+a_mb_n+2c_nc_m,$$
$$c_{n+m}=a_nc_m+a_mc_n+b_nb_m.$$

如果 b_n,b_m,c_n,c_m 都非零,且有 $\lambda\neq\mu$,使得

$$f(b_n)=f(c_n)=\lambda,\quad f(b_m)=f(c_m)=\mu,$$

从 a_n 和 a_m 都是奇数以及上述关系式可推出，b_{n+m} 和 c_{n+m} 都非零且

$$f(b_{n+m})=f(c_{n+m})=\min\{\lambda,\mu\}. \qquad ②$$

任取正整数 n，则存在整数 $0\leqslant m_0<m_1<\cdots<m_r$，使得 $n=2^{m_0}+2^{m_1}+\cdots+2^{m_r}$.

由 ① 和 ② 可知 $c_n\neq 0$，且 $f(c_n)=m_0+2$，即

$$2^{m_0+2}\mid c_n, \text{但 } 2^{m_0+3}\nmid c_n,$$

于是要证之结论成立.

8·57　已知数列 $\{a_n\}$ 的通项

$$a_n=15n+2+(15n-32)\cdot 16^{n-1}, n=0,1,2,\cdots.$$

(1) 求证：对每个非负整数 n，$15^3\mid a_n$.

(2) 求所有的 n，使得

$$1991\mid a_n, 1991\mid a_{n+1}, 1991\mid a_{n+2}.$$

（中国国家集训队测验题，1991 年）

[解]　(1) 由于

$$\begin{aligned}2a_{n+1}-a_n &= 2[15(n+1)+2+(15n-17)\cdot 16^n]-[15n+2+(15n-32)\cdot 16^{n-1}]\\ &= 15n+30+2+(31\times 15n-32\times 16)\cdot 16^{n-1}\\ &= a_{n+2}+(31\times 15n-32\times 16)\cdot 16^{n-1}-(15n-2)\cdot 16^{n+1}\\ &= a_{n+2}-15^3n\cdot 16^{n-1},\end{aligned}$$

所以　$a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+15^3n\cdot 16^{n-1}, n=0,1,2,\cdots$

又　$a_0=0, a_1=0$，从而用归纳法易证 $15^3\mid a_n$.

(2) 设 p 是大于 5 的素数. 如果

$$p\mid a_n, p\mid a_{n+1}, p\mid a_{n+2},$$

则由 (1) 中的递推公式可得 $p\mid n$. 再用通项公式可推出 $16^n\equiv 1(\bmod p)$. 反之若 $p\mid n$，$16^n\equiv 1(\bmod p)$，由通项公式易知 $p\mid a_n$. 又

$$a_{n+1}=15n(1+16^n)+17(1-16^n),$$

所以 $p\mid a_{n+1}$. 再用(1)中的递推公式可知 $p\mid a_{n+2}$. 以上证明了：$p\mid a_n$，$p\mid a_{n+1}$，$p\mid a_{n+2}$ 的充要条件是 $p\mid n$ 且 $16^n\equiv 1(\bmod p)$. 若记 n_0 是最小的自然数，使得 $16^{n_0}\equiv 1(\bmod p)$，则

$$\{n;p \mid a_n, p \mid a_{n+1}, p \mid a_{n+2}\} = \{k[p,n_0];k = 0,1,2,\cdots\},$$

其中$[p,n_0]$表示 p 与 n_0 的最小公倍数.

显然 $1991 = 11\times 181$,11与181都是素数.由 $16^n \equiv 5^n \pmod{11}$ 容易算出使得 $16^n \equiv 1 \pmod{11}$ 的最小自然数 $n = 5$.由费尔马定理可知 $2^{180} \equiv 1 \pmod{181}$,即 $16^{45} \equiv 1 \pmod{181}$.如果自然数 $n < 45$ 且

$$16^n \equiv 1 \pmod{181},$$

则 $n \mid 45$,但 $16^1 \equiv 16 \pmod{181}$,经计算可得

$$16^5 \equiv 43 \pmod{181}, 16^9 \equiv 59 \pmod{181}.$$

从而使得 $16^n \equiv 1 \pmod{181}$ 的最小自然数 $n = 45$.故使得 $1991 \mid a_n$, $1991 \mid a_{n+1}$, $1991 \mid a_{n+2}$ 的所有 n 为

$$[5,11,45,181]k = 11\times 45\times 181k = 89595k,$$

其中 $k = 0,1,2,\cdots$

8·58 求证:在任意3个无穷自然数列

$$a_1,a_2,a_3,\cdots$$
$$b_1,b_2,b_3,\cdots$$
$$c_1,c_2,c_3,\cdots$$

中必能找到不同的下标 p 和 q,使得

$$a_p \geqslant a_q, b_p \geqslant b_q, c_p \geqslant c_q.$$

(第1届全俄数学奥林匹克,1961年)

[证] 因为任意多个自然数一定有最小值,所以可令 $a_{n_1} = \min\{a_n \mid n \in N\}$, $a_{n_2} = \min\{a_n \mid n \in N, n > n_1\},\cdots, a_{n_k} = \min\{a_n \mid n \in N, n > n_{k-1}\},\cdots$.从而$\{n_k\}$是自然数列1,2,3…的子序列满足 $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ 且

$$a_{n_1} \leqslant a_{n_2} \leqslant a_{n_3} \leqslant \cdots$$

对于$\{b_{n_k}\}$重复以上证明可知存在$\{n_k\}$的子序列 $m_1 < m_2 < m_3 < \cdots$ 使得

$$b_{m_1} \leqslant b_{m_2} \leqslant b_{m_3} \leqslant \cdots$$

对于$\{c_{m_k}\}$再重复以上证明可知存在$\{m_k\}$的子序列 $l_1 < l_2 < l_3 < \cdots$ 使得

$$c_{l_1} \leqslant c_{l_2} \leqslant c_{l_3} \leqslant \cdots$$

又 $$a_{l_1} \leqslant a_{l_2} \leqslant a_{l_3} \leqslant \cdots$$
$$b_{l_1} \leqslant b_{l_2} \leqslant b_{l_3} \leqslant \cdots$$
取 $p = l_2, q = l_1$ 即满足所要的条件.

8·59 设 $\{a_n\}$ 是无穷正数数列,其中 a_1 可任意取且对于 $n \geqslant 1$ 有
$$a_{n+1}^2 = a_n + 1.$$
求证:存在 n,使得 a_n 是无理数.

(加拿大国家集训队训练题,1989 年)

[证] 若 $a_1 > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$,则
$$a_1^2 - a_1 - 1 > 0.$$
由此可知 $$a_2^2 = a_1 + 1 < a_1^2,$$
且 $$a_2 = \sqrt{a_1 + 1} > \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$
于是用归纳法可知 $\{a_n\}$ 是严格递减且有下界的无穷正数数列. 如果 $\{a_n\}$ 的所有项全是有理数. 设 $a_1 = \frac{b_1}{a}$,其中 a, b_1 都是正整数. 由于
$$a_2 = \sqrt{a_1 + 1} = \frac{\sqrt{a(b_1 + a)}}{a},$$
又 a_2 是有理数,则 $a(b_1 + a)$ 必是完全平方数. 记 $b_2 = \sqrt{a(b_1 + a)}$,则 b_2 是正整数且 $a_2 = \frac{b_2}{a}$. 用归纳法易证
$$a_n = \frac{b_n}{a}, n = 1,2,3\cdots$$
其中 b_n 全是正整数. 由 $\{a_n\}$ 严格递减且有下界可推出 $\{b_n\}$ 严格递减且有下界,这与 $\{b_n\}$ 全是正整数矛盾。从而 $\{a_n\}$ 中必有某项是无理数.

若 $a_1 < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$,同理可证 $\{a_n\}$ 是严格递增且有上界的正数数列,再用反证法即可推出 $\{a_n\}$ 中必有某项是无理数.

8·60 已知一两端无限的数列 $\cdots, a_{-n}, \cdots, a_{-1}, a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$ 满足

$$a_k = \frac{1}{4}(a_{k-1} + a_{k+1}),\text{对于任意 } k \in Z.$$

如果此数列中有某两项相等,求证此数列必有无穷多对彼此相等的项.

(第 28 届莫斯科数学奥林匹克,1965 年)

[证] 设存在 $k < p$ 使得 $a_k = a_p$. 可以证明

$$a_{k-1} = a_{p+1}$$

事实上,由于 $a_k = \frac{1}{4}(a_{k-1} + a_{k+1})$,所以

$$a_{k+1} = 4a_k - a_{k-1}.$$

再递推一次可得

$$a_{k+2} = 4a_{k+1} - a_k = 15a_k - 4a_{k-1}.$$

一般用归纳法易证

$$a_{k+n} = b_n a_k - c_n a_{k-1}, n = -1,0,1,2,\cdots$$

其中 $b_{-1} = 0, b_0 = 1, b_n = 4b_{n-1} - b_{n-2}, n = 1,2,3,\cdots, c_{-1} = -1, c_0 = 0, c_n = 4c_{n-1} - c_{n-2}, n = 1,2,3,\cdots$ 同理可证

$$a_{p-n} = d_n a_p - e_n a_{p+1}, n = -1,0,1,2,\cdots$$

其中 $d_{-1} = 0, d_0 = 1, d_n = 4d_{n-1} - d_{n-2}, n = 1,2,\cdots e_{-1} = -1, e_0 = 0, e_n = 4e_{n-1} - e_{n-2}, n = 1,2,\cdots$ 由此可知

$$b_n = d_n, c_n = e_n, n = -1,0,1,2,\cdots$$

从 $a_k = a_p$ 可得

$$b_{p-k}a_k - c_{p-k}a_{k-1} = d_{p-k}a_p - e_{p-k}a_{p+1},$$

所以 $a_{k-1} = a_{p+1}$.

于是 $a_{k-n} = a_{p+n}, n = 0,1,2,\cdots$

8·61 求证:任何自然数都可以表示为斐波那契数列 1,1,2,3,5,8,13,⋯ 中若干个不同的项的和.

(第 25 届莫斯科数学奥林匹克,1962 年)

[证] 斐波那契数列记为 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 则

$$a_1 = a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n = 3,4,5\cdots$$

用归纳法. 当自然数 $m = 1$ 时,显然 $a_1 = a_2 = m$. 假设对于某个 $m \geqslant 1$,一切不超过 m 的自然数都能表示为斐波那契数列中若干个不同项之和. 由于 $m + 1 \geqslant 2$,从而存在 $n \geqslant 3$ 使得

$$a_n \leqslant m + 1 < a_{n+1}.$$

或者 $a_n = m + 1$,或者 $a_n < m + 1$.在后一种情况,$m + 1 - a_n$ 必是不超过 m 的自然数,由归纳假设可知 $m + 1$ 可表示为斐波那契数列中若干不同项之和.以上说明要证之结果成立.

8·62 已给数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 满足

$$a_1 = a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n = 3,4,5,\cdots.$$

求证:在此数列中任意连续 8 项之和不等于数列中任一项.

(第 20 届莫斯科数学奥林匹克,1957 年)

[证] 显然 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 是单增自然数列.任取

$$s = a_k + a_{k+1} + \cdots + a_{k+7}.$$

由于 $a_{k+8} = a_{k+7} + a_{k+6} < s$,又

$$\begin{aligned} a_{k+9} &= a_{k+8} + a_{k+7} = a_{k+7} + a_{k+6} + a_{k+7} \\ &= a_{k+7} + a_{k+6} + a_{k+5} + a_{k+6} \\ &= \cdots = s + a_{k+1} > s, \end{aligned}$$

所以 s 不等于数列中的任一项.

8·63 设 $x_0 = 0, x_1 = 1$,且 $x_{n+1} = 4x_n - x_{n-1}, n = 1,2,3,\cdots$ 又 $y_0 = 1, y_1 = 2$ 且 $y_{n+1} = 4y_n - y_{n-1}, n = 1,2,3.\cdots$ 求证:对一切整数 $n \geqslant 0$ 有

$$y_n^2 = 3x_n^2 + 1.$$

(第 20 届加拿大数学奥林匹克,1988 年)

[解] 由递推公式及前两项的值可得,对任何整数 $n \geqslant 0$ 有

$$x_n = \frac{\sqrt{3}}{6}(2 + \sqrt{3})^n - \frac{\sqrt{3}}{6}(2 - \sqrt{3})^n,$$

$$y_n = \frac{1}{2}(2 + \sqrt{3})^n + \frac{1}{2}(2 - \sqrt{3})^n.$$

于是

$$x_n^2 = \frac{1}{12}(2 + \sqrt{3})^{2n} + \frac{1}{12}(2 - \sqrt{3})^{2n} - \frac{1}{6},$$

$$y_n^2 = \frac{1}{4}(2 + \sqrt{3})^{2n} + \frac{1}{4}(2 - \sqrt{3})^{2n} + \frac{1}{2}.$$

由此立即可得

$$y_n^2 = 3x_n^2 + 1.$$

8·64 设$\{a_n\}$和$\{b_n\}$都是自然数列，且满足

$$a_{n+1}=na_n+1, b_{n+1}=nb_n-1, n\in N.$$

求证：至多有有限个数，既是$\{a_n\}$中的项又是$\{b_n\}$中的项.

（前联邦德国数学奥林匹克，1987年）

［证］ 由递推关系可得

$$a_2=a_1+1,$$

$$a_3=2a_2+1=2(a_1+1)+1=2\left(a_1+1+\frac{1}{2}\right),$$

$$a_4=3a_3+1=3\cdot 2\left(a_1+1+\frac{1}{2}\right)+1=3!\left(a_1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\right).$$

一般地用归纳法易证

$$a_{n+1}=n!(a_1+S_n), n=1,2,\cdots$$

其中 $S_n=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}.$

同理可证 $b_{n+1}=n!(b_1-S_n), n=1,2,\cdots$

由于 $b_2=b_1-1$ 为自然数，从而 $b_1\geqslant 2$. 易知

$$1\leqslant S_n\leqslant 1+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{n-2}}\right)<\frac{7}{4}.$$

如果存在自然数 n 和 m，使得 $a_{n+1}=b_{m+1}$，

即 $n!(a_1+S_n)=m!(b_1-S_m)$

当 $m=n$ 时，由 $b_1-a_1=2S_n$ 以及 $n>2$ 时 $2S_n$ 不是整数，立即可知 $m=n\leqslant 2$. 当 $m\neq n$ 时，则

$$\frac{a_1+1}{b_1-1}\leqslant\frac{m!}{n!}=\frac{a_1+S_n}{b_1-S_m}\leqslant\frac{a_1+\frac{7}{4}}{b_1-\frac{7}{4}}.$$

从而或者 $n<m\leqslant\dfrac{a_1+\frac{7}{4}}{b_1-\frac{7}{4}}$，或者 $m<n\leqslant\dfrac{b_1-1}{a_1+1}$. 无论何种情况总有

$$\max\{n,m\}\leqslant p,$$

其中 $p = \max\left\{2, \dfrac{a_1 + \frac{7}{4}}{b_1 - \frac{7}{4}}, \dfrac{b_1 - 1}{a_1 + 1}\right\}$为仅与 a_1, b_1 有关的固定常数. 由此立即可得要证之结论成立.

8・65　从给定的四个整数 a_1, b_1, c_1, d_1 出发,对一切 $n \in N$,定义

$$a_{n+1} = | a_n - b_n |,$$

$$b_{n+1} = | b_n - c_n |,$$

$$c_{n+1} = | c_n - d_n |,$$

$$d_{n+1} = | d_n - a_n |.$$

求证:存在 $k \in N$,使得

$$a_k = b_k = c_k = d_k = 0.$$

(前联邦德国数学奥林匹克,1988 年)

[证]　令 $M_n = \max\{| a_n |, | b_n |, | c_n |, | d_n |\}$,则 M_n 是非负整数,且由递推关系易知

$$M_{n+1} \leqslant M_n, n = 1, 2, \cdots$$

由此可知,存在自然数 k,使得

$$M_k = M_{k+1} = M_{k+2} = \cdots \qquad ①$$

记 $M = M_k$,以下证 $M = 0$,若不然,则 $M > 0$. 由于当 $n = k + 1$ 时,a_n, b_n, c_n, d_n 均为非负整数,所以利用递推关系和 ① 可推出,a_n, b_n, c_n, d_n 中至少有一个为 M,且与其相邻的两数中至少有一个为 0. 由于每次都出现 0,从而 a_n, b_n, c_n, d_n 中至少有两个相邻的数相同. 对于 $n = k + 1$,由循环对称性,不妨设 $a_{k+1} = M$,由以上证明可知$(a_{k+1}, b_{k+1}, c_{k+1}, d_{k+1})$只可能为以下六种形式:

$(M,0,0,d)$,　$(M,0,c,c)$,　$(M,0,c,M)$,　$(M,M,c,0)$,
$(M,b,b,0)$,　$(M,b,0,0)$,

其中 $0 \leqslant b, c, d, \leqslant M$. 若

$$(a_{k+1}, b_{k+1}, c_{k+1}, d_{k+1}) = (M,0,0,d),$$

则

$$(a_{k+2}, b_{k+2}, c_{k+2}, d_{k+2}) = (M,0,d,M - d)$$

由于$(M,0,d,M - d)$中有相邻两数取值相同,则 $d = 0$ 或 $M = 2d$.

如果 $d=0$,则

$$(a_{k+3},b_{k+3},c_{k+3},d_{k+3})=(M,0,M,0).$$

如果 $M=2d$,则 $d>0$,且

$$(a_{k+3},b_{k+3},c_{k+3},d_{k+3})=(M,d,0,d).$$

无论何种情况 $(a_{k+3},b_{k+3},c_{k+3},d_{k+3})$ 中都没有取值相同的相邻两项,引出矛盾!当 $(a_{k+1},b_{k+1},c_{k+1},d_{k+1})$ 取其他五种形式时,同样也引出矛盾.于是 $M=M_k=0$,即

$$a_k=b_k=c_k=d_k=0.$$

8·66　设 $a_0=1994$,且

$$a_{n+1}=\frac{a_n^2}{a_n+1},n=0,1,2,\cdots$$

求证:$1994-n=[a_n],0\leqslant n\leqslant 998$.

(第35届国际数学奥林匹克预选题,1994年)

[证]　显然有

$$0<a_{n+1}<a_n,n=0,1,2,\cdots$$

且　$$a_{n+1}=a_n-1+\frac{1}{a_n+1}.$$

从而对于 $n=0,1,2,\cdots$

$$a_{n+1}>a_n-1>a_{n-1}-2>\cdots>a_0-(n+1).$$

注意到 $a_0=1994$,则对任何非负整数 n 有

$$1994-n\leqslant a_n. \qquad ①$$

另一方面,当 $0\leqslant n\leqslant 997$,则由 ① 可知

$$a_n>1994-997=997,$$

从而

$$a_{n+1}=a_n-1+\frac{1}{a_n+1}<a_n-1+\frac{1}{998}.$$

由此递推可知对于 $0\leqslant n\leqslant 998$ 有

$$a_n<a_0-n+1=1994-n+1. \qquad ②$$

综合 ① 和 ② 可得

$$1994-n=[a_n],0\leqslant n\leqslant 998.$$

8·67　求证:从任何实数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中可选出一些数满足下述三个条件:

(1) 不接连选三个数;

(2) 从每三个相邻的数中至少选一个;

(3) 所选的所有数之和的绝对值不小于

$$\frac{1}{6}(|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|).$$

(第 16 届全苏数学奥林匹克,1982 年)

[证] 不妨设 $a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant 0$,从而

$$\sum_{a_k\geqslant 0}a_k\geqslant\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}|a_i|. \quad ①$$

对于 $i,k\in\{0,1,2\}$ 且 $i\neq k$,令

$$M_{ik}=\{a_l\mid l\equiv i(\mathrm{mod}\ 3)\text{ 或 }l\equiv k(\mathrm{mod}\ 3)\text{ 且 }a_l\geqslant 0\}$$

这样就把 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 分为六组(二组之间可以有公共的数). 显然选任何一组的数满足条件(1) 和(2). 又六组所有数之和 S 为

$$2\sum_{l=1}^{n}a_l+2\sum_{al>0}a_l$$

由 $\sum\limits_{l=1}^{n}a_l\geqslant 0$ 和 ① 可得

$$S\geqslant\sum_{l=1}^{n}|a_l|.$$

利用抽屉原理可知存在 $i,k\in\{0,1,2\}$ 且 $i\neq k$,使得 M_{ik} 中数之和 $\geqslant\frac{1}{6}(|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|)$. 于是选此 M_{ik} 中的数就满足所要求之条件(1),(2) 和(3).

8·68 设 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 是实数列且对任何 m 和 n 都有

$$|a_m+a_n-a_{m+n}|\leqslant\frac{1}{m+n}.$$

求证:$\{a_k\}$ 是等差数列.

(列宁格勒数学奥林匹克,1989 年)

[证] 取 $m=1$,则由假设可知

$$|(a_{n+1}-a_n)-a_1|\leqslant\frac{1}{n+1},n=1,2,3,\cdots$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=a_1$.

取 $m=2$,由 $\quad |(a_{n+2}-a_n)-a_2|\leqslant\dfrac{1}{n+2},n=1,2,3,\cdots$

可得 $\quad \lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+2}-a_n)=a_2.$

又
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(a_{n+2}-a_n)&=\lim_{n\to\infty}[(a_{n+2}-a_{n+1})+(a_{n+1}-a_n)]\\&=\lim_{n\to\infty}(a_{n+2}-a_{n+1})+\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)\\&=2a_1,\end{aligned}$$

从而 $a_2=2a_1$.一般地,对任何固定的自然数 m,由假设可得

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+m}-a_n)=a_m,$$

另一方面利用 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=a_1$ 能推得

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+m}-a_n)=ma_1,$$

于是我们有 $\quad a_m=ma_1,m=1,2,3,\cdots$

所以结论成立.

8·69 设 $x_1,x_2,x_3,\cdots$ 为非零实数列.求证:当且仅当对每一个 $n\geqslant 2$,

$$\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}+\cdots+\frac{1}{x_{n-1}x_n}=\frac{n-1}{x_1x_n}$$

都成立时,该数列为等差数列.

(加拿大国家集训队训练题,1989年)

[证] 设 $x_1,x_2,x_3,\cdots$ 是等差数列,其公差为 d,不妨设 $d\neq 0$.由于对每一个 $k\in N$ 有

$$\frac{1}{x_kx_{k+1}}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{x_k}-\frac{1}{x_{k+1}}\right),$$

所以对于 $n\geqslant 2$ 有

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{x_kx_{k+1}}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_n}\right)=\frac{n-1}{x_1x_n}.$$

反之,设对所有 $n\geqslant 2$ 都有

$$\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}+\cdots+\frac{1}{x_{n-1}x_n}=\frac{n-1}{x_1x_n}. \qquad ①$$

设 $d=x_2-x_1$,用归纳法可证

$$x_n=x_1+(n-1)d,n=2,3,4,\cdots \qquad ②$$

设当 $n=k$ 时,② 成立.由 ① 可得

$$\frac{k-1}{x_1x_k}+\frac{1}{x_kx_{k+1}}=\frac{k}{x_1x_{k+1}}.$$

由归纳假设 $x_k = x_1 + (k-1)d$,

于是有 $$\frac{k-1}{x_1}+\frac{1}{x_{k+1}}=\frac{k[x_1+(k-1)d]}{x_1x_{k+1}},$$

从而 $$\frac{k-1}{x_1}-\frac{k-1}{x_{k+1}}=\frac{k(k-1)d}{x_1x_{k+1}}.$$

由此可得

$$x_{k+1}-x_1=kd,$$

即 $n = k+1$ 时,② 也成立.所以 $x_1,x_2,x_3,\cdots$ 是等差数列.

8・70 当 n 取遍所有自然数时,求证:除去数列 $a_n = 3n^2-2n$ 的项,

$$f(n)=\left[n+\sqrt{\frac{n}{3}}+\frac{1}{2}\right]$$

取遍所有其余的自然数.

(第 29 届国际数学奥林匹克预选题,1988 年)

[证] 显然 $f(n) = n + k_n, n = 1,2,3,\cdots$ 其中 $k_n = \left[\sqrt{\frac{n}{3}}+\frac{1}{2}\right]$.由于

$$2>\sqrt{\frac{n+1}{3}}+\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{n}{3}}-\frac{1}{2}+1>k_{n+1}-k_n\geqslant 0,$$

从而 $\{k_n\}$ 为不减序列且取遍所有自然数.对任意自然数 k,令

$$n=\max\{m\mid k_m=k\},$$

等价于 $$\sqrt{\frac{n+1}{3}}+\frac{1}{2}\geqslant k+1>\sqrt{\frac{n}{3}}+\frac{1}{2},$$

从而 $$n+1\geqslant 3k^2+3k+\frac{3}{4}>n,$$

即 $$n=3k^2+3k. \qquad ①$$

由 $n = \max\{m \mid k_m = k\}$ 可知

$$f(n)=n+k, f(n+1)=n+k+2,$$

且若自然数 n 不满足 ①,则

$$f(n+1)-f(n)=1.$$

由以上结果及 $f(1) = 2$ 可得,当 n 取遍自然数时,除去数列

$$a_1 = 1, a_{k+1} = 3k^2 + 3k + k + 1 = 3(k+1)^2 - 2(k+1),$$
$$k = 1,2,3,\cdots$$

代数卷

$f(n)$ 取遍所有其余的自然数,即命题得证.

8·71 设 $F_1 = F_2 = 1$,

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, n = 2,3,4,\cdots$$

$L_1 = 1, L_2 = 3$,且

$$L_{n+1} = L_n + L_{n-1}, n = 2,3,4,\cdots$$

求证:对任意自然数 n 和 p 有

$$\left(\frac{L_n + \sqrt{5}F_n}{2}\right)^p = \frac{L_{np} + \sqrt{5}F_{np}}{2}.$$

(第 5 届友谊杯国际数学竞赛,1991 年)

[证] 由于递推关系的特征方程

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

有两个不同实根 $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$,所以根据两个数列的初始条件易知,对于 $n = 1,2,3,\cdots$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$$

$$L_n = \alpha^n + \beta^n.$$

从而 $$\frac{1}{2}(L_n + \sqrt{5}F_n) = \alpha^n, n = 1,2,\cdots$$

由此立即可得要证之等式成立.

8·72 已知整数列 $\{a_n\}$ 满足:$a_1 = 1, a_2 = 2$,且

$$a_{n+2} = \begin{cases} 5a_{n+1} - 3a_n, & a_n \cdot a_{n+1} \text{ 为偶数}, \\ a_{n+1} - a_n, & a_n \cdot a_{n+1} \text{ 为奇数}, \end{cases} \quad n = 1,2,3,\cdots$$

求证:

(1) $\{a_n\}$ 中既有无穷多项为正,又有无穷多项为负.

(2) 若 $n = 2^k - 1 (k = 2,3,4,\cdots)$,则 $7 \mid a_n$.

(加拿大国家集训队训练题,1988 年)

[证] 由递推公式可得

$$a_{n+2} \equiv a_{n+1} - a_n \pmod 2, n = 1,2,3,\cdots$$

由此用归纳法易知：当 $n\equiv 0,1(\mathrm{mod}\ 3)$ 时，a_n 是奇数，当 $n\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3)$ 时，a_n 是偶数. 记 $a_{3n}=\alpha, a_{3n+1}=\beta$，则 α,β 均为奇数，且

$$a_{3n+2}=\beta-\alpha, a_{3n+3}=2\beta-5\alpha, a_{3n+4}=7\beta-22\alpha,$$

$$a_{3n+5}=5\beta-17\alpha, a_{3n+6}=4\beta-19\alpha.$$

记 $v_n=a_{3n}$，则 $u_n=\alpha, u_{n+1}=a_{3n+3}=2\beta-5\alpha, u_{n+2}=a_{3n+6}=4\beta-19\alpha$. 消去 α,β 后可得

$$v_{n+2}=2v_{n+1}-9v_n, n=1,2,3,\cdots$$

若记 $v_n=a_{3n+1}, w_n=a_{3n+2}$，用同样的方法可得到相同的递推公式

$$v_{n+2}=2v_{n+1}-9v_n, n=0,1,2,\cdots$$

$$w_{n+2}=2w_{n+1}-9w_n, n=0,1,2,\cdots$$

(1) 由以上证明可知 $\{u_n\}$ 是奇数列且

$$u_{n+2}=2u_{n+1}-9u_n=-(5u_n+18u_{n-1}).$$

其中 $n=2,3,4,\cdots$ 于是数列 $\{u_n\}$ 既不可能从某项起全为正，也不可能从某项起全为负.

(2) 设整数列 $\{x_n\}$ 满足递推公式

$$x_{n+2}=2x_{n+1}-9x_n,$$

则 $$x_{n+2}\equiv 2(x_{n+1}-x_n)(\mathrm{mod}\ 7).$$

若 $7\mid x_n$，即 $x_n\equiv 0(\mathrm{mod}\ 7)$，则 $x_{n+2}\equiv 2x_{n+1}(\mathrm{mod}\ 7)$.

由于 $$x_{n+3}\equiv 2x_{n+2}-2x_{n+1}\equiv x_{n+2}+(x_{n+2}-2x_{n+1})(\mathrm{mod}\ 7),$$

所以 $$x_{n+4}\equiv 2(x_{n+3}-x_{n+2})\equiv 0(\mathrm{mod}\ 7)$$，即 $7\mid x_{n+4}$.

运用于数列 $\{a_n\}$ 可得

$$7\mid a_n \Rightarrow 7\mid a_{n+12}, n=1,2,3,\cdots$$

$\{a_n\}$ 中前 12 项被 7 除所得余数排为

$$1,2,0,1,1,2,0,5,4,5,1,4.$$

于是若 $n=3+12m$，或 $n=7+12m, m=0,1,2,\cdots$ 则

$$7\mid a_n.$$

如果 $n=2^k-1, k\geqslant 2$ 为整数. 显然 $n\not\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3)$. 若 $n\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3)$，则 $3\mid n-3$，且

$$4\mid n-3=2^k-4=4(2^{k-2}-1),$$

从而 $12\mid n-3$. 若 $n\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$，则 $k\geqslant 3$，且

$$3\mid n-7, 4\mid n-7=8(2^{k-3}-1),$$

所以$12 \mid n-7$.总之n或者可表示为$3+12m$,或者可表示为$7+12m$,于是得到$7 \mid a_n$.

8·73　数列$\{x_n \mid n \in N\}$由下述公式定义:

$$x_1=2, nx_n=2(2n-1)x_{n-1}, n=2,3,\cdots$$

求证:对于每个正整数n,x_n是一个整数.

（爱尔兰数学奥林匹克,1994年）

[证]　由已知条件可得

$$2x_2=6x_1,\quad x_2=6=C_4^2;$$

$$3x_3=10x_2,\quad x_3=20=C_6^3.$$

设　$x_k=C_{2k}^k$

则$n=k+1$时,有

$$(k+1)\cdot x_{k+1}=2(2k+1)\cdot x_{2k},$$

即

$$\begin{aligned}x_{k+1}&=\frac{2(2k+1)}{k+1}\cdot C_{2k}^k\\&=\frac{(2k+2)(2k+1)}{(k+1)^2}\cdot\frac{2k!}{k!k!}\\&=\frac{(2k+2)!}{(k+1)!(k+1)!}\\&=C_{2k+2}^{k+1}\end{aligned}$$

因此,对每个正整数n,$x_n=C_{2n}^n$是一个整数.

8·74　求下列数列最小项的值:

$$a_1=1993^{1994^{1995}}, a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{2}a_n, & \text{如果 } a_n \text{ 是偶数},\\ a_n+7, & \text{如果 } a_n \text{ 是奇数}.\end{cases}$$

（罗马尼亚国家队选拔考试,1994年）

[解]　显然,数列的所有项都是正整数.

由于当n是偶数时,

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n<a_n,$$

因此,数列的最小项必为奇数.

设数列的最小项为a_p,则a_p为奇数,且

$$a_{p+1}=a_p+7,$$

$$a_{p+2}=\frac{1}{2}a_{p+1}=\frac{1}{2}(a_p+7).$$

由 a_p 的最小性得

$$a_p \leqslant a_{p+2},$$

即
$$a_p \leqslant \frac{1}{2}(a_p+7),$$

$$a_p \leqslant 7.$$

注意到 a_p 是奇数.因此 a_p 只有 4 个可能的值:

1,3,5,7.

由于

$$1994 \equiv -1 (\bmod 3),$$

因此

$$1994^{1995} \equiv (-1)^{1995} = -1 \equiv 2 (\bmod 3),$$

即存在正整数 t,使得

$$1994^{1995} = 3t+2,$$

因为 1994 是偶数,所以 t 是偶数,设 $t=2s$,得

$$1994^{1995} = 6s+2,$$

这里 s 是正整数.

于是,我们有

$$\begin{aligned} a_1 &= 1993^{1994^{1995}} = 1993^{6s+2} \\ &= (1993^6)^s \cdot 1993^2 \\ &\equiv 1^s \cdot (-2)^2 (\bmod 7) \\ &\equiv 4 (\bmod 7) \end{aligned}$$

由 $a_1 \equiv 4(\bmod 7)$ 可知,这个数列的各项除以 7 所得的余数只可能是 4,2,1 三种.因此 a_p 不可能等于 3,5,7,数列的最小项的值

$$a_p = 1.$$

8·75　求证:由 $a_n = 3^n - 2^n$ 定义的数列 $\{a_n \mid n \in N\}$ 不包含几何级数的连续三项.

(罗马尼亚国家队选拔考试,1994 年)

[证]　由于

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (3^{n+1} - 2^{n+1}) - (3^n - 2^n) \\ &= 2 \cdot 3^n - 2^n > 0, \end{aligned}$$

所以,对任意正整数 n,有

$$a_{n+1} > a_n.$$

当 $1 \leqslant m < n, m, n \in N$ 时,我们又有

$$\begin{aligned} a_n^2 - a_m a_{2n-m} &= (3^n - 2^n)^2 - (3^m - 2^m)(3^{2n-m} - 2^{2n-m}) \\ &= 2^m 3^m (3^{2(n-m)} + 2^{2(n-m)} - 2^{n+1-m} \cdot 3^{n-m}) \\ &= 2^m 3^m (3^{n-m} - 2^{n-m})^2 \\ &> 0, \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} a_m a_{2n-m+1} - a_n^2 &= (3^m - 2^m)(3^{2n-m+1} - 2^{2n-m+1}) - (3^n - 2^n)^2 \\ &= 2 \cdot 3^{2n-m+1}(3^{m-1} - 2^{m-1}) + 2^{2n-m+1}(2^{m-1} - 3^{m-1}) - 3^{m-1} \cdot 2^{2n-m+2} + 2^{n+1} \cdot 3^n \\ &= (3^{m-1} - 2^{m-1})(2 \cdot 3^{2n-m+1} - 2^{2n-m+1}) + 2^{n+1} \cdot 3^{m-1}(3^{n-m+1} - 2^{n-m+1}) \\ &> 0. \end{aligned}$$

即

$$a_m \cdot a_{2n-m} < a_n^2 < a_m \cdot a_{2n-m+1}.$$

由数列的单调严格递增性可知,不存在正整数 k,使得

$$a_n^2 = a_m \cdot a_k.$$

故原命题得证.

8·76　证明:所有形如10017,100117,1001117,… 的整数都可被 53 整除.

(第 58 届莫斯科数学奥林匹克,1996 年)

[解]　$10017 = 53 \times 189$,可见第一项是 53 的倍数.

设这列数的第 n 项为 $a_n, n \in N$. 则

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= 100\underbrace{11\cdots1}_{n+1\text{个}1}7 - 100\underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}1}7 \\ &= 901\underbrace{00\cdots0}_{n+1\text{个}0} \\ &= 53 \times 17 \times 10^{n+1}. \end{aligned}$$

这说明任意相邻两项之差都是 53 的倍数. 因此,这列数的每一项都是

53 的倍数.

8・77 一个数列的前 5 项是 1,2,3,4,5,从第六项开始,每项比前面所有项的乘积少 1.证明:此数列的前 70 项的乘积恰是它们的平方和.

(世界城市际数学联赛,1995 年)

[证] 设数列的第 n 项为 a_n.那么

$$a_6 = 119,$$

$$a_{n+1} = a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n - 1 = a_n(a_n + 1) - 1, n \geqslant 6.$$

即 $$a_{n+1} - a_n + 1 = a_n^2, n \geqslant 6.$$

于是我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{70} a_n^2 &= 55 + \sum_{n=6}^{70} a_n^2 \\ &= 55 + \sum_{n=6}^{70}(a_{n+1} - a_n + 1) \\ &= 55 + a_{71} - a_6 + 65 \\ &= 55 + a_1 \cdot a_2\cdots a_{70} - 1 - 119 + 65 \\ &= a_1a_2\cdots a_{70}.\end{aligned}$$

故命题成立.

8・78 由能被 3 整除且比完全平方数小 1 的整数组成的递增数列 3,15,24,48,… 这个数列的第 1994 项除以 1000 的余数是多少?

(第 12 届美国数学邀请赛,1994 年)

[解] 一个比完全平方数小 1 的数具有形式 $n^2 - 1 = (n-1)(n+1), n = 2,3,\cdots$

当且仅当 n 不能被 3 整除时,$n^2 - 1$ 是 3 的倍数.所以这个数列的第 $2k-1$ 项和第 $2k$ 项分别是

$$(3k-1)^2 - 1 \text{ 和} (3k+1)^2 - 1.$$

从而这个数列的第 1994 项是

$$\begin{aligned}(3 \cdot 997 + 1)^2 - 1 &= (3000 - 8)^2 - 1 \\ &= 3000^2 - 16 \cdot 3000 + 63,\end{aligned}$$

它除以 1000 的余数是 63.

8・79 正数数列 $\{a_n\}$ 满足:

$$a_1 = a_2 = 1, a_3 = 997, a_{n+3} = \frac{1993 + a_{n+2} \cdot a_{n+1}}{a_n}, n \in N.$$

试证所有 a_n 均为整数.

（第 3 届澳门数学奥林匹克,1993 年）

［证］ 不妨设 $a_0 = 2$. 于是当 $n = 0$ 时,仍有

$$a_{n+3} = \frac{1993 + a_{n+2} \cdot a_{n+1}}{a_n}.$$

由已知,得

$$a_{n+3} \cdot a_n = 1993 + a_{n+2} \cdot a_{n+1}, \quad ①$$

以 $n+1$ 换 n 得

$$a_{n+4} \cdot a_{n+1} = 1993 + a_{n+3} \cdot a_{n+2}, \quad ②$$

① - ② 得

$$a_{n+3} \cdot a_n - a_{n+4} \cdot a_{n+1} = a_{n+2} \cdot a_{n+1} - a_{n+3} \cdot a_{n+2},$$

即
$$\frac{a_{n+4} + a_{n+2}}{a_{n+2} + a_n} = \frac{a_{n+3}}{a_{n+1}}. \quad ③$$

在 ③ 式中依次令 $n = 0, 2, \cdots, 2m-2$,相乘得

$$\frac{a_{2m+2} + a_{2m}}{a_2 + a_0} = \frac{a_{2m+1}}{a_1},$$

即
$$a_{2m+2} + a_{2m} = 3a_{2m+1}. \quad ④$$

在 ③ 式中依次令 $n = 1, 3, \cdots, 2m-1$,相乘得

$$\frac{a_{2m+3} + a_{2m+1}}{a_3 + a_1} = \frac{a_{2m+2}}{a_2},$$

即
$$a_{2m+3} + a_{2m+1} = 998a_{2m}. \quad ⑤$$

由已知,当 $n = 1, 2, 3$ 时,a_n 为整数.

设 $n = 2k, 2k+1$ 时,a_n 为整数,于是由 ④ 可知

$$a_{2k+2} = 3a_{2k+1} - a_{2k}$$

为整数;由 ⑤ 可知

$$a_{2k+3} = 998a_{2k} - a_{2k+1}$$

为整数. 由数学归纳法原理可知,对于任意自然数 n,a_n 均为整数.

8·80 已知数列 $\{a_n\}(n = 1, 2, \cdots)$ 中,$a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 6$,且当 $n > 3$ 时,

$$a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2} - 2a_{n-3}.$$

试证:对 $n>3$ 的一切自然数有 $a_n>3\times 2^{n-2}$.

(中国河北省高中数学竞赛,1994年)

[证] 由递推关系得

$$a_3=6,a_4=13,a_5=27,a_6=56.$$

故猜想:当 $n>3$ 时,$a_n>2a_{n-1}$.

用数学归纳法证明猜想.

显然 $a_4>2a_3,a_5>2a_4$.

设 $a_k>2a_{k-1},a_{k-1}>2a_{k-2}$.则

$$\begin{aligned}a_{k+1}&=3a_k-a_{k-1}-2a_{k-2}\\&=2a_k+(a_k-a_{k-1})-2a_{k-2}\\&>2a_k+a_{k-1}-2a_{k-2}\\&>2a_k.\end{aligned}$$

由数学归纳法原理知,猜想得证,于是我们有

$$a_n>2a_{n-1}>2^2a_{n-2}>\cdots>2^{n-3}a_3=3\times 2^{n-2}.$$

8·81 设 $a_1,a_2,\cdots$ 与 $b_1,b_2,\cdots$ 是两个等差数列,它们的前 n 项之和分别为 A_n 与 B_n.已知对一切 $n\in N$,有

$$\frac{A_n}{B_n}=\frac{2n-1}{3n+1}.$$

试对一切 $n\in N$,写出 $\frac{a_n}{b_n}$ 的表达式.

(中国安徽省合肥市高中数学竞赛,1994年)

[解] 设 $a_1,a_2,\cdots$ 的公差为 d_1;$b_1,b_2,\cdots$ 的公差为 d_2.则

$$A_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d_1,$$

$$B_n=nb_1+\frac{n(n-1)}{2}d_2,$$

$$\frac{A_n}{B_n}=\frac{2a_1+(n-1)d_1}{2b_1+(n-1)d_2}.$$

由已知条件知,对一切 $n\in N$,有

$$\frac{2a_1+(n-1)d_1}{2b_1+(n-1)d_2}=\frac{2n-1}{3n+1}.\qquad ①$$

在①式中,令 $n=1$ 得

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{1}{4},\quad b_1=4a_1. \qquad ②$$

在①式中,令 $n\to+\infty$ 得

$$\frac{d_1}{d_2}=\frac{2}{3},d_2=\frac{3}{2}d_1. \qquad ③$$

在①式中,令 $n=2$ 得

$$\frac{2a_1+d_1}{2b_1+d_2}=\frac{3}{7}.$$

利用②和③将上式化为

$$\frac{2a_1+d_1}{8a_1+\frac{3}{2}d_1}=\frac{3}{7},$$

化简得 $d_1=4a_1$.

于是 $d_2=\frac{3}{2}d_1=6a_1$.

故

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{b_n}&=\frac{a_1+(n-1)d_1}{b_1+(n-1)d_2}\\&=\frac{a_1+(n-1)\cdot 4a_1}{4a_1+(n-1)\cdot 6a_1}\\&=\frac{1+4(n-1)}{4+6(n-1)}\\&=\frac{4n-3}{6n-2}.\end{aligned}$$

8・82 给定自然数序列 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 其中 a_1 不能被5整除,并且对于每个自然数 n,都有等式

$$a_{n+1}=a_n+b_n,$$

其中 b_n 是 a_n 的末位数.证明:该序列中有无限多项是2的方幂.

(第20届俄罗斯数学奥林匹克决赛,1994年)

[解] 由题设可知,$b_1\notin\{0,5\}$.所以 $b_2\in\{2,4,6,8\}$,从而推知:序列 $b_2,b_3,\cdots$ 以4为周期,且有以下形式:

……,2,4,8,6,2,4,8,6,…… 因此,对任何 $n>1$,都有

$$a_{n+4}=a_n+(2+4+8+6)=a_n+20;$$

对任何 $s>1$,都有

$$a_{n+4s} = a_n + 20s.$$

在序列的两项 $a_n = 10m+2$ 和 $a_{n+1} = 10m+4$ 中,至少有一项是 4 的倍数. 即存在 $a_{n_1} = 4l, l \in N$.
于是,我们就有

$$a_{n_1+4s} = 4l + 20s = 4(l+5s), s \in N.$$

注意到数列

$$2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, \cdots$$

中的各项被 5 除所得的余数构成一个周期数列

$$1,2,4,3,1,2,4,3,\cdots$$

由于 l 被 5 除所得余数只可能是 1,2,3,或 4,因此存在无穷多个 k 使得 $2^k \equiv l \pmod 5$,且 $2^k > l$. 令

$$S_k = \frac{2^k - l}{5} \in N,$$

则

$$a_{n_1} + 4s_k = 4(l+5s_k) = 4 \times 2^k = 2^{k+2}.$$

从而命题得证.

8·83　我们用 (m,n) 表示自然数 m 与 n 的最大公约数. 今知在以自然数为项的数列 $\{a_i\}$ 中,对任何 $i \neq j$,都有 $(a_i, a_j) = (i, j)$. 证明对一切 $i \in N$,都有 $a_i = i$.

(第 21 届俄罗斯数学奥林匹克决赛,1995 年)

[证]　由已知,

$$(a_i, a_{2i}) = (i, 2i) = i,$$

所以,对于任意自然数 i,a_i 都可以被 i 整除.

如果对某个自然数 i,有 $a_i > i$,那么由已知可得

$$(a_{a_i}, a_i) = (a_i, i) = i. \quad ①$$

由前面的证明可得:a_{a_i} 可被 a_i 整除,
从而有

$$(a_{a_i}, a_i) = a_i. \quad ②$$

由 ① 和 ② 得

$$a_i = i,$$

矛盾.

故对任意自然数 i,都有 $a_i \leqslant i$.

于是我们可得

$$a_i = i, i = 1,2,\cdots$$

第3节 存在性与构造

8·84 求证存在无穷有界数列 $\{x_n\}$,使得对任何不同的 m,k 有

$$|x_m - x_k| \geqslant \frac{1}{|m-k|}.$$

(第12届全苏数学奥林匹克,1978年)

[证] 任取自然数 $m > k$,记

$$p = m - k, q = [m\sqrt{2}] - [k\sqrt{2}].$$

显然 p 是自然数,q 为非负整数且

$$q < \sqrt{2}p + 1.$$

由此可得 $|p\sqrt{2} - q| = \dfrac{|2p^2 - q^2|}{p\sqrt{2} + q} > \dfrac{1}{2\sqrt{2}p + 1} > \dfrac{1}{4p}$.

令 $x_n = 4(n\sqrt{2} - [n\sqrt{2}]), n = 1,2,3,\cdots$ 显然 $|x_n| < 4$ 且对任何不同的 m,k,不妨设 $m > k$,有

$$|x_m - x_k| = 4|(m-k)\sqrt{2} - ([m\sqrt{2}] - [k\sqrt{2}])| > \frac{1}{|m-k|}.$$

所以 $\{x_n\}$ 满足所要之条件.

8·85 求证:存在惟一的整数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 使得

$$a_1 = 1, a_2 > 1, a_{n+1}^3 + 1 = a_n a_{n+2}, n = 1,2,3,\cdots$$

(英国数学奥林匹克,1978年)

[证] 惟一性.设数列 $\{a_n\}$ 满足题中所给的条件.对于自然数 k,若 $a_k > 0, a_{k+1} > 0$,则

$$a_{k+2} = \frac{a_{k+1}^3 + 1}{a_k} > 0.$$

由此用归纳法易知

$$a_n > 0, 对任意 n \in N.$$

由于 $a_3 = 1 + a_2^3$,所以

$$a_4=\frac{1+a_3^3}{a_2}=\frac{1+(1+a_2^3)^3}{a_2}=a_2^8+3a_2^5+3a_2^2+\frac{2}{a_2}.$$

因为 a_2,a_4 为整数,且 $a_2>1$,从而 $a_2=2$. 由于该数列的所有项都惟一地被 $a_1=1,a_2=2$ 所确定,所以满足条件的数列是惟一的.

存在性,只需证满足条件:$a_1=1,a_2=2,$

$$a_{n+2}=\frac{a_{n+1}^3+1}{a_n},n=1,2,3,\cdots$$

的数列每一项都是整数.事实上,容易验证

$$a_1=1,a_2=2,a_3=9,a_4=365.$$

对于 $n\geqslant 5$,设 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$ 都是整数,则

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{a_{n-1}^3+1}{a_{n-2}}=\frac{1}{a_{n-2}}\left[\left(\frac{a_{n-2}^3+1}{a_{n-3}}\right)^3+1\right]\\&=\frac{1}{a_{n-2}a_{n-3}^3}(a_{n-2}^9+3a_{n-2}^6+3a_{n-2}^3+1+a_{n-3}^3).\end{aligned}$$

因为$\frac{1}{a_{n-3}^3}(a_{n-2}^9+3a_{n-2}^6+3a_{n-2}^3+1+a_{n-3}^3)=a_{n-1}^3+1$是整数,所以 $S=a_{n-2}^9+3a_{n-2}^6+3a_{n-2}^3+1+a_{n-3}^3$ 能被 a_{n-3}^3 整除.又

$$\begin{aligned}\frac{S}{a_{n-2}}&=a_{n-2}^8+3a_{n-2}^5+3a_{n-2}^2+\frac{1+a_{n-3}^3}{a_{n-2}}\\&=a_{n-2}^8+3a_{n-2}^5+3a_{n-2}^2+a_{n-4},\end{aligned}$$

从而 S 也能被a_{n-2} 整除.由 a_{n-2},a_{n-3} 的最大公因数

$$(a_{n-2},a_{n-3})=\left(\frac{a_{n-3}^3+1}{a_{n-4}},a_{n-3}\right)\leqslant(a_{n-3}^3+1,a_{n-3})=1,$$

可知 S 能被$a_{n-2}a_{n-3}^3$ 整除,即 a_n 也是整数.

8・86　是否存在两个实数列$\{a_n\},\{b_n\}(n\in N)$,使得对于每一个 $n\in N$ 和$x\in(0,1)$都有

$$\frac{3}{2}\pi\leqslant a_n\leqslant b_n,\cos a_nx+\cos b_nx\geqslant-\frac{1}{n}?$$

(第 30 届国际数学奥林匹克候选题,1989 年)

[解]　如果存在满足所要条件的数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$,

由$0<\frac{\pi}{a_n}\leqslant\frac{2}{3}<1$可得

$$\cos\frac{b_n}{a_n}\pi \geqslant 1-\frac{1}{n}.$$

再由$\frac{b_n}{a_n}\pi \geqslant \pi$可知存在$k_n \in N$和$\varphi_n$使得

$$|\varphi_n| \leqslant \arccos\left(1-\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{\pi}{2}$$

且 $$\pi \leqslant \frac{b_n}{a_n}\pi = \varphi_n + 2k_n\pi. \quad ①$$

从①可得 $0<(2k_n-1)\pi<\frac{b_n}{a_n}\pi$,

从而 $$0<\frac{(2k_n-1)\pi}{b_n}<\frac{\pi}{a_n}\leqslant\frac{2}{3}<1.$$

于是对任意$n \in N$有

$$\cos\frac{a_n}{b_n}(2k_n-1)\pi \geqslant 1-\frac{1}{n}. \quad ②$$

①和②给出 $\cos\theta_n \geqslant 1-\frac{1}{n}$,对于任意$n \in N$,

其中 $$\theta_n = \frac{(2k_n-1)\pi^2}{\varphi_n+2k_n\pi}.$$

显然对于每一个$n \in N$都有

$$0<\frac{(2k_n-1)\pi}{(2k_n+1)}<\theta_n<\pi,$$

所以 $$\cos\frac{2k_n-1}{2k_n+1}\pi = \cos\left(1-\frac{2}{2k_n+1}\right)\pi \geqslant 1-\frac{1}{n}.$$

由于$k_n \in N$,从而

$$\frac{\pi}{3} \leqslant \left(1-\frac{2}{2k_n+1}\right)\pi, n=1,2,3,\cdots$$

于是对于任意$n \in N$有

$$\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3} \geqslant 1-\frac{1}{n},$$

矛盾!

以上证明了满足所要条件的数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$不存在.

8·87 已给n个正数$a_1,a_2,\cdots,a_n$和实数q,其中$0<q<1$.求n个实数$b_1,b_2,\cdots,b_n$满足

(1)$a_k < b_k, k = 1,2,\cdots,n$.

(2)$q < \frac{b_{k+1}}{b_k} < \frac{1}{q}, k = 1,2,\cdots,n$.

(3)$b_1 + b_2 + \cdots + b_n < \frac{1+q}{1-q}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$.

（第 15 届国际数学奥林匹克，1973 年）

[解] 令 $b_1 = a_1 + qa_2 + q^2a_3 + \cdots + q^{n-1}a_n$,

$b_2 = qa_1 + a_2 + qa_3 + q^2a_4 + \cdots + q^{n-2}a_n$,

$b_k = q^{k-1}a_1 + q^{k-2}a_2 + \cdots + qa_{k-1} + a_k + qa_{k+1} + \cdots + q^{n-k}a_n$

$b_n = q^{n-1}a_1 + q^{n-2}a_2 + \cdots + qa_{n-1} + a_n$.

显然(1) 成立且 $\sum_{k=1}^{n} b_k < (1 + 2q + \cdots + 2q^{n-1})\sum_{k=1}^{n} a_k < \frac{1+q}{1-q}\sum_{k=1}^{n} a_k$，即(3) 也成立. 由于

$$qb_k - b_{k+1} = (q^2-1)a_{k+1} + \cdots + (q^2-1)a_n < 0,$$

$$\frac{1}{q}b_k - b_{k+1} = q^{k-2}(1-q^2)a_1 + q^{k-3}(1-q^2)a_2 + \cdots + q^{-1}(1-q^2)a_k > 0,$$

所以(2) 成立.

8·88　是否存在实数 $a \in (0,1)$ 和无穷正数列 $\{a_n\}$，使得

$$1 + a_{n+1} \leqslant a_n + \frac{a}{n}a_n, n = 1,2,3,\cdots$$

（第 29 届国际数学奥林匹克候选题，1988 年）

[解] 不存在. 如果存在 $a \in (0,1)$ 及无穷正数列 $\{a_n\}$ 满足题设中的条件，则

$$a_n \geqslant \frac{n}{n+a}(1 + a_{n+1}) > \frac{n}{n+1}(1 + a_{n+1}), n = 1,2,3\cdots$$

于是可得对任何自然数 n 有

$$a_1 > \frac{1}{2}(1 + a_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}a_2 > \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1 + a_3)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}a_3 > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}(1 + a_4)$$

$$> \cdots > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} a_n.$$

由于 $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = +\infty,$$

从而引出矛盾!

8·89 对于具有如下性质的自然数列:末项是1969,而且每一项都大于它前一项的平方,求证:这种数列的数目少于1969个.

(第32届莫斯科数学奥林匹克,1969年)

[证] 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 具有题设的性质.当 $n = 1$ 时,仅有 $a_1 = 1969$ 一种情况.由于

$$44^2 < 1969 < 45^2,$$

所以当 $n = 2$ 时,$a_2 = 1969, 1 \leqslant a_1 \leqslant 44$,即仅有44种情况.若 $n = 3$,则 $a_3 = 1969, 2 \leqslant a_2 \leqslant 44, 1 \leqslant a_1 \leqslant 6$.从而有少于258种情况.当 $n = 4$ 时,显然 $a_4 = 1969, 5 \leqslant a_3 \leqslant 44, 2 \leqslant a_2 \leqslant 6, 1 \leqslant a_1 \leqslant 2$,所以情况少于400种.如果 $n = 5$,则 $a_5 = 1969, 26 \leqslant a_4 \leqslant 44, 5 \leqslant a_3 \leqslant 6$, $a_2 = 2, a_1 = 1$,情况少于38种.总之,这种数列的数目少于741个.

8·90 设非零实数列 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ 满足

$$x_n = \frac{x_{n-2}x_{n-1}}{2x_{n-2} - x_{n-1}}, n = 3,4,5,\cdots$$

求 x_1 和 x_2 应满足的充要条件,使得该数列有无穷多项为整数.

(第40届美国普特南数学竞赛,1979年)

[解] 由于

$$x_n = \frac{x_{n-2}x_{n-1}}{2x_{n-2} - x_{n-1}} = \frac{x_{n-2}}{2x_{n-2} - \dfrac{x_{n-3}x_{n-2}}{2x_{n-3} - x_{n-2}}} \cdot \frac{x_{n-3}x_{n-2}}{2x_{n-3} - x_{n-2}}$$

$$= \frac{x_{n-3}x_{n-2}}{3x_{n-3} - 2x_{n-2}},$$

从而用归纳法易证当 $n \geqslant 3$ 时有

$$x_n = \frac{x_1x_2}{(n-1)x_1 - (n-2)x_2} = \frac{x_1x_2}{n(x_1 - x_2) + 2x_2 - x_1}. \qquad ①$$

若 $x_1 = x_2$ 为非零整数,显然由 ① 得

$$x_n = x_1, n = 1,2,\cdots$$

即$\{x_n\}$的每一项均为非零整数.反之,设$\{x_n\}$有无穷多项为整数,由①显然可得$x_1 = x_2$,进一步可知$x_1 = x_2$为非零整数.

总之,非零数列$\{x_n\}$有无穷多项为整数的充分必要条件是$x_1 = x_2$为非零整数.

8·91 任意给定自然数a_0,按以下规则构造自然数列:a_0为首项.若a_{n-1}已构造好.当$a_{n-1} \leqslant 5$时,构造过程即告结束,此时得到一个n项的数列.当$a_{n-1} > 5$但其末位数不超过5时,把末位数画去即得a_n.当a_n的末位数大于5时,则令$a_n = 9a_{n-1}$.问由此构造的数列$\{a_n\}$是否可能为无穷数列?

(第25届全苏数学奥林匹克,1991年)

[解] 不可能.设所构造的数列$\{a_n\}$是无穷自然数列,则当a_n的末位数$\leqslant 5$时,

$$10a_{n+1} = a_n - a,$$

其中a是a_n的末位数.由此可得$a_{n+1} < a_n$.若a_n的末位数> 5,由$a_{n+1} = 9a_n = 10a_n - a_n$可知$a_{n+1}$的末位数$\leqslant 5$,于是有

$$10a_{n+2} = a_{n+1} - b = 9a_n - b,$$

其中b是a_{n+1}的末位数.由此立即得到$a_{n+2} < a_n$.以上证明给出$\{a_n\}$存在一个严格递降的无穷子序列,这与$\{a_n\}$为自然数列矛盾!

8·92 三元数组(x_n, y_n, z_n), $n = 1,2,3,\cdots$按如下法则构造:

$$x_1 = 2, y_1 = 4, z_1 = \frac{6}{7},$$

$$x_{n+1} = \frac{2x_n}{x_n^2 - 1}, y_{n+1} = \frac{2y_n}{y_n^2 - 1}, z_{n+1} = \frac{2z_n}{z_n^2 - 1}, n \geqslant 1.$$

(1) 求证:上述构造过程可无限进行下去.

(2) 是否存在自然数k,使得$x_k + y_k + z_k = 0$?

(第16届全俄数学奥林匹克,1990年)

[解] (1) 显然$x_2 = \frac{4}{3}, y_2 = \frac{8}{15}, z_2 = -\frac{84}{13}$.如果$(x_k, y_k, z_k)$, $k = 1,2,\cdots,n$都已构造好,其中$n \geqslant 2$.显然所构造的数全是有理数,所以不满足二次方程$x^2 - 2x - 1 = 0$.由此可知

$$|x_n| = \left|\frac{2x_{n-1}}{x_{n-1}^2 - 1}\right| \neq 1,$$

$$|y_n| = \left|\frac{2y_{n-1}}{y_{n-1}^2 - 1}\right| \neq 1,$$

$$|z_n| = \left|\frac{2z_{n-1}}{z_{n-1}^2 - 1}\right| \neq 1,$$

于是可由递推公式构造($x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}$).由此可知构造过程可无限进行下去.

(2)首先用归纳法证明:对任何自然数 n 有

$$x_n + y_n + z_n = x_n y_n z_n. \qquad ①$$

事实上,当 $n = 1$ 时,显然①成立.设当 $n = k$ 时,①成立.若 $n = k + 1$,则 $x_{k+1} + y_{k+1} + z_{k+1} =$

$$\frac{2x_k(y_k^2 - 1)(z_k^2 - 1) + 2y_k(z_k^2 - 1)(x_k^2 - 1) + 2z_k(x_k^2 - 1)(y_k^2 - 1)}{(x_k^2 - 1)(y_k^2 - 1)(z_k^2 - 1)}$$

$$= 2\frac{x_k y_k z_k(y_k z_k + z_k x_k + x_k y_k) - x_k y_k^2 - x_k z_k^2 -}{(x_k^2 - 1)(y_k^2 - 1)(z_k^2 - 1)}$$

$$\underline{y_k z_k^2 - y_k x_k^2 - z_k x_k^2 - z_k y_k^2 + x_k + y_k + z_k}$$

由归纳假设可知

$$x_k^2 y_k + x y_k^2 = x_k y_k(x_k + y_k) = x_k y_k z_k(x_k y_k - 1),$$

$$y_k^2 z_k + y_k z_k^2 = y_k z_k(y_k + z_k) = x_k y_k z_k(y_k z_k - 1),$$

$$z_k^2 x_k + z_k x_k^2 = z_k x_k(z_k + x_k) = x_k y_k z_k(z_k x_k - 1).$$

于是我们有

$$x_{k+1} + y_{k+1} + z_{k+1} = 2 \cdot \frac{3x_k y_k z_k + x_k + y_k + z_k}{(x_k^2 - 1)(y_k^2 - 1)(z_k^2 - 1)}$$

$$= \frac{8x_k y_k z_k}{(x_k^2 - 1)(y_k^2 - 1)(z_k^2 - 1)}$$

$$= x_{k+1} y_{k+1} z_{k+1},$$

即对于 $n = k + 1$,①也成立.

如果存在自然数 k,使得 $x_k + y_k + z_k = 0$,则从①可推得 x_k, y_k, z_k 中至少有一个为0.若 $x_k = 0$,利用递推公式可得 $x_1 = 0$,矛盾!同理,从 $y_k = 0$ 或者 $z_k = 0$ 也可引出矛盾.于是不存在使得 $x_k + y_k + z_k$

$=0$ 的自然数 k.

8·93　求所有等差数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,使得它的每一项均为整数,且

$$a_1^3+a_2^3+a_3^3=a_4^3,$$
$$a_1+a_2+\cdots+a_n=500.$$

(第1届友谊杯国际数学竞赛,1987年)

[解]　记数列的公差为 d,由题设条件可得

$$a_1^3+(a_1+d)^3+(a_1+2d)^3=(a_1+3d)^3, \quad ①$$

$$na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=500, \quad ②$$

其中 a_1,d 为整数,n 为自然数且 $n\geqslant 4$.由①经简单计算可知

$$a_1^3=6a_1d^2+9d^3,$$

即 $$(a_1-3d)(a_1^2+3da_1+3d^2)=0.$$

若 $a_1^2+3da_1+3d^2=0$,则 $a_1=d=0$,与②矛盾!于是只能有

$$a_1=3d. \quad ③$$

将③代入②得

$$\left(3n+\frac{1}{2}n(n-1)\right)d=500. \quad ④$$

由此可知 $3n+\frac{1}{2}n(n-1)$ 是500的一个因子,其中 $n\geqslant 4$ 为自然数.

任取自然数 m,若有自然数 $n\geqslant 4$ 满足 $3n+\frac{1}{2}n(n-1)=m$,即

$$n^2+5n-2m=0,$$

则 $25+8m$ 为完全平方数,且 $25+8m\geqslant 13^2=169$,即 $m\geqslant 18$.再由 m 是500的因子,经简单计算易知 $m=25$ 或 250.由④和③可知

$$n=5,a_1=60,d=20 \text{ 或者 } n=20,a_1=6,d=2.$$

再经验算易知以下两个数列

60,80,100,120,140,

6,8,10,12,…,44,

为所求的全部数列.

8·94　求证:任何四个相邻的二项式系数 $C_n^r,C_n^{r+1},C_n^{r+2},C_n^{r+3}$,

不能构成等差数列,其中 n,r 为正整数,且 $n\geqslant r+3$.

(第33届美国普特南数学竞赛,1972年)

[证] 若有 $n,r(n\geqslant r+3)$,使得 $C_n^r,C_n^{r+1},C_n^{r+2},C_n^{r+3}$,成等差数列,则

$$2C_n^{r+1}=C_n^r+C_n^{r+2},$$
$$2C_n^{r+2}=C_n^{r+1}+C_n^{r+3},$$

即 $$2\frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}+\frac{n!}{(r+2)!(n-r-2)!},$$

$$2\frac{n!}{(r+2)!(n-r-2)!}=\frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!}+\frac{n!}{(r+3)!(n-r-3)!}.$$

所以有

$$\frac{2}{(r+1)(n-r-1)}=\frac{1}{(n-r-1)(n-r)}+\frac{1}{(r+1)(r+2)},$$

$$\frac{2}{(r+2)(n-r-2)}=\frac{1}{(n-r-2)(n-r-1)}+\frac{1}{(r+2)(r+3)}.$$

经整理得到

$$n^2-(4r+5)n+4r(r+2)+2=0,$$
$$n^2-(4r+9)n+4(r+1)(r+3)+2=0.$$

两式相减可得 $n=2r+3$,于是 $C_{2r+3}^r,C_{2r+3}^{r+1},C_{2r+3}^{r+2},C_{2r+3}^{r+3}$ 成等差数列.由二项式系数的性质可知

$$C_{2r+3}^r=C_{2r+3}^{r+3}<C_{2r+3}^{r+1}=C_{2r+3}^{r+2},$$

这与等差数列性质矛盾!从而要证之结论成立.

8·95 求满足以下条件的数列的个数:项数为 n,每一项为0或1或2,并且0不能为2的前一项也不能为2的后一项.

(加拿大国家集训队训练题,1988年)

[解] 设在所述数列中,以0为末项为 a_n 个,以1为末项的有 b_n 个,以2为末项的有 c_n 个,显然有 $a_1=b_1=c_1=1$.易知以下递推关系成立:

$$a_{n+1}=a_n+b_n,$$
$$b_{n+1}=a_n+b_n+c_n,$$
$$c_{n+1}=b_n+c_n.$$

于是当 $n\geqslant 2$ 时有

$$a_{n+1}+b_{n+1}+c_{n+1}=2a_n+3b_n+2c_n$$
$$=2(a_n+b_n+c_n)+(a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1}).$$

由 $a_1=b_1=c_1=1$ 可推出

$$a_2=2,b_2=3,c_2=2.$$

设所求数列的个数为 x_n,显然

$$x_n=a_n+b_n+c_n.$$

由上一段的结果可知

$$x_1=3,x_2=7,x_{n+1}=2x_n+x_{n-1},n=2,3,4,\cdots$$

从而 $$x_n=\frac{1}{2}[(1+\sqrt{2})^{n+1}+(1-\sqrt{2})^{n+1}].$$

8・96 求满足以下两个条件的一切自然数列 $a_1,a_2,a_3,\cdots$

(1) $a_n\leqslant n\sqrt{n},n=1,2,3,\cdots$

(2) 对任意不同的 m,n 有

$$m-n\mid a_m-a_n.$$

(第 15 届全苏数学奥林匹克,1981 年)

[解] 设$\{a_n\}$满足题设的条件,则

$$a_1=1,a_2=1 \text{ 或 } 2.$$

若 $a_2=1$,由(2)可知对任何 $n\geqslant 3$,存在整数 x_n 和 y_n 使得

$$\begin{cases}a_n=1+x_n\cdot(n-1),\\ a_n=1+y_n\cdot(n-2).\end{cases}$$

由于 a_n 是自然数,从而 x_n,y_n 是非负整数且 $y_n\geqslant x_n$.进一步可得

$$y_n=(y_n-x_n)(n-1) \quad ①$$

当 $n\geqslant 5$ 时,易知 $1+(n-1)(n-2)>n\sqrt{n}$,因此从(1)和①可得 $y_n-x_n=0$,从而

$$x_n=y_n=0,\text{对于任意 } n\geqslant 5,$$

即当 $n\geqslant 5$ 时,$a_n=1$.又由(2)当 $n\geqslant 5$ 时

$$n-3\mid a_3-1,n-4\mid a_4-1,$$

所以 $a_3=a_4=1$.总之,如果 $a_1=1,a_2=1$,则

$$a_n=1,\text{对于任意 } n\geqslant 1.$$

若 $a_2=2$.由(2)可知对于 $n\geqslant 3$,存在整数 x_n 和 z_n 使得

$$\begin{cases} a_n = 1 + x_n \cdot (n-1), \\ a_n = 2 + z_n \cdot (n-2). \end{cases}$$

从 a_n 是自然数可得当 $n \geqslant 4$ 时，x_n、z_n 非负且

$$z_n = 1 + (z_n - x_n)(n-1). \quad ②$$

由于 $n \geqslant 4$ 时 $z_n \geqslant 0$，从②可得 $z_n - x_n \geqslant 0$. 若 $z_n - x_n \geqslant 1$，则 $z_n \geqslant n$. 又由于 $n \geqslant 4$ 时，$n^2 - 2n + 2 > n\sqrt{n}$，所以从(1)可得 $z_n - x_n = 0$. 于是

$$x_n = z_n = 1, \text{对于任意 } n \geqslant 4,$$

即当 $n \geqslant 4$ 时，$a_n = n$. 再由(2)得 $10 - 3 \mid a_{10} - a_3$，即 $7 \mid 10 - a_3$. 由于 a_3 是自然数且 $a_3 \leqslant 3\sqrt{3}$，所以 $a_3 = 3$. 总之，如果 $a_1 = 1, a_2 = 2$，则

$$a_n = n, \text{对于任意 } n \geqslant 1.$$

另一方面，显然 $a_n = 1$，对于任意 $n \geqslant 1$ 和 $a_n = n$，对于任意 $n \geqslant 1$ 这两个数列都满足(1)和(2)，所以上述两个数列即为所求之一切数列.

8·97　从任一实数 x_1 构造数列 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ 满足

$$x_{n+1} = x_n\left(x_n + \frac{1}{n}\right), n = 1, 2, \cdots$$

求证：存在惟一的实数 x_1 使得由它所构造的数列满足

$0 < x_n < x_{n+1} < 1, n = 1, 2, \cdots$

（第26届国际数学奥林匹克，1985年）

［证］（1）惟一性. 设实数 x_1 满足所要的条件，则 $0 < x_1 < 1$. 令 $\{x_k\}, k = 1, 2, 3, \cdots$ 是从 x_1 所构造的数列，显然有

$$1 - \frac{1}{k} < x_k < 1, k = 1, 2, 3, \cdots$$

记 $\lambda_k = 1 - \frac{1}{k}$. 由于 $\lambda_{k+1} < x_{k+1} = x_k\left(x_k + \frac{1}{k}\right) < 1$，所以

$$\frac{1}{2k}\left(\sqrt{1 + 4k^2\lambda_{k+1}} - 1\right) < x_k < \frac{1}{2k}\left(\sqrt{1 + 4k^2} - 1\right), k = 1, 2, \cdots$$

对于 $x \geqslant 0$，记 $f_k(x) = \frac{1}{2k}\left(\sqrt{1 + 4k^2 x} - 1\right)$，显然 $f_k(x)$ 关于 x 严格单增，$f_k(0) = 0$，当 $x > 0$ 时，$f_k(x) > 0$. 对于任意固定 $x \geqslant 0$，关于 y

的方程 $y\left(y+\frac{1}{k}\right)=x$ 的最大根 $y=f_k(x)$. 经简单计算易知当 $0<x\leqslant 1$ 时有 $0<f_k(x)<1, k=1,2,3,\cdots$ 且

$$f_k(\lambda_{k+1})>\lambda_k, k=1,2,3,\cdots \tag{①}$$

由于 $\quad f_n(\lambda_{n+1})<x_n<f_n(1), n=1,2,\cdots$

又 $\quad x_{n+1}=x_n\left(x_n+\frac{1}{n}\right)$, 所以 $f_n\cdot f_{n+1}(\lambda_{n+2}<x_n<f_n\cdot f_{n+1}(1)$, 其中 $f_n\cdot f_{n+1}$ 表示复合函数 $f_n\cdot f_{n+1}(x)=f_n(f_{n+1}(x))$. 依此类推可知对任意非负整数 k 有

$f_n\cdot f_{n+1}\cdot\cdots\cdot f_{n+k}(\lambda_{n+k+1})<x_n<f_n\cdot f_{n+1}\cdot\cdots\cdot f_{n+k}(1), n=1,2,\cdots$ 特别对于 $k=1,2,3,\cdots$ 有

$$f_1\cdot f_2\cdot\cdots\cdot f_k(\lambda_{k+1})<x_1<f_1\cdot f_2\cdot\cdots\cdot f_k(1) \tag{②}$$

记 $a_k=f_1\cdot f_2\cdot\cdots\cdot f_k(\lambda_{k+1}), b_k=f_1\cdot f_2\cdot\cdots\cdot f_k(1)$. 由于 $0<f_{k+1}(1)<1$ 和所有 f_n 的严格单增性可知

$$0<b_{k+1}<b_k<1, k=1,2,\cdots$$

再由 ① 得 $\quad 0<a_k<a_{k+1}<1, k=1,2,\cdots$

从而 $\lim\limits_{k\to\infty}a_k$ 和 $\lim\limits_{k\to\infty}b_k$ 都存在，分别记为 α,β. 显然 $\quad 0<\alpha\leqslant x_1\leqslant\beta<1$. 以下证 $\alpha=\beta$.

首先，对任意自然数 k 和正实数 x,y,

$$|f_k(x)-f_k(y)|=\frac{1}{2k}|(\sqrt{1+4k^2x}-1)-(\sqrt{1+4k^2y}-1)|$$

$$=\frac{2k|x-y|}{\sqrt{1+4k^2x}+\sqrt{1+4k^2y}}<\frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}.$$

如果 $x\geqslant\frac{1}{4}, y\geqslant\frac{1}{4}$, 则

$$|f_k(x)-f_k(y)|<|x-y|. \tag{③}$$

其次经简单计算易知当 $k\geqslant 2$ 时, $f_k\left(\frac{1}{4}\right)>\frac{1}{4}$, 由 f_k 的单增性可得

$$f_k(x)>\frac{1}{4}, k\geqslant 2, x\geqslant\frac{1}{4}. \tag{④}$$

利用 ③ 和 ④ 可知 $|b_k-a_k|<1-\lambda_{k+1}=1-\frac{k}{k+1}=\frac{1}{k+1}$. 所以 $\lim\limits_{k\to\infty}(b_k-a_k)=0$. 由此即得 $\alpha=\beta=x_1$, 这就证明了 x_1 的惟一性.

(2) 存在性. 取 $x_1 = \alpha = \beta$, 则 $0 < x_1 < 1$. 由递推公式

$$x_{n+1} = x_n\left(x_n + \frac{1}{n}\right), n = 1,2,\cdots$$

确定一数列 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ 显然 $x_n > 0$ 且

$$x_n = f_n(x_{n+1}), n = 1,2,\cdots$$

由此可得 $x_1 = f_1 \cdot f_2 \cdot \cdots \cdot f_n(x_{n+1})$. 由于

$$f_1 \cdot f_2 \cdot \cdots f_n(\lambda_{n+1}) < x_1 < f_1 \cdot f_2 \cdot \cdots \cdot f_n(1),$$

又每一个 f_k 严格单增, 所以

$$\lambda_{n+1} < x_{n+1} < 1, n = 1,2,\cdots$$

于是对任何 $n \geqslant 1$ 有 $0 < x_n < x_{n+1} < 1$, 即 x_1 为所求.

8·98 当 n 为什么正整数时, 存在一个 $1,2,\cdots,n$ 的排列 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 使得 $|x_k - k|, k = 1,2,\cdots n$, 都不相同?

(中国国家集训队测验题, 1991 年)

[解] 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足题设条件, 则 $|x_1 - 1|, |x_2 - 2|, \cdots, |x_n - n|$ 必是 $0,1,2,\cdots,n-1$ 的排列, 所以

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k - k| = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\equiv \sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{n} k = 0 \pmod 2.$$

从而 n 所满足的必要条件是 $\frac{n(n-1)}{2}$ 为偶数, 即

$$n \equiv 0 \pmod 4 \text{ 或 } n \equiv 1 \pmod 4. \qquad ①$$

以下证条件①的充分性. 以下就 $n = 4k$ 和 $4k+1$ 两种情况讨论, 每种情况给出两个满足题设条件的例子.

$n = 4k$:

x_1,	x_2,	x_3,	$\cdots$,	x_{k-1},	x_k,	x_{k+1},	x_{k+2},	x_{k+3},	$\cdots$,	x_{2k},
$2k+1$,	$4k$,	$4k-1$,	$\cdots$,	$3k+3$,	$3k+2$,	$k+1$,	$3k+1$,	$3k$,	$\cdots$,	$2k+3$,
$2k$,	$4k$,	$4k-1$,	$\cdots$,	$3k+3$,	$3k+2$,	$3k+1$,	$3k-1$,	$3k-2$,	$\cdots$,	$2k+1$

x_{2k+1},	x_{2k+2},	x_{2k+3},	$\cdots$,	x_{3k-1},	x_{3k},	x_{3k+1},	x_{3k+2},	$\cdots$,	x_{4k}.
$2k+2$,	$2k$,	$2k-1$,	$\cdots$,	$k+3$,	$k+2$,	k,	$k-1$,	$\cdots$,	1.
$2k-1$,	$2k-2$,	$2k-3$,	$\cdots$,	$k+1$,	$3k$,	k,	$k-1$,	$\cdots$,	1.

$n = 4k + 1$:

x_1,	x_2,	x_3,	…,	x_{k-1},	x_k,	x_{k+1},	x_{k+2},	x_{k+3},	…,	x_{2k},
$2k+2$,	$4k+1$,	$4k$,	…,	$3k+4$,	$3k+3$,	$k+1$,	$3k+2$,	$3k+1$,	…,	$2k+4$,
$2k+1$,	$4k+1$,	$4k$,	…,	$3k+4$,	$3k+3$,	$3k+2$,	$3k$,	$3k-1$,	…,	$2k+2$

x_{2k+1},	x_{2k+2},	x_{2k+3},	…,	x_{3k-1},	x_{3k},	x_{3k+1},	x_{3k+2},	…,	x_{4k},	x_{4k+1}.
$2k+3$,	$2k+1$,	$2k$,	…,	$k+4$,	$k+3$,	$k+2$,	k,	…,	2,	1.
$2k$,	$2k-1$,	$2k-2$,	…,	$k+2$,	$k+1$,	$3k+1$,	k,	…,	2,	1.

8·99　给定 n 个不同的自然数,试对

$$(1)\ n = 5,\ (2)\ n = 1989$$

两种情况证明存在无穷的正数等差数列,使得其首项不大于公差且其项中有且仅有 3 个或者 4 个所给定的数.

(第 52 届莫斯科数学奥林匹克,1989 年)

[证]　(1) 记给定的 5 个数分别为 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. 若它们的奇偶性不全相同,设有 l 个奇数,$5-l$ 个偶数,其中 $1 \leqslant l \leqslant 4$,这样仅有两种情况.一是 $3 \leqslant l \leqslant 4$,此时奇自然数列即为所求,另一是 $3 \leqslant 5-l \leqslant 4$,此时偶自然数列即为所求.若给定的 5 个数奇偶性相同,则它们被 4 除的余数仅有两种情况.以此类推,一般必存在非负整数 k,使得

$$x_i = y_i \cdot 2^k + r,\quad i = 1,2,3,4,5,$$

其中 r 为整数且 $0 \leqslant r \leqslant 2^k - 1$,$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$ 为非负整数且奇偶性不全相同.同时由于所给的数是自然数,从而只要有一个 $y_i = 0$,那么 r 就不可能为 0.同样仅有两种情况.一是有 3 个或者 4 个 y_i 为奇数,其余的 2 个或者 1 个 y_i 是偶数,则

$$r + 2^k, r + 3 \cdot 2^k, r + 5 \cdot 2^k, \cdots$$

即为所求.另一是有 3 个或 4 个 y_i 为偶数,其余的 2 个或 1 个是奇数,则当 $r \neq 0$ 时数列

$$r, r + 2 \cdot 2^k, r + 4 \cdot 2^k, r + 6 \cdot 2^k, \cdots$$

为所求,当 $r = 0$ 时,数列

$$2 \cdot 2^k, 4 \cdot 2^k, 6 \cdot 2^k, \cdots$$

为所求.综上所述当 $n = 5$ 时,结论成立.

(2) 实际上可以证明当 $n \geqslant 5$ 时,结论都成立.以下用归纳法证明更强的命题:任给 n 个不同的自然数 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n(n \geqslant 5)$,存在满足结论要求的无穷正数等差数列且其公差为2的正整数方幂.当 $n=5$ 时,由(1)可知命题成立.设对于 $5 \leqslant n \leqslant m$ 命题成立.任取 $m+1$ 个不同的自然数 $x_1,x_2,\cdots,x_{m+1}$.首先从(1)中之证明可知存在非负整数 r_1 和 k_1,使得

$$x_i = y_i \cdot 2^{k_1} + r_1, i = 1,2,\cdots,m+1,$$

其中 $y_1,y_2,\cdots,y_{m+1}$ 是非负整数且奇偶性不全相同.不妨设 $y_1,y_2,\cdots y_l$ 为奇数,$y_{l+1},y_{l+2},\cdots,y_{m+1}$ 为偶数,其中 $1 \leqslant l \leqslant m$.若 $3 \leqslant l \leqslant 4$ 或者 $3 \leqslant m+1-l \leqslant 4$,则由(1)的证明可推得命题成立.否则,或者 $5 \leqslant l \leqslant m$ 或者 $5 \leqslant m+1-l \leqslant m$,不妨设 $5 \leqslant l \leqslant m$.对于 $y_1,y_2,\cdots,y_l$ 由归纳假设可以得到正数无穷等差数列 $v_1,v_2,v_3,\cdots$ 使得其首项不大于公差且其项中恰含 $y_1,y_2,\cdots,y_l$ 中的3个或者4个,同时其公差为 2^{k_2},其中 k_2 是正整数.令

$$u_i = v_i \cdot 2^{k_1} + r_1, i = 1,2,\cdots$$

显然 $\{u_i\}$ 是正数的无穷等差数列,其公差为 $2^{k_1+k_2}$,其项中恰含 $x_1,x_2,\cdots,x_l$ 中的3个或者4个.由于 $y_1,y_2,\cdots,y_l$ 都是奇数,又数列 $\{v_i\}$ 的公差是 2^{k_2},从而 $\{v_i\}$ 中各项都是奇数.由此可得 $\dfrac{u_i - r_1}{2^{k_1}}, i = 1,2,\cdots$ 为奇数,所以对 $l+1 \leqslant i \leqslant m+1$,$x_i$ 不等于 $\{u_i\}$ 中的每一项.于是数列 $\{u_i\}$ 的项中有且仅有3个或者4个是 $\{x_1,x_2,\cdots,x_{m+1}\}$ 中的数.如果 $u_1 > 2^{k_1+k_2}$,只要在 $\{u_i\}$ 中增加 $u_1 - 2^{k_1+k_2}$ 为首项,所以总能满足首项不大于公差的条件.综上所述可得 $n = m+1$ 时,命题也成立.

8·100 (1) 问是否存在自然数列 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 使得它的每一项都不等于其余若干项之和且满足

$$a_n \leqslant n^{10}, n = 1,2,3,\cdots \quad ①$$

(2) 问题同(1)只是①改为

$$a_n \leqslant n\sqrt{n}, n = 1,2,3,\cdots \quad ②$$

(第42届莫斯科数学奥林匹克,1979年)

[解] (1) 存在.我们分段构造一个满足所要条件的数列 $\{a_n\}$,首先令

$$b_0 = 1,\quad b_n = 2^{3^{n-1}},\quad n = 1,2,3,\cdots$$

$\{a_n\}$ 的第一段仅由一项组成即 $a_1 = 1$,第 2 段有 $\frac{1}{2}b_1 + 1 = 2$ 项,分别为 $a_2 = \frac{1}{2}b_1^2 = 2,\quad a_3 = b_1^2 = 4$.一般地对任意自然数 n,第 $n+1$ 段由 $\frac{1}{2}b_n + 1$ 项组成,它们依次分别等于

$$\frac{1}{2}b_n^2, \frac{1}{2}b_n^2 + b_n, \frac{1}{2}b_n^2 + 2b_n, \cdots, b_n^2.$$

从而第 $n+1$ 段各项之和为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}b_n^2\left(\frac{1}{2}b_n + 1\right) + b_n\left(1 + 2 + 3 + \cdots + \frac{1}{2}b_n\right)\\ =\ &\frac{3}{8}b_n^3 + \frac{3}{4}b_n^2.\end{aligned}$$

显然有 $\quad \frac{3}{8}b_n^3 + \frac{3}{4}b_n^2 \leqslant b_n^3 - b_n = b_{n+1} - b_n, n = 1,2,3,\cdots$

于是第 $n+1$ 段之前的各项之和不超过 $b_n - 1$.由此立即可得数列 $\{a_n\}$ 中每一项都不可能等于其余若干项的和.

以下证 $\{a_n\}$ 满足 ①.显然当 $n = 1,2,3$ 时,① 成立.当 $4 \leqslant n \leqslant 8$ 即 a_n 在第 3 段时,则

$$a_n \leqslant b_2^2 = 64 = 4^3 \leqslant n^3 < n^{10}.$$

当 $9 \leqslant n \leqslant 9 + 2^8$ 即 a_n 在第 4 段时,则

$$a_n \leqslant b_3^2 = 2^{18} < 3^{18} = 9^9 \leqslant n^9 < n^{10}.$$

若 $n > 9 + 2^8$,则存在自然数 $k \geqslant 4$,使得 a_n 恰在第 $k+1$ 段.从而 $n > \frac{1}{2}b_{k-1} + 1$ 且

$$a_n \leqslant b_k^2 = 2^{2\cdot 3^{k-1}} = (2^{3^{k-2}})^6 = b_{k-1}^6 < 64\left(\frac{1}{2}b_{k-1} + 1\right)^6,$$

所以 $\quad a_n < 64n^6$.

由于 $n > 64$,于是有

$$a_n < 64n^6 < n^7 < n^{10}.$$

无论何种情况 ① 都成立.

(2) 不存在.事实上若有数列 $\{a_n\}$ 满足(2) 中的条件,则 $a_1 = 1$,

$a_2=2$. $a_3=4$或5.若$a_3=4$,由于$a_4\leqslant 8$,若$a_4<8$,可推出a_4等于a_1,a_2,a_3中若干项之和,与假设矛盾.因此$a_4=8$.又因为$a_5\leqslant 11$,可推出a_5等于a_1,a_2,a_3,a_4中若干项之和,也与假设矛盾!从而$a_3=5$,则$a_4=4$.再由$a_5\leqslant 11$又可推出a_5等于a_1,a_2,a_3,a_4中若干项之和,矛盾!

8·101　对于自然数n,数列$a_1,a_2,\cdots,a_k(k\geqslant n)$称为万能的,如果$1,2,\cdots,n$的任一个排列都能从$a_1,a_2,\cdots,a_k$去掉一些项得到.

(1) 构造一个有n^2项万能数列的例子.

(2) 构造一个有n^2-n+1项万能数列的例子.

(3) 证明:任何万能数列的项数不少于$\frac{n(n+1)}{2}$.

(4) 当$n=4$时,证明最短万能数列有12项.

(5) 对于给定的n,试求尽可能短的万能数列(竞赛评委会能作出有n^2-2n+4项的万能数列).

(第10届全苏数学奥林匹克,1976年)

[解] (1) 显然

$$\overbrace{\underbrace{1,2,\cdots,n}\,,\,\underbrace{1,2,\cdots,n}\,,\cdots,\underbrace{1,2,\cdots,n}}^{n\text{个}}.$$

是万能数列.

(2)
$$\overbrace{1,2,\cdots,n,\;1,2,\cdots,n,\cdots,1,2,\cdots,n}^{n-1\text{个}},1.$$

也是万能数列.事实上,任取$1,2,\cdots,n$的一个排列$k_1,k_2,\cdots,k_n$.如果存在$1\leqslant j\leqslant n-1$使得$k_j<k_{j+1}$,若$m\neq j$,第$m$段$1,2,\cdots,n$中留下$k_m$,若$m=j$,第$j$段$1,2,\cdots n$中留下$k_j$和$k_{j+1}$,这样就得到$k_1,k_2,\cdots,k_n$.另一种情况是$(k_1,k_2,\cdots,k_n)=(n,n-1,\cdots,1)$.只需在第$m$段$1,2,\cdots,n$中留下$n-m+1$,$m=1,2,\cdots,n-1$,同时保留尾项1就得到$(n,n-1,\cdots,2,1)$.

(3)用归纳法证明.当$n=1$时命题显然成立.假设当$n=k-1$时命题成立,即关于$k-1$的万能数列的项数$\geqslant\frac{1}{2}k(k-1)$.以下讨论$n=k$的情况.设$a_1,a_2,\cdots,a_m$是关于$k$的万能数列,令$l_i$表示数$i$首次

出现在数列 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 中的项数，$i=1,2,\cdots,k$. 显然存在 $1\leqslant j\leqslant k$ 使得 $l_j\geqslant k$. 由于数列关于 $k-1$ 是万能的，从而 $a_{l_{j+1}},a_{l_{j+2}},\cdots,a_m$ 关于 $(1,2,\cdots,j-1,j+1,\cdots,k)$ 是万能的. 由归纳假设可得

$$m\geqslant k+\frac{1}{2}k(k-1)=\frac{1}{2}k(k+1),$$

即当 $n=k$ 时命题也成立.

(4) 用 l_n 表示关于 n 的最短万能数列的项数. 显然 $l_1=1,l_2=3$. 为了计算 l_3 和 l_4，首先注意到以下命题成立：设 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 是关于 n 的万能数列，如果存在 $1\leqslant m\leqslant n$ 仅在此数列中出现一次，则该数列在 m 前和 m 后都应有关于 $n-1$ 的万能数列. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 是关于 3 的万能数列. 如果 1,2,3 中存在一个仅在上述数列中出现一次，则 $k\geqslant 2l_2+1=7$. 如果 1,2,3 都在上述数列中至少出现两次，类似于(3)中的证明可知 $k\geqslant 3+l_2+1=7$. 于是 $l_3\geqslant 7$. 又 1,2,1,3,1,2,1 关于 3 是万能的. 所以 $l_3=7$. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 是关于 4 的万能数列. 如果 1,2,3,4 中存在一个仅在该数列中出现一次，则 $k\geqslant 2l_3+1=15$. 如果 1,2,3,4 都至少在该数列中出现两次，则 $k\geqslant 4+l_3+1=12$. 所以 $l_4\geqslant 12$. 又 1,2,3,4,1,2,3,1,4,2,3,1 关于 4 是万能的，从而 $l_4=12$.

(5) 以下项数为 n^2-2n+4 的数列关于 n 是万能的：

$$n,\overbrace{\overline{1,2,\cdots,(n-1),n},\overline{1,2,\cdots,(n-2),n,(n-1)},\cdots,\overline{1,2,n,3\cdots,(n-1)}}^{n-2\text{个}},1,n,2.$$

事实上，由(2)的结论可知，该数列首项之后和倒数第 2 项之前都有关于 $(1,2,\cdots,n-1)$ 的万能数列，从而 $1,2,\cdots,n$ 的任一排列，只要首项是 n 或者末项是 n 都可从该数列中画去一些项得到. 任取 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列 $a_1,a_2,\cdots,a_{r-1},a_r,a_{r+1},\cdots,a_n$，其中 $a_r=n,1<r<n$. 在所讨论的数列中，第 r 个 n 之前的项画去所有的 n 得

$$\overbrace{\overline{1,2,\cdots,n-1},\overline{1,2,\cdots,n-1},\cdots,\overline{1,2,\cdots,n-1}}^{r-2\text{个}},1,2,\cdots,n-r+1.$$

由(2)中的证明易知从此数列中画去一些项可得 $a_1,a_2,\cdots,a_{r-1}$. 第 r 个 n 之后的项画去所有的 n 得

$$n-r+2,\cdots,n-1,\overbrace{\overline{1,2,\cdots,n-1},\cdots,\overline{1,2,\cdots,n-1}}^{n-r-1\text{个}},1,2.$$

同样用(2)中的证明易知从中划去一些项可得到 $a_{r+1},a_{r+1},\cdots,a_n$.

8·102 对于 $n=25$,构造一个由数0和1组成的数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,使得对于任何 $0\leqslant k\leqslant n-1$,

$$a_1a_{k+1}+a_2a_{k+2}+\cdots+a_{n-k}a_n$$

都是奇数;

(2)对于某个 $n>1000$,证明:满足(1)中条件的数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 存在.

(第13届全苏数学奥林匹克,1979年)

[解] 用 A_n 表示由0和1组成的数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$.对于 A_n,令

$$P_k(A_n)=a_1a_{k+1}+a_2a_{k+2}+\cdots+a_{n-k}a_n,$$

其中 $0\leqslant k\leqslant n-1$.由于 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都取值0或者1,所以

$$\begin{aligned}P(A_k)&=\#\{i\mid 1\leqslant i\leqslant n-k\text{ 且 }a_i=a_{i+k}=1\}\\&=\#\{i\mid k+1\leqslant i\leqslant n\text{ 且 }a_i=a_{i-k}=1\},\end{aligned}$$

其中 $\#\{\cdots\}$ 表示集合 $\{\cdots\}$ 中的元素的个数.

对于由0和1组成的数列 $A_n:a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 $B_m:b_1,b_2,\cdots,b_m$ 按如下方法构造一个新的数列 C_l:在 A_n 中,对于 $1\leqslant i\leqslant n-1$,若 $a_i=1$,则用

$$B_m0_{m-1}:b_1,b_2,\cdots,b_m,\overbrace{0,\cdots,0}^{m-1\text{个}}$$

代替 a_i;若 $a_i=0$,则用 $0_{2m-1}:\overbrace{0,0,\cdots,0}^{2m-1\text{个}}$ 代替 a_i.对于 a_n 来说,若 $a_n=1$,则用 B_m 代替 a_n;若 $a_n=0$ 则用 0_m 代替 a_n.记 $C_l=A_n\cup B_m$,显然 $l=(2m-1)n-(m-1)$.例如 $A_3:1,0,1,B_2=1,0$,则

$$C_8=A_3\cup B_2:1,0,0,0,0,0,1,0.$$

任取 $0\leqslant k\leqslant l-1$,存在 $0\leqslant q\leqslant n-1$ 和 $-(m-1)\leqslant r\leqslant m-1$ 使得 $k=(2m-1)q+r$.可以证明

$$P_k(C_l)=P_q(A_n)\cdot P_{|r|}(B_m).\qquad①$$

事实上,设 $0\leqslant r\leqslant m-1$,令

$$\begin{aligned}M&=\{i\mid 1\leqslant i\leqslant l-k\text{ 且 }C_i=C_{i+k}=1\},\\M_1&=\{j\mid 1\leqslant j\leqslant n-q\text{ 且 }a_j=a_{j+q}=1\},\\M_2&=\{h\mid 1\leqslant h\leqslant m-r\text{ 且 }b_h=b_{h+r}=1\}.\end{aligned}$$

任取 $j \in M_1, h \in M_2$. 记 $J = (2m-1)(j-1)$. 由于 $a_j = a_{j+q} = 1$, 所以 $C_{J+p} = C_J + (2m-1)q + p = bp, p = 1,2,\cdots,m$.
令 $i = J + h$, 显然 $1 \leqslant i \leqslant l - k$ 且

$$c_i = b_h, c_{i+k} = c_{J+h+(2m-1)q+r} = b_{h+r}.$$

由 $h \in M_2$ 可得 $b_h = b_{h+r} = 1$, 从而

$$c_i = c_{i+k} = 1.$$

于是 $i \in M$. 反之, 任取 $i \in M$. 由 $c_i = 1$ 和 $1 \leqslant i \leqslant l - k$ 可知存在 $1 \leqslant j \leqslant n - q$ 使得 $a_j = 1$ 且 $(2m-1)(j-1) < i \leqslant (2m-1)(j-1) + m$. 记 $J = (2m-1)(j-1)$, 由 $a_j = 1$ 可得

$$c_{J+P} = b_p, p = 1,2,\cdots,m.$$

再由 $c_{i+k} = c_{i+(2m-1)q+r} = 1, 0 \leqslant r \leqslant m-1$, 易知 $a_{j+q} = 1$ 且

$$1 \leqslant i - J + r \leqslant m.$$

所以 $j \in M_1, c_{J+(2m-1)q+p} = b_p, p = 1,2,\cdots,m$.
令 $h = i - J$, 则 $1 \leqslant h \leqslant m - r$ 且

$$b_h = c_i = 1, b_{h+r} = c_{i+(2m-1)q+r} = 1.$$

从而 $h \in M_2$. 从以上结论立即可得

$$\# M = (\# M_1) \cdot (\# M_2).$$

由于 $\# M = P_k(C_l), \# M_1 = P_q(A_n), \# M_2 = P_r(B_m) = P_{|r|}(B_m)$, 所以 ① 式成立. 若 $-(m-1) \leqslant r < 0$, 用

$$\{h \mid |r|+1 \leqslant h \leqslant m \text{ 且 } b_h = b_{h-|r|} = 1\}$$

代替 M_2 同理可证 ① 式成立.

取 A_4:1,1,0,1. 易知对任何 $0 \leqslant k \leqslant 3$, $P_k(A_4)$ 是奇数. 所以由 ① 得

$A_{25} = A_4 \cup A_4$:1,1,0,1,0,0,0,1,1,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,0,1 满足题目的要求. 同样 $A_l = A_{25} \cup A_{25}$ 也满足题目的要求, 其中 $l = 49 \times 25 - 24 = 1201 > 1000$.

8・103 是否存在这样的由自然数所构成的数列, 其中每个自然数都恰好出现一次, 并且对任何 $K = 1,2,3,\cdots$ 数列中前 K 项之和都可被 K 整除?

(第 21 届俄罗斯数学奥林匹克决赛, 1995 年)

[解] 存在.

事实上,我们可用如下方法构造符合条件的数列$\{a_n\}$.

$$\text{令}\begin{cases}a_1=1,\\ a_{n+1}=m[(n+2)^t-1]-S_n,\\ a_{n+2}=m.\end{cases}$$

其中$n=1,3,5,\cdots m$是不同于$a_1,a_2,\cdots,a_n$的最小的自然数,S_n是a_1,$a_2,\cdots,a_n$的和,t取足够大的正整数,使得a_{n+1}大于$a_1,a_2,\cdots,a_n$中的任何一个.

显然,每个自然数在$\{a_n\}$中恰好出现一次.只需证明:对任意自然数K,都有K整除数列前K项之和S_K.

首先,1可以整除$a_1=1$.设对于某个奇数n,n可以整除S_n.因为

$$S_{n+1}=S_n+a_{n+1}=m[(n+2)^t-1],$$

并且不管t取什么正整数,都有$n+1$整除$(n+2)^t-1$,所以$n+1$可以整除S_{n+1}.

又因为

$$\begin{aligned}S_{n+2}&=S_n+a_{n+1}+a_{n+2}\\&=m[(n+2)^t-1]+m\\&=m(n+2)^t,\end{aligned}$$

所以$n+2$可以整除S_{n+2}.

根据数学归纳法原理可知,对于任意自然数K,都有K整除S_K.

综上所述,数列$\{a_n\}$符合题中的所有条件,因此原题的回答是肯定的.

8·104 证明:对于任何自然数$a_1>1$,都存在严格递增的自然数序列$a_1,a_2,a_3,\cdots\cdots$使得对任何$k\geqslant 1$,和数$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2$都可以被和数$a_1+a_2+\cdots+a_k$整除.

(第21届俄罗斯数学奥林匹克决赛,1995年)

[证] 由于

$$a_1^2+a_2^2=(a_2-a_1)(a_2+a_1)+2a_1^2,$$

因此可取a_2,使 $a_1+a_2=2a_1^2$,就有a_1+a_2整除$a_1^2+a_2^2$.此时

$$a_2=2a_1^2-a_1>a_1.$$

假设已取得$a_1,a_2,\cdots,a_n$满足题意.我们记

$$A_n=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2,$$

$$B_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

于是 $$A_{n+1} = A_n + a_{n+1}^2$$
$$= A_n + (a_{n+1} - B_n)(a_{n+1} + B_n) + B_n^2$$
$$= (a_{n+1} - B_n) \cdot B_{n+1} + A_n + B_n^2.$$

我们可以取 $B_{n+1} = A_n + B_n^2$,此时 B_{n+1} 整除 A_{n+1},

且 $$a_{n+1} = B_{n+1} - B_n$$
$$= A_n + B_n^2 - B_n$$
$$> A_n > a_n^2 > a_n.$$

由数学归纳法原理知,原命题成立.

8 · 105 证明:首项为1、公差为729的等差数列一定有无穷多项是10的自然数次幂.

(第22届俄罗斯数学奥林匹克决赛,1996年)

[证] 设这个等差数列为 $a_1, a_2, a_3, \cdots$

则 $$a_{n+1} = 1 + 729n$$

显然,这个数列有无穷多项是10的自然数次幂的充要条件是存在无穷多个自然数 n 和 k,使得

$$1 + 729n = 10^k.$$

为证原题,只需证明存在无穷多个自然数 k,使 $10^k - 1$ 是729的倍数.

当 $k = 81m$ 时,

$$10^k - 1 = (10^{81})^m - 1$$
$$= (10^{81} - 1) \cdot A$$
$$= \underbrace{99\cdots9}_{81个9} \cdot A,$$

其中 A 是整数,并且

$$\underbrace{99\cdots9}_{81个9} = 9 \cdot \underbrace{11\cdots1}_{9个1} \cdot \underbrace{100\cdots0}_{8个0} \cdot \underbrace{100\cdots01}_{8个0} \cdots \underbrace{100\cdots01}_{8个0}.$$

注意到右端三个因数的数字和都是9,从而这三个因数都是9的倍数,所以,此时 $10^k - 1$ 是 $9 \times 9 \times 9 = 729$ 的倍数,其中 $k = 81\mathrm{m}, \mathrm{m} \in N$.

这就是我们要证明的,故原命题得证.

8 · 106 设 a, b 是非负整数,且满足 $ab \geqslant c^2$,其中 c 是整数. 证明存在数 n 及整数 $x_1, x_2, \cdots, x_n; y_1, y_2, \cdots, y_n$,使得

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = a, \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = b, \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = c.$$

（第 36 届国际数学奥林匹克预选题，1995 年）

［证］ 将上述问题记为(a,b,c). 显然，命题对于(a,b,c)成立的充分必要条件是对于$(a,b,-c)$也成立. 因此，可以假定$c \geqslant 0$. 又由问题关于a,b对称，还可以假定$a \geqslant b$.

由 $ab \geqslant c^2$ 可得 $a \geqslant c$.

由算术-几何平均不等式，得

$$a + b - 2c \geqslant 2\sqrt{ab} - 2c \geqslant 0.$$

当$b = 0$时，由$ab \geqslant c^2$可知，$c = 0$.

下面我们用关于$a + b$的数学归纳法来证明原命题.

当$a + b = 0$时，结论显然成立.

设当$a + b \leqslant m$时结论成立.

于是当$a + b = m + 1$时：

如果$c \leqslant b$，则取$n = a + b - c$，并且取

$$\begin{cases} x_i = 1, \text{当} 1 \leqslant i \leqslant a \text{时}; \\ x_i = 0, \text{当} a + 1 \leqslant i \leqslant n \text{时}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_i = 0, \text{当} 1 \leqslant i \leqslant a - c \text{时}; \\ y_i = 1, \text{当} a - c + 1 \leqslant i \leqslant n \text{时}. \end{cases}$$

显然符合命题的条件，从而此时原命题成立.

如果$c > b$，则$a > c$. 我们考虑问题$(a + b - 2c, b, c - b)$. 由于

$$(a + b - 2c) \cdot b - (c - b)^2 = ab - c^2 \geqslant 0,$$

且 $$(a + b - 2c) + b < a + b = m + 1,$$

因此，由归纳假设，问题$(a + b - 2c, b, c - b)$的解存在，即存在数n及整数$x_1, x_2, \cdots, x_n$和$y_1, y_2, \cdots, y_n$，使得

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = a + b - 2c, \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = b, \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = c - b.$$

于是，存在数n及整数$x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n$和$y_1, y_2, \cdots, y_n$，使得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \\ &= (a + b - 2c) + 2(c - b) + b \end{aligned}$$

$$= a,$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = b,$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)y_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

$$= (c - b) + b$$

$$= c.$$

此时原命题也成立.

根据数学归纳法原理,原命题得证.

8·107 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 都是不等于0的数.证明如果对于任意整数 k, $k = 0,1,\cdots,n(n < m - 1)$,都满足

$$a_1 + a_2 \cdot 2^k + a_3 \cdot 3^k + \cdots + a_m \cdot m^k = 0,$$

那么,数列 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 中至少存在 $n + 1$ 对相邻的数符号相反.

(第22届俄罗斯数学奥林匹克决赛,1996年)

[证] 不妨设 $a_m > 0$.否则可将数列 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 中所有的数都乘以 -1.

取数列 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 使

$$b_i = \sum_{j=0}^{n} c_j \cdot i^j,$$

其中 $c_0, c_1, \cdots, c_n$ 为任意实数.

由已知条件,得

$$\sum_{i=1}^{m} a_i b_i = \sum_{i=1}^{m} a_i \sum_{j=0}^{n} c_j \cdot i^j = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_i c_j \cdot i^j$$

$$= \sum_{j=0}^{n} c_j \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot i^j = \sum_{j=0}^{n} c_j \cdot 0 = 0.$$

即 $$\sum_{i=1}^{m} a_i b_i = 0. \qquad ①$$

设数列 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 中有 k 对相邻的数符号相反,用 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 表示这些数对中前一个元素的下标($1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k$).

如果 $k < n + 1$.此时,我们取

$$b_i = f(i) = (i - x_1)(i - x_2)\cdots(i - x_k),$$

其中 $x_l = i_l + \dfrac{1}{2}, l = 1,2,\cdots,k.$

函数 f 在且仅在点 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 处变号. 因此 b_i 和 b_{i+1} 当且仅当它们之间有 $x_l = i_l + \frac{1}{2}$ 时,即 $i = i_l$ 时($l = 1,2,\cdots,m$)它们异号. 这样,数列 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 中变号的数对和数列 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 中变号的数对的下标是相同的.

注意到 $a_m > 0, b_m > 0$,所以 a_i 和 b_i($i = 1,2,\cdots,m$)同号,从而有

$$a_ib_i > 0,$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_ib_i > 0. \quad ②$$

① 与 ② 矛盾,故 $k \geqslant n+1$,原命题得证.

8·108　试问:是否存在12个等比数列,使得自然数 1,2,3,…,100 分别是这些数列的项?

(第 21 届俄罗斯数学奥林匹克决赛,1995 年)

[解]　不存在.

事实上,若有三个不同的质数 p_1,p_2,p_3,其中 $p_1 < p_2 < p_3$,在同一个等比数列中,则可设

$$p_1 = aq^{k-1}, p_2 = aq^{r-1}, p_3 = aq^{m-1},$$

其中 k,r,m 为互不相等的自然数. 于是

$$\frac{p_2}{p_1} = q^{r-k}, \frac{p_3}{p_2} = q^{m-r},$$

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{m-r} = \left(\frac{p_3}{p_2}\right)^{r-k},$$

$$p_2^{m-k} = p_1^{m-r} \cdot p_3^{r-k},$$

注意到 $m-k, m-r, r-k$ 都是整数,并且都不等于 0,因此上式是不可能成立的.

这说明,任意三个不同质数不可能同在一个等比数列中. 也就是说,同一个等比数列中,至多有 2 个质数.

由于在 1,2,…,100 中共有 25 个不同的质数,因此它们不可能包含在 12 个等比数列中.

8·109　是否存在一个由递增的自然数构成的具有

(1)11 项;

(2)10000 项;

(3) 无穷多项

的等差数列，使得十进制下各项的数字和也构成了一个递增的等差数列？

（世界城市际数学联赛，1995 年）

[解] (1) 存在．例如 9,118,227,336,445,554,663,772,881,990,1099．

(2) 存在．例如，先构造下面的 $10^4 \times 10^4$ 表格：

00000	00001	00002	…	09998	09999
00001	00002	00003	…	09999	10000
…	…	…	…	…	…
09998	09999	10000	…	19996	19997
09999	10000	10001	…	19997	19998

将表格中的竖线去掉，使每一行形成一个位数接近 5×10^4 的数，从第一行到最后一行，构成了一个项数为 10^4 的数列．

这个数列是公差为 10000100001……0000100001 的等差数列，而这个数列的各项的数字和是公差为 1 的等差数列．

(3) 不存在．

事实上，如果存在一个无穷多项满足条件的等差数列

$$a, a+d, a+2d, \cdots$$

记首项 a 的位数为 n，那么该数列的其中两项

$$a + d \times 10^n, a + d \times 10^{n+1}$$

的数字和相等，与已知条件矛盾．

故满足条件的无穷多项的等差数列不存在．

8・110　已知一个数列的各项是1 或 2，首项为 1，且在第 k 个 1 和第 $k+1$ 个 1 之间有 2^{k-1} 个 2，即

1,2,1,2,2,1,2,2,2,2,1,2,2,2,2,2,2,2,2,1,…

(1) 求该数列前 1998 项的和 S_{1998}；

(2) 是否存在正整数 n，使得数列的前 n 项和 $S_n = 2001$？若 n 存在，求出 n 的值；若 n 不存在，证明你的结论．

（中国湖南省高中数学竞赛，1998 年）

[解] (1) 我们把第 k 个 1 和它后面的 2^{k-1} 个 2,这 $2^{k-1}+1$ 项称为数列的第 k 段.

设第 1998 项在第 k 段.则 k 是满足

$$k+(1+2+2^2+\cdots+2^{k-1})\geqslant 1998,$$

即 $$2^k+k-1\geqslant 1998$$

的最小正整数.

因为 $$2^{10}+10-1=1033<1998,$$
$$2^{11}+11-1=2058<1998,$$

所以 $k=11$.故

$$S_{1998}=2\times 1998-11=3985.$$

(2) 若存在 $n\in N$,使得 $S_n=2001$.设第 n 项在第 k 段,则

$$2n-k=2001,$$

从而 k 是奇数.由(1)知 $k\leqslant 11$,因此

$$1000<n<1006.$$

又因为 $$2^9+9-1=520<1000<n,$$
$$2^{10}+10-1=1033>1006>n.$$

所以第 n 项应在第 10 段,即 $k=10$,这与 k 为奇数矛盾.

故这样的 n 不存在.

8·111 第一个人把 1 到 100 这 100 个数按某种顺序写成一个数列.第二个人先写出这个数列中的 50 个不同的数,再让第一个人把这 50 个数按它们在原来数列中出现的顺序写出来;第二个人再先写出原数列中的50个不同的数,再让第一个人把这50个数按它们在原数列中出现的顺序写出来.这样继续下去,那么,至少要进行多少次,第二个人就可能知道第一个人原来写出的数列?证明你的结论.

(第 22 届俄罗斯数学奥林匹克决赛,1996 年)

[解] 至少要进行 5 次.

事实上,要确定数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{100}$ 的排序,必须使每一个相邻数对(a_i,a_{i+1}),$i=1,2,\cdots,99$,在每次写出的 50 个数中至少出现 1 次,否则第一个人对两个不同的数列

$$a_1,\cdots,a_i,a_{i+1},\cdots,a_{100} \text{ 和 } a_1,\cdots,a_{i+1},a_i,\cdots,a_{100}$$

的所有回答都是相同的.

下面,我们来证明:在任意进行 2 次之后,存在某些情况,至少还得

进行 3 次.

设 $k_1,k_2,\cdots,k_{50}$ 是第一次确定的有序数组,$k'_1,k'_2,\cdots,k'_{50}$ 是第二次确定的有序数组.

先构造数列

$$k_1,k'_1,k_2,k'_2,k_3,k'_3,\cdots,k_{50},k'_{50}. \quad ①$$

在这个数列中,如果出现 $k_{2n-1}=k'_{2n-1}$ 或 $k'_{2n-1}=k_{2n}$,就把 k'_{2n-1} 的位置空出来;如果出现 $k_{2n}=k'_{2n}$,就把 k_{2n} 的位置空出来.如果这时还有某两个数相等,就把这两个数的前一个位置空出来.直到 ① 中剩余的数两两不同为止.然后把在 1 到 100 中,但又不在 ① 中剩余的数内的那些数一个一个地填到空出的位置中去,每一个空位填一个数,这样得到一个 1 到 100 的一个排列:

$$a_1,a_2,\cdots,a_{100}. \quad ②$$

如果第一个人开始写成的数列恰是 ②,那么对 ② 中相邻的数对 (a_i,a_{i+1}),其中 i 不是 4 的倍数,仍然尚未在前两次操作中出现,从而必须在以后的操作中出现.

如果想再操作两次就使这些尚未出现过的数对都出现,那么在后两次中必须出现 1 到 100 中的每一个数.

考察形如 $(a_{4i-3},a_{4i-2},a_{4i-1},a_{4i})(i=1,2,\cdots,25)$ 的四元数组.我们发现,如果这种四数组中有一个数被写出,则其余 3 个数也必须在同一次操作中被写出(否则,这个四元数组中的相邻数对就不能在后两次操作中全部出现).这样,同一次操作中写出的数的个数必须是 4 的倍数.此与我们在同一次操作中写出 50 个数相矛盾.

因此至少还得再进行 3 次,总共进行 5 次,才可能确定第一个人原来写的数列的排序.

8・112　求证:存在自然数 m,使得有整数列 $\{a_n\}$ 满足:

(1) $a_0=1,a_1=337$;

(2) $(a_{n+1}a_{n-1}-a_n^2)+\dfrac{3}{4}(a_{n+1}+a_{n-1}-2a_n)=m,\ \forall n\geqslant 1$;

(3) $\dfrac{1}{6}(a_n+1)(2a_n+1)$ 都是整数的平方.

(中国国家队选拔赛,1997 年)

[证]　设自然数 m 及整数列 $\{a_n\}$ 满足条件(1),(2) 和(3),令

$$b_n = a_n + \frac{3}{4}, n = 0,1,2,\cdots$$

则 $$b_0 = 1 + \frac{3}{4}, b_1 = 337 + \frac{3}{4}$$

且(2)$\Leftrightarrow b_{n+1}b_{n-1} - b_n^2 = m, n = 1,2,\cdots$

用数学归纳法易知数列$\{b_n\}$是严格递增的正数列,因为整个数列$\{b_n\}$被$b_0 = \frac{7}{4}, b_1 = \frac{1351}{4}$和递推关系

$$b_{n+1} = \frac{m + b_n^2}{b_{n-1}}, n = 1,2,\cdots$$

惟一决定.

设数列$\{c_n\}$满足$c_0 = b_0, c_1 = b_1$,且

$$c_{n+1} = pc_n - c_{n-1}, n = 1,2,\cdots$$

其中 $$p = \frac{m + c_0^2 + c_1^2}{c_0c_1}.$$

显然 $$c_2c_0 - c_1^2 = (pc_1 - c_0)c_0 - c_1^2 = m.$$

当$n \geqslant 2$时,

$$\begin{aligned} c_{n+1}c_{n-1} - c_n^2 &= (pc_n - c_{n-1})c_{n-1} - c_n^2 \\ &= pc_nc_{n-1} - c_{n-1}^2 - c_n^2 \\ &= pc_n \cdot \frac{1}{p}(c_n + c_{n-2}) - c_{n-1}^2 - c_n^2 \\ &= c_nc_{n-2} - c_{n-1}^2 \end{aligned}$$

依此类推,可得

$$c_{n+1}c_{n-1} - c_n^2 = c_2c_0 - c_1^2 = m, n = 1,2,\cdots$$

由$\{b_n\}$的惟一性可知

$$c_n = b_n, n = 0,1,2,\cdots$$

递推关系,$c_{n+1} = pc_n - c_{n-1}, n = 1,2,\cdots$的特征方程是

$$\lambda^2 - p\lambda + 1 = 0.$$

因为$p > 2$,所以它有两个不同的实根

$$\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{p}{2} + \sqrt{\dfrac{p^2}{4} - 1}, \\ \lambda_2 = \dfrac{p}{2} - \sqrt{\dfrac{p^2}{4} - 1}. \end{cases}$$

于是，$bn = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n, n = 0,1,2,\cdots$

其中
$$\begin{cases} A + B = b_0 = \dfrac{7}{4}, \\ \lambda_1 A + \lambda_2 B = b_1 = \dfrac{1351}{4}. \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} A = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1351 - 7\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}, \\ B = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{-1351 + 7\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}. \end{cases}$$

故
$$a_n = b_n - \frac{3}{4} = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n - \frac{3}{4}, n = 0,1,2,\cdots$$

由此易证，数列$\{a_n\}$满足递推关系：

$$a_{n+1} = pa_n - a_{n-1} + \frac{3}{4}(p-2), n = 1,2,\cdots$$

由于

$$\frac{1}{6}(a_n+1)(2a_n+1) = \frac{1}{48}[(4a_n+3)^2 - 1]$$
$$= \frac{1}{48}(16A^2\lambda_1^{2n} + 16B^2\lambda_2^{2n} + 32AB - 1)$$
$$= \frac{1}{3}A^2\lambda_1^{2n} + \frac{1}{3}B^2\lambda_2^{2n} + \frac{2}{3}AB - \frac{1}{48}$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}A\lambda_1^n - \frac{1}{\sqrt{3}}B\lambda_2^n\right)^2 + \frac{4}{3}AB - \frac{1}{48},$$

并且

$$AB = \frac{1}{4} \cdot \frac{1351 - 7\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{-1351 + 7\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}$$
$$= \frac{-1351^2 - 7^2 + 7 \times 1351p}{16 \cdot (p^2 - 4)},$$

因此当

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{-1351^2 - 7^2 + 7 \times 1351p}{16 \cdot (p^2 - 4)} - \frac{1}{48} = 0$$

时，$\frac{1}{6}(a_n+1)(2a_n+1)$都是整数的平方.

由上式得

$$p^2 - 4\times 7\times 1351p + 4\times 1351^2 + 4\times 7^2 - 4 = 0,$$

$$\begin{aligned}p &= 2\times 7\times 1351 \pm \sqrt{4\times 7^2\times 1351^2 - 4\times 1351^2 - 4\times 7^2 + 4}\\ &= 2\times 7\times 1351 \pm \sqrt{4\times 48\times 1351^2 - 4\times 48}\\ &= 2\times 7\times 1351 \pm \sqrt{4\times 48\times 1350\times 1352}\\ &= 2\times 7\times 1351 \pm \sqrt{4\times 48\times 3\times 450\times 8\times 169}\\ &= 2\times 7\times 1351 \pm 24\times 60\times 13\\ &= 18914 \pm 18720,\end{aligned}$$

即 $p = 194$ 或 $p = 37634$.

又由 $$p = \frac{m + c_0^2 + c_1^2}{c_0 c_1}$$

得 $$p = \frac{m + \left(\frac{7}{4}\right)^2 + \left(\frac{1351}{4}\right)^2}{\frac{7}{4}\times\frac{1351}{4}},$$

$$p = \frac{16m + 1825250}{9457},$$

$$m = \frac{9457p - 1825250}{16}.$$

当 $p = 194$ 时，$m = 588$.

反过来，当 $m = 588$ 时，取数列 $\{a_n\}$ 如下：

$$\begin{cases} a_0 = 1, a_1 = 337 \\ a_{n+1} = 194a_n - a_{n-1} + 144, n = 1,2,\cdots \end{cases}$$

显然该数列是整数列且满足(1).令

$$c_n = a_n + \frac{3}{4}, n = 0,1,2,\cdots$$

代入得

$$c_{n+1} = 194c_n - c_{n-1}, n = 1,2,\cdots$$

于是类似于上面的推导，我们有

$$\begin{aligned}&(a_{n+1}\cdot a_{n-1} - a_n^2) + \frac{3}{4}(a_{n+1} + a_{n-1} - 2a_n)\\ =\ & c_{n+1}\cdot c_{n-1} - c_n^2\\ =\ & (194c_n - c_{n-1})c_{n-1} - c_n^2\end{aligned}$$

$$= 194c_nc_{n-1} - c_{n-1}^2 - c_n^2$$
$$= 194c_n \cdot \frac{1}{194}(c_n + c_{n-2}) - c_{n-1}^2 - c_n^2$$
$$= c_nc_{n-2} - c_{n-1}^2$$
$$= \cdots$$
$$= c_2c_0 - c_1^2$$
$$= (194c_1 - c_0) \cdot c_0 - c_1^2$$
$$= 194 \cdot \frac{1351}{4} \cdot \frac{7}{4} - \left(\frac{7}{4}\right)^2 - \left(\frac{1351}{4}\right)^2$$
$$= 588$$
$$= m.$$

即(2)成立.

同样地,类似于前面的推导,我们可得

$$a_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n - \frac{3}{4}, n = 0,1,2,\cdots$$

其中 $\lambda_1 = 97 + 56\sqrt{3}, \lambda_2 = 97 - 56\sqrt{3}$,

$$A = \frac{1}{4} \cdot \frac{1351 - 7\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}, B = \frac{1}{4} \cdot \frac{-1351 + 7\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

并且

$$\frac{1}{6}(a_n + 1)(2a_n + 1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}A\lambda_1^n - \frac{1}{\sqrt{3}}B\lambda_2^n\right)^2$$

令

$$d_n = \frac{1}{\sqrt{3}}A\lambda_1^n - \frac{1}{\sqrt{3}}B\lambda_2^n, n = 1,2,\cdots$$

显然 $$d_0 = \sqrt{\frac{1}{6}(a_0 + 1)(2a_0 + 1)} = 1,$$

$$d_1 = \sqrt{\frac{1}{6}(a_1 + 1)(2a_1 + 1)} = 195$$

它们是整数.

设已证 d_{n-1}, d_n 是整数.于是

$$d_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{3}}A\lambda_1^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{3}}B\lambda_2^{n+1}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}A\lambda_1^n - \frac{1}{\sqrt{3}}B\lambda_2^n\right)\cdot(\lambda_1+\lambda_2) - \lambda_1\lambda_2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}A\lambda_1^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{3}}B\lambda_2^{n-1}\right)$$
$$= 194d_n - d_{n-1},$$

即 d_{n+1} 也是整数.

因此,对任意自然数 n,d_n 都是整数.从而$\frac{1}{6}(a_n+1)(2a_n+1)$ 都是整数的平方,即(3) 成立.

于是,原命题得证.

8·113　求正整数 k,使得

(a) 对任意正整数 n,不存在 j 满足 $0 \leqslant j \leqslant n-k+1$,且 C_n^j, C_n^{j+1},…,C_n^{j+k-1} 成等差数列;

(b) 存在正整数 n,使得有 j 满足 $0 \leqslant j \leqslant n-k+2$,且 C_n^j,C_n^{j+1},…,C_n^{j+k-2} 成等差数列.

进一步求出具有性质(b) 的所有 n.

(中国国家队选拔赛,1998 年)

[证]　由于任取两数必构成等差数列,因此 $k \neq 1$,$k \neq 2$.现在考虑三个数:C_n^{j-1},C_n^j,C_n^{j+1}($1 \leqslant j \leqslant n-1$)

若它成等差数列,则

$$2C_n^j = C_n^{j-1} + C_n^{j+1}$$

由此可得　$n+2=(n-2j)^2$　①

即 $n+2$ 是完全平方数.

这证明了 $k=3$ 时(a) 不成立,从而 $k \neq 3$.也证明了 $k=4$ 时(b) 成立.

反过来,若有正整数 n,满足条件"$n+2$ 是完全平方数",则有 $n+2=m^2$,因 n、m 奇偶性相同,故存在 j 使 $m=n-2j$.从而,① 成立,性质(b) 成立,故 $k=4$ 时,具有性质(b) 的所有 n 为

$$n = m^2 - 2 \quad (m \in N, m \geqslant 3).$$

下面证明　$k=4$ 时,性质(a) 也成立.

若 C_n^j,C_n^{j+1},C_n^{j+2},C_n^{j+3} 成等差数列,则由 ① 可知

$$n = (n-2(j+1))^2 - 2 = (n-2(j+2))^2 - 2;$$
$$|n-2j-2| = |n-2j-4|,$$
$$n-2j-2 = -(n-2j-4),$$

$$n = 2j + 3$$

原数列为 $C_{2j+3}^{j}, C_{2j+3}^{j+1}, C_{2j+3}^{j+2}, C_{2j+3}^{j+3}$.

但 $\quad C_{2j+3}^{j} = C_{2j+3}^{j+3}$,

故 $\quad C_{2j+3}^{j} = C_{2j+3}^{j+1}$,矛盾.

因此,$k = 4$ 时(a)成立,且 $k = 5$ 时(b)不成立,即 $k < 5$.

综上所述,所求正整数 $k = 4$,具有性质(b)的所有 n 为

$$n = m^2 - 2(m \in N, m \geqslant 3).$$

8・114 一个正整数无穷等差数列,含一项是整数的平方,另一项是整数的立方.证明:此数列含一项是整数的六次幂.

(第 38 届国际数学奥林匹克预选题,1997 年)

[证] 设数列为

$$\{a + ih \mid i = 0,1,2,\cdots\},$$

其中含 x^2, y^3 项,x, y 是整数.

下面我们对 h 用数学归纳法.

当 $h = 1$ 时,命题显然成立.

假设公差小于 h 且满足题设条件的等差数列,命题已成立.现在考察公差为 h 时的情形.

记 a 和 h 的最大公约数为 $d = (a,h), h = de$.

分两种情况:

情形 1 当$(d,e) = 1$时,显然有$(a,e) = 1$.

因为

$$x^2 \equiv a \equiv y^3, \quad (\bmod h),$$

所以

$$x^2 \equiv a \equiv y^3, \quad (\bmod e).$$

由$(a,e) = 1$可得

$$(x,e) = 1, (y,e) = 1.$$

于是存在整数 t,使得

$$ty \equiv x, (\bmod e),$$

$$(ty)^6 \equiv x^6, (\bmod e).$$

$$t^6a^2 \equiv a^3, (\bmod e),$$

$$t^6 \equiv a, (\bmod e). \quad ①$$

又由$(d,e) = 1$,可知存在某个整数 k,使

$$t + ke \equiv 0, \quad (\bmod d),$$
$$(t + ke)^6 \equiv 0 \equiv a, (\bmod d).$$

另一方面,由①可得

$$(t + ke)^6 \equiv a, (\bmod e).$$

又由$(d,e) = 1$得

$$(t + ke)^6 \equiv a, (\bmod de).$$

即 $$(t + ke)^6 \equiv a, (\bmod h).$$

显然,存在的k可用$k + sd(s \in N)$代替,从而可使

$$(t + ka)^6 > a,$$

这时$(t + ka)^6$就含在等差数列$\{a + ih \mid i = 0,1,2,\cdots\}$中.

情形2 当$(d,e) > 1$时.

设素数p满足$p \mid d, p \mid e$,并设p^α是整除a的p的最高次幂,p^β是整除h的p的最高次幂.$a = da'$.于是由

$$h = de, \quad (a', e) = 1$$

可知,$\beta > \alpha \geqslant 1$.因而等差数列$\{a + ih \mid i = 0,1,\cdots\}$中的每一项含$p$的最高次幂是$p^\alpha$.因为$x^2, y^3$是数列的两项,所以$\alpha$一定是2和3的倍数,从而是6的倍数,令新的等差数列为

$$\{p^{-6}(a + ih) \mid i = 0,1,2,\cdots\}.$$

它的公差$p^{-6}h < h$,且含有项$(p^{-3}x)^2, (p^{-2}y)^3$.由归纳假设,它含有项z^6.于是$(pz)^6$是原数列中的一项.

由数学归纳法原理知,原命题成立.

第4节 周期性与收敛性

8·115 设整数有界数列$a_1, a_2, a_3, \cdots$满足

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}a_{n-4}}{a_{n-1}a_{n-2} + a_{n-3} + a_{n-4}}, n \geqslant 5.$$

求证存在$l \in N$,使得$a_l, a_{l+1}, a_{l+2}, \cdots$为周期数列.

(第25届美国普特南数学竞赛,1964年)

[证] 由假设可知存在正整数M,使得

$$|a_n| \leqslant M, n = 1,2,3\cdots$$

令 $$A = \{(a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}); n = 1,2,3,\cdots\}$$

由于　　$a_n \in \{-M, -(M-1), \cdots, 0, \cdots, M-1, M\}$，从而 A 中不同的数组个数至多为 $(2M+1)^4$，从而存在 $1 \leqslant l < k$ 使得

$$a_{l+i} = a_{k+i}, i = 0,1,2,3.$$

由递推公式可得 $a_{l+4} = a_{k+4}$. 依此类推用归纳法可知，对任意非负整数 m 有

$$a_{l+m} = a_{k+m}. \qquad ①$$

记 $T = k - l$，由 ① 可知，$a_l, a_{l+1}, a_{l+2}, \cdots$ 是以 T 为周期的周期数列.

8·116　对于任意自然数 n，用 a_n 表示 n^n 十进制表示中的个位数字，求证：$a_1, a_2, a_3, \cdots$ 是一个周期数列.

（第 28 届莫斯科数学奥林匹克，1965 年）

[证]　令 b_n 是自然数 n 的个位数字，易知

$$b_n^{20} = \begin{cases} 0, b_n = 0; \\ 1, b_n = 1,3,7,9; \\ 5, b_n = 5; \\ 6, b_n = 2,4,6,8. \end{cases}$$

对任意自然数 n, m，显然 $b_{n \cdot m} = (b_n) \cdot (b_m)$ 的个位数字. 由此可得 $b_{n \cdot n^{20}} = b_n$. 用归纳法易知对任何自然数 k 有

$$b_{n^k \cdot n^{20}} = b_{n^k}.$$

取 $k = n$，注意到 $b_{n^n} = a_n$ 可得

$$b_{n^n \cdot n^{20}} = a_n.$$

显然 $(n+20)^{n+20}$ 与 n^{n+20} 有相同的个位数字，所以

$$a_{n+20} = a_n, n = 1,2,3\cdots$$

8·117　设 α_n 和 β_n 分别是 $[(\sqrt{10})^n]$ 和 $[(\sqrt{2})^n]$ 的个位数字，$n = 1,2,3,\cdots$ 其中 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数. 问 $\{\alpha_n\}$ 和 $\{\beta_n\}$ 是否是循环数列，即从某项开始为周期数列？

（第 17 届全苏数学奥林匹克，1983 年）

[解]　$\{\alpha_n\}$ 和 $\{\beta_n\}$ 都不是循环数列. 事实上，首先考察 $\{\alpha_n\}$. 在十进制下令

$$\sqrt{10} = 3.x_1x_2x_3\cdots$$

所以　　$\alpha_n = \begin{cases} 0, n = 2k, \\ x_k, n = 2k+1. \end{cases} \quad k = 1,2,3,\cdots$

由于 $3.x_1x_2x_3\cdots$ 是无限不循环小数,从而易知 $\{\alpha_n\}$ 不是循环数列.

其次考察 $\{\beta_n\}$.在二进制下令

$$\sqrt{2}=1.y_1y_2y_3\cdots$$

由 β_n 的定义可知,当 $n=2k$ 时,β_n 是偶数;当 $n=2k+1$ 时,$k=1,2,3,\cdots$

$$\beta_n\equiv y_k(\bmod 2).\qquad ①$$

如果 $\{\beta_n\}$ 是循环数列,则存在自然数 n_0 和 m 使得 $\beta_{n+m}=\beta_n$,对于任意 $n>n_0$. ②

若 m 是奇数,由此可知对于任意 $n>n_0$ 且 n 为奇数时,β_n 为偶数,由 ① 可知当自然数 $k>\frac{1}{2}(n_0-1)$ 时,$y_k=0$,与 $\sqrt{2}$ 是无理数矛盾.若 m 是偶数,记 $m=2l$.设 $k>\frac{1}{2}(n_0-1)$,由 ② 可得

$$\beta_{2(k+l)+1}=\beta_{2k+1}.$$

再由 ① 和 y_k 只取 0 或 1 可知

$$y_{k+l}=y_k,\text{对于任意 } k>\frac{1}{2}(n_0-1).$$

于是 $1.y_1y_2y_3\cdots$ 是无限循环小数,也与 $\sqrt{2}$ 是无理数矛盾.所以 $\{\beta_n\}$ 不是循环数列.

8·118 设数列 $\{x_n\}$ 满足

$$x_1=2,x_{n+1}=\left[\frac{3}{2}x_n\right],n=1,2,3\cdots$$

记 $y_n=(-1)^{x_n}$,求证:$\{y_n\}$ 不是周期数列.

(第 40 届莫斯科数学奥林匹克,1977 年)

[证] 由假设可知当 x_n 是偶数时,则 $x_{n+1}=\frac{3}{2}x_n$,当 x_n 是奇数时,则 $x_{n+1}=\frac{3}{2}x_n-\frac{1}{2}$.于是对任何自然数 $n>m$,若 x_n 与 x_m 同奇偶,则

$$x_{n+1}-x_{m+1}=\frac{3}{2}(x_n-x_m)\qquad ①$$

如果 $\{y_n\}$ 是周期数列,设其周期为 T,则对任何自然数 n,x_{n+T} 与 x_n 同奇偶.由 ① 可得

$$x_{n+1+T}-x_{n+1}=\frac{3}{2}(x_{n+T}-x_n),n=1,2,\cdots$$

依此类推可知对任意自然数 n 有

$$x_{n+T}-x_n=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}(x_T-x_1).$$

显然存在 n_0，当 $n>n_0$ 时 $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}(x_T-x_1)$ 不是整数，这和 $\{x_n\}$ 是自然数列矛盾！

8·119 已知数列 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 满足 $a_{2n}=a_n$，对于任意 $n\geqslant 1$，$a_{4n+1}=1,a_{4n+3}=0,\forall n\geqslant 0$.

求证：这个数列不是周期数列.

（第 19 届全苏数学奥林匹克，1985 年）

［证］ 用反证法，设 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 是周期数列，其周期为 $T=2^rq$，其中 r 是非负整数，q 是正奇数. 若存在 $n\geqslant 0$，使得 $q=4n+1$. 取 $m\geqslant 0$ 使得 $m+n=4k$，其中 k 为非负整数. 由假设可得

$$\begin{aligned}0&=a_{4m+3}=a_{2^r(4m+3)}=a_{2^r(4m+3)+T}\\&=a_{2^r(4m+4n+4)}=a_{m+n+1}=a_{4k+1}=1.\end{aligned}$$

矛盾！若存在 $n\geqslant 0$，使得 $q=4n+3$. 取 $m\geqslant 0$ 使得 $m+n=4k+2$，其中 k 为非负整数，同样可引出矛盾.

8·120 已知十进制表示的正整数序列 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$ 满足

$$a_n<a_{n+1}\leqslant 10a_n,n=1,2,3\cdots$$

求证：一个接一个地写下这一数列所得的无限十进制小数 $0.a_1a_2a_3\cdots$ 不是循环小数.

（第 43 届莫斯科数学奥林匹克，1980 年）

［证］ 用反证法. 设 $0\cdot a_1a_2a_3\cdots$ 是循环小数且最短循环节的位数是 T. 由于自然数列严格递增，从而当 $n\to\infty$ 时，$a_n\to+\infty$. 又 $a_{n+1}\leqslant 10a_n$，所以 a_{n+1} 的位数比 a_n 的位数至多多 1. 由此易知存在 a_k 使得它的位数恰是 T 的正整数倍，于是 a_k 是 $0.a_1a_2a_3\cdots$ 的一个循环节. 如果 a_{k+1} 的位数与 a_k 的位数相同，则 $a_{k+1}=a_k$. 如果 a_{k+1} 的位数比 a_k 的位数多 1，则 $a_{k+1}=10a_k$. 由此即得 a_k 的首位数码为 0. 无论何种情况都引出矛盾！

8·121 已知数列 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 由 $a_1=1$ 及递推关系

$$a_{2^k+j}f=-a_j,k=0,1,2,\cdots \quad j=1,2,\cdots,2^k$$,给出.求证:这个数列不是周期数列.

(第30届国际数学奥林匹克候选题,1989年)

[证] 由递推关系可得

$$a_{2^{k+1}}=-a_{2^k},k=0,1,2,\cdots$$

又 $a_1=1$,所以对任何非负整数 k 有

$$a_{2^k}=(-1)^k.$$

如果这个数列是周期数列,则存在自然数 T,使得对任意非负整数 m 都有

$$a_{m+T}=a_m.$$

于是当自然数 k 满足 $T\leqslant 2^k$ 时,可得

$$(-1)^k=a_{2^k}=a_{2^k+T}=-a_T,$$

$$(-1)^{k+1}=a_{2^{k+1}}=a_{2^{k+1}}+T=-a_T,$$

引出矛盾!

8·122 设 $p(n)$ 是自然数 n 十进制表示中所有数字之积,又数列 $\{n_k\}$ 满足

$$n_1\in N,n_{k+1}=n_k+P(n_k),k=1,2,3\cdots$$

问 $\{n_k\}$ 是否是无界的?

(第14届全苏数学奥林匹克,1980年)

[解] 可以证明 $\{n_k\}$ 是有界的.事实上,设 $\{n_k\}$ 无界.由递推公式易知每一个 n_k 的十进制表示中不出现数字"0".因此

$$n_1<n_2<n_3<\cdots<n_k<\cdots$$

由于存在 m_0 使得当 $m>m_0$ 时 $\left(\frac{9}{10}\right)^m<\frac{1}{10}$,所以对任何 m 位数 n,其中 $m>m_0$,都有

$$p(n)\leqslant 9^m<10^{m-1}. \qquad ①$$

由于 $\{n_k\}$ 严格单增无界,从而存在 $m>m_0$ 和 k,使得 n_k 是 m 位数,n_{k+1} 是 $m+1$ 位数,又 n_{k+1} 的十进制表示中不出现数字"0",所以

$$p(n_k)=n_{k+1}-n_k\geqslant 10^{m-1}+10^{m-2}+\cdots+10+2.$$

与①矛盾!

以上不仅证明了$\{n_k\}$是有界的，而且还证明了存在 m 使得

$$n_m = n_{m+k}, k = 1,2,3,\cdots$$

8·123　对于任意非负整数 n，令 $S(n) = n - m^2$，其中 m 是满足 $m^2 \leqslant n$ 的最大整数. 设数列$\{a_n\}$满足 $a_0 = A$，且

$$a_{n+1} = a_n + S(a_n), n \geqslant 0.$$

问对于哪些非负整数 A，这个数列自某些项起为常数列?

（第 52 届美国普特南数学竞赛，1992 年）

［解］　显然当 A 是完全平方数时，此数列为常数列，设 a_n 不是完全平方数，则有 m 使得

$$a_n = m^2 + r,$$

其中 m, r 都是正整数且 $1 \leqslant r \leqslant 2m$，即 $S(a_n) = r$. 于是

$$a_{n+1} = m^2 + 2r.$$

由于 $2r \leqslant 4m$，所以 $a_{n+1} < (m+2)^2$. 又 $2r \neq 2m+1$，从而 $a_{n+1} \neq (m+1)^2$. 这样就证明了当 a_n 不是完全平方数时，a_{n+1} 也不是. 由此可知，如果 A 不是完全平方数，那么数列$\{a_n\}$中每一项都不是完全平方数. 此时该数列是严格递增的正整数列.

8·124　设正数列$\{a_k\}$和$\{b_k\}$满足

(1) $a_k < b_k, k = 1,2,3\cdots$

(2) 对任意自然数 k 和实数 x 有

$$\cos a_k x + \cos b_k x \geqslant -\frac{1}{k}.$$

求证：$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k}$ 存在并求出它的值.

（第 28 届国际数学奥林匹克候选题，1987 年）

［解］　取 $x = \frac{\pi}{b_k}$，则由(2)可得

$$\cos\frac{a_k}{b_k}\pi \geqslant 1 - \frac{1}{k}, k = 1,2,3\cdots$$

由假设(1)有　　$0 < \frac{a_k}{b_k}\pi < \pi$，从而

$$0 < \frac{a_k}{b_k} < \frac{1}{\pi}\arccos\left(1 - \frac{1}{k}\right).$$

由于$\lim\limits_{k\to\infty}\arccos\left(1-\frac{1}{k}\right)=0$,所以

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k}=0.$$

8·125　已给正数 a 和自然数 m,设数列$\{x_n\}$满足:对于非负整数 n 有

$$x_{n+1}=\left(1-\frac{1}{m}\right)x_n+\frac{a}{mx_n^{m-1}},$$

其中 $x_0>0$ 任意给定.求证:$\lim\limits_{k\to\infty}x_n=\sqrt[m]{a}$.

(基辅数学奥林匹克,1977 年)

[证]　如果 $x_n>0$,则由递推关系和均值不等式可得

$$\begin{aligned}x_{n+1}&=\frac{m-1}{m}x_n+\frac{a}{mx_n^{m-1}}\\&=\frac{1}{m}\left(\underbrace{x_n+\cdots+x_n}_{m-1\text{个}}+\frac{a}{x_n^{m-1}}\right)\\&\geqslant\sqrt[m]{a},\end{aligned}$$

从而用归纳法易知,当 $n\geqslant1$ 时有

$$x_n\geqslant\sqrt[m]{a},$$

由此可知

$$x_{n+1}-x_n=\frac{a-x_n^m}{mx_n^{m-1}}\leqslant0,n=1,2,3,\cdots$$

于是$\{x_n\}$单调减小且有下界,从而$\lim\limits_{k\to\infty}x_n$存在.在

$$x_{n+1}=\left(1-\frac{1}{m}\right)x_n+\frac{a}{mx_n^{m-1}}\text{中,令 }n\to\infty\text{,则}$$

$$\lim_{k\to\infty}x_n=\sqrt[m]{a}.$$

8·126　设数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$满足

$$y_n=x_{n-1}+2x_n,n=2,3,4,\cdots$$

如果$\{y_n\}$收敛,求证:$\{x_n\}$也收敛.

(第 30 届美国普特南数学竞赛,1969 年)

[证]　令 $\alpha=\lim\limits_{k\to\infty}y_n$,则当 $n\geqslant2$ 时,

$$y_n - \alpha = x_{n-1} + 2x_n - \alpha = 2\left(x_n - \frac{\alpha}{3}\right) + \left(x_{n-1} - \frac{\alpha}{3}\right),$$

所以对于 $n = 2,3,4,\cdots$ 有

$$\left|x_n - \frac{\alpha}{3}\right| \leqslant \frac{1}{2}|y_n - \alpha| + \frac{1}{2}\left|x_{n-1} - \frac{\alpha}{3}\right|. \qquad ①$$

任给 $\varepsilon > 0$,由 $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 可知存在自然数 $m \geqslant 2$,使得当 $y \geqslant m$ 时,

$$|y_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由 ① 可得

$$\left|x_m - \frac{\alpha}{3}\right| \leqslant \frac{1}{2}|y_m - \alpha| + \frac{1}{2}\left|x_{m-1} - \frac{\alpha}{3}\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{1}{2}\left|x_{m-1} - \frac{\alpha}{3}\right|,$$

$$\left|x_{m+1} - \frac{\alpha}{3}\right| \leqslant \frac{1}{2}|y_{m+1} - \alpha| + \frac{1}{2}\left|x_m - \frac{\alpha}{3}\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{8} + \frac{1}{4}\left|x_{m-1} - \frac{\alpha}{3}\right|.$$

一般对于任意非负整数 k,有

$$\left|x_{m+k} - \frac{\alpha}{3}\right| < \frac{\varepsilon}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) + \frac{1}{2^{k+1}}\left|x_{m-1} - \frac{\alpha}{3}\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2^{k+1}}\left|x_{m-1} - \frac{\alpha}{3}\right|$$

固定 m,存在非负整数 l,使得

$$\frac{1}{2^{l+1}}\left|x_{m-1} - \frac{\alpha}{3}\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

从而当 $n \geqslant m + l$ 时

$$\left|x_n - \frac{\alpha}{3}\right| < \varepsilon.$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$ 得证.

8・127 求证:当 $n \to \infty$ 时,数列 $x_n = \sin n^2$ 不趋向于 0.

(第 44 届莫斯科数学奥林匹克,1981 年)

[证] 用反证法.设 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n^2 = 0$.由

$$|\sin(2n+1)| = |\sin[(n+1)^2 - n^2| \leqslant |\sin(n+1)^2| + |\sin n^2|$$

可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(2n+1)=0.$

再由 $|\sin 2|=|\sin(2n+3-2n-1)|$

$\leqslant|\sin(2n+3)|+|\sin(2n+1)|$ 可知 $\sin 2=0$,矛盾!

8·128 设正数列$\{a_n\}$单调减小,且任意有限多项的和都不大于1,求证:$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$.

(基辅数学奥林匹克,1978年)

[证] 令 $S_0=0,S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n,n=1,2,3\cdots$ 由于 $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}>0,S_n\leqslant 1$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$收敛.对于任意自然数 n,令

$$b_n=S_n-S\left[\tfrac{n}{2}\right],$$

则由$\{a_n\}$的单减性可知

$$0<b_n=a\left[\tfrac{n}{2}\right]+1+\cdots+a_n\geqslant\left(n-\left[\frac{n}{2}\right]\right)a_n\geqslant\frac{1}{2}na_n$$

由$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$收敛可推出

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S\left[\tfrac{n}{2}\right]=0,$$

再由 $0<na_n\leqslant 2b_n$ 可知

$$\lim_{n\to\infty}na_n=0.$$

8·129 设数列$\{x_n\}$满足 $x_1=5$,且

$$x_{n+1}=x_n^2-2,n=1,2,\cdots$$

求:$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_1x_2\cdots x_n}$.

(基辅数学奥林匹克,1978年)

[解] 用归纳法易证

$$x_n>2,n=1,2,\cdots \qquad ①$$

由于
$$\begin{aligned}x_{n+1}^2-4&=(x_n^2-2)^2-4=x_n^2(x_n^2-4)\\&=x_n^2x_{n-1}^2(x_{n-1}^2-4)\\&=\cdots=x_n^2x_{n-1}^2\cdots x_1^2(x_1^2-4)=21(x_1x_2\cdots x_n)^2,\end{aligned}$$

所以
$$\left(\frac{x_{n+1}}{x_1\cdots x_n}\right)^2=21+\frac{4}{(x_1\cdots x_n)^2}.$$

由①可得

$$\frac{4}{(x_1\cdots x_n)^2}<\frac{4}{2^{2n}},$$

从而$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{(x_1\cdots x_n)^2}=0$. 由此可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_1x_2\cdots x_n}=\sqrt{21}.$$

8・130　设数列$\{a_n\}$满足:$a_1=a_2=1$,且

$$a_{n+1}=a_n+\frac{a_{n-1}}{n(n+1)},n=2,3,\cdots$$

求证:这个数列收敛.

(基辅数学奥林匹克,1982年)

[证]　显然对所有的$n\in N$,$a_n>0$,且$a_{n+1}\geqslant a_n$.从而只需证数列$\{a_n\}$是有界的.由递推关系可得

$$\sum_{k=2}^{n}a_{k+1}=\sum_{k=2}^{n}a_k+\sum_{k=2}^{n}\frac{a_{k-1}}{k(k+1)},$$

从而
$$a_{n+1}=a_2+\sum_{k=2}^{n}\frac{a_{k-1}}{k(k+1)},n=2,3,\cdots$$

显然$a_3=\dfrac{7}{6}$,如果对于$3\leqslant k\leqslant n$有$a_k<\dfrac{5}{3}$,则

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=a_2+\frac{a_1}{2\cdot 3}+\frac{a_2}{3\cdot 4}+\frac{a_3}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{n(n+1)}\\&<1+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{5}{3}\left(\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)\\&<\frac{5}{4}+\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{3}.\end{aligned}$$

于是用归纳法易知对所有$n\in N$,有$0<a_n<\dfrac{5}{3}$.

8・131　设数列$\{x_n\}$满足:$x_1=1,x_2=-1$,且

$$x_{n+2}=x_{n+1}^2-\frac{1}{2}x_n,n\geqslant 1.$$

求证:$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$收敛并求此极限.

(第18届全苏数学奥林匹克,1984年)

[证]　可以证明,如果存在$0<\delta<\dfrac{1}{2}$和自然数k使得$|x_k|\leqslant\delta$,$|x_{k+1}|\leqslant\delta$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.事实上,由递推公式可得

$$|x_{k+2}| \leqslant |x_{k+1}|^2 + \frac{1}{2}|x_k| \leqslant q\delta,$$ 其中 $q = \delta + \frac{1}{2}$,显然 $0 < q < 1$.于是

$$|x_{k+3}| \leqslant |x_{k+2}|^2 + \frac{1}{2}|x_{k+1}| \leqslant \left(q^2\delta + \frac{1}{2}\right)\delta < q\delta.$$

再用递推公式可得

$$|x_{k+4}| < q^2\delta, \ |x_{k+5}| < q^2\delta.$$

依此类推用归纳法可得

$$|x_{k+2n}| < q^2\delta, \ |x_{k+2n+1}| < q^n\delta, n = 1,2,3,\cdots$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0.$

由 $x_1 = 1, x_2 = -1$,利用递推公式易知

$$x_3 = \frac{1}{2}, x_4 = \frac{3}{4}, x_5 = \frac{5}{16}, x_6 = \frac{-71}{256}.$$

显然 $|x_5| < \frac{1}{2}$, $|x_6| < \frac{1}{2}$,由上面已证的结果即得

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

8・132 对于十进制无限小数 $x \in [0,1]$,将它的小数点后的前5个数字重排后得到新的小数 x_1,再把 x_1 的小数点后第2至第6个数字重排后得 x_2.依此类推,x_{k+1} 由 x_k 的小数点后第 $k+1$ 至第 $k+5$ 个数字重排后得到,这样得无穷数列 $x_1, x_2, \cdots x_k, \cdots$

(1) 求证:在每一步无论怎样重排,$\lim\limits_{k\to\infty} x_k$ 存在,记 $y = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$.

(2) 问能否利用上述过程从一个有理数 x 得到无理数 y?

(3) 求一个数 $x \in [0,1]$,使得利用上述过程,无论在每一步如何重排,所得之极限值 y 总是无理数.

(第 14 届全苏数学奥林匹克,1980 年)

[解] (1) 由数列 $\{x_k\}$ 的构造方法可知,对任何自然数 k,数列 $x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \cdots$ 每一项小数后的前 k 个数字保持不变,即若记

$$x_k = 0.x_{k1}x_{k2}x_{k3}\cdots, k = 1,2,3,\cdots,$$

则对于 $i = 1,2,\cdots,k$ 有

$$x_{ki} = x_{k+1i} = x_{k+2i} = \cdots, k = 1,2,3,\cdots.$$

令 $z_k = 0.x_{k1}x_{k2}\cdots x_{kk}$,显然 $z_1, z_2, \cdots, z_k, \cdots$ 是单调不减且有上界的序列,所以存在 $y \in [0,1]$ 使得

$$y=\lim_{k\to\infty} z_k.$$

又 $|x_k - z_k| \leqslant 10^{-k}$,从而 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = y$.

(2) 能.例如 $x = 0.\dot{1}\dot{0}$,易知用上述过程,从 x 开始可得到 $y = 0.y_1y_2\cdots y_k\cdots$ 其中 $y_{10^n+1}=1, y_{10^n+2}=1, y_{10^n+3}=0, y_{10^n+4}=0, n=1,2,3,\cdots$ 其余的 y_k 与 x 的小数点后第 k 个数字相同.显然 y 是无理数.

(3) 取 $x = 0.x_1x_2\cdots x_k\cdots$ 其中

$$x_{10^n}=1, n=0,1,2\cdots$$

其余的 $x_k = 0$.显然从 x 出发,用上述过程只能得无理数 y.

8・133 设 $x_n=(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^n, n=1,2,3,\cdots$ 若把 x_n 表示为 $x_n = q_n + r_n\sqrt{2} + s_n\sqrt{3} + t_n\sqrt{6}$,其中 q_n, r_n, s_n 和 t_n 都是整数,求下列极限:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{q_n}, \lim_{n\to\infty}\frac{s_n}{q_n}, \lim_{n\to\infty}\frac{t_n}{q_n}.$$

(第 12 届全苏数学奥林匹克,1978 年)

[解] 令 $u_1 = 1+\sqrt{2}+\sqrt{3}, u_2 = 1-\sqrt{2}+\sqrt{3}, u_3 = 1+\sqrt{2}-\sqrt{3}, u_4 = 1-\sqrt{2}-\sqrt{3}$,易知

$$u_1^n = q_n + r_n\sqrt{2} + s_n\sqrt{3} + t_n\sqrt{6},$$
$$u_2^n = q_n - r_n\sqrt{2} + s_n\sqrt{3} - t_n\sqrt{6},$$
$$u_3^n = q_n + r_n\sqrt{2} - s_n\sqrt{3} - t_n\sqrt{6},$$
$$u_4^n = q_n - r_n\sqrt{2} - s_n\sqrt{3} + t_n\sqrt{6}.$$

所以

$$4q_n = u_1^n + u_2^n + u_3^n + u_4^n,$$
$$4\sqrt{2}r_n = u_1^n - u_2^n + u_3^n - u_4^n,$$
$$4\sqrt{3}s_n = u_1^n + u_2^n - u_3^n - u_4^n,$$
$$4\sqrt{6}t_n = u_1^n - u_2^n - u_3^n + u_4^n.$$

由于 $|u_k| < |u_1|, k=2,3,4$,从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_k^n}{u_1^n}=0, k=2,3,4$.由此可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{q_n}{u_1^n}=\frac{1}{4}, \text{即} \lim_{n\to\infty}\frac{u_1^n}{q_n}=4.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{q_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{u_1^n}\cdot\frac{u_1^n}{q_n}=\frac{4}{4\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_n}{q_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{s_n}{u_1^n}\cdot\frac{u_1^n}{q_n}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{t_n}{q_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{t_n}{u_1^n}\cdot\frac{u_1^n}{q_n}=\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

8·134 设无穷数列$\{a_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n\right)=0$.

求证:$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

(第11届全苏数学奥林匹克,1977年)

[解] 由于$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n\right)=0$,根据极限的定义可知,任给$\varepsilon>0$,存在正整数$N$使得当$n\geqslant N$时有 $\left|a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n\right|<\frac{\varepsilon}{4}$. ①

对于固定的N,存在正整数k使得

$$\left|\frac{1}{2^k}a_N\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \quad ②$$

于是当$n\geqslant N+k$时,从①可得

$$\left|a_n-\frac{1}{2}a_{n-1}\right|<\frac{\varepsilon}{4},$$

$$\left|\frac{a_{n-1}}{2}-\frac{a_{n-2}}{4}\right|<\frac{\varepsilon}{8},$$

………

$$\left|\frac{a_{N+1}}{2^{n-N-1}}-\frac{a_N}{2^{n-N}}\right|<\frac{\varepsilon}{2^{n-N+1}}.$$

从而$|a_n|<\frac{\varepsilon}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-N-1}}\right)+\frac{|a_N|}{2^{n-N}}$.由$n-N\geqslant k$,再由②可得当$n\geqslant N+k$时,$|a_n|<\varepsilon$,即$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

8·135 设$a_0>0$且

$$a_{n+1}=\frac{a_n^2-1}{n+1},n\geqslant 0.$$

求证存在实数$a>0$,使得

(i) 若 $a_0 \geqslant a$,则当 $n \to +\infty$ 时,$a_n \to +\infty$.

(ii) 若 $a_0 < a$,则当 $n \to +\infty$ 时,$a_n \to 0$.

(第 29 届国际数学奥林匹克候选题,1988 年)

[证] 如果 $a_n \geqslant n+2$,则

$$a_{n+1} \geqslant \frac{(n+2)^2-1}{n+1} = \frac{n^2+4n+3}{n+1} = n+3.$$

于是若 $a_0 \geqslant 2$,用归纳法可证明

$a_n \geqslant n+2$,对于任意 $n \geqslant 0$.

由此可得当 $n \to +\infty$ 时,$a_n \to +\infty$.

以下讨论 $0 < a_0 < 2$ 的情形,若存在非负整数 k,使得 $a_{k+1} \leqslant 0$,则由递推公式可得

$|a_k| \leqslant 1$.

用归纳法易证当 $n \geqslant k$ 时有

$$|a_{n+1}| = \frac{1-a_n^2}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1} \to 0.$$

由于若 $0 < a_0 \leqslant 1$,则 $a_1 \leqslant 0$. 从而只需讨论 $1 < a_0 < 2$ 且一切 $a_n \geqslant 0$ 的情况. 令 $a_0 = 2-\varepsilon$,其中 $0 < \varepsilon < 1$. 用归纳法可以证明

$a_n \leqslant n+2-n\varepsilon$,对于任意 $n \geqslant 0$.

事实上,显然当 $n=0$ 时,不等式成立. 设 $n=k$ 时,不等式成立,则

$$\begin{aligned} a_{k+1} &\leqslant \frac{[(k+2)-k\varepsilon]^2-1}{k+1} \\ &= \frac{(k+1)(k+3)-2k(k+2)\varepsilon+k^2\varepsilon^2}{k+1} \\ &< (k+3)-(k+1)\varepsilon. \end{aligned}$$

所以不等式对于 $n=k+1$ 也成立. 由此不等式可知,存在自然数 m,使得 $0 \leqslant a_m \leqslant m+1$. 从而

$$0 \leqslant a_{m+1} \leqslant \frac{(m+1)^2-1}{m+1} < m+1.$$

进一步用归纳法可得对于 $n \geqslant m$ 有

$$|a_{n+1}| \leqslant \frac{a_n^2-1}{n+1} \leqslant \frac{(m+1)^2-1}{n+1} \to 0 (n \to +\infty).$$

综上所述得 $a=2$.

8·136 设自然数数列 $\{a_n\}$ 满足:

$a_1 = 2, a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1, n = 1,2,3,\cdots$ 求证：

(1) 任取 $m, n \in N, m \neq n$，则 a_m 与 a_n 的最大公因子为 1.

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k} = 1$.

（第 16 届美国普特南数学竞赛，1956 年）

[证] (1) 用归纳法易证

$$a_{n+1} = a_1 a_2 \cdots a_n + 1, n = 1,2,3,\cdots \quad ①$$

任取 $m, n \in N, m \neq n$. 不妨设 $m < n$，由 ① 可知存在自然数 k，使得

$$a_n = k a_m + 1,$$

从而 a_n 与 a_m 的最大公因子为 1.

(2) 用归纳法可以证明

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = 1 - \frac{1}{a_{k+1} - 1}. \quad ②$$

当 $n = 1$ 时，由于 $\frac{1}{a_1} = \frac{1}{2}, a_2 = 3$，所以 ② 成立. 如果 ② 对于 $n = m$ 成立，则

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{a_k} = 1 - \frac{1}{a_{m+1} - 1} + \frac{1}{a_{m+1}}.$$

由 ① 可知

$$\frac{1}{a_{m+1} - 1} - \frac{1}{a_{m+1}} = \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_m a_{m+1}} = \frac{1}{a_{m+2} - 1},$$

从而

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{a_k} = 1 - \frac{1}{a_{m+2} - 1},$$

即 ② 对于 $n = m + 1$ 也成立，这就完成了 ② 式的归纳证明.

显然有 $\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$，所以由 ② 得

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k} = 1.$$

8 · 137 设正数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_{n+1} \leqslant \sqrt[3]{a_n a_{n-1}^2}, n = 2,3,\cdots$$

求证：该数列收敛.

（全苏数学夏令营，1991年）

［证］ 由于 $a_{n+1} \leqslant \sqrt[3]{a_n a_{n-1}^2}$，所以

$$a_{n+1} \leqslant \max\{a_{n-1}, a_n\}. \quad ①$$

对于 $n \geqslant 2$，令 $b_n = \max\{a_{n-1}, a_n\}$，则由 ① 可得

$$b_{n+1} = \max\{a_n, a_{n+1}\} \leqslant \max\{a_n, a_{n-1}\} = b_n,$$

即 $\{b_n\}$ 是单调减小的正数列，从而 $\{b_n\}$ 收敛. 记 $\beta = \lim_{n\to\infty} b_n$，显然

$$0 \leqslant \beta \leqslant b_n, n = 2,3,4,\cdots$$

以下证 $\lim_{n\to\infty} a_n = \beta$. 由于

$$0 < a_n \leqslant b_n, \text{对于任意 } n \geqslant 2,$$

所以当 $\beta = 0$ 时，显然有

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \beta = 0.$$

设 $\beta > 0$. 任给 $0 < \varepsilon < \beta$，由于 $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$，且 $\{b_n\}$ 单调减小，从而存在 $n_0 \geqslant 2$，使得当 $n > n_0$ 时

$$\beta \leqslant b_n < \beta + \frac{\varepsilon}{2}. \quad ②$$

于是得到

$$0 < a_n \leqslant b_n < \beta + \frac{\varepsilon}{2}, \text{对于任意 } n > n_0. \quad ③$$

可以证明，当 $n > n_0 + 1$ 时，

$$\beta - \varepsilon < a_n. \quad ④$$

用反证法证 ④. 设存在 $n > n_0 + 1$，使得

$$a_n \leqslant \beta - \varepsilon.$$

由 ② 可知 $a_{n-1} \leqslant \max\{a_{n-1}, a_n\} = b_n < \beta + \frac{\varepsilon}{2}$.

利用递推关系得

$$a_{n+1} = \sqrt[3]{a_n a_{n-1}^2} < \sqrt[3]{(\beta - \varepsilon)(\beta + \frac{\varepsilon}{2})^2} < \beta,$$

所以 $b_{n+1} = \max\{a_{n+1}, a_n\} < \beta$，其中 n 是某个大于 n_0 的自然数，与 ② 矛盾！所以 ④ 成立，由 ③ 和 ④ 立即得到，当 $n > n_0 + 1$ 时

$$|a_n - \beta| < \varepsilon.$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \beta.$

8・138 设 $a(n)$ 表示正整数 n 的二进制表示中 1 的个数，求证：

(1) $a(n^2) \leqslant \frac{1}{2}a(n)(a(n)+1)$.

(2) 上式中的等号可对无穷多个正整数成立.

(3) 存在数列 $\{n_k\}$，使得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a(n_k^2)}{a(n_k)} = 0.$$

（第 33 届国际数学奥林匹克预选题，1992 年）

[证] 显然 $a(1) = 1$，且对任意非负整数 k 和正整数 n 都有

$$a(2^k n) = a(n). \quad ①$$

进一步易知，当 n 是偶数时

$$a(n+1) = a(n) + 1, \quad ②$$

当 n 是奇数时

$$a(n+1) \leqslant a(n).$$

同理可得

$$a(n+2^k) \leqslant a(n) + 1 = a(n) + a(2^k).$$

由此易证，对任意正整数 n 和 m 有

$$a(n+m) \leqslant a(n) + a(m). \quad ③$$

(1) 用归纳法证明

$$a(n^2) \leqslant \frac{1}{2}a(n)(a(n)+1). \quad ④$$

当 $n = 1$ 时，④ 显然成立. 设当 $1 \leqslant n < N$，④ 均成立. 若 N 是偶数，设 $N = 2n$，则由 ① 和归纳假设可得

$$a(N^2) = a(4n^2) = a(n^2) \leqslant \frac{1}{2}a(n)(a(n)+1),$$

又 $a(N) = a(2n) = a(n)$，所以

$$a(N^2) \leqslant \frac{1}{2}a(N)(a(N)+1).$$

若 $N = 2n+1$，则由 ①、③ 和归纳假设可得

$$\begin{aligned} a(N^2) &= a(4n^2+4n+1) \\ &\leqslant a(n^2+n) + 1 \leqslant a(n^2) + a(n) + 1 \end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{1}{2}a(n)(a(n)+1)+a(n)+1$$

$$=\frac{1}{2}[a(n)+1][a(n)+2].$$

又由 ① 和 ② 得到

$$a(n)+1=a(2n)+1=a(2n+1)=a(N),$$
$$a(n)+2=a(2n)+2=a(2n+1)+1=a(N)+1.$$

于是 $a(N^2)\leqslant \frac{1}{2}a(N)(a(N)+1).$

以上证明了当 $n=N$ 时,④ 也成立,从而完成了归纳证明.

(2) 要证之结论显然成立,因为取 $n=2^k, k=0,1,2,3,\cdots$ 即可,我们可以证明更强的结论:任给正整数 m,存在正整数 n,使得

$$a(n)=m, a(n^2)=\frac{1}{2}m(m+1). \qquad ⑤$$

当 $m=1$ 时,取 $n=1$ 即可.若 $m\geqslant 2$,用归纳法易证

$$n=2+2^4+2^8+\cdots+2^{2^M} \text{ 满足 ⑤}.$$

(3) 对于 $m>1$,令

$$n=2^{2^m}-1-\sum_{j=1}^{m}2^{2^m}-2^j+1.$$

由于 $a(2^{2^m}-1)=2^m$,所以

$$a(n)=2^m-m.$$

又

$$n^2=2^{2^{m+1}}+1+\sum_{j=1}^{m}2^{2^{m+1}-2^{j+1}+2}-2^{2^m+1}-\sum_{j=1}^{m}2^{2^{m+1}-2^j+2}+$$
$$\sum_{j=1}^{m}2^{2^m-2^j+2}+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant m}2^{2^{m+1}-2^i-2^j+3}$$
$$=2^{2^{m+1}}+1+2^2+\sum_{j=2}^{m}2^{2^{m+1}-2^j+2}-2^{2^m+1}-2^{2m+1}-$$
$$\sum_{j=2}^{m}2^{2^{m+1}-2^j+2}+\sum_{j=1}^{m}2^{2^m-2^j+2}+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant m}2^{2^{m+1}-2^i-2^j+3}$$
$$=1+2^2+2^{2^m+1}+\sum_{j=1}^{m}2^{2^m-2^j+2}+2^{2^{m+1}-2-2^m+3}+\sum_{j=2}^{m-1}2^{2^{m+1}-2-2^j+3}$$

$$+\sum_{i=2}^{m-1}2^{2^{m+1}-2^i-2^m+3}+\sum_{1<i<j<m}2^{2^{m+1}-2^i-2^j+3}$$

$$=1+2^2+\sum_{j=1}^{m}2^{2^m-2^j+2}+\sum_{j=2}^{m-1}2^{2^{m+1}-2^j+1}+\sum_{j=2}^{m-1}2^{2^m-2^j+3}$$

$$+\sum_{1<i<j<m}2^{2^{m+1}-2^i-2^j+3},$$

利用 ③ 可得 $a(n^2)\leqslant\frac{1}{2}m(m+1)+1$. 从而

$$\lim_{m\to+\infty}\frac{a(n^2)}{a(n)}=0.$$

8·139　K 是一个正整数，r_n 是 C_{2n}^n 除以 K 的余数，$0\leqslant r_n\leqslant K-1$. 求所有 K，使得数列

$$r_1,r_2,r_3,\cdots$$

对所有 $n\geqslant p$，有一个周期，这里 p 是一个固定正整数(即它从某一项开始是周期变化的).

(保加利亚数学奥林匹克，1994 年)

[解]　当 $K=1$ 时，对所有的 n 都有

$$C_{2n}^n\equiv 0(\bmod K)$$

从而对所有 n，都有 $r_n=1$. 因此 $K=1$ 是所求的一个解.

当 $k=2$ 时，对所有的 n 都有

$C_{2n}^n=C_{2n-1}^n+C_{2n-1}^{n-1}=2.C_{2n-1}^{n-1}\equiv 0(\bmod 2)$，同理，$K=2$ 也是所求的一个解.

下面讨论 $K=4$ 的情况.

为此先证明：当 x 是整数，m 是正整数时，

$$(1+x)^{2^m}\equiv 1+2x^{2^{m-1}}+x^{2^m}(\bmod 4).\qquad ①$$

用数学归纳法.

$m=1$ 时，① 式为恒等式.

设对某个正整数 m，① 式成立.

考虑 $m+1$ 的情况，我们有

$$(1+x)^{2^{m+1}}=((1+x)^{2^m})^2$$

$$\equiv(1+2x^{2^{m-1}}+x^{2^m})^2(\bmod 4)$$

$$\equiv 1 + x^{2^{m+1}} + 2x^{2^m} \pmod 4.$$

由数学归纳法原理可知,① 式得证.

当 $n = 2^j$(j 是非负整数)时,

$$(1 + x)^{2n} = (1 + x)^{2^{j+1}},$$

它的展开式中 x^n(即 x^{2^j})的系数是 C_{2n}^n,在 ① 式中,令 $m = j + 1$,得

$$(1 + x)^{2^{j+1}} \equiv 1 + 2 \cdot x^{2^j} + x^{2^{j+1}} \pmod 4.$$

因此

$$C_{2n}^n \equiv 2 \pmod 4.$$

当 $n \neq 2^j$(j 是非负整数),且 $n \geqslant 3$ 时,记

$$n = 2^j + r, 0 < r < 2^j.$$

由 ①

$$(1 + x)^{2n} = (1 + x)^{2^{j+1}} \cdot (1 + x)^{2r}$$

$$\equiv (1 + 2x^{2^j} + x^{2^{j+1}})(1 + x)^{2r} \pmod 4.$$

上式中 x^n 的系数,在左端是 C_{2n}^n,在上式的右端,注意到

$$2r < n < 2^{j+1},$$

因此,在 mod4 意义下,x^n 的系数是 $2 \cdot C_{2r}^r$.从而有

$$C_{2n}^n \equiv 2C_{2r}^r \equiv 0 \pmod 4,$$

这里用到了前面已经证明的结果:$C_{2r}^r \equiv 2 \pmod 4$.

由于当 $n = 2^j$(j 是非负整数)时,$C_{2n}^n \equiv 2 \pmod 4$;而当 $n = 2^j + r$(j 是非负整数,$0 < r < 2^j$)时,$C_{2n}^n \equiv 0 \pmod 4$,因此,数列$\{C_{2n}^n \mid n \in N\}$在 mod4 意义下不是周期数列,$K = 4$ 不满足题目的要求.

下面讨论 $k = p$(p 为奇质数)的情况.

因为 p 为奇质数时,C_p^i($i = 1, 2, \cdots, p - 1$)是 p 的倍数,所以对任意整数 x,都有

$$(1 + x)^p \equiv 1 + x^p \pmod p.$$

设对某个正整数 m,有

$$(1 + x)^{p^m} \equiv 1 + x^{p^m} \pmod p.$$

那么,我们就有

$$(1 + x)^{p^{m+1}} = ((1 + x)^{p^m})^p$$

$$\equiv (1 + x^{p^m})^p \pmod p$$

$$\equiv 1 + (x^{p^m})^p \pmod p$$

$$= 1 + x^{p^{m+1}}.$$

由数学归纳法原理可知，对于任意正整数 m 和任意整数 x，都有

$$(1 + x)^{p^m} \equiv 1 + x^{p^m} \pmod p.$$

利用这个结论，对于 $j = 1,2,\cdots,p^m - 1$，有

$$(1 + x)^{p^m + j} = (1 + x)^{p^m} \cdot (1 + x)^j$$

$$\equiv (1 + x^{p^m})(1 + x)^j \pmod p,$$

可见，当 $2n = p^m + j(j = 1,3,\cdots,p^m - 1)$ 时，由于 $j < n < p^m$，所以有 $C_{2n}^n \equiv 0 \pmod p$.

当 $2n = 2p^m$ 时，由于

$$(1 + x)^{2p^m} = ((1 + x)^{p^m})^2$$

$$\equiv (1 + x^{p^m})^2 \pmod p$$

$$= 1 + 2x^{p^m} + x^{2p^m}.$$

所以有 $C_{2n}^n = C_{2p^m}^{p^m} \equiv 2 \pmod p$.

因为

$$C_{2n}^n \equiv \begin{cases} 0 \pmod p, 当\ 2n = p^m + j(j = 1,3,\cdots,p^m - 1)\ 时, \\ 2 \pmod p, 当\ 2n = 2p^m\ 时, \end{cases}$$

所以 $\{C_{2n}^n \mid n \in N\}$ 在 $\bmod p$ 意义下不是周期数列，$k = p$（p 为奇质数）不符合题目的要求.

剩下的 K 全为合数，它们至少属于下面两种情况之一：

(1) $K = 4l$（正整数 $l \geqslant 2$），

(2) $K = pl$（p 是奇质数，正整数 $l \geqslant 2$）.

如果数列 $\{C_{2n}^n \mid n \in N\}$ 除以上述 k 的余数，从某一项开始是周期变化的，那么这个数列除以 4 或 p 的余数从这一项开始也是周期变化的. 但前面已证，这是不可能的.

综上所述，所求的全部正整数 k 只有两个：1 和 2.

8 · 140　a 是 $(0,1)$ 内一个实数，考虑数列 $\{x_n \mid n = 0,1,2,\cdots\}$，其中

$x_0=a, x_n=\frac{4}{\pi^2}(\arccos x_{n-1}+\frac{\pi}{2})\cdot\arcsin x_{n-1}, n=1,2,3,\cdots$ 求证:当 n 趋于无限时,数列 $\{x_n|=0,1,2\cdots\}$ 有一个极限,并求这个极限.

(越南数学奥林匹克,1994 年)

[证] 记

$$\arccos x_{n-1}=\theta, \arcsin x_{n-1}=\varphi,$$

其中 $\theta\in[0,\pi], \varphi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\right]$.因此,有

$$\cos\theta=x_{n-1}=\sin\varphi=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right),$$

注意到 $\frac{\pi}{2}-\varphi\in[0,\pi], \theta\in[0,\pi]$,所以

$$\theta=\frac{\pi}{2}-\varphi,$$

即

$$\arccos x_{n-1}=\frac{\pi}{2}-\arcsin x_{n-1}.$$

由上式及题设条件,有

$$x_n=\frac{4}{\pi^2}(\arccos x_{n-1}+\frac{\pi}{2})(\frac{\pi}{2}-\arccos x_{n-1}),$$

即

$$x_n=1-\frac{4}{\pi^2}\arccos^2 x_{n-1}. \quad ①$$

已知 $x_0\in(0,1)$,设 $x_{n-1}\in(0,1)$,则

$$0<|\arccos x_{n-1}|<\frac{\pi}{2}$$

从而由 ① 可得

$$x_n\in(0,1).$$

因此,对于任意非负整数 n,都有 $x_n\in(0,1)$.

下面证明对任意正整数 n,有

$$x_n>x_{n-1}. \quad ②$$

也就是要证

第八章 数列

$$1-\frac{4}{\pi^2}\arccos^2 x_{n-1}>x_{n-1}$$

即

$$\frac{\pi^2}{4}(1-x_{n-1})>\arccos^2 x_{n-1},(n\in N).$$

利用 $\arccos x_{n-1}=\theta$,将上式化为

$$\frac{\pi^2}{4}(1-\cos\theta)>\theta^2,$$

即

$$\frac{\pi^2}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}>\theta^2,$$

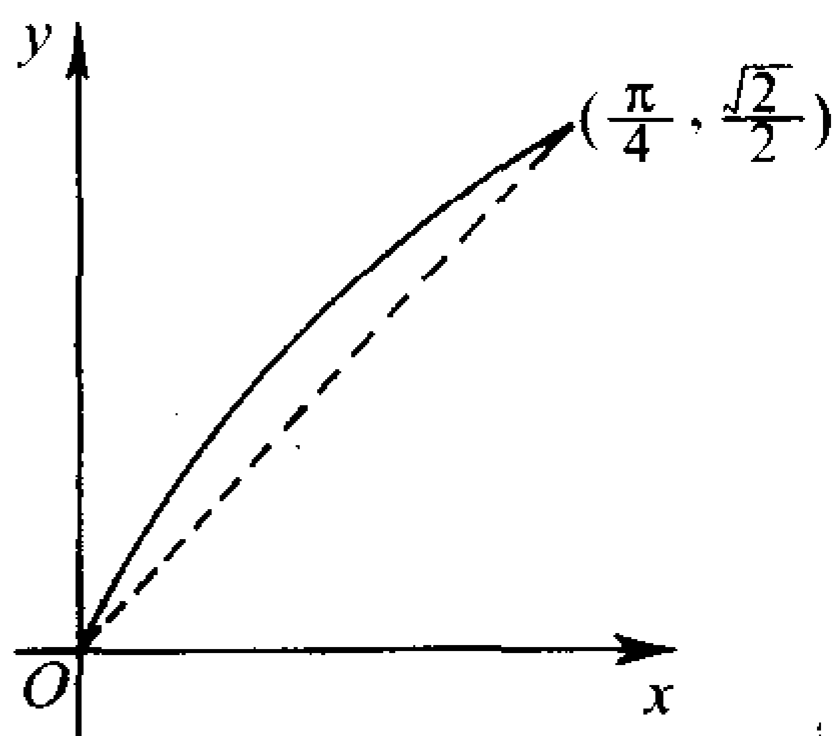
从而只需证明

$$\sin\frac{\theta}{2}>\frac{\sqrt{2}}{\pi}\theta,\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \quad ③$$

我们用图像来证明 ③ 式.作函数

$y=\sin x,x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$的图像(如图).连接这一段正弦曲线的两个端点的直线段方程是

$$y=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}x,0<x<\frac{\pi}{4}.$$



由正弦函数的凸性可知,这一段正弦曲线在这一个直线段的上方,因此,当 $x=\frac{\theta}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$时,有

$$\sin\frac{\theta}{2}>\frac{\sqrt{2}}{\pi}\theta.$$

因此③式成立,从而②式成立.也就是说,给定数列是一个严格单调递增数列.

再由 $x_n<1,n\in N$ 即知,当正整数 n 趋向无限时,x_n 的极限存在.设

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\beta,0<\beta\leqslant 1.$$

在 ① 式两端同时取极限,有

$$\beta = 1 - \frac{4}{\pi^2}\arccos^2\beta.$$

令

$$t = \arccos\beta, 0 \leqslant t < \frac{\pi}{2}.$$

代人前一式,得

$$\cos t = 1 - \frac{4}{\pi^2}t^2,$$

即

$$\sin^2\frac{t}{2} = \frac{2}{\pi^2}t^2,$$

开方,得

$$\sin\frac{t}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}t,$$

由 ③ 知,上式的解只有

$$t = 0,$$

从而有

$$\beta = \cos t = 1.$$

故所求的极限为 1.

8·141 数列$\{a_n \mid n \in N\}$由下述公式定义:$a_1 = 1994$,

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{2[a_n] + 21}, n \in N.$$

这里$[a_n]$是不超过 a_n 的最大整数.

(1) 求证:$a_{12} < 1$.

(2) 求证:这个数列是收敛的,并找出它的极限.

(3) 求最小的正整数 K,使得 $a_k < 1$.

(保加利亚数学奥林匹克,1994 年)

[解] (1) 显然,$a_n > 0(n \in N)$. 利用$[a_n] > a_{n-1}$,得

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{2[a_n] + 21} < \frac{a_n^2}{2(a_n - 1) + 21}$$

$$= \frac{a_n^2}{2a_n + 19} < \frac{a_n}{2},$$

因此,我们有

$$a_{12} < \frac{1}{2}a_{11} < \frac{1}{2^2}a_{10} < \cdots < \frac{1}{2^{11}}a_1,$$

即 $a_{12} < \frac{1}{2^{11}} \cdot 1994 < 1.$

(2) 因为

$$0 < a_n < \frac{1}{2}a_{n-1} < \frac{1}{2^2}a_{n-2} < \cdots < \frac{1}{2^{n-1}}a_1$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} \cdot 1994$$

且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$

即数列 $\{a_n\}$ 收敛,且极限为 0.

(3) 为使 $a_{n+1} < s$,只需

$$\frac{a_n^2}{2a_n + 19} < s,$$

即 $a_n^2 - 2sa_n - 19s < 0.$

从而只需

$$s - \sqrt{s^2 + 19s} < a_n < s + \sqrt{s^2 + 19s},$$

注意到 $s - \sqrt{s^2 + 19s} < 0, a_n > 0$,因此只需

$$0 < a_n < s + \sqrt{s^2 + 19s}.$$

当 $s \geqslant 3$ 时,我们有

$$(s^2 + 19s) - (s + 5)^2 > 0,$$

$$s + \sqrt{s^2 + 19s} > 2s + 5.$$

因此,当 $s \geqslant 3$ 时,若 $a_n < 2s + 5$,则 $a_{n+1} < s$.

我们令 $2s + 5 = t, s = \frac{t-5}{2}$.这样,上述结论可以叙述为:

当 $t \geqslant 11, a_n < t$ 时,必有 $a_{n+1} < \frac{t-5}{2}$.

运用这个结论不难依次得到:

$$a_1 = 1994, \qquad a_2 < 995, \qquad a_3 < 495,$$

$a_4 < 245,\quad a_5 < 120,\quad a_6 < 58,$

$a_7 < 27,\quad a_8 < 11,\quad a_9 < 3.$

于是，我们有

$$a_{10} < \frac{a_9^2}{2a_9 + 19} < \frac{a_9^2}{19} < \frac{9}{19} < 1.$$

下面我们证明 $a_9 > 1$.

由 $a_n \geqslant [a_n]$ 得

$$a_{n+1} \geqslant \frac{a_n^2}{2a_n + 21}, n \in N.$$

因此，要使 $a_{n+1} > s$，只需

$$\frac{a_n^2}{2a_n + 21} > s,$$

即 $a_n^2 - 2sa_n - 21s > 0.$

从而只需

$$a_n > s + \sqrt{s^2 + 21s}.$$

注意到 $s^2 + 21s < (s + 11)^2$，因此我们有如下结论：若 $a_n > 2s + 11$，则 $a_{n+1} > s$.

令 $2s + 11 = t, s = \frac{t - 11}{2}$. 这样，上述结论又可以叙述为：

若 $a_n > t$，则 $a_{n+1} > \frac{t - 11}{2}$.

运用这个结论，我们不难依次得到：

$a_1 = 1994, a_2 > 991, a_3 > 490,$

$a_4 > 239, a_5 > 114, a_6 > 51,$

$a_7 > 20.$

考虑$(0, \infty)$上的函数

$$f(x) = \frac{x^2}{2x + 21}.$$

若 $x > y > 0$，则

$$f(x) - f(y) = \frac{x^2}{2x + 21} - \frac{y^2}{2y + 21} = \frac{1}{(2x + 21)(2y + 21)}[x^2(2y + 21) - y^2(2x + 21)]$$

$$= \frac{x-y}{(2x+21)(2y+21)}[2xy+21(x+y)]$$
$$> 0.$$

代数卷

可见,$f(x)$ 在$(0,\infty)$上是一个严格单调递增函数.

由 $f(x)$ 的这个性质,我们得

$$a_8 \geqslant \frac{a_7^2}{2a_7+21} > \frac{20^2}{2\cdot 20+21} > 6,$$

$$a_9 \geqslant \frac{a_8^2}{2a_8+21} > \frac{6^2}{2\cdot 6+21} > 1.$$

综上所述,可知:所求的使 $a_k < 1$ 的最小的正整数 $k = 10$.

8・142 (1) 求证:方程 $x^3+x^2+x=a$ 对于每个实数a,只有一个实数解.

(2) 实数列$\{x_n \mid n \in N\}$ 满足

$$x_{n+1}^3 + x_{n+1}^2 + x_{n+1} = x_n, 且\ x_1 > 0.$$

求证:这个数列收敛,并求其极限.

(保加利亚数学奥林匹克,1994 年)

[证] (1) 令

$$f(x) = x^3 + x^2 + x - a.$$

对于 $x > y$,有

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= (x^3+x^2+x-a) - (y^3+y^2+y-a) \\ &= (x^3-y^3) + (x^2-y^2) + (x-y) \\ &= (x-y)(x^2+xy+y^2+x+y+1) \\ &= (x-y)[(x+y)^2+(x+y)+1-xy]. \end{aligned}$$

若 $x \geqslant 0, y \leqslant 0$,则

$$(x+y)^2 + (x+y) + 1 - xy$$
$$= \left[(x+y)+\frac{1}{2}\right]^2 + \frac{3}{4} - xy > 0.$$

因此,此时有 $f(x) - f(y) > 0$.

若 $x > y \geqslant 0$,则

$$x^2 + xy + y^2 + x + y + 1 > 0,$$

因此,此时也有 $f(x) - f(y) > 0$.

若 $0 \geqslant x > y$,则令 $x = -y', y = -x'$,可得

$$x' > y' \geqslant 0,$$

且 $$(x+y)^2+(x+y)+1-xy$$
$$= (x'+y')^2-(x'+y')+1-x'y'$$
$$= \left[\frac{1}{4}(x'+y')^2-x'y'\right]+\left[\frac{3}{4}(x'+y')^2-(x'+y')+1\right]$$
$$= \left[\frac{1}{4}(x'+y')^2-x'y'\right]+\frac{3}{4}\left[(x'+y')-\frac{2}{3}\right]^2+\frac{2}{3}$$
$$> 0.$$

因此,此时仍有 $f(x)-f(y)>0$.

综上所述,可知 $f(x)$ 是一个严格单调递增函数, $-\infty < x < \infty$. 又因为

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

所以,对于给定的实数 a, $f(x)=0$ 有且只有一个实数解,即方程 $x^3+x^2+x=a$ 有且只有一个实数解.

(2) 先证明:对任意正整数 n, $x_n>0$.

用数学归纳法.

$n=1$ 时,由题设 $x_1>0$.

设 $x_k>0$. 于是对于函数

$$g(x) = x^3+x^2+x-x_k,$$

我们有

$$g(0) = -x_k < 0, g(x_k) = x_k^3+x_k^2 > 0$$

由前面的证明已经知道, $g(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上是一个严格单调递增函数,因此,在 $(0,x_k)$ 上方程 $g(x)=0$ 有且只有一个实数解. 由题设,这个实数解就是 x_{k+1}.

因此 $0 < x_{k+1} < x_k$.

综上所述,对于任意正整数 n,都有 $x_n>0$. 并且数列 $\{x_n\}$ 是一个严格单调递降的正实数列,从而该数列一定收敛.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lambda$. 由于 $x_n>0$,因此 $\lambda \geqslant 0$,在等式

$$x_{n+1}^3+x_{n+1}^2+x_{n+1} = x_n,$$

两端取极限 $(n\to\infty)$,得

$$\lambda^3+\lambda^2+\lambda = \lambda,$$
$$\lambda^2(\lambda+1) = 0.$$

因为 $\lambda \geqslant 0$,所以 $\lambda + 1 > 0$. 于是,我们有

$$\lambda = 0.$$

即数列 $\{x_n\}$ 的极限为零.

8·143　无穷数列 x_n 由以下法则定义:

$x_{n+1} = \left|1 - |1 - 2x_n|\right|$,而 $0 \leqslant x_1 \leqslant 1$.

(1) 证明:仅当 x_1 是有理数时,数列自某一项开始成为周期数列.

(2) 存在多少个不同的 x_1 值,使得数列自某项之后以 T 为周期(对于每个 $T = 2,3,\cdots$)?

(第 57 届莫斯科数学奥林匹克,1995 年)

[解]　(1) 由已知可得

$$x_{n+1} = \begin{cases} 2x_n, 若 0 \leqslant x_n < \dfrac{1}{2}, \\ 2 - 2x_n, 若 \dfrac{1}{2} \leqslant x_n \leqslant 1. \end{cases} \quad ①$$

若 x_1 为有理数,可设 $x_1 = \dfrac{p}{q}$,$(p,q) = 1, p \in N, q \in N$. 注意到,对所有的 n,显然都有 $0 \leqslant x_n \leqslant 1$,且 $x_n = \dfrac{p_n}{q}, p_n \in \{0,1,\cdots,q\}$,因此,一定存在 n_1, n_2 且 $n_1 < n_2$,使得

$$p_{n_1} = p_{n_2},$$

从而有　$x_{n_1} = x_{n_2}$.

于是,由 ① 可知,$\{x_n\}$ 自第 n_1 项之后呈周期变化.

反过来,若数列自第 n_1 项之后呈周期变化,并且周期为 T. 我们将 x_{n_1} 用二进制表示,记

$$x_{n_1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 2^{-k}, 其中 a_k \in \{0,1\}.$$

再记

$$\overline{a}_k = 1 - a_k, k \in N.$$

于是,由 ① 式可得

$$x_{n_1+1} = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{k+1} \cdot 2^{-k}, 若 a_1 = 0; \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \overline{a}_{k+1} \cdot 2^{-k}, 若 a_1 = 1. \end{cases}$$

$$x_{n_1+2}=\begin{cases}\sum_{k=1}^{\infty}a_{k+2}\cdot 2^{-k},\text{若 } a_1+a_2\equiv 0(\bmod 2);\\ \sum_{k=1}^{\infty}\overline{a}_{k+2}\cdot 2^{-k},\text{若 } a_1+a_2\equiv 1(\bmod 2).\end{cases}$$

由数学归纳法易得

$$x_{n_1+T}=\begin{cases}\sum_{k=1}^{\infty}a_{k+T}\cdot 2^{-k},\text{若 } a_1+a_2+\cdots+a_T\equiv 0(\bmod 2);\\ \sum_{k=1}^{\infty}\overline{a}_{k+T}\cdot 2^{-k},\text{若 } a_1+a_2+\cdots+a_T\equiv 1(\bmod 2).\end{cases}$$

由于 $\quad x_{n_1+T}=x_{n_1}$,

因此,当 $a_1+a_2+\cdots+a_T\equiv 0(\bmod 2)$ 时,立即可得 $\quad a_k=a_{k+T}$, $k\in N$,

从而表明 x_{n_1} 是二进制循环小数,故为有理数.

当 $a_1+a_2+\cdots+a_T\equiv 1(\bmod 2)$ 时,由

$$x_{n_1+T}=x_{n_1}$$

得 $\begin{cases}a_k=\overline{a}_{k+T}=1-a_{k+T}, & k\in N,\\ a_{k+T}=\overline{a}_{k+2T}=1-a_{k+2T}, & k\in N.\end{cases}$

于是,我们有

$$a_k=1-a_{k+T}=1-(1-a_{k+2T})=a_{k+2T},k\in N$$

因此,x_{n_1} 也是有理数.

由①知,x_{n_1} 是由 x_1 经 n_1-1 步有理运算得出的,所以 x_1 也必为有理数.

(2) 如果分别取

$$x_1=(0.\dot{1}10\dot{0})_2,x_1=(0.\underbrace{\dot{1}\dot{1}\cdots 1}_{m-1\text{个}}\dot{0})_2,\qquad ②$$

那么,相应的 $\{x_n\}$ 分别以 $T=2$ 和 $T=m,m\geqslant 3$ 为周期.

如果 x_1 的取值等于②中 x_1 取值的 $\frac{1}{2^k}$, $k\in N$,那么对应的数列 $\{x_n\}$ 自某项之后的周期 T 不变.因此,对每个 $T=2,3,\cdots$ 都有无穷多个 x_1,使得数列 $\{x_n\}$ 自某项之后以 T 为周期.

第5节 数列不等式

8·144 已知 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 是两两互不相同的自然数列.求证:对任何正整数 n 有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

(第20届国际数学奥林匹克,1978年)

[证1] 由于 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是两两互不相同的自然数列,所以 $a_1\geqslant 1,a_1+a_2\geqslant 1+2,a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant 1+2+\cdots+n$.

从而

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k-k}{k^2}&=\frac{a_1-1}{1}+\frac{a_2-2}{2^2}+\sum_{k=3}^{n}\frac{a_k-k}{k^2}\\&\geqslant\frac{a_1+a_2-(1+2)}{2^2}+\sum_{k=3}^{n}\frac{a_k-k}{k^2}\\&\geqslant\frac{(a_1+a_2+a_3)-(1+2+3)}{3^2}+\sum_{k=4}^{n}\frac{a_k-k}{k^2}\\&\geqslant\cdots\geqslant\frac{1}{k^2}\Big(\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}k\Big)\geqslant 0,\end{aligned}$$

即
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

[证2] 设 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是 $a_1,a_2,\cdots a_n$ 的一个排列使得 $b_1<b_2<\cdots<b_n$.由于 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 都是自然数,则

$$b_k\geqslant k,k=1,2,\cdots,n.$$

由排序不等式得

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{k^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\frac{b_k}{k}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

8·145 设数列 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 满足 $a_0=\frac{1}{2}$,且

$$a_{k+1}=a_k+\frac{1}{n}a_k^2,k=0,1,\cdots,n-1.$$

求证：$1-\frac{1}{n}<a_n<1$.

（芬兰、英国、匈牙利、瑞典四国数学竞赛，1980 年）

［证］ 由归纳法易知

$$0<a_0<a_1<a_2<\cdots<a_n.$$

对于 $0\leqslant k\leqslant n-1$，由于

$$a_{k+1}=a_k\left(1+\frac{1}{n}a_k\right)<a_k\left(1+\frac{1}{n}a_{k+1}\right),$$

所以 $$\frac{1}{a_k}<\frac{1}{a_{k+1}}+\frac{1}{n}.$$

由此可得

$$\frac{1}{a_n}>\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{n}>\frac{1}{a_{n-2}}-\frac{2}{n}>\cdots>\frac{1}{a_0}-1=1,$$

即 $$a_n<1.$$

另一方面，由递推关系可得

$$\frac{a_{k+1}}{n+1}-\frac{a_k}{n}=\frac{a_k(n+a_k)}{n(n+1)}-\frac{a_k}{n}=\frac{a_k(a_k-1)}{n(n+1)}<0,$$

从而

$$a_{k+1}=a_k\left(1+\frac{a_k}{n}\right)>a_k\left(1+\frac{a_{k+1}}{n+1}\right).$$

于是有

$$\frac{1}{a_{k+1}}<\frac{1}{a_k}-\frac{1}{n+1},k=0,1,2,\cdots,n-1.$$

由此可得

$$\frac{1}{a_n}<\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{n+1}<\cdots<\frac{1}{a_0}-\frac{n}{n+1}=2-\frac{n}{n+1}=\frac{n+2}{n+1},$$

即 $$a_n>\frac{n+1}{n+2}=1-\frac{1}{n+2}>1-\frac{1}{n}.$$

综上可得

$$1-\frac{1}{n}<a_n<1.$$

8·146 设 $x_n=\sqrt{2+\sqrt[3]{3+\cdots+\sqrt[n]{n}}}$，$n=2,3,\cdots$ 求证：

$$x_{n+1}-x_n<\frac{1}{n!},n=2,3,\cdots$$

（第26届国际数学奥林匹克候选题，1985年）

［证］ 对于 $2\leqslant k\leqslant n$，令

$$a_k=\sqrt[k]{k+\sqrt[k+1]{k+1+\cdots+\sqrt[n]{n+\sqrt[n+1]{n+1}}}},$$

$$b_k=\sqrt[k]{k+\sqrt[k+1]{k+1+\cdots+\sqrt[n]{n}}},$$

$$c_k=a_k^{k-1}+a_k^{k-2}b_k+\cdots+a_kb_k^{k-2}+b_k^{k-1}.$$

显然 $x_{n+1}=a_2,x_n=b_2$，且

$$x_{n+1}-x_n=a_2-b_2=\frac{a_3-b_3}{c_2}$$

$$=\frac{a_4-b_4}{c_2c_3}=\cdots=\frac{a_n-b_n}{c_2c_3\cdots c_{n-1}}$$

$$=\frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{c_2c_3\cdots c_n}.$$

由于 $a_k>k^{\frac{1}{k}},b_k>k^{\frac{1}{k}}$，所以

$$c_k>kk^{\frac{k-1}{k}},k=2,3,\cdots,n.$$

由此可得

$$x_{n+1}-x_n<\frac{1}{n!}\frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{\sqrt[n]{n^{n-1}}}<\frac{1}{n!}\cdot\sqrt[n+1]{\frac{n+1}{n^{n-1}}}.$$

当 $n>2$ 时，由

$$\frac{n+1}{n^{n-1}}<\frac{2n}{n^2}<1,$$

立即可得

$$x_{n+1}-x_n<\frac{1}{n!}.$$

当 $n=2$ 时，经直接计算易得

$$x_3-x_2=\sqrt{2+\sqrt[3]{3}}-\sqrt{2}=\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{2+\sqrt[3]{3}}+\sqrt{2}}<\frac{1}{2}.$$

8·147 设正实数列 $\{a_k\}$ 满足

$$a_1\geqslant 1,a_{k+1}-a_k\geqslant 1,k=1,2,3,\cdots$$

求证:对于所有自然数 n 有

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{-\frac{1}{1987}} a_{k+1}^{-1} < 1987.$$

(第 28 届国际数学奥林匹克候选题,1987 年)

[证] 由于 $a_k \geqslant k, k = 1,2,3,\cdots$
所以只需证对所有自然数 n 有

$$\sum_{k=1}^{n} k^{-\frac{1}{1987}}(k+1)^{-1} < 1987. \quad ①$$

任取自然数 k,记 $\alpha = (k+1)^{\frac{1}{1987}}, \beta = k^{\frac{1}{1987}}$ 则

$$\begin{aligned} 1 &= (k+1) - k = \alpha^{1987} - \beta^{1987} \\ &= (\alpha - \beta)(\alpha^{1986} + \alpha^{1985}\beta + \cdots + \beta^{1986}) \\ &< 1987(\alpha - \beta)\alpha^{1986} = 1987[(k+1)^{\frac{1}{1987}} - k^{\frac{1}{1987}}](k+1)^{1-\frac{1}{1987}}. \end{aligned}$$

由此可得

$$k^{-\frac{1}{1987}}(k+1)^{-1} < 1987[k^{-\frac{1}{1987}} - (k+1)^{-\frac{1}{1987}}].$$

于是有 $$\sum_{k=1}^{n} k^{-\frac{1}{1987}}(k+1)^{-1} < \sum_{k=1}^{n} 1987[k^{-\frac{1}{1987}} - (k+1)^{-\frac{1}{1987}}]$$

$$= 1987(1 - (n+1)^{-\frac{1}{1987}}) < 1987.$$

8·148 设 $x_0 = 10^9, x_n = \dfrac{x_{n-1}^2 + 2}{2x_{n-1}}, n = 1,2,3,\cdots$ 求证:

$$0 < x_{36} - \sqrt{2} < 10^{-9}.$$

(第 16 届莫斯科数学奥林匹克,1953 年)

[证] 用归纳法易证

$$x_n > \sqrt{2}, n = 0,1,2,\cdots \quad ①$$

由递推公式可得

$$\begin{aligned} 0 < x_n - \sqrt{2} &= \frac{x_{n-1}^2 + 2}{2x_{n-1}} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x_{n-1}} - \sqrt{\frac{2}{x_{n-1}}}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2x_{n-1}}(x_{n-1} - \sqrt{2})^2. \end{aligned}$$

再由 ① 得

$$0 < x_n - \sqrt{2} < \frac{1}{2\sqrt{2}}(x_{n-1} - \sqrt{2})^2, n = 1,2,3,\cdots \quad ②$$

注意到$0 < \frac{x_{n-1}-\sqrt{2}}{x_{n-1}} < 1$,可得另一种估计

$$0 < x_n - \sqrt{2} < \frac{1}{2}(x_{n-1}-\sqrt{2}), n = 1,2,3,\cdots \qquad ③$$

从③可递推得

$$0 < x_{30} - \sqrt{2} < \frac{1}{2^{30}}(x_0 - \sqrt{2}) < \frac{10^9}{2^{30}}.$$

由于$10^9 < 2^{30}$,所以

$$0 < x_{30} - \sqrt{2} < 1.$$

利用②递推得

$$0 < x_{36} - \sqrt{2} < \frac{1}{2\sqrt{2}}(x_{35}-\sqrt{2})^2 < \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{1+2}(x_{34}-\sqrt{2})^4$$

$$< \cdots < \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{1+2+4+8+16+32}(x_{30}-\sqrt{2}),$$

即 $$0 < x_{36} - \sqrt{2} < \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{63}.$$

显然$\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{63} < 10^{-9}$,从而要证之不等式成立.

8·149　已给严格递增的无界正数列$a_1,a_2,\cdots$求证:

(1) 存在自然数k_0使得对于一切$k \geqslant k_0$有

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_k}{a_{k+1}} < k-1.$$

(2) 当k充分大时有

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_k}{a_{k+1}} < k-1985.$$

(第19届全苏数学奥林匹克,1985年)

[证]　记$s_k = \frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_k}{a_{k+1}}$,可以证明任给$M > 0$,存在自然数$k_0$,使得当$k \geqslant k_0$时有

$$S_k < k - M. \qquad ①$$

由此立即可得(1),(2)都成立.

事实上,由于$a_1,a_2,\cdots$递增,所以

$$k - s_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_{i+1} - a_i}{a_{i+1}} \geqslant \frac{1}{a_{k+1}} \sum_{i=1}^{k} (a_{i+1} - a_i) = 1 - \frac{a_1}{a_{k+1}}.$$

又 $a_1, a_2, \cdots$ 无界,从而 $a_k \to +\infty (k \to +\infty)$. 由此可知存在 k_1 使得当 $k \geqslant k_1$ 时, $\frac{a_1}{a_{k+1}} < \frac{1}{2}$. 于是有

$$s_k < k - \frac{1}{2}, \text{对于任意 } k \geqslant k_1. \qquad ②$$

记 $b_1 = a_{k_1+1}, b_2 = a_{k_1+2}, \cdots$ 则 $\{b_k\}$ 也是递增无界的正数列,由②可知存在 k_2 使得

$$\frac{b_1}{b_2} + \frac{b_2}{b_3} + \cdots + \frac{b_k}{b_{k+1}} < k - \frac{1}{2}, \text{对于任意 } k \geqslant k_2,$$

即 $$s_k < k - 1, \text{对于任意 } k \geqslant k_1 + k_2.$$

以此类推易知①成立.

8・150　已知一个无穷实数列 $a_1, a_2, a_3 \cdots$ 以 100 为周期,而且当 n 为奇数时 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqslant 0$, 当 n 为偶数时 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leqslant 0$. 求证: $|a_{99}| \geqslant |a_{100}|$.

（第 32 届莫斯科数学奥林匹克,1969 年）

［证］　首先可以证明 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{100} = 0$. 事实上,若 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{100} = -\delta < 0$, 则对任何自然数 N 有　$a_1 + a_2 + \cdots + a_{100N+1} = a_1 - N\delta$.

当 N 足够大时与 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{100N+1} \geqslant 0$ 矛盾! 其次由 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{98} \leqslant 0$ 和 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{99} \geqslant 0$ 可知 $a_{99} \geqslant 0$, 又 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{100} = 0$, 从而 $a_{100} \leqslant 0$, $a_{99} + a_{100} \geqslant 0$, 即

$$|a_{99}| = a_{99} \geqslant -a_{100} = |a_{100}|.$$

8・151　设正数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 满足 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant \cdots a_1 = \frac{1}{2k}$ (k 是正整数) 且

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = 1$$

求证:从此数列中必可选出 k 个数,使得它们中最小的大于最大者的一半.

（第 22 届莫斯科数学奥林匹克,1959 年）

［证］　反设要证之结论不成立,则

$$a_k \leqslant \frac{1}{2}a_1, a_{2k-1} \leqslant \frac{1}{2}a_k \leqslant \frac{1}{4}a_1, \cdots a_{k+n(k+1)} \leqslant \frac{a_1}{2^{n+1}}, \cdots$$

由此得 $\quad S_1 = a_1 + a_k + a_{2k-1} + \cdots + a_{k+n(k-1)} + \cdots \leqslant 2a_1.$

再由数列的非增性可知

$$s_2 = a_2 + a_{k+1} + a_{2k} + \cdots + a_{k+n(k-1)+1} + \cdots \leqslant 2a_1,$$

$$\cdots\cdots$$

$$s_{k-1} = a_{k-1} + a_{2k-2} + \cdots + a_{k+n(k-1)+k-2} + \cdots \leqslant 2a_1.$$

于是 $s_1 + s_2 + \cdots + s_{k-1} \leqslant 2(k-1)a_1 = \dfrac{k-1}{k} < 1,$

与 $s_1 + s_2 + \cdots + s_{k-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = 1$ 矛盾!

8·152 学校数学小组的同学做成一种计算器,按下计算器按钮后可将四数组(a,b,c,d)变成$(a-b,b-c,c-d,d-a)$.求证:如果开始的四数组的数不全相等,那么按有限次按钮后得到的四数组的数总至少有一个大于1985.

(第19届全苏数学奥林匹克,1985年)

[证] 设开始的四数组是(a,b,c,d),按n次按钮后得到的四数组是(a_n,b_n,c_n,d_n).显然

$$a_n + b_n + c_n + d_n = 0,\text{对于任意 } n \geqslant 1. \quad ①$$

记$s_n = a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2$,由$a,b,c,d$不全相等可知$s_1 > 0$,当$n > 1$时,

$$\begin{aligned} s_n &= (a_{n-1} - b_{n-1})^2 + (b_{n-1} - c_{n-1})^2 + (c_{n-1} - d_{n-1})^2 + (d_{n-1} - a_{n-1})^2 \\ &= 2(a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2 + c_{n-1}^2 + d_{n-1}^2) - 2(a_{n-1}b_{n-1} + b_{n-1}c_{n-1} + c_{n-1}d_{n-1} + d_{n-1}a_{n-1}). \end{aligned}$$

又 $\quad 0 = (a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1} + d_{n-1})^2 = a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2 + c_{n-1}^2 + d_{n-1}^2 + 2(a_{n-1}b_{n-1} + a_{n-1}c_{n-1} + a_{n-1}d_{n-1} + b_{n-1}c_{n-1} + b_{n-1}d_{n-1} + c_{n-1}d_{n-1}),$

所以
$$\begin{aligned} s_n &= 3(a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2 + c_{n-1}^2 + d_{n-1}^2) + 2a_{n-1}c_{n-1} + 2b_{n-1}d_{n-1} \\ &\geqslant 2(a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2 + c_{n-1}^2 + d_{n-1}^2) = 2s_{n-1}. \end{aligned}$$

于是 $\quad s_n \geqslant 2^{n-1}s_1$,对于任意$n \geqslant 1$.

由此可得存在自然数n_0,使得当$n \geqslant n_0$时,

$$s_n > 36 \times 1985^2,$$

所以当 $n \geqslant n_0$ 时

$$|a_n|+|b_n|+|c_n|+|d_n| \geqslant \sqrt{s_n} > 6 \times 1985.$$

由①可知，a_n, b_n, c_n, d_n 中的正数和 $> 3 \times 1985$，又 a_n, b_n, c_n, d_n 中至多有三个正数，从而至少有一个大于 1985.

8・153 设 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ 是递减的正数列且对任意自然数 n 都有

$$x_1 + \frac{x_4}{2} + \frac{x_9}{3} + \cdots + \frac{x_{n^2}}{n} \leqslant 1.$$

求证：对任意自然数 n 都有

$$x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + \cdots + \frac{x_n}{n} < 3.$$

（第 13 届全苏数学奥林匹克，1979 年）

［证］ 由于 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ 是递减的正数列，所以对任意自然数 k 有

$$\frac{x_{k^2}}{k^2} + \frac{x_{k^2+1}}{k^2+1} + \cdots + \frac{x_{(k+1)^2-1}}{(k+1)^2-1} < (2k+1)\frac{x_{k^2}}{k^2} \leqslant 3\frac{x_{k^2}}{k}.$$

任取自然数 n，则存在自然数 k 使得

$$k^2 \leqslant n \leqslant (k+1)^2 - 1.$$

从而

$$x_1 + \frac{x_2}{2} + \cdots + \frac{x_n}{n} < 3\left(x_1 + \frac{x_4}{2} + \cdots + \frac{x_{k^2}}{k}\right) \leqslant 3.$$

8・154 给定正整数 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{99}, a_{100}$ 满足

$$a_1 > a_0, a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}, n = 2, 3, \cdots, 100.$$

求证：$a_{100} > 2^{99}$.

（第 2 届全俄数学奥林匹克，1962 年）

［证］ 由假设可知

$$a_n - a_{n-1} = 2(a_{n-1} - a_{n-2}), n = 2, 3, \cdots, 100,$$

所以 $$a_{100} = a_{99} + 2^{99}(a_1 - a_0)$$

由于 a_1, a_0 为正整数且 $a_1 > a_0$，从而 $a_1 - a_0 \geqslant 1$，又 a_{99} 也是正整数，所以

$$a_{100} > 2^{99}.$$

第八章 数列

8·155　设实数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 满足

$$a_0 = a_n = 0, a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1} \geqslant 0, k = 1,2,\cdots,n-1.$$

求证:$a_k \leqslant 0, k = 0,1,2,\cdots,n$.

（第2届全俄数学奥林匹克,1962年）

［证］　用归纳法.当 $k = 0$ 时,要证之不等式显然成立.设对于某个 $0 \leqslant k \leqslant n-2$ 有 $a_k \leqslant 0$.由题设条件可知

$$a_{k+2} - a_{k+1} \geqslant a_{k+1} - a_k \geqslant a_{k+1},$$

所以　$a_{k+2} \geqslant 2a_{k+1}$.

若　$k = n-2$,则 $a_{k+2} = a_n = 0$.由此可推出 $a_{k+1} \leqslant 0$.否则 $k < n-2$,再利用题设的递推不等式可得

$$a_{k+3} - a_{k+2} \geqslant a_{k+2} - a_{k+1} \geqslant a_{k+1},$$

又　$a_{k+2} \geqslant 2a_{k+1}$,所以　$a_{k+3} \geqslant 3a_{k+1}$.以此类推,最后用 $a_n = 0$ 的条件同样可得 $a_{k+1} \leqslant 0$.以上证明加上 $a_n = 0$ 说明要证的不等式成立.

8·156　设数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 满足

$$a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}, n = 2,3,\cdots$$

求证:$a_{100} > 14$.

（第2届全苏数学奥林匹克,1968年）

［证］　显然 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 都是正数且

$$a_n^2 = a_{n-1}^2 + 2 + \frac{1}{a_{n-1}^2} > a_{n-1}^2 + 2, n = 2,3,\cdots$$

由此递推可得　$a_{100}^2 > a_1^2 + 2 \times 99 = 199$,

所以　$a_{100} > \sqrt{199} > 14$.

8·157　已知实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足

$$a_1 = 0, |a_k| = |a_{k-1} + 1|, k = 2,3,\cdots,n.$$

求证:$\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \geqslant -\frac{1}{2}$.

（第2届全苏数学奥林匹克,1968年）

［证］　由假设可知

$$a_k^2 = a_{k-1}^2 + 2a_{k-1} + 1, k = 2,3,\cdots,n.$$

于是　$$\sum_{k=2}^{n} a_k^2 = \sum_{k=2}^{n} a_{k-1}^2 + 2\sum_{k=2}^{n} a_{k-1} + n - 1.$$

由于 $a_1=0$,所以

$$2\sum_{k=1}^{n-1}a_k=a_n^2+1-n.$$

由此即得 $\frac{1}{n}(a_1,a_2,+\cdots+a_n)=\frac{1}{2n}(a_n+1)^2-\frac{1}{2}\geqslant-\frac{1}{2}.$

8・158 设无穷数列$\{x_n\}$满足

$$x_0=1,0<x_{n+1}\leqslant x_n,n=0,1,2,\cdots$$

(1) 求证:存在 $n\geqslant 1$ 使得

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}\geqslant 3.999.$$

(2) 构造一个满足假设条件的数列使得对任何 $n\geqslant 1$ 有

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}<4.$$

(第 23 届国际数学奥林匹克,1982 年)

[解] (1) 记 $s_n=\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}$,由于$\{x_k\}$是不增正数列,所以

$$S_2=\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}\geqslant 2x_0\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}\geqslant 2x_0=2,$$

$$S_3=\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}\geqslant\frac{x_0^2}{x_1}+2x_1\sqrt{\frac{x_2}{x_3}}\geqslant\frac{x_0^2}{x_1}+2x_1$$

$$\geqslant 2\cdot 2^{\frac{1}{2}}x_0=2^{1+\frac{1}{2}},$$

$$S_4\geqslant\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+2x_2\geqslant\frac{x_0^2}{x_1}+2^{1+\frac{1}{2}}x_1\geqslant 2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}x_0.$$

依此类推易知

$$S_n\geqslant 2^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}}x_0=2^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}}.$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}\right)=2$,所以存在自然数 n_0 使得当 $n>n_0$ 时 $S_n>3.999$.

(2) 取 $x_0=1,x_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n,n=1,2,3,\cdots$ 则 $s_1=2$,当 $n>1$ 时,

第八章 数列

$s_n = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} < 4.$

8·159 设数列$\{a_n\}$满足

$$1 = a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots \quad ①$$

记 $$b_n = \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{a_k}}, n = 1,2,3,\cdots \quad ②$$

求证:(1)$0 \leqslant b_n < 2, n = 1,2,3,\cdots$

(2) 对于任意实数$c \in [0,2)$,存在满足①的数列$\{a_n\}$,使得由②定义的数列$\{b_n\}$中有无穷多个下标n使$b_n > c$.

(第12届国际数学奥林匹克,1970年)

[证] (1)由①可知对任何$k \in N$有

$$0 \leqslant \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{a_k}} = \frac{(\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k-1}})(\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k-1}})}{a_k\sqrt{a_k}}$$

$$\leqslant 2\frac{\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k-1}}}{\sqrt{a_k a_{k-1}}} = 2\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}} - \frac{1}{\sqrt{a_k}}\right).$$

所以$0 \leqslant b_n \leqslant 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}} - \frac{1}{\sqrt{a_k}}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right) < 2.$

(2)任取$0 < q < 1$,则$a_n = q^{-2n}, n = 0,1,2,\cdots$满足①.由②得

$$b_n = q(1+q)(1-q^n).$$

显然 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = q(1+q)$.对任何$c \in [0,2)$,取$q$满足

$\frac{\sqrt{1+4c}-1}{2} < q < 1$,则$0 < q < 1$且$q(1+q) > c$.于是相应之$\{b_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty} b_n > c$,所以存在$n_0 \in N$使得当$n > n_0$时$b_n > c$.

8·160 设数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$满足

$$x_0 = 1, x_1 = 1, x_{n+1} = x_n + 2x_{n-1}, n = 1,2,3,\cdots$$

$$y_0 = 1, y_1 = 7, y_{n+1} = 2y_n + 3y_{n-1}, n = 1,2,3,\cdots$$

求证:对任何正整数m, n都有$x_m \neq y_n$.

(第2届美国数学奥林匹克,1973年)

[证] 易知对$n = 0,1,2,3,\cdots$有

$$x_n = \frac{1}{3}(2^{n+1} + (-1)^n),$$

$$y_n = 2 \cdot 3^n - (-1)^n.$$

如果存在正整数 m,n,使得 $x_m = y_n$,则

$$\frac{1}{3}(2^{m+1} + (-1)^m) = 2 \cdot 3^n - (-1)^n,$$

即 $$2 \cdot 3^{n+1} - 2^{m+1} = 3 \cdot (-1)^n + (-1)^m. \qquad ①$$

当 m,n 同奇偶时,显然 $4 \mid 3 \cdot (-1)^n + (-1)^m$,但是 $4 \nmid 2 \cdot 3^{n+1} - 2^{m+1}$,与 ① 矛盾.因此 m,n 的奇偶性必不相同.

若 n 为偶数,m 为奇数,由 ① 可得

$$3^{n+1} - 2^m = 1,$$

于是 $$-1 - 2^m \equiv 1 \pmod 4.$$

由此可得 $m = 1$,由 $3^{n+1} = 3$ 可得 $n = 0$,与 n 为正整数矛盾!

若 n 为奇数,m 为偶数,则由 ① 可得

$$3^{n+1} - 2^m = -1,$$

从而 $$1 \equiv -1 \pmod 4,$$

也引出矛盾!

综上所述可知要证之结论成立.

8·161 设 $\{a_k\}, k = 1,2\cdots$ 是一非负实数列,满足

$$a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2} \geqslant 0,$$

及 $$\sum_{i=1}^{k} a_i \leqslant 1, k = 1,2,\cdots$$

求证:对任何自然数 k 有

$$0 \leqslant a_k - a_{k+1} < \frac{2}{k^2}.$$

(第 29 届国际数学奥林匹克候选题,1988 年)

[证] 首先证 $0 \leqslant a_k - a_{k+1}$.设存在自然数 k,使得 $a_k - a_{k+1} < 0$,则由假设可得

$$a_{k+1} - a_{k+2} \leqslant a_k - a_{k+1} < 0.$$

依此类推可知数列自第 k 项开始严格递增,从而当 $n \to +\infty$ 时,$\sum_{i=1}^{n} a_i \to +\infty$,与假设矛盾.

令 $b_k = a_k - a_{k+1}$,则对任何 k,$b_k \geqslant 0$ 且

$$b_k \geqslant b_{k+1}.$$

由此可得

$$
\begin{aligned}
b_k\sum_{i=1}^{k} i &\leqslant \sum_{i=1}^{k} ib_i = \sum_{i=1}^{k} ia_i - \sum_{i=1}^{k} ia_{i+1} \\
&= \sum_{i=1}^{k} ia_i - \sum_{i=2}^{k+1}(i-1)a_i = \sum_{i=1}^{k} a_i - ka_{k+1} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{k} a_i \leqslant 1,
\end{aligned}
$$

又 $$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2},$$

所以 $$b_k \leqslant \frac{2}{k(k+1)} < \frac{2}{k^2}.$$

8·162 已知数列$\{a_n\}$满足

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_n = \left(\frac{2n-3}{2n}\right)a_{n-1}, n = 2,3,4,\cdots$$

求证:对任何自然数 n 有$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k < 1$.

(第 29 届国际数学奥林匹克候选题,1988 年)

[证] 由假设可得

$$3a_{k-1} = 2(ka_{k-1} - ka_k), k = 2,3,4,\cdots$$

于是
$$
\begin{aligned}
3\sum_{k=2}^{n+1} a_{k-1} &= 2\sum_{k=2}^{n+1} ka_{k-1} - 2\sum_{k=2}^{n+1} ka_k \\
&= 2\sum_{k=1}^{n}(k+1)a_k - 2\sum_{k=2}^{n} ka_k - 2(n+1)a_{n+1} \\
&= 2a_1 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k - 2(n+1)a_{n+1}.
\end{aligned}
$$

由此可得

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 2a_1 - 2(n+1)a_{n+1} < 1.$$

8·163 设 $a_n = [\sqrt{(n-1)^2 + n^2}], n = 1,2,3,\cdots$ 其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数.求证:

(i) 有无穷多个正整数 m,使得 $a_{m+1} - a_m > 1$.

(ii) 有无穷多个正整数 m,使得 $a_{m+1} - a_m = 1$.

(第 29 届国际数学奥林匹克候选题,1988 年)

[证]　显然对任意自然数 n 有

$$\sqrt{2}n-3<[\sqrt{2}(n-1)]<a_n[\sqrt{2}n]<\sqrt{2}n. \qquad ①$$

由此可得

$$n^2+(n+1)^2-(n-1)^2-n^2=4n>2a_n+1.$$

于是有 $a_{n+1}=[\sqrt{n^2+(n+1)^2}]\geqslant[\sqrt{a_n^2+4n}]$

$$\geqslant[\sqrt{a_n^2+2a_n+1}]=a_n+1,$$

即 $a_{n+1}\geqslant a_n+1,n=1,2,3,\cdots \qquad ②$

若(i)不成立,由②可知存在自然数 N,使得

$$a_{k+1}-a_k=1,\text{对于任意 } k\geqslant N.$$

由此可得 $a_{N+k}=a_N+k,k=0,1,2,3,\cdots$

再由①得到对任何非负整数 k 有

$$\sqrt{2}(N+k)-3<a_N+k,$$

即 $(\sqrt{2}-1)k<a_N+3-\sqrt{2}N. \qquad ③$

由于 N 是固定数,显然当 k 足够大时,③不成立,引出矛盾.于是(i)成立.

若(ii)不成立,由②可知存在 N,使得

$$a_{k+1}-a_k\geqslant 2,\text{对于任意 } k\geqslant N,$$

由此得 $a_{N+k}\geqslant a_N+2k,k=0,1,2,3,\cdots$

再由①得 $a_N+2k<\sqrt{2}(N+k)$,

即对任何非负整数 k 有

$$(2-\sqrt{2})k<\sqrt{2}N-a_N. \qquad ④$$

从④引出矛盾,从而(ii)也成立.

8·164　设正数列 $\{a_n\}$ 满足对任何自然数 k,n,m,l,只要 $k+n=m+l$,就有

$$\frac{a_k+a_n}{1+a_ka_n}=\frac{a_m+a_l}{1+a_ma_l}.$$

求证:存在正数 b 和 c,使得对任何 n 都有 $b\leqslant a_n\leqslant c$.

(前苏联教育部推荐试题,1990年)

[证]　对于 $n\geqslant 2$,令

$$A_n=\frac{a_1+a_{n-1}}{1+a_1a_{n-1}}.$$

记 $t=\min\left\{a_1,\frac{1}{a_1}\right\}$,则由 $t\leqslant a_1,ta_1\leqslant 1$ 可得

$$a_1+a_{n-1}\geqslant t+a_1ta_{n-1},\text{即}$$

$$A_n=\frac{a_1+a_{n-1}}{1+a_1a_{n-1}}\geqslant t.$$

由假设可知对于任何 $n\geqslant 1$ 有

$$A_{2n}=\frac{a_1+a_{2n-1}}{1+a_1a_{2n-1}}=\frac{a_n+a_n}{1+a_n^2}\geqslant t,$$

即 $\quad ta_n^2-2a_n+t\leqslant 0.$

再由 $0<t\leqslant 1$ 可得对任何 n 有

$$b\leqslant a_n\leqslant c,$$

其中 $\quad b=\frac{1-\sqrt{1-t^2}}{t},c=\frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}.$

8·165　已知自然数序列 $\{x_n\}$ 满足

$$x_1=a,x_2=b,x_{n+2}=x_n+x_{n+1},n=1,2,3,\cdots$$

如果序列中某项为1000,试问 $a+b$ 的最小可能值是多少?

（前苏联教育部推荐试题,1990年）

［解］　取数列 $\{t_n\}$ 满足:

$$t_1=1,t_2=0,t_{n+2}=t_n+t_{n+1},n=1,2,3,\cdots$$

容易证明对任意自然数 n 有

$$x_n=t_na+t_{n+1}b.$$

数列 $\{t_n\}$ 小于1000的项为1,0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,987.易证方程

$$610a+987b=1000,377a+610b=1000,$$

$$233a+377b=1000,144a+233b=1000,$$

都无正整数解.而方程 $89a+144b=1000$ 具有惟一的正整数解 $a=8$,$b=2$.由于 $89=t_{13}$,所以当且仅当 $n\leqslant 13$ 时,方程 $t_na+t_{n+1}b=1000$ 才可能有正整数解 a,b.若有自然数 $k<13$ 和自然数 a',b' 满足

$$t_ka'+t_{k+1}b'=1000.$$

当 $1\leqslant k\leqslant 3$ 时,显然有 $a'+b'\geqslant 1000$,当 $3<k<13$ 时,由自第三项开始数列 $\{t_n\}$ 的严格单增性可知

$$t_{k+1}(a'+b')>t_ka'+t_{k+1}b'=1000=8t_{13}+2t_{14}$$

$$> 10t_{13} \geqslant 10t_{k+1},$$

所以 $a' + b' > 10$. 于是所求 $a + b$ 的最小值是 10.

8・166 设实数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 满足:对任何自然数 k 有

$$a_{k+1} = \frac{ka_k + 1}{k - a_k}.$$

求证:数列 $\{a_n\}$ 中有无穷多项为正,亦有无穷多项为负.

(列宁格勒数学奥林匹克,1989 年)

[证] 如果 $a_k = 0$,则 $a_{k+1} = \frac{1}{k}$. 于是只需证:对于任意自然数 $N, a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \cdots$ 既不可能全为非正,也不可能全为非负.

设存在自然数 N 使得

$$a_k \leqslant 0, 对于任意 k \geqslant N.$$

由于

$$a_{k+1} = \frac{ka_k + 1}{k - a_k} = a_k + \frac{a_k^2 + 1}{k - a_k}, \quad ①$$

又 $\frac{a_k^2 + 1}{k - a_k} > \frac{1}{k + 1}$,所以

$$a_{k+1} > a_k + \frac{1}{k + 1}, 对于任意 k \geqslant N.$$

由此可得,对任意自然数 m 有

$$a_{N+m} > a_N + \frac{1}{N + 1} + \frac{1}{N + 2} + \cdots \frac{1}{N + m}$$

由于

$$\frac{1}{N + 3} + \frac{1}{N + 4} > \frac{2}{N + 4} > \frac{1}{N + 2},$$

$$\frac{1}{N + 5} + \frac{1}{N + 6} + \frac{1}{N + 7} + \frac{1}{N + 8} > \frac{4}{N + 8} > \frac{1}{N + 2},$$

$$\cdots\cdots$$

所以若 $m \geqslant 2^l$,则

$$a_{N+m} > a_N + \frac{l + 1}{N + 2}.$$

于是只要 m 足够大就有 $a_{N+m} > 0$,与假设矛盾!

设存在自然数 N 使得

$$a_k \geqslant 0, 对于任意 k \geqslant N,$$

从而 $0 \leqslant a_k < k$. 再由 ① 可得,对任意 $k \geqslant N$ 有

$$a_{k+1} \geqslant a_k + \frac{1}{k}.$$

于是数列$\{a_k\}$严格单增且无上界，引出矛盾！

8·167　设$a_1 = 1$且

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{1}{a_{n-1}}, \text{其中 } n = 2,3,\cdots 10.$$

求证：$0 < a_{10} - \sqrt{2} < 10^{-370}$.

（第49届莫斯科数学奥林匹克，1986年）

[证]　显然有$a_n > 0, n = 1,2,\cdots,10$，从而

$$a_n > \sqrt{2}, n = 2,3,\cdots,10. \quad ①$$

用归纳法易证　$a_n < 2, n = 1,2,\cdots,10$.　②

记　$\lambda_n = \dfrac{a_n - \sqrt{2}}{a_n + \sqrt{2}}$，则

$$\lambda_{n+1} = \frac{a_{n+1} - \sqrt{2}}{a_{n+1} + \sqrt{2}} = \frac{a_n^2 - 2a_n\sqrt{2} + 2}{a_n^2 + 2a_n\sqrt{2} + 2} = \lambda_n^2.$$

由此可知　$\dfrac{a_{10} - \sqrt{2}}{a_{10} + \sqrt{2}} = \lambda_1^{2^9} = \left(\dfrac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}\right)^{512} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2} + 1}\right)^{1024}$.

再由②便知　$a_{10} - \sqrt{2} < (2 + \sqrt{2}) \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt{2} + 1}\right)^{1024}$.　③

注意到　$(\sqrt{2} + 1)^8 = (3 + 2\sqrt{2})^4 = (17 + 12\sqrt{2})^2$

$> (24\sqrt{2})^2 = 1152 > 10^3$,

所以　$(\sqrt{2} + 1)^{1024} > (10^3)^{128} = 10^{384}$.

于是由③得到

$$a_{10} - \sqrt{2} < 10^{-383}. \quad ④$$

①和④给出所要之不等式.

8·168　数列$a_1 a_2 a_3, \cdots$满足：

$$a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + \frac{1}{a_n}}, n = 1,2,3,\cdots$$

求证：存在正数α，使得$\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{a_n}{n^\alpha} \leqslant 2, n = 1,2,3,\cdots$

（瑞典数学奥林匹克，1988年）

[证] 用归纳法可以证明

$$\frac{1}{2}n^{\frac{1}{3}} \leqslant a_n \leqslant 2n^{\frac{1}{3}}, n = 1,2,\cdots \qquad ①$$

即 $\alpha = \frac{1}{3}$ 为所求.事实上,当 $n = 1$ 时,由 $a_1 = 1$ 可知①显然成立.设当 $n = k$ 时,①成立.于是

$$a_{k+1} = \sqrt{a_k^2 + \frac{1}{a_k}} \leqslant \sqrt{4k^{\frac{2}{3}} + 2k^{-\frac{1}{3}}}.$$

由此可得

$$a_{k+1}^6 \leqslant (4k^{\frac{2}{3}} + 2k^{-\frac{1}{3}})^3 = 64k^2 + 96k + 48 + 8k^{-1}$$
$$\leqslant 64k^2 + 96k + 56 < 64(k+1)^2,$$

即 $$a_{k+1} < 2(k+1)^{\frac{1}{3}}. \qquad ②$$

另一方面由归纳假设

$$a_{k+1} = \sqrt{a_k^2 + \frac{1}{a_k}} \geqslant \sqrt{\frac{1}{4}k^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2}k^{-\frac{1}{3}}},$$

所以 $$a_{k+1}^6 \geqslant \left(\frac{1}{4}k^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2}k^{-\frac{1}{3}}\right)^3 = \frac{1}{64}k^2 + \frac{3}{32}k + \frac{3}{16} + \frac{1}{8}k^{-1}$$
$$> \frac{1}{64}(k+1)^2,$$

即 $$a_{k+1} > \frac{1}{2}(k+1)^{\frac{1}{3}}. \qquad ③$$

由②和③得,当 $n = k + 1$ 时,①也成立,从而完成了对①的归纳证明.

8·169 已给数列 $\{a_n\}$,设 $a_0 = 0$.令

$$b_n = a_n - a_{n-1}, c_n = \frac{a_n}{n}, n = 1,2,3,\cdots$$

如果数列 $\{b_n\}$ 单调减小,求证:数列 $\{c_n\}$ 也单调减小.

(基辅数学奥林匹克,1979 年)

[证] 由于 $a_0 = 0, b_k = a_k - a_{k-1}(k \geqslant 1)$,则

$$a_n = a_0 + (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) = b_1 + b_2 + \cdots b_n.$$

由 $\{b_n\}$ 单调减小可得

$$a_n \geqslant nb_n = n(a_n - a_{n-1}),$$

即 $$(n-1)a_n \leqslant na_{n-1}.$$

由此可得当 $n \geqslant 2$ 时有

$$\frac{a_n}{n} \leqslant \frac{a_{n-1}}{n-1},$$

即 $$c_n \leqslant c_{n-1}.$$

从而数列$\{c_n\}$单调减小.

8·170 求证:存在正数 k,使得对于任何正数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 只要 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} < +\infty$,就有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \leqslant k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}.$$

(第 25 届美国普特南数学竞赛,1964 年)

[证] 对任意偶数 $m = 2l$,可以证明

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \leqslant 4 \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{a_n}. \quad ①$$

事实上,设 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 是$a_1, a_2, \cdots, a_m$ 的一个排列,且 $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_m$. 任取 $p \in N, 1 \leqslant p \leqslant l$,则

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \cdots + a_{2p} &> a_1 + a_2 + \cdots + a_{2p-1} \\ &\geqslant b_1 + b_2 + \cdots + b_{2p-1} \geqslant pb_p. \end{aligned}$$

由此可得

$$\frac{2p-1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2p-1}} \leqslant \frac{2p-1}{pb_p} < \frac{2}{b_p},$$

$$\frac{2p}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2p}} < \frac{2p}{pb_p} = \frac{2}{b_p}.$$

从而

$$\sum_{p=1}^{l} \left(\frac{2p-1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2p-1}} + \frac{2p}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2p}} \right) < \sum_{p=1}^{l} \frac{4}{b_p},$$

即

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} < 4 \sum_{p=1}^{l} \frac{1}{b_p} < 4 \sum_{p=1}^{m} \frac{1}{b_p} = 4 \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{a_n}.$$

于是 ① 成立,在 ① 中令 $m \to +\infty$,则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \leqslant 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}.$$

8・171　设 $a_1 = 1, a_{n+1} = 1 + \frac{n}{a_n}, n \geqslant 1$. 求证：对于任何 $n \in N$ 有　$\sqrt{n} \leqslant a_n \leqslant \sqrt{n} + 1$.

（第 19 届美国普特南数学竞赛，1958 年）

[证]　用归纳法. 显然对 $n = 1$ 要证的不等式成立. 设对于自然数 k 有

$$\sqrt{k} \leqslant a_k \leqslant \sqrt{k} + 1.$$

由递推公式可得

$$a_{k+1} = 1 + \frac{k}{a_k} \leqslant 1 + \frac{k}{\sqrt{k}} = \sqrt{k} + 1 < \sqrt{k+1} + 1.$$

另一方面

$$a_{k+1} \geqslant 1 + \frac{k}{\sqrt{k} + 1} > 1 + \frac{k}{\sqrt{k+1} + 1} = \sqrt{k+1}.$$

于是当 $n = k + 1$ 时，要证之不等式也成立. 以上就完成了归纳证明.

8・172　设 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 是正数数列，求证：存在无穷多个 $n \in N$，使得

$$\frac{a_1 + a_{n+1}}{a_n} > 1 + \frac{1}{n}.$$

（第 9 届美国普特南数学竞赛，1949 年）

[证]　用反证法. 设要证之结论不成立，则存在 $k \in N$，使得当 $n \geqslant k$ 时有

$$\frac{a_1 + a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1 + \frac{1}{n},$$

即　$$\frac{a_n}{n} \geqslant \frac{a_1}{n+1} + \frac{a_{n+1}}{n+1}.$$

于是可得

$$\frac{a_k}{k} \geqslant \frac{a_1}{k+1} + \frac{a_{k+1}}{k+1} \geqslant \frac{a_1}{k+1} + \frac{a_1}{k+2} + \frac{a_{k+2}}{k+2}$$
$$\geqslant \cdots \geqslant a_1 \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{k+i} + \frac{a_{k+m}}{k+m} \geqslant \cdots$$

由于 $\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{k+i}=+\infty$,从而引出矛盾!所以必有无穷多个 $n\in N$,使得

$$\frac{a_1+a_{n+1}}{a_n}>1+\frac{1}{n}.$$

8·173 求所有的 $a_0\in R$,使得由

$$a_{n+1}=2^n-3a_n, n=0,1,2,\cdots$$

所确定的数列 $a_0,a_1,a_2,\cdots$ 是递增的.

(英国数学奥林匹克,1980年)

[解] 由于对于 $n\geqslant 0$ 有

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=2^n-3a_n=2^n-3\cdot 2^{n-1}+3^2a_{n-1}\\&=2^n-3\cdot 2^{n-1}+3^2\cdot 2^{n-2}-3^3a_{n-2}\\&=\cdots=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k2^{n-k}\cdot 3^k+(-1)^{n+1}3^{n+1}a_0\\&=\frac{1}{5}(2^{n+1}-(-1)^{n+1}3^{n+1})+(-1)^{n+1}3^{n+1}a_0,\end{aligned}$$

所以当 $n\geqslant 1$ 时,

$$d_n=a_{n+1}-a_n=\frac{1}{5}\cdot 2^n+(-1)^{n+1}4\cdot 3^n(a_0-\frac{1}{5}).\quad ①$$

显然 $d_0=a_1-a_0=1-4a_0$ 也满足①.从①可知,当 $a_0\neq\frac{1}{5}$ 时,则有充分大的 n 使 $d_n>0$,同时也有充分大的 n 使 $d_n<0$.当 $a_0=\frac{1}{5}$ 时,$d_n=\frac{2^n}{5}>0$,从而数列 $\{a_n\}$ 是单增的.

综上可知 $a_0=\frac{1}{5}$ 即为所求.

8·174 任给实数 a_1,设数列 $a_1,a_2,\cdots$ 满足

$$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{1}{a_n}\right), & 当\ a_n\neq 0,\\ 0, & 当\ a_n=0.\end{cases}$$

求证:此数列中有无穷多个非正项.

(波兰数学奥林匹克,1978年)

[证]　用反证法.设该数列的非正项仅有有限个,则存在 $n_0\in N$,使得当 $n\geqslant n_0$ 时,$a_n>0$.由 $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{1}{a_n}\right)>0$ 可得

$$a_n>1,\text{对于任意 } n\geqslant n_0. \quad ①$$

另一方面,由于

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{1}{a_n}\right)<\frac{1}{2}a_n,$$

对于任意 $n\geqslant n_0$,从而对任意非负整数 k 有

$$a_{m+k}<\left(\frac{1}{2}\right)^k a_m,$$

于是 $\lim\limits_{k\to+\infty}a_{m+k}=0$,与①矛盾!因此,数列 $\{a_n\}$ 中的非正项有无穷多个.

8・175　设数列 $\{a_n\}$ 满足

$$|a_{k+m}-a_k-a_m|\leqslant 1,\text{对于任意 } k,m\in N.$$

求证:对任意 $p,q\in N$ 有

$$\left|\frac{a_p}{p}-\frac{a_q}{q}\right|<\frac{1}{p}+\frac{1}{q}.$$

(奥地利-波兰数学竞赛,1980年)

[证]　设 $k,m\in N,k\geqslant 2$,由于

$$|a_{km}-ka_m|=\left|\sum_{i=1}^{k-1}(a_{(i+1)m}-a_{im}-a_m)\right|\leqslant\sum_{i=1}^{k-1}|a_{(i+1)m}-a_{im}-a_m|,$$

再由假设可得

$$|a_{km}-ka_m|\leqslant k-1. \quad ①$$

显然当 $k=1$ 时,①也成立,于是对任何 $k,m\in N$,①都成立.

任取 $p,q\in N$,由①可得

$$|a_{pq}-pa_q|\leqslant p-1,$$
$$|a_{pq}-qa_p|\leqslant q-1.$$

从而

$$\left|\frac{a_{pq}}{pq}-\frac{a_q}{q}\right|\leqslant\frac{p-1}{pq}<\frac{1}{q},$$
$$\left|\frac{a_p}{p}-\frac{a_{pq}}{pq}\right|\leqslant\frac{q-1}{pq}<\frac{1}{p}.$$

由此立即可得

$$\left|\frac{a_p}{p}-\frac{a_q}{q}\right| \leqslant \left|\frac{a_p}{p}-\frac{a_{pq}}{pq}\right|+\left|\frac{a_{pq}}{pq}-\frac{a_q}{q}\right| < \frac{1}{p}+\frac{1}{q}.$$

8・176　设正数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 满足

$$a_n^2 \leqslant a_n - a_{n+1}, n = 1,2,3,\cdots$$

求证:对任意 $n \in N$ 有 $a_n < \frac{1}{n}$.

(中国北京市数学竞赛,1964年)

[证]　用归纳法.当 $n = 1$ 时,由

$$a_1^2 \leqslant a_1 - a_2 < a_1,$$

可知 $a_1 < 1$.设对自然数 k 有 $a_k < \frac{1}{k}$.

若进一步 $a_k \leqslant \frac{1}{k+1}$,则由 $a_k^2 \leqslant a_k - a_{k+1}$ 可得

$$a_{k+1} \leqslant a_k - a_k^2 < a_k \leqslant \frac{1}{k+1},$$

即要证之结果成立.否则 $\frac{1}{k+1} < a_k < \frac{1}{k}$,从而

$$a_{k+1} \leqslant a_k - a_k^2 < \frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{k+1}.$$

无论何种情况,当 $n = k+1$ 时,要证之结果成立,这完成了归纳证明.

8・177　已给 $A > 1, B > 1$ 及由区间 $[1, AB]$ 中的数组成的数列 $\{a_n\}$.求证:存在由区间 $[1, A]$ 中的数组成的数列 $\{b_n\}$,使得对任意 $m, n \in N$,都有

$$\frac{a_m}{a_n} \leqslant B\frac{b_m}{b_n}.$$

(波兰数学奥林匹克,1979年)

[证]　取

$$b_n = \begin{cases} a_n, & 当 a_n \leqslant A 时, \\ A, & 当 a_n > A 时. \end{cases}$$

令　$C_n = \frac{a_n}{b_n}$,显然 $C_n \geqslant 1$,又 $1 \leqslant a_n \leqslant AB$,所以 $C_n \leqslant B$.于是对任意 $m, n \in N$ 有

$$\frac{C_m}{C_n} \leqslant B,$$

即 $$\frac{a_m}{a_n} \leqslant B\,\frac{b_m}{b_n}\ .$$

8·178　数列$\{F_n\}$定义如下：$F_1=1, F_2=2$，且

$$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n, n=1,2,3,\cdots$$

求证：对于任何自然数 n，均有

$$\sqrt[n]{F_{n+1}} \geqslant 1+\frac{1}{\sqrt[n]{F_n}}.$$

（圣彼得堡市数学选拔考试，1992年）

［证］　令 $F_0=1$，则

$$F_{k+1}=F_k+F_{k-1},$$

即 $$1=\frac{F_k}{F_{k+1}}+\frac{F_{k-1}}{F_{k+1}}, k=1,2,3,\cdots$$

于是

$$n=\sum_{k=1}^{n}\frac{F_k}{F_{k+1}}+\sum_{k=1}^{n}\frac{F_{k-1}}{F_{k+1}}\ .$$

由均值不等式可得

$$1 \geqslant \sqrt[n]{\frac{F_1}{F_2}\cdot\frac{F_2}{F_3}\cdot\cdots\cdot\frac{F_n}{F_{n+1}}}+\sqrt[n]{\frac{F_0}{F_2}\cdot\frac{F_1}{F_5}\cdot\frac{F_2}{F_4}\cdot\cdots\cdot\frac{F_{n-1}}{F_{n+1}}}\ .$$

注意到 $F_0=F_1=1$ 可知

$$1 \geqslant \frac{1}{\sqrt[n]{F_{n+1}}}+\frac{1}{\sqrt[n]{F_nF_{n+1}}}\ ,$$

即 $$\sqrt[n]{F_{n+1}} \geqslant 1+\frac{1}{\sqrt[n]{F_n}}\ .$$

8·179　设实数列$\{x_n\}$满足：$0 \leqslant x_1 < 1$，且对于 $n \geqslant 1$ 有

$$x_{n+1}=\begin{cases}0, 当\ x_n=0\ 时, \\ \dfrac{1}{x_n}-\left[\dfrac{1}{x_n}\right], 当\ x_n \neq 0\ 时.\end{cases}$$

求证：对任意自然数 n 有

$$x_1+x_2+\cdots+x_n < \frac{F_1}{F_2}+\frac{F_2}{F_3}+\cdots+\frac{F_n}{F_{n+1}},$$

其中 $F_1=F_2=1$,且对 $n\geqslant 1$,有

$$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n.$$

(第33届国际数学奥林匹克预选题,1992年)

[证] 令 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$,显然对于 $0\leqslant x<y$ 有

$$0<f(x)-f(y)=\frac{y-x}{(1+x)(1+y)}<y-x.$$

由此易证,对任意自然数 n,总有当 $x\geqslant 0$ 时

$$g_n(x)=x+f(x)+f(f(x))+\cdots+f^{(n)}(x)\text{ 严格单增,} \quad ①$$

其中 $f^{(n)}(x)=f(f(\cdots f(x)\cdots))$ 是以 x 为自变量函数 f 的 n 重复合.

用归纳法证明所要结论成立.当 $n=1$ 时,

显然有 $\quad x_1<\dfrac{F_1}{F_2}=1.$

设当 $\quad 1\leqslant n\leqslant k-1$ 时,所要结论成立.不妨设 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 全不为0,否则由 $\{x_n\}$ 的递推关系可知 $x_k=0$,再由归纳假设即得所要之结论.于是 $0<x_i<1,i=1,2,\cdots,k$,且对于 $i=2,3,\cdots,k$ 有

$$x_{i-1}=\frac{1}{\left[\dfrac{1}{x_{i-1}}\right]+x_i}\leqslant\frac{1}{1+x_i}=f(x_i) \quad ②$$

令 $\quad y_1=x_k,y_2=x_{k-1},\cdots,y_k=x_1$,则由 ② 可得

$$0<y_1<1,y_i\leqslant f(y_{i-1}),i=2,3,\cdots,k. \quad ③$$

由于当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)$ 单减,所以由 ③ 得

$$\begin{aligned}x_1+x_2+\cdots+x_k&=y_1+y_2+\cdots+y_k\\&\leqslant y_1+y_2+\cdots+y_{k-1}+f(y_{k-1}).\end{aligned}$$

再由 ① 和 ③ 得

$$x_1+x_2+\cdots+x_k\leqslant y_1+y_2+\cdots+y_{k-2}+f(y_{k-2})+f(f(y_{k-2})).$$

重复利用 ① 和 ③ 可得

$$x_1+x_2+\cdots+x_k\leqslant y_1+f(y_1)+\cdots+f^{(k-1)}(y_1).$$

由 $0<y_1<1$,再由 ① 得

$$x_1+x_2+\cdots+x_k<1+f(1)+\cdots+f^{(k-1)}(1).$$

由于 $\dfrac{F_1}{F_2}=1$,且当 $i\geqslant 1$ 时有

$$f\left(\frac{Fi}{F_{i+1}}\right)=\frac{F_{i+1}}{F_i+F_{i+1}}=\frac{F_{i+1}}{F_{i+2}},$$

从而

$$1+f(1)+\cdots+f^{(k-1)}(1)=\frac{F_1}{F_2}+\frac{F_2}{F_3}+\cdots+\frac{F_k}{F_{k+1}}.$$

于是

$$x_1+x_2+\cdots+x_k<\frac{F_1}{F_2}+\frac{F_2}{F_3}+\cdots+\frac{F_k}{F_{k+1}},$$

即当 $n=k$ 时,所要之结论也成立,这就完成了归纳证明.

8·180　在有限项的实数数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中,如果其中一段 $a_k,a_{k+1},\cdots,a_{k+l}$ 的算术平均值大于 1988,那么我们这段数列称为一条龙,并把 a_k 称为这条龙的"龙头"(如果某一项 $a_m>1988$,那么单独这一项也是一条龙,a_m 也称为龙头).假设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中至少有一条龙,求证:所有龙头的算术平均值必大于 1988.

(第 3 届中国数学奥林匹克,1988 年)

[证]　在数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中从前往后,先取出以第一个龙头为龙头的一条龙.然后再从余下的项中取出以第一个可作为龙头的项为龙头的一条龙.依此取下去,直到取完为止.这样共取出有限条互不相交的龙,显然这些龙包含所有的龙头.

因为每条龙的算术平均值大于 1988,故取出的这些龙中所有项的算术平均值也大于 1988.

数列中任一项 a_m,如果它不能作为龙头,则 $a_m\leqslant 1988$,否则它自己就是一条龙.故从所取出的龙中取掉不能做为龙头的项,余下所有项的算术平均值仍大于 1988.又因为余下的项恰是所有可作为龙头的项,从而所有龙头的算术平均值大于 1988.

8·181　设 $b_1=1$ 且 $b_n=b_{n-1}n^{t(n)}$,$n=2,3,4,\cdots$ 其中 $t(n)=2^{1-n}$.求证:$b_n<3$,$n=1,2,3,\cdots$

(加拿大国家集训队训练题,1989 年)

[证]　显然 $b_1=1<3$.对于 $n\geqslant 2$,可用归纳法证明更强的结论

$$b_n<3(n-1)^{\frac{-1}{2^{n-2}}}.\qquad ①$$

由于　$b_2=\sqrt{2}<3$,

$$b_3 = \sqrt{2}\sqrt[4]{3} < \frac{3}{\sqrt{2}},$$

$$b_4 = \sqrt{2}\sqrt[4]{3}\sqrt[8]{4} < \frac{3}{\sqrt[4]{3}},$$

即当 $n = 2,3,4$ 时,① 成立.设 $n = k \geqslant 4$ 时,① 成立,则

$$b_{k+1} = b_k \sqrt[2^k]{k+1} < 3\frac{\sqrt[2^k]{k+1}}{\sqrt[2^{k-2}]{k-1}}.$$

当 $k \geqslant 4$ 时易证

$$k^2(k+1) < (k-1)^4,$$

所以 $$\sqrt[2^k]{\frac{k+1}{(k-1)^4}} < \sqrt[2^k]{\frac{1}{k^2}}.$$

即 $$\frac{\sqrt[2^k]{k+1}}{\sqrt[2^{k-1}]{k-1}} < \frac{1}{\sqrt[2^{k-1}]{k}}.$$

于是 $$b_{k+1} < \frac{3}{\sqrt[2^{k-1}]{k}},$$

即 ① 对于 $n = k+1$ 也成立.

8·182 设数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$满足

$$a_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\sqrt{1-a_n^2}}, n = 0,1,2,\cdots$$

$$b_0 = 1, b_{n+1} = \frac{\sqrt{1+b_n^2}-1}{b_n}, n = 0,1,2,\cdots$$

求证:对任意非负整数 n 有 $2^{n+2}a_n < \pi < 2^{n+2}b_n$.

(第 30 届国际数学奥林匹克候选题,1989 年)

[证] $a_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4}$,若 $a_n = \sin\frac{\pi}{2^{n+2}}$,则

$$a_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}} = \sin\frac{\pi}{2^{n+3}}.$$

于是用归纳法可证

$$a_n = \sin\frac{\pi}{2^{n+2}}, n = 0,1,2,\cdots$$

同理可证

$$b_n = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+2}}, n = 0,1,2,\cdots$$

由于当　$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，有

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x\ ,$$

所以要证之不等式成立.

8·183　设　$0<b<1$，令

$$a_1=1+b,\quad a_{n+1}=\frac{1}{a_n}+b,\quad n=1,2,3,\cdots$$

求证：$a_n>1, n=1,2,3,\cdots$

（第9届加拿大数学奥林匹克，1977年）

[证]　用归纳法．当 $n=1$ 时，显然有

$$a_1=1+b>1.$$

设当　$n\leqslant k$ 时，满足 $a_n>1$．若　$k>1$，由归纳假定可知

$$1<a_k=\frac{1}{a_{k-1}}+b<1+b.$$

又　$a_1=1+b,\ 0<b<1$，则

$$1<a_k\leqslant 1+b<\frac{1}{1-b}\ ,$$

于是有　$a_{k+1}=\dfrac{1}{a_k}+b>1-b+b=1,$

所以对任何自然数 n 都有 $a_n>1$.

8·184　设　$1<x_1<2$，令

$$x_{n+1}=1+x_n-\frac{1}{2}x_n^2, n=1,2,3,\cdots$$

求证：$|x_n-\sqrt{2}|<2^{-n}, n=3,4,5,\cdots$

（第17届加拿大数学奥林匹克，1985年）

[证]　由假设可得

$$x_{n+1}=-\frac{1}{2}(x_n-1)^2+\frac{3}{2}\ , n=1,2,3,\cdots \qquad ①$$

由于　$1<x_1<2$，则从 ① 可推出$\dfrac{1}{2}<x_2<\dfrac{3}{2}$．再由 ① 得到

$$\sqrt{2}-\frac{1}{8}<\frac{11}{8}<x_3\leqslant\frac{3}{2}<\sqrt{2}+\frac{1}{8}\ ,$$

即　　$|x_3-\sqrt{2}|<2^{-3}.$

设当 $n=k\quad(k\geqslant 3)$ 时有 $|x_k-\sqrt{2}|<2^{-k}$,即

$$\sqrt{2}-2^{-k}<x_k<\sqrt{2}+2^{-k}.$$

由 ① 可得

$$\begin{aligned}x_{k+1}&<-\frac{1}{2}(\sqrt{2}-2^{-k}-1)^2+\frac{3}{2}\\&=\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot 2^{-k}-2^{-k}-2^{-2k-1}\\&<\sqrt{2}+2^{-k-1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_{k+1}&>-\frac{1}{2}(\sqrt{2}+2^{-k}-1)^2+\frac{3}{2}\\&=\sqrt{2}-\sqrt{2}\cdot 2^{-k}+2^{-k}-2^{-2k-1}.\end{aligned}$$

再由 $k\geqslant 3$ 推出

$$\sqrt{2}-1+2^{-k-1}<\frac{1}{2},$$

所以 $\quad x_{k+1}>\sqrt{2}-2^{-k-1}.$

于是 $\quad |x_{k+1}-\sqrt{2}|<2^{-(k+1)}.$

由归纳法及以上证明可知 $\quad |x_n-\sqrt{2}|<2^{-n}$,对 $n\geqslant 3$ 成立.

8・185　设非负数列 $a_1,a_2,\cdots$ 满足条件

$$a_{n+m}\leqslant a_n+a_m,m,n\in N.$$

求证:对任意 $n\geqslant m$,均有

$$a_n\leqslant ma_1+\left(\frac{n}{m}-1\right)a_m.$$

(中国中学生数学冬令营,1997 年)

[证]　设 $\quad n=mq+r,\quad q\in N,\quad 0\leqslant r<m.$

于是,我们有

$$\begin{aligned}a_n&\leqslant a_{mq}+a_r\\&\leqslant qa_m+a_r\\&=\frac{n-r}{m}\cdot a_m+a_r\\&=\left(\frac{n}{m}-1\right)a_m+\frac{m-r}{m}a_m+a_r\\&\leqslant\left(\frac{n}{m}-1\right)a_m+\frac{m-r}{m}\cdot ma_1+ra_1\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{n}{m} - 1\right)a_m + ma_1.$$

8 · 186 $\{a_n \mid n \in N\}$ 是正整数的一个序列，使得对每个 n，

$$(a_n - 1)(a_n - 2)\cdots(a_n - n^2)$$

是一个正整数，且为 n^{n^2-1} 的倍数. 求证：对其元素全为质数的任一有限集 P，下述不等式成立

$$\sum_{p\in P} \frac{1}{\log_p a_p} < 1.$$

（第 43 届捷克（和斯洛伐克）数学奥林匹克，1994 年）

［证］ 如果 $n = p$，p 是任意一个质数，那么，由已知，

$$(a_p - 1)(a_p - 2)\cdots(a_p - p^2)$$

是一个正整数，且是 p^{p^2-1} 的倍数. 注意到 $a_p > 0$，$a_p - 1, a_p - 2, \cdots, a_p - p^2$ 这 p^2 个连续整数都不等于零，因此这 p^2 个连续整数都是正整数. 由于每 p 个连续正整数中只有一个是 p 的倍数，因此这 p^2 个连续正整数中只有 p 个正整数是 p 的倍数，并且这 p^2 个连续正整数中有且只有一个是 p^2 的倍数. 设 $a_p - k$ 是 p^2 的倍数，这里 k 是 $1, 2, \cdots, p^2$ 中的某个正整数，于是，有

$$a_p - k = p^x m,$$

这里正整数 $x \geqslant 2$，m 是一个正整数，且 m 与 p 互质. 那么

$$(a_p - 1)(a_p - 2)\cdots(a_p - p^2)$$

是 p^{x+p-1} 的倍数，但不是 p^{x+p} 的倍数. 因此，有

$$x + p - 1 \geqslant p^2 - 1,$$

即

$$x \geqslant p^2 - p.$$

于是，有

$$a_p > a_p - k \geqslant p^x \geqslant p^{p^2-p},$$

取对数，有

$$\log_p a_p > p^2 - p,$$

对于元素全为质数的任一有限集 P，设 T 是集合 P 中最大的质数，那么由上式可得

$$
\begin{aligned}
\sum_{p\in P}\frac{1}{\log_p a_p} &< \sum_{p\in P}\frac{1}{p^2-p}\\
&\leqslant \sum_{j=2}^{T}\frac{1}{j^2-j}\\
&= \sum_{j=2}^{T}\frac{1}{(j-1)j}\\
&= \sum_{j=2}^{T}\left(\frac{1}{j-1}-\frac{1}{j}\right)\\
&= 1-\frac{1}{T}\\
&< 1.
\end{aligned}
$$

第九章　不等式

第1节　解不等式与不等式解集的性质

9·1　对于 x 的哪些值,不等式

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2}<2x+9$$

成立.

（第2届国际数学奥林匹克,1960年）

[解]　由假设可知　$1+2x\geqslant 0, 1-\sqrt{1+2x}\neq 0$,

所以　　$x\geqslant -\frac{1}{2}$ 且 $x\neq 0$.　　①

又当　$x\neq 0$ 时

$$\frac{-2x}{1-\sqrt{1+2x}}=1+\sqrt{1+2x},$$

从而原不等式化为

$$2+2x+2\sqrt{1+2x}<2x+9,$$

解之得　$-\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{45}{8}$.　　②

由①和②得 $-\frac{1}{2}\leqslant x<0$ 或 $0<x<\frac{45}{8}$.

9·2　求满足不等式

$$\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}>\frac{1}{2}$$

的所有实数 x.

（第 4 届国际数学奥林匹克，1962 年）

[解] 由 $3-x\geqslant 0$, $x+1\geqslant 0$, $\sqrt{3-x}>\sqrt{x+1}$, 可知

$$-1\leqslant x<1 \quad ①$$

将原不等式两端平方得

$$\sqrt{(3-x)(x+1)}<\frac{15}{8}.$$

解之得 $x<1-\frac{\sqrt{31}}{8}$ 或 $x>1+\frac{\sqrt{31}}{8}$. ②

从 ① 和 ② 可得原不等式的解为

$$-1\leqslant x<1-\frac{\sqrt{31}}{8}.$$

9·3 求满足如下条件的所有实数 x:

$0\leqslant x\leqslant 2\pi$ 且 $2\cos x\leqslant\left|\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}\right|\leqslant\sqrt{2}$.

（第 7 届国际数学奥林匹克，1965 年）

[解] 显然对任意实数 x 有

$$\left|\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}\right|\leqslant\sqrt{2}.$$

问题化为在 $[0,2\pi]$ 内解不等式

$$2\cos x\leqslant\left|\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}\right|. \quad ①$$

当 $\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}$ 时，由于 $\cos x\leqslant 0$，则 ① 成立.

当 $0\leqslant x<\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3\pi}{2}<x\leqslant 2\pi$ 时，由于 $\cos x>0$ 且

$$\left|\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}\right|^2=2-2|\cos 2x|,$$

所以 ① 等价于

$$4\cos^2 x\leqslant 2-2|\cos 2x|,$$

即

$$|\cos 2x|\leqslant -\cos 2x,$$

从而 $\cos 2x\leqslant 0$. 于是 $\frac{\pi}{4}\leqslant x<\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3\pi}{2}<x\leqslant\frac{7\pi}{4}$.

总之原问题的解为 $\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{4}$.

9·4 求满足

$$|\sin x-\sin y|+\sin x\cdot\sin y\leqslant 0$$
的所有数对(x,y).

（第19届全苏数学奥林匹克，1985年）

［解］ 若(x,y)满足所给的不等式，则
$$\sin x\cdot\sin y\leqslant 0,$$
由此可得 $|\sin x-\sin y|=|\sin x|+|\sin y|$.

于是(x,y)满足 $|\sin x|+|\sin y|+\sin x\cdot\sin y\leqslant 0$,

从而 $\sin x=\sin y=0$.

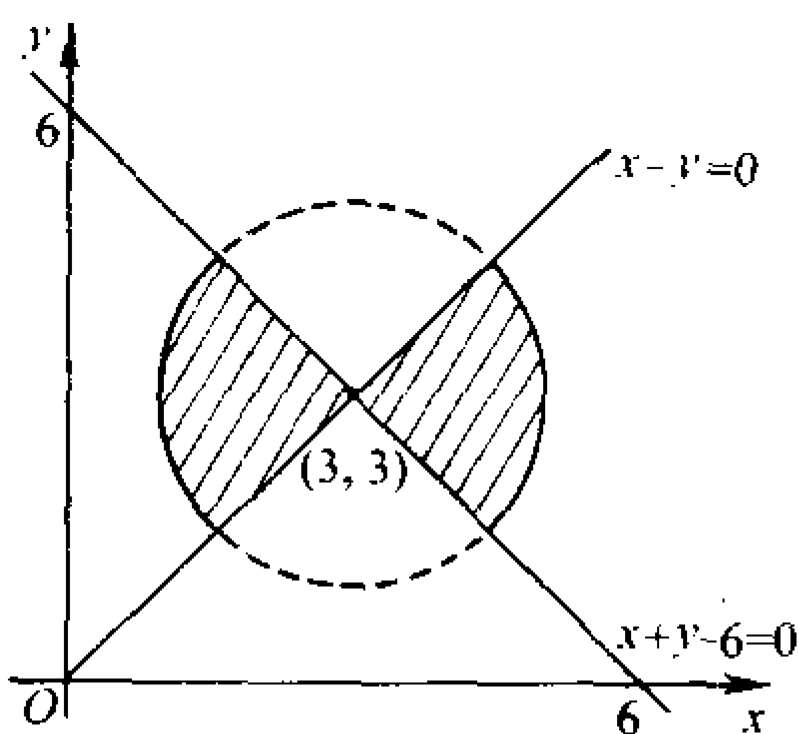
所求之一切数对(x,y)组成的集合为
$$\{(x,y)\mid x=n\pi,y=m\pi,n,m\in Z\}.$$

9·5 已知$f(x)=x^2-6x+5$，问满足

$f(x)+f(y)\leqslant 0$和$f(x)-f(y)\geqslant 0$的点(x,y)在平面上的什么范围？并作图.

（中国高中数学联赛，1979年）

［解］ 由于$f(x)+f(y)=x^2+y^2-6x-6y+10$
$$=(x-3)^2+(y-3)^2-8,$$
所以满足$f(x)+f(y)\leqslant 0$的点(x,y)在圆周$(x-3)^2+(y-3)^2=8$上及其内部.



由$f(x)-f(y)=x^2-y^2-6x+6y=(x-y)(x+y-6)$可知

$f(x)-f(y)\geqslant 0$等价于
$$\begin{cases}x-y\geqslant 0,\\x+y-6\geqslant 0;\end{cases}\quad 或$$
$$\begin{cases}x-y\leqslant 0,\\x+y-6\leqslant 0.\end{cases}$$

综上所述可知同时满足$f(x)+f(y)\leqslant 0$和$f(x)-f(y)\geqslant 0$的点(x,y)在如图所示阴影部分的两个扇形内及其边界上.

9·6 计算如下乘积，精确到0.00001之内：
$$\left(1-\frac{1}{10}\right)\left(1-\frac{1}{10^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{10^{99}}\right).$$

（第10届莫斯科数学奥林匹克，1947年）

[解]　令 $x=\left(1-\frac{1}{10}\right)\left(1-\frac{1}{10^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{10^{99}}\right)$.

由于 $1-\frac{1}{9\cdot 10^5}<1-\left(\frac{1}{10^6}+\cdots+\frac{1}{10^{99}}\right)<\left(1-\frac{1}{10^6}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{10^{99}}\right)<1$,

所以　$0<\left(1-\frac{1}{10}\right)\left(1-\frac{1}{10^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{10^5}\right)-x<\frac{1}{9\cdot 10^5}$.

经计算易知

$$\left|\left(1-\frac{1}{10}\right)\left(1-\frac{1}{10^2}\right)\left(1-\frac{1}{10^3}\right)\left(1-\frac{1}{10^4}\right)\left(1-\frac{1}{10^5}\right)-0.89001\right|<\frac{2}{10^6},$$

从而　$|x-0.89001|<\frac{4}{10^4}$.

9·7　试选取 100 个数,使得它们满足

$$x_1=1,0\leqslant x_k\leqslant 2x_{k-1},k=2,3,\cdots,100,$$

且使 $s=x_1-x_2+x_3-x_4+\cdots+x_{99}-x_{100}$ 为最大.

（第 31 届莫斯科数学奥林匹克,1968 年）

[解]　由假设可知

$$\begin{aligned}s&\leqslant x_1+(-x_2+x_3)+(-x_4+x_5)+\cdots+(-x_{98}+x_{99})\\&\leqslant x_1+x_2+x_4+\cdots+x_{98}\\&\leqslant 1+2+2^3+\cdots+2^{97}.\end{aligned}$$

由此可知 $x_1=1,x_2=2,x_3=2^2,\cdots,x_{98}=2^{97},x_{99}=2^{98},x_{100}=0$ 即为所求.

9·8　求出满足不等式

$\log_x y\geqslant\log_{\frac{x}{y}}(xy)$ 的 (x,y) 所组成的区域.

（加拿大国家集训队训练题,1989 年）

[解]　显然有 $x>0,y>0,x\neq 1,x\neq y$.令

$$u=\log_x y,$$

则 $u\neq 1$,且

$$\log_{\frac{x}{y}}(xy)=\frac{\log_x(xy)}{\log_x\frac{x}{y}}=\frac{1+u}{1-u}.$$

显然 $u \neq \frac{1+u}{1-u}$,又

$$u > \frac{1+u}{1-u} \Leftrightarrow u - \frac{1+u}{1-u} = \frac{u^2+1}{u-1} > 0 \Leftrightarrow u > 1,$$

所以满足 $\log_x y \geqslant \log_{\frac{x}{y}}(xy)$ 的 (x,y) 所组成的区域是

$$\{(x,y) \mid 0 < x < 1 \text{ 且 } 0 < y < x, \text{或者 } x > 1 \text{ 且 } y > x\}.$$

9·9 求证:对任何实数 x,y,z,下述三个不等式不可能同时成立:

$$|x| < |y-z|, \ |y| < |z-x|, \ |z| < |x-y|.$$

(第49届莫斯科数学奥林匹克,1986年)

[证] 用反证法,假设三个不等式同时成立,则

$$\begin{cases} x^2 < (y-z)^2, \\ y^2 < (z-x)^2, \\ z^2 < (x-y)^2. \end{cases}$$

从而可得

$$\begin{cases} (x-y+z)(x+y-z) < 0, \\ (y-z+x)(y+z-x) < 0, \\ (z-x+y)(z+x-y) < 0. \end{cases}$$

三个不等式相乘给出

$$(x+y-z)^2(y+z-x)^2(z+x-y)^2 < 0,$$

矛盾!

9·10 求证:下述不等式组无实数解:

$$\begin{cases} |x| > |y-z+t|, \\ |y| > |x-z+t|, \\ |z| > |x-y+t|, \\ |t| > |x-y+z|. \end{cases}$$

(第49届莫斯科数学奥林匹克,1986年)

[证] 用反证法.设实数 x,y,z,t 满足上述不等式组,则不等式两边平方可得

$$\begin{cases}(x+y-z+t)(x-y+z-t)>0,\\(y+x-z+t)(y-x+z-t)>0,\\(z+x-y+t)(z-x+y-t)>0,\\(t+x-y+z)(t-x+y-z)>0.\end{cases}$$

从而有

$-(x+y-z+t)^2(x-y+z-t)^2(y-x+z-t)^2(z+x-y+t)^2>0,$

矛盾!

9・11　任给实数 a,b,c,求证:能找到实数 x 使得

$$a\cos x+b\cos 3x+c\cos 9x\geqslant\frac{1}{2}(|a|+|b|+|c|).$$

(第 53 届莫斯科数学奥林匹克,1990 年)

[证]　按 a,b,c 的正负情况,分 8 种情形讨论如下:

当 $a\geqslant 0,b\geqslant 0,c\geqslant 0$ 时,可取 $x=0$,

当 $a\leqslant 0,b\leqslant 0,c\leqslant 0$ 时,可取 $x=\pi$,

当 $a\geqslant 0,b\leqslant 0,c\leqslant 0$ 时,可取 $x=\frac{\pi}{3}$,

当 $a\leqslant 0,b\geqslant 0,c\geqslant 0$ 时,可取 $x=\frac{2\pi}{3}$,

当 $a\geqslant 0,b\leqslant 0,c\geqslant 0$ 时,可取 $x=\frac{2\pi}{9}$,

当 $a\leqslant 0,b\geqslant 0,c\leqslant 0$ 时,可取 $x=\frac{7\pi}{9}$,

当 $a\geqslant 0,b\geqslant 0,c\leqslant 0$ 时,可取 $x=\frac{2}{27}\pi$,

当 $a\leqslant 0,b\leqslant 0,c\geqslant 0$ 时,可取 $x=\frac{8}{9}\pi$.

9・12　(a)求证:从任何 3 个正数中总能选出两个数 x,y 使得

$$0<\frac{x-y}{1+xy}\leqslant 1. \qquad ①$$

(b)是否能从任意 4 个实数中选出两个数满足 ①.

(第 50 届莫斯科数学奥林匹克,1987 年)

[证]　(a)任取三个正数 x,y,z,记

$\alpha=\operatorname{arctg}x,\beta=\operatorname{arctg}y,\gamma=\operatorname{arctg}z.$

由于 $\alpha,\beta,\gamma\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,从而 α,β,γ 中存在两个,不妨设为 α,β 使得

$$0<\alpha-\beta<\frac{\pi}{4}.$$

从而 $\quad 0<\operatorname{tg}(\alpha-\beta)<1$,

即 $\quad 0<\frac{x-y}{1+xy}<1.$

(b) 证法同(a).设 x,y,z,u 是4个实数,不妨设 $x<y<z<u$.令

$$\alpha=\operatorname{arctg}x,\quad \beta=\operatorname{arctg}y,\quad \gamma=\operatorname{arctg}z,\quad \theta=\operatorname{arctg}u,$$

则 $\quad -\frac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\gamma<\theta<\frac{\pi}{2}<\alpha+\pi.$

$\alpha,\beta,\gamma,\theta,\alpha+\pi$ 中必存在两个,不妨设为 α,β

使得 $\quad 0<\beta-\alpha\leqslant\frac{\pi}{4}$,

从而 $\quad 0<\frac{y-x}{1+xy}\leqslant 1.$

9·13 解不等式

$$\sqrt{\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{|x|+|y|}{\pi}}+\operatorname{tg}^2x+1\leqslant\sqrt{2}\,|\operatorname{tg}x|(\sin x+\cos x).$$

(基辅数学奥林匹克,1972年)

[解] 设 x,y 满足不等式,由 $\sin x+\cos x\leqslant\sqrt{2}$ 可得

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}^2x+1&\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{|x|+|y|}{\pi}}+\operatorname{tg}^2x+1\\&\leqslant\sqrt{2}\,|\operatorname{tg}x|(\sin x+\cos x)\\&\leqslant 2|\operatorname{tg}x|.\end{aligned}$$

由于 $\operatorname{tg}^2x+1\geqslant 2|\operatorname{tg}x|$,所以

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}^2x+1&=\sqrt{\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{|x|+|y|}{\pi}}+\operatorname{tg}^2x+1\\&=\sqrt{2}\,|\operatorname{tg}x|(\sin x+\cos x)\\&=2|\operatorname{tg}x|.\end{aligned}$$

由此可推出

$$\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{|x|+|y|}{\pi}=0,$$

$$|\operatorname{tg}x|=1,\sin x+\cos x=\sqrt{2}.$$

于是 $x=\frac{\pi}{4}+2n\pi, n\in Z$, $|x|+|y|=\pi$,从而 $n=0$,即 $x=\frac{\pi}{4}$, $y=\pm\frac{3}{4}\pi$.

反之,当 $x=\frac{\pi}{4}, y=\pm\frac{3}{4}\pi$ 时,不等式显然成立.综上可知 $(x,y)\in\left\{\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right),\left(\frac{\pi}{4},-\frac{3\pi}{4}\right)\right\}$ 为所求的解.

9·14 在满足不等式

$$\log_{x^2+y^2}(x+y)\geqslant 1$$

的所有 x,y 中,求 y 的最大值.

(基辅数学奥林匹克,1973年)

[解] 令 $M=\{(x,y);x+y\geqslant x^2+y^2>1\}$,

$$N=\{(x,y);0<x+y\leqslant x^2+y^2<1\}.$$

显然不等式 $\log_{x^2+y^2}(x+y)\geqslant 1$ 的解集为 $M\cup N$.

如果 $(x,y)\in N$,则 $y<1$.如果 $(x,y)\in M$,则由

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\frac{1}{2} \text{ 可知}$$

$$y\leqslant\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

另一方面,显然 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\in M$.于是 $y=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$ 即为所求 y 之最大值.

9·15 确定所有能使下列不等式

$$(x_1^2-x_3x_5)(x_2^2-x_3x_5)\leqslant 0,$$
$$(x_2^2-x_4x_1)(x_3^2-x_4x_1)\leqslant 0,$$
$$(x_3^2-x_5x_2)(x_4^2-x_5x_2)\leqslant 0,$$
$$(x_4^2-x_1x_3)(x_5^2-x_1x_3)\leqslant 0,$$
$$(x_5^2-x_2x_4)(x_1^2-x_2x_4)\leqslant 0$$

成立的正实数组 (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5).

(第14届国际数学奥林匹克,1972年)

[解] 设 (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) 是所要的一组解且 $x_1=\min\{x_1,$

$x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $x_2 = \min\{x_2, x_3, x_4, x_5\}$. 由于 $x_1^2 \leqslant x_3x_5$, $x_2^2 \leqslant x_3x_5$ 和 $(x_1^2 - x_3x_5)(x_2^2 - x_3x_5) \leqslant 0$, 可得

$$x_1 \leqslant x_2 = x_3 = x_5 \leqslant x_4.$$

所以 $x_4^2 \geqslant x_1x_3$, $x_5^2 \geqslant x_1x_3$, 由 $(x_4^2 - x_1x_3)(x_5^2 - x_1x_3) \leqslant 0$ 可知

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_5 \leqslant x_4.$$

再由 $(x_5^2 - x_2x_4)(x_1^2 - x_2x_4) \leqslant 0$, 则

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5. \qquad ①$$

其他情况类似可证 ① 成立.

另一方面任取正实数 x, 显然 (x, x, x, x, x) 是所要的一组解. 因此所有满足 ① 的正实数组 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ 即为所求.

9·16　任给 7 个实数, 求证: 其中必有两个数, 记为 x, y, 满足

$$0 < \frac{x - y}{1 + xy} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

(第 16 届加拿大数学奥林匹克, 1984 年)

[证]　设已给的 7 个数为

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7.$$

令

$$\theta_i = \operatorname{arctg} a_i, \ i = 1, 2, \cdots, 7,$$

则

$$-\frac{\pi}{2} < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_7 < \frac{\pi}{2}.$$

于是必存在 $1 \leqslant i \leqslant 6$, 使得

$$0 < \theta_{i+1} - \theta_i \leqslant \frac{\pi}{6}.$$

记 $x = a_{i+1}$, $y = a_i$, 由 $a_{i+1} = \operatorname{tg}\theta_{i+1}$, $a_i = \operatorname{tg}\theta_i$ 及

$$0 < \operatorname{tg}(\theta_{i+1} - \theta_i) = \frac{\operatorname{tg}\theta_{i+1} - \operatorname{tg}\theta_i}{1 + \operatorname{tg}\theta_{i+1}\operatorname{tg}\theta_i} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}},$$

可知

$$0 < \frac{x - y}{1 + xy} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

9·17　设非负实数 a, b, c 满足

$a^4 + b^4 + c^4 \leqslant 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$.

(i) 求证: a, b, c 中的每一个不大于另外两个之和.

(ii) 求证: $a^2 + b^2 + c^2 \leqslant 2(ab + bc + ca)$.

(iii) 问是否可由(ii) 中不等式推出原不等式?

(第 9 届世界城市际数学邀请赛,1987 年 ~ 1988 年)

[证] (i) 由于

$$\begin{aligned}0 &\leqslant 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-a^4-b^4-c^4\\ &= b^2(2a^2+2c^2)-b^4-(c^2-a^2)^2\\ &= b^2(c+a)^2+b^2(c-a)^2-b^4-(c-a)^2(c+a)^2\\ &= [b^2-(c-a)^2][(c+a)^2-b^2]\\ &= (b+c-a)(a+b-c)(c+a-b)(a+b+c),\end{aligned}$$

再由 a,b,c 非负可得

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\geqslant 0. \qquad ①$$

不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$,则 $a+b-c\geqslant 0$,且等号成立的充要条件是 $a=b=c=0$,$c+a-b\geqslant 0$,且等号成立的充要条件是 $a=b,c=0$,再由 ① 可得 $b+c-a\geqslant 0$,于是(i) 得证.

(ii) 由 a,b,c 非负,只需证

$$(a^2+b^2+c^2)^2\leqslant 4(ab+bc+ca)^2. \qquad ②$$

事实上,由于

$$\begin{aligned}&4(ab+bc+ca)^2-(a^2+b^2+c^2)^2\\ =\ &4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+8(a^2bc+b^2ca+c^2ab)\\ &-a^4-b^4-c^4-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\\ =\ &8(a^2bc+b^2ca+c^2ab)+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-a^4-b^4-\\ &c^4\\ \geqslant\ &8(a^2bc+b^2ca+c^2ab)\geqslant 0,\end{aligned}$$

所以 ② 成立.

(iii) 否. 例如 $a=b=1,c=3$,则 $a^2+b^2+c^2=11$,$2(ab+bc+ca)=14$,(ii) 中的不等式成立. 但 $a^4+b^4+c^4=83$,$2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=38$,原不等式不成立.

9·18 已给 $f(x)=ax^2+bx+c$,其中 a,b,c 为实数且 $a>100$,问至多有多少个整数 x 使得 $|f(x)|\leqslant 50$.

(第 19 届全苏数学奥林匹克,1985 年)

[解] 至多有两个. 否则设有三个不同的整数 x_1,x_2,x_3 满足

$$|f(x_i)|\leqslant 50,i=1,2,3.$$

设 $x_1 > x_2 \geqslant -\frac{b}{2a}$,由于 x_1,x_2 是整数,

所以 $$x_1 + x_2 + \frac{b}{a} \geqslant 1.$$

由此可得

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left|a(x_1 - x_2)\left(x_1 + x_2 + \frac{b}{a}\right)\right| \geqslant a > 100,$$

与 $|f(x_1)|,|f(x_2)| \leqslant 50$ 矛盾.同理可证 x_1,x_2,x_3 中有两个小于或等于 $-\frac{b}{2a}$ 的情况也引出矛盾.

9·19　设实数 $x_1,x_2,\cdots,x_{100}$ 之和为 1 且

$$|x_{k+1} - x_k| < \frac{1}{50}, k = 1,2,\cdots,99.$$

求证:可以从这 100 个数中选出 50 个数,使得它们的和与 $\frac{1}{2}$ 之差的绝对值不大于 $\frac{1}{100}$.

(第 22 届莫斯科数学奥林匹克,1959 年)

[证]　如果 $\left|x_1 + x_3 + x_5 + \cdots + x_{99} - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{1}{100}$,则 $x_1,x_3,x_5,\cdots,x_{99}$ 即为所求.否则,不妨设

$$x_1 + x_3 + x_5 + \cdots + x_{99} < \frac{1}{2} - \frac{1}{100},$$

由题可知 $$x_2 + x_4 + x_6 + \cdots + x_{100} > \frac{1}{2} + \frac{1}{100}.$$

首先将 x_1 与 x_2 对换,第 2 次将 x_3 与 x_4 对换,第 3 次将 x_5 与 x_6 对换.如此下去,经 50 次对换,$\{x_1,x_3,x_5,\cdots,x_{99}\}$ 变为 $\{x_2,x_4,x_6,\cdots,x_{100}\}$.所有数之和由小于 $\frac{1}{2} - \frac{1}{100}$ 变为大于 $\frac{1}{2} + \frac{1}{100}$.由于经一次对换和数相差之绝对值小于 $\frac{1}{50}$,从而和数首次超过 $\frac{1}{2} - \frac{1}{100}$ 时的 50 个数必满足题目结论的要求.

9·20　已知 12 个实数 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{12}$ 满足

$$\begin{cases} a_2(a_1 - a_2 + a_3) < 0, \\ a_3(a_2 - a_3 + a_4) < 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{11}(a_{10} - a_{11} + a_{12}) < 0. \end{cases}$$

求证:从这些数中至少可找到3个正数和3个负数.

(第22届莫斯科数学奥林匹克,1959年)

[证] 用反证法.设要证之结论不成立.不妨设 $a_1, a_2, \cdots, a_{12}$ 中至多有两个负数,则存在 $1 \leqslant k \leqslant 9$ 使得 $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}$ 都是非负实数.

由题设

$$\begin{cases} a_{k+1}(a_k - a_{k+1} + a_{k+2}) < 0, \\ a_{k+2}(a_{k+1} - a_{k+2} + a_{k+3}) < 0, \end{cases}$$

又 $a_{k+1} \geqslant 0, a_{k+2} \geqslant 0$,则 $a_{k+1} > 0, a_{k+2} > 0$ 且

$$\begin{cases} a_k - a_{k+1} + a_{k+2} < 0, \\ a_{k+1} - a_{k+2} + a_{k+3} < 0. \end{cases}$$

两式相加得 $$a_k + a_{k+3} < 0,$$

与 $a_k \geqslant 0, a_{k+3} \geqslant 0$ 矛盾.所以 $a_1, a_2, \cdots, a_{12}$ 中至少有3个正数和3个负数.

9·21 设实数 $a_1, a_2, \cdots, a_{100}$ 满足

$$\begin{cases} a_1 - 3a_2 + 2a_3 \geqslant 0, \\ a_2 - 3a_3 + 2a_4 \geqslant 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{99} - 3a_{100} + 2a_1 \geqslant 0, \\ a_{100} - 3a_1 + 2a_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

求证 $a_1 = a_2 = \cdots = a_{100}$.

(第17届莫斯科数学奥林匹克,1954年)

[证] 记 $s_1 = a_1 - 3a_2 + 2a_3, s_2 = a_2 - 3a_3 + 2a_4, \cdots, s_{99} = a_{99} - 3a_{100} + 2a_1, s_{100} = a_{100} - 3a_1 + 2a_2$.显然有

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_{99} + s_{100} = 0,$$

又 $s_i \geqslant 0, i = 1,2,\cdots,100$,所以 $s_i = 0, i = 1,2,\cdots,100$,由此可得 $a_1 - a_2 = 2(a_2 - a_3), \quad a_2 - a_3 = 2(a_3 - a_4), \cdots, \quad a_{99} - a_{100} =$

$2(a_{100}-a_1), a_{100}-a_1=2(a_1-a_2)$. 从而 $a_1-a_2=2^{100}(a_1-a_2)$, 于是 $a_1=a_2$. 由此立即可得

$$a_1=a_2=\cdots=a_{99}=a_{100}.$$

9・22 已知 100 个正数 $x_1, x_2, \cdots, x_{100}$ 满足

$$\begin{cases} x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{100}^2>10000, \\ x_1+x_2+\cdots+x_{100}<300. \end{cases}$$

求证:可在它们之中找出 3 个数,使得这 3 个数之和大于 100.

(第 17 届莫斯科数学奥林匹克,1954 年)

[证] 不妨设 $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant x_4 \geqslant \cdots \geqslant x_{100}$, 记

$$x_1+x_2+x_3=s, x_3=\lambda.$$

令 $\delta=x_2-x_3 \geqslant 0$, 由 $x_1 \geqslant x_2$, 易知

$$(x_1+\delta)^2+(x_2-\delta)^2 \geqslant x_1^2+x_2^2,$$

所以 $$x_1^2+x_2^2+x_3^2 \leqslant (s-2\lambda)^2+2\lambda^2. \quad ①$$

由 $\lambda \geqslant x_4 \geqslant x_5 \geqslant \cdots \geqslant x_{100}$ 和 $x_4+x_5+\cdots+x_{100}<300-s$ 可得

$$x_4^2+x_5^2+\cdots+x_{100}^2 \leqslant \lambda(x_4+x_5+\cdots+x_{100}) \leqslant (300-s)\lambda. \quad ②$$

① 式和 ② 式相加得到

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+\cdots+x_{100}^2 \leqslant 6\lambda^2+(300-5s)\lambda+s^2.$$

记 $f(\lambda)=6\lambda^2+(300-5s)\lambda+s^2$. 由于 $0<\lambda \leqslant \frac{s}{3}$, 又

$$f(0)=s^2, f\left(\frac{s}{3}\right)=\frac{2}{3}s^2+(300-5s)\frac{s}{3}+s^2=100s,$$

所以 $$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{100}^2 \leqslant \max(s^2, 100s).$$

再由 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{100}^2>10000$ 可得

$$s=x_1+x_2+x_3>100.$$

9・23 求所有的实数 α 使得

$$\cos\alpha, \cos 2\alpha, \cos 4\alpha, \cdots, \cos 2^n\alpha, \cdots$$

都是负数.

(第 21 届全苏数学奥林匹克,1987 年)

[解] 设 α 满足题意要求,则由 $\cos 4\alpha<0$ 和 $\cos 2\alpha<0$ 可得

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos 2\alpha<0.$$

再由 $\cos\alpha < 0$ 可知 $\cos\alpha < -\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} < -\dfrac{1}{4}$. 由此立即

可得 $$\cos 2^n\alpha < -\frac{1}{4}, n = 0,1,2,\cdots$$

所以有 $$\left|\cos 2^n\alpha - \frac{1}{2}\right| \geqslant \frac{3}{4}, n = 0,1,2,\cdots$$

由于 $$\begin{aligned}\left|\cos 2^{n+1}\alpha + \frac{1}{2}\right| &= 2\left|\cos^2 2^n\alpha - \frac{1}{4}\right| \\ &= 2\left|\cos 2^n\alpha - \frac{1}{2}\right| \cdot \left|\cos 2^n\alpha + \frac{1}{2}\right| \\ &\geqslant \frac{3}{2}\left|\cos 2^n\alpha + \frac{1}{2}\right|,\end{aligned}$$

所以 $$\left|\cos\alpha + \frac{1}{2}\right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n, n = 1,2,3,\cdots$$

于是 $\cos\alpha = -\dfrac{1}{2}$ 即 $\alpha = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z$. 另一方面当 $\alpha = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z$, 显然 $\cos 2^n\alpha = -\dfrac{1}{2}, n = 0,1,2,\cdots$

9·24 求证:对于任意实数 a,b,存在[0,1]中的 x 和 y,使得

$$|xy - ax - by| \geqslant \frac{1}{3},$$

并问上述命题中的 $\dfrac{1}{3}$ 改为 $\dfrac{1}{2}$,或 0.33334 是否仍然成立?

(基辅数学奥林匹克,1983 年)

[证] 用反证法,设命题不成立,则存在实数 a,b,使得对于[0,1]中的任意 x,y 均有

$$|xy - ax - by| < \frac{1}{3}.$$

分别取 $(x,y) = (1,0),(0,1),(1,1)$ 可得

$$|a| < \frac{1}{3}, |b| < \frac{1}{3}, |1 - a - b| < \frac{1}{3}.$$

但是从 $|a| < \dfrac{1}{3}, |b| < \dfrac{1}{3}$,可直接推出 $|1 - a - b| > \dfrac{1}{3}$,得到矛盾!从而命题成立.

以下证明:如果原命题中的 $\dfrac{1}{3}$ 换成比 $\dfrac{1}{3}$ 大的任意实数 c,则命题

不成立，即存在实数 a、b，使得对任意 $x,y\in[0,1]$ 有

$$|xy-ax-by|<c.$$

事实上，取 $a=b=\frac{1}{3}$，由于

$$xy-ax-by=\frac{1}{3}[xy-x(1-y)-y(1-x)]$$

所以若 $x,y\in[0,1]$，则

$$|xy-ax-by|\leqslant\frac{1}{3}\max\{xy,x(1-y)+y(1-x)\}.$$

又 $\quad 0\leqslant xy\leqslant 1,$

$$0\leqslant x(1-y)+y(1-x)\leqslant x+(1-x)=1,$$

从而 $\quad |xy-ax-by|\leqslant\frac{1}{3}<c$，对任意 $x,y\in[0,1]$.

9·25　求证：任何向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 都不能同时满足　$\sqrt{3}|\vec{a}|<|\vec{b}-\vec{c}|,\sqrt{3}|\vec{b}|<|\vec{c}-\vec{a}|,\sqrt{3}|\vec{c}|<|\vec{a}-\vec{b}|$.

（第 49 届莫斯科数学奥林匹克，1986 年）

［证］　用反证法．若向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 满足上述不等式，则两边平方可得

$$\begin{cases}3|\vec{a}|^2<|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c},\\3|\vec{b}|^2<|\vec{c}|^2+|\vec{a}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{a},\\3|\vec{c}|^2<|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}.\end{cases}$$

三式两边分别相加可知

$$|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})<0,$$

即 $\quad |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2<0,$

矛盾！

9·26　给定实数 a，求最大的实数 λ，使得平面上任一两边分别平行于 x 轴和 y 轴的矩形，只要它包含由下列不等式所定义的图形 G：

$$\begin{cases}y\leqslant -x^2,\\y\geqslant x^2-2x+a,\end{cases}$$

其面积就不小于 λ.

（第 15 届全苏数学奥林匹克，1981 年）

［解］　显然 G 中点的 x 坐标满足

$$2x^2-2x+a\leqslant 0. \qquad ①$$

从而当 $a>\frac{1}{2}$ 时,G 是空集,当 $a=\frac{1}{2}$ 时,$x=\frac{1}{2}$,由此立即可得 G 是一个点$\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$.于是当 $a\geqslant\frac{1}{2}$ 时,$\lambda=0$.

若 $a<\frac{1}{2}$,由 ① 可知 G 中点的 x 坐标满足

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-2a}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-2a}.$$

有以下两种情况:

(1)$0<a<\frac{1}{2}$.由 $0<\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-2a}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-2a}<1$ 可知 G 中点的 y 坐标满足

$$-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-2a}\right)^2\leqslant y\leqslant-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-2a}\right)^2,$$

由此可得 $\quad\lambda=1-2a$.

(2)$a<0$.由于 $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-2a}\leqslant 0,1\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-2a}$,所以 G 中点的 y 坐标满足

$$a-1\leqslant y\leqslant 0.$$

从而 $\qquad\lambda=(1-a)\sqrt{1-2a}.$

总之

$$\lambda=\begin{cases}0, & a\geqslant\frac{1}{2}.\\ 1-2a, & 0<a<\frac{1}{2}.\\ (1-a)\sqrt{1-2a}, & a<0.\end{cases}$$

9·27 (i) 设正数 a,b,c 满足

$$(a^2+b^2+c^2)^2>2(a^4+b^4+c^4),$$

求证:a,b,c 是某个三角形的三边长.

(ii) 设正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)^2>(n-1)(a_1^4+a_2^4+\cdots+a_n^4),$$

其中 $n\geqslant 3$,求证:$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 中任意三个数一定是某个三角形的

三边长.

(第 3 届中国中学生数学冬令营,1988 年)

[证] (i) 由假设可得

$$2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4>0.$$

将上式左端因式分解可得

$$(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)>0.$$

由对称性不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$,于是有

$$b+c-a>0,$$

这说明 a,b,c 是某个三角形的三边长.

(ii) 不妨设 $n>3$,由柯西不等式可得

$$\begin{aligned}&(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)^2\\&=\left(\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{2}+\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{2}+a_4^2+\cdots+a_n^2\right)^2\\&\leqslant(n-1)\left(\frac{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^2}{4}+\frac{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^2}{4}+a_4^4+\cdots+a_n^4\right)\\&=(n-1)\left(\frac{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^2}{2}+a_4^4+\cdots+a_n^4\right).\end{aligned}$$

再由假设

$$(n-1)(a_1^4+a_2^4+a_3^4+\cdots+a_n^4)<(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)^2,$$

所以 $\quad 2(a_1^4+a_2^4+a_3^4)<(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^2.$

于是由(i) 知 a_1,a_2,a_3 是某个三角形的三边长.再由对称性可知 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 中任意三个数一定是某个三角形的三边长.

9·28 求证:满足不等式

$$\sum_{k=1}^{70}\frac{k}{x-k}\geqslant\frac{5}{4}$$

的实数的集合是两两不相交的区间的并集,且这些区间长度之和等于 1988.

(第 29 届国际数学奥林匹克,1988 年)

[证] 记 $R(x)=\sum\limits_{k=1}^{70}\frac{k}{x-k}$,显然当 $x<1$ 时,$R(x)<0$.对于 $k\in\{1,2,\cdots,69\}$,当 $k<x<k+1$ 时,易知 $R(x)$ 严格单调下降且 $x\to k$ 时 $R(x)\to+\infty$,$x\to(k+1)$ 时 $R(x)\to-\infty$.

所以存在惟一的 $x_k\in(k,k+1)$ 使得 $R(x_k)=\frac{5}{4}$ 且 $k<x\leqslant x_k$ 时 $R(x)\geqslant\frac{5}{4}$，$x_k<x<x_{k+1}$ 时 $R(x)<\frac{5}{4}$.

记 $I_k=(k,x_k]$，$k=1,2,\cdots,69$，用 $|I_k|$ 表示区间 I_k 的长度. 若 $x>70$，则 $R(x)>0$ 且严格单调下降.

由于 $x>70$ 且 $x\to70$ 时 $R(x)\to+\infty$，$x\to+\infty$ 时 $R(x)\to0$，从而存在惟一的 x_{70} 满足 $x_{70}>70$，$R(x_{70})=\frac{5}{4}$ 且 $70<x\leqslant x_{70}$ 时 $R(x)\geqslant\frac{5}{4}$，$x_{70}<x<+\infty$ 时 $R(x)<\frac{5}{4}$.

记 $I_{70}=(70,x_{70}]$. 于是不等式 $\sum\limits_{k=1}^{70}\frac{k}{x-k}\geqslant\frac{5}{4}$ 的解集为 $\bigcup\limits_{k=1}^{70}I_k$. 显然 $I_1,I_2,\cdots,I_{70}$ 两两互不相交且

$$\sum_{k=1}^{70}|I_k|=(x_1+x_2+\cdots+x_{70})-(1+2+\cdots+70).$$

记 $Q(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-70)$，$P(x)=Q(x)-\frac{4}{5}Q(x)R(x)$，显然 $P(x)$ 是首项系数为 1 的 70 阶多项式，且 $x_1,x_2,\cdots,x_{70}$ 是它的 70 个不同的根. 由韦达定理易知 $x_1+x_2+\cdots+x_{70}=\left(1+\frac{4}{5}\right)(1+2+\cdots+70)$，所以

$$\sum_{k=1}^{70}|I_k|=\frac{4}{5}(1+2+\cdots+70)=1988.$$

9・29 设实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 满足 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$. 对于整数 $k\geqslant2$，求证：存在不全为 0 的整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 使得 $|a_i|\leqslant k-1$，$i=1,2,\cdots,n$，且

$$|a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n|\leqslant\frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}.$$

（第 28 届国际数学奥林匹克，1987 年）

［证］ 记 $S=\{(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\mid\lambda_i\in Z,0\leqslant\lambda_i\leqslant k-1,i=1,2,\cdots,n\}$. 对任何 $(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\in S$，由柯西不等式可得

$$0\leqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_i|x_i|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant(k-1)\sqrt{n}.$$

将$[0,(k-1)\sqrt{n}]$ k^n-1等分，由于S中有k^n个元素，从抽屉原理可知存在S的两个不同的元素$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$和$(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$使得

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i|x_i|-\sum_{i=1}^{n}\mu_i|x_i|\right|\leqslant\frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}.$$

令 $a_i=\begin{cases}\lambda_i-\mu_i, x_i\geqslant 0\\ -(\lambda_i-\mu_i), x_i<0\end{cases}$. 显然$a_1,a_2,\cdots,a_n$是不全为0的$n$个整数，由于$0\leqslant\lambda_i\leqslant k-1$，$0\leqslant\mu_i\leqslant k-1$，所以$|a_i|\leqslant k-1$且

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i-\mu_i)|x_i|\right|\leqslant\frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}.$$

9·30 已给5个实数u_0,u_1,u_2,u_3,u_4.求证：总可以找到5个实数v_0,v_1,v_2,v_3,v_4满足

(1)u_i-v_i是整数，$i=0,1,2,3,4$;

(2)$\sum\limits_{0\leqslant i<j\leqslant 4}(v_i-v_j)^2<4$.

（第28届国际数学奥林匹克候选题，1987年）

[证] 令 $v_i=u_i-[u_i]$，则$0\leqslant v_i<1$.不妨设

$$0\leqslant v_0\leqslant v_1\leqslant v_2\leqslant v_3\leqslant v_4<1.$$

(i)设 $\frac{1}{3}\leqslant v_2\leqslant v_3\leqslant\frac{2}{3}$.记

$$S=\sum_{0\leqslant i<j\leqslant 4}(v_i-v_j)^2.$$

(1)显然成立，以下估计S，若用0代替v_0，用1代替v_4，则S严格增大，又

$$\begin{aligned}&(1-v_1)^2+(v_3-v_1)^2+(v_2-v_1)^2+v_1^2\\=&2v_1(2v_1-1-v_3-v_2)+(1+v_2^2+v_3^2)\\\leqslant&1+v_2^2+v_3^2,\end{aligned}$$

所以 $S<2(1+v_2^2+v_3^2)+(1-v_3)^2+(1-v_2)^2+(v_3-v_2)^2$.

注意到

$$\begin{aligned}&2v_2^2+(1-v_2)^2+(v_3-v_2)^2\\=&4v_2^2-2v_2(1+v_3)+1+v_3^2\\=&4\left(v_2-\frac{1+v_3}{4}\right)^2+1+v_3^2-\frac{1}{4}(1+v_3)^2,\end{aligned}$$

且 $$\left|\frac{1}{3}-\frac{1+v_3}{4}\right|\leqslant\left|v_3-\frac{1+v_3}{4}\right|,$$

从而 $$S<2(1+v_3^2+v_3^2)+2(1-v_3)^2=2(3v_3^2-2v_3+2).$$

由 $\frac{1}{3}\leqslant v_3\leqslant\frac{2}{3}$ 可知 $3v_3^2-2v_3\leqslant 0$,所以 $s<4$.

(ii) 同理可证当 $\frac{1}{3}\leqslant v_1\leqslant v_2\leqslant\frac{2}{3}$ 时,$s<4$.

(iii) 若 $v_0\geqslant\frac{1}{3}$ 或 $v_4\leqslant\frac{2}{3}$,则易知

$$S\leqslant\max\left(\frac{10}{9},\frac{6}{9}+\frac{16}{9},\frac{4}{9}+\frac{24}{9}\right)$$
$$=\frac{28}{9}<4.$$

从以上三种情况可知只要 5 个 v_i 在一个长度为 1 的区间上,将此区间三等分,位于中间小区间上的 v_i 至少有两个,则 $s<4$. 若在 $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$上的 v_i 至多有一个,则$\left[0,\frac{1}{3}\right)$和$\left(\frac{2}{3},1\right)$至少有一个包含的 v_i 不少于两个,不妨设为$\left[0,\frac{1}{3}\right)$. 代替$\left[0,\frac{2}{3}\right)$中的 v_i 用 v_i+1,$\left[\frac{2}{3},1\right)$中的不变,用这种方法所取的 5 个数显然满足(1),包含在$\left[\frac{2}{3},\frac{5}{3}\right)$上且位于$\left[1,\frac{4}{3}\right]$的至少有两个,从而(2) 也成立.

9·31 设 $0\leqslant p_i\leqslant 1, i=1,2,\cdots,n$,求证:存在 $x\in[0,1]$ 满足

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|x-p_i|}\leqslant 8n\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right).$$

(第 40 届美国普特南数学竞赛,1979 年)

[证] 考虑 $2n$ 个开区间 $I_k=\left(\frac{k}{2n},\frac{k+1}{2n}\right), k=0,1,\cdots,2n-1$,显然可从中选出 n 个,使得所选的任一个开区间 I_k 不包含任何 p_i. 用 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$ 表示所选出的开区间的中点,令 $d_{ij}=|x_j-p_i|$. 对任何固定的 i,设 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,使得

$$d_{ij_1}\leqslant d_{ij_2}\leqslant\cdots\leqslant d_{ij_n}.$$

由于所选的开区间都不包含 p_i,从而当 $n=2k$ 为偶数时有

$$d_{ij_1} \geqslant \frac{1}{4n}, d_{ij_2} \geqslant \frac{1}{4n},$$

$$d_{ij_3} \geqslant \frac{3}{4n}, d_{ij_4} \geqslant \frac{3}{4n},$$

$$\cdots$$

$$d_{ij_{n-1}} \geqslant \frac{2k-1}{4n}, d_{ij_n} \geqslant \frac{2k-1}{4n}.$$

当 $n = 2k - 1$ 为奇数时有

$$d_{ij_1} \geqslant \frac{1}{4n}, d_{ij_2} \geqslant \frac{1}{4n},$$

$$d_{ij_3} \geqslant \frac{3}{4n}, d_{ij_4} \geqslant \frac{3}{4n},$$

$$\cdots$$

$$d_{ij_{n-2}} \geqslant \frac{2k-3}{4n}, d_{ij_{n-1}} \geqslant \frac{2k-3}{4n},$$

$$d_{ij_n} \geqslant \frac{2k-1}{4n}.$$

无论何种情况均有

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{d_{ij}} \leqslant 8n\left[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2\left[\frac{n+1}{2}\right] - 1}\right]$$

$$< 8n\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right).$$

由此可得

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{d_{ij}} < 8n^2\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right).$$

交换求和次序得到

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_{ij}} < 8n^2\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right).$$

于是存在 $j \in \{1,2,\cdots,n\}$，使得

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|x_j - p_i|} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_{ij}} < 8n\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right).$$

9·32 求证：在开区间$(0,1)$内一定能找到四对两两不同的正数$(a,b)(a \neq b)$，满足

$$\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} > \frac{a}{2b}+\frac{b}{2a}-ab-\frac{1}{8ab}.$$

(第 43 届捷克(和斯洛伐克)数学奥林匹克,1994 年)

[证] 因为 $a\in(0,1)$,$b\in(0,1)$,所以可以设

$$a=\cos\alpha,b=\cos\beta,$$

其中 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. 显然,用上式可得

$$\begin{aligned}ab+\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}&=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\\&=\cos(\alpha-\beta).\end{aligned}$$

将上式两端平方,有

$$\begin{aligned}&a^2b^2+2ab\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}+(1-a^2)(1-b^2)\\&=\cos^2(\alpha-\beta).\end{aligned}$$

移项,得

$$2ab\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}=\cos^2(\alpha-\beta)-1+a^2+b^2-2a^2b^2.$$

两端同除以 $2ab$,有

$$\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}=\frac{1}{2ab}(\cos^2(\alpha-\beta)-1)+\frac{a}{2b}+\frac{b}{2a}-ab.$$

注意到当 $0<|\alpha-\beta|<\frac{\pi}{6}$ 时,

$$\cos(\alpha-\beta)>\frac{\sqrt{3}}{2},$$

从而有

$$\cos^2(\alpha-\beta)-1>\frac{3}{4}-1=-\frac{1}{4},$$

这时,题目中的不等式成立.

因此,在开区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内,选择 4 对两两不同的角 (α,β),使得 $0<|\alpha-\beta|<\frac{\pi}{6}$,然后取 4 对两两不同的正数 (a,b),其中 $a=\cos\alpha$,$b=\cos\beta$,就能使题中所给的不等式成立.

第 2 节　求参数值与最值

9・33　试确定整数 a,b,c,d,e,f,使得对任意非负有理数 R 都

有 $\left|\dfrac{aR^2+bR+c}{dR^2+eR+f}-\sqrt[3]{2}\right|<|R-\sqrt[3]{2}|$.

（第 1 届美国数学奥林匹克，1972 年）

[解] 令 $R\to\sqrt[3]{2}$，则

$$a\sqrt[3]{4}+b\sqrt[3]{2}+c-2d-e\sqrt[3]{4}-f\sqrt[3]{2}=0,$$

所以 $$(a-e)\sqrt[3]{4}+(b-f)\sqrt[3]{2}+c-2d=0.$$

由于 a,b,c,d,e,f 是整数，从而

$$a=e,b=f,c=2d. \quad ①$$

将 ① 代入原不等式得

$$\left|\frac{aR^2+bR+2d}{dR^2+aR+b}-\sqrt[3]{2}\right|<|R-\sqrt[3]{2}|,$$

即 $$\left|\frac{aR(R-\sqrt[3]{2})+b(R-\sqrt[3]{2})+\sqrt[3]{2}d(\sqrt[3]{4}-R^2)}{dR^2+aR+b}\right|<|R-\sqrt[3]{2}|.$$

由于 R 是有理数，则 $R\neq\sqrt[3]{2}$. 于是

$$\left|\frac{aR+b-\sqrt[3]{2}d(R+\sqrt[3]{2})}{dR^2+aR+b}\right|<1,$$

即 $$-1<\frac{aR+b-\sqrt[3]{2}d(R+\sqrt[3]{2})}{dR^2+aR+b}<1$$

由此可得

$$\begin{cases}\dfrac{-dR^2-\sqrt[3]{2}dR-\sqrt[3]{4}d}{dR^2+aR+b}<0,\\[2ex]\dfrac{dR^2+2aR+2b-\sqrt[3]{2}dR-\sqrt[3]{4}d}{dR^2+aR+b}>0.\end{cases}$$

于是 $d\neq0$. 若 $d>0$，则对任意 $R\geqslant0$ 有

$$\begin{cases}dR^2+aR+b>0,\\dR^2+(2a-\sqrt[3]{2}d)R+2b-\sqrt[3]{4}d>0.\end{cases}$$

解之得 $$d>0,b>\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}d,a>\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}d-\sqrt{d(2b-\sqrt[3]{4}d)}. \quad ②$$

若 $d<0$，则对任意 $R\geqslant0$ 有

$$\begin{cases}dR^2+aR+b<0,\\dR^2+(2a-\sqrt[3]{2}d)R+2b-\sqrt[3]{4}d<0.\end{cases}$$

解得 $\quad d<0, b<\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}d, a<\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}d+\sqrt{d(2b-\sqrt[3]{4}d)}$. ③

易知若整数 a,b,c,d,e,f 满足①和②或者满足①和③,均使原不等式对任何非负有理数 R 成立.例如可取 $a=b=e=f=d=1, c=2$,或者 $a=b=e=f=d=-1, c=-2$.

9·34 求实数 a 的取值范围,使得不等式

$$\sin^6 x+\cos^6 x+2a\sin x\cos x\geqslant 0$$

对所有实数 x 成立.

(基辅数学奥林匹克,1973 年)

[解] 记 $f(x)=\sin^6 x+\cos^6 x+2a\sin x\cos x$.由于

$$\begin{aligned}1&=(\sin^2 x+\cos^2 x)^3\\&=\sin^6 x+3\sin^4 x\cos^2 x+3\sin^2 x\cos^4 x+\cos^6 x\\&=\sin^6 x+\cos^6 x+3\sin^2 x\cos^2 x\\&=\sin^6 x+\cos^6 x+\frac{3}{4}+\sin^2 2x,\end{aligned}$$

所以 $f(x)=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x+a\sin 2x$.如果 $|a|\leqslant\frac{1}{4}$,则

$$f(x)\geqslant 1-\frac{3}{4}\sin^2 2x-|a||\sin 2x|\geqslant 1-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=0$$

对所有实数 x 成立.反之,若 $|a|>\frac{1}{4}$,取实数 x_0,使得 $a\sin 2x_0=-|a|$,于是 $|\sin 2x_0|=1$,且

$$f(x_0)=1-\frac{3}{4}-|a|<0.$$

总之 $|a|\leqslant\frac{1}{4}$ 即为所求.

9·35 求最大的正整数 n,使得存在惟一的整数 k 满足

$$\frac{8}{15}<\frac{n}{n+k}<\frac{7}{13}.$$

(第 5 届美国数学邀请赛,1987 年)

[解] 由假设得 $\frac{15}{8}>\frac{n+k}{n}>\frac{13}{7}$,从而有

$$48n<56k<49n.$$

于是问题化为求最大的开区间 $(48n,49n)$,使得这个区间内部仅包含

一个56的倍数.由于这种区间的长度为 n,所以其内含有 $n-1$ 个整数.若 $n-1\geqslant 2\times 56=112$,则区间内至少有两个56的倍数.由此可得 $n\leqslant 112$.

另一方面,当 $n=112$ 时,由于

$$48\times 112=96\times 56<97\times 56<98\times 56=49\times 112,$$

所以存在惟一的 $k=97$ 满足已给的不等式.

因此 $n=112$.

9・36 求最小实数 c 使得对任意正数列 $\{x_n\}$,只要

$x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant x_{n+1},n=1,2,3,\cdots$ 就有

$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n}\leqslant c\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_n},n=1,2,3,\cdots$

(第28届国际数学奥林匹克候选题,1987年)

[解] 令 $x_n=2^n$,则

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=2^{n+1}-2\leqslant 2^{n+1}=x_{n+1},n=1,2,\cdots$$

对任意自然数 n 有

$$\frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n}}{\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_n}}=\frac{\sqrt{2^{n+1}}-\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2^{n+1}-2}}.$$

由于 $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2^{n+1}}-\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2^{n+1}-2}}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1,$$

所以 $c\leqslant\sqrt{2}+1$.

以下用归纳法证明若正数列 $\{x_n\}$ 满足

$$x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant x_{n+1},n=1,2,3,\cdots$$

则 $$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n}\leqslant(\sqrt{2}+1)\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_n} \tag{①}$$

对任意自然数 n 成立.事实上当 $n=1$ 时,① 显然成立.设当 $n=k$ 时,① 成立.由假设可得

$$\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}}+\sqrt{x_1+\cdots+x_k}$$
$$\leqslant(\sqrt{2}+1)\sqrt{x_{k+1}},$$

从而 $$\sqrt{x_{k+1}}\leqslant(\sqrt{2}+1)(\sqrt{x_1+\cdots+x_k+x_{k+1}}-\sqrt{x_1+\cdots+x_k}).$$

由归纳假设可知

$$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_k}\leqslant(\sqrt{2}+1)\sqrt{x_1+\cdots+x_k}.$$

于是 $$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_k}+\sqrt{x_{k+1}}$$

$$\leqslant(\sqrt{2}+1)\sqrt{x_1+\cdots+x_k+x_{k+1}},$$

即当 $n=k+1$ 时,① 也成立.由 ① 推得 $c\geqslant\sqrt{2}+1$.

总之所求之 $c=\sqrt{2}+1$.

9·37 求最大的实数 α,使得对于任何满足 $\frac{m}{n}<\sqrt{7}$ 的正整数 m 和 n 都有

$$\frac{\alpha}{n^2}\leqslant 7-\frac{m^2}{n^2}.$$

(瑞典数学奥林匹克,1988 年)

[解] 由于

$$\frac{m}{n}<\sqrt{7}\Leftrightarrow 7n^2-m^2>0,$$

$$\frac{\alpha}{n^2}\leqslant 7-\frac{m^2}{n^2}\Leftrightarrow\alpha\leqslant 7n^2-m^2,$$

从而所求之最大实数

$$\alpha=\min\{7n^2-m^2;n,m\in N,\text{且 }7n^2-m^2>0\}.$$

由于 $7n^2$ 能被 7 整除,m^2 被 7 除的余数只可能取 0,1,2,4,所以若有 $7n^2-m^2>0$,则

$$7n^2-m^2\geqslant 3,$$

于是 $\alpha\geqslant 3$.又当 $n=1,m=2$ 时,$7n^2-m^2=3$,从而

$$\alpha=3.$$

9·38 求实数 A,B,C 满足对任何实数 x,y,z 都有

$$A(x-y)(x-z)+B(y-z)(y-x)+C(z-x)(z-y)\geqslant 0 \qquad ①$$

的充分必要条件.

(中国国家集训队选拔试题,1988 年)

[解] 在 ① 中令 $x=y\neq z$,得 $C(z-x)^2\geqslant 0$,从而 $C\geqslant 0$.由对称性可得

$$A\geqslant 0,B\geqslant 0,C\geqslant 0. \qquad ②$$

令 $s=x-y,t=y-z$,则 $x-z=s+t$,且 ① 等价于

$$As(s+t)-Bst+C+(s+t)\geqslant 0,$$

即 $$As^2+(A-B+C)st+Ct^2\geqslant 0. \quad ③$$

由 ② 可知,③ 式对任意实数 s,t 都成立的充分必要条件是

$$(A-B+C)^2-4AC\leqslant 0,$$

即 $$A^2+B^2+C^2\leqslant 2(AB+BC+CA). \quad ④$$

于是,② 和 ④ 就是所求的充分必要条件.

9·39　设 $a\leqslant b<c$ 是直角三角形的三边长,求最大常数 M,使得

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant\frac{M}{a+b+c}.$$

(中国国家集训队测验题,1991 年)

[解]　令 $I=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$,则

$$I=3+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}.$$

由于 $$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2,$$

$$\frac{a}{c}+\frac{c}{a}=\frac{2a}{c}+\frac{c}{a}-\frac{a}{c}\geqslant 2\sqrt{2}-\frac{a}{c},$$

$$\frac{b}{c}+\frac{c}{b}=\frac{2b}{c}+\frac{c}{b}-\frac{b}{c}\geqslant 2\sqrt{2}-\frac{b}{c}.$$

所以 $$I\geqslant 5+4\sqrt{2}-\frac{a+b}{c}.$$

又 $$\frac{a+b}{c}\leqslant\frac{\sqrt{2(a^2+b^2)}}{c}=\sqrt{2},$$

从而 $$I\geqslant 5+3\sqrt{2}.$$

当 $a=b=1,c=\sqrt{2}$ 时,$I=(2+\sqrt{2})\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=5+3\sqrt{2}$,

于是 $M=5+3\sqrt{2}$.

9·40　求最小的实数 a,使得对于任意其和为 1 的非负实数 x,y,z 都有

$$a(x^2+y^2+z^2)+xyz\geqslant\frac{a}{3}+\frac{1}{27}.$$

(中国国家集训队测验题,1991 年)

[解] 令 $I=a(x^2+y^2+z^2)+xyz$. 不妨设 $x\leqslant y\leqslant z$, 令 $x=\frac{1}{3}+\delta_1, y=\frac{1}{3}+\delta_2, z=\frac{1}{3}+\delta_3$, 则

$$-\frac{1}{3}\leqslant\delta_1\leqslant 0, 0\leqslant\delta_3\leqslant\frac{2}{3}, \delta_1+\delta_2+\delta_3=0. \quad ①$$

用新变量 $\delta_1,\delta_2,\delta_3$ 表示 I, 则

$$I=\frac{a}{3}+\frac{1}{27}+a(\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2)+\frac{1}{3}(\delta_1\delta_2+\delta_2\delta_3+\delta_3\delta_1)+\delta_1\delta_2\delta_3.$$

由 ① 可知 $\delta_1\delta_2+\delta_2\delta_3+\delta_3\delta_1=-\frac{1}{2}(\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2)$, 从而

$$I=\frac{a}{3}+\frac{1}{27}+\left(a-\frac{1}{6}\right)(\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2)+\delta_1\delta_2\delta_3.$$

若 $a<\frac{2}{9}$, 取 $x=0, y=z=\frac{1}{2}$, 即 $\delta_1=-\frac{1}{3}, \delta_2=\delta_3=\frac{1}{6}$, 由于

$$\left(a-\frac{1}{6}\right)(\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2)+\delta_1\delta_2\delta_3$$

$$<\frac{1}{18}\cdot\left(\frac{1}{9}+\frac{2}{36}\right)-\frac{1}{3\cdot 36}=0,$$

所以此时 $\quad I<\frac{a}{3}+\frac{1}{27}$.

于是所求之 $a\geqslant\frac{2}{9}$. 当 $a\geqslant\frac{2}{9}$ 时, 若 $\delta_2\leqslant 0$, 则由 ① 可知 $\delta_1\delta_2\delta_3\geqslant 0$, 由此立即可得 $I\geqslant\frac{a}{3}+\frac{1}{27}$.

设 $\delta_2\geqslant 0$, 由 $\delta_1=-(\delta_2+\delta_3)$, 则

$$\begin{aligned}I&=\frac{a}{3}+\frac{1}{27}+\left(a-\frac{1}{6}\right)(2\delta_2^2+2\delta_3^2+2\delta_2\delta_3)-(\delta_2+\delta_3)\delta_2\delta_3\\&=\frac{a}{3}+\frac{1}{27}+2\left(a-\frac{1}{6}\right)(\delta_2-\delta_3)^2+\left[6\left(a-\frac{1}{6}\right)-(\delta_2+\delta_3)\right]\delta_2\delta_3.\end{aligned}$$

由 $a \geqslant \frac{2}{9}$ 可得 $a-\frac{1}{6} \geqslant \frac{1}{18}$,又从①得 $0 \leqslant \delta_2+\delta_3=-\delta_1 \leqslant \frac{1}{3}$,所以 $I \geqslant \frac{a}{3}+\frac{1}{27}$.

综上可知所求最小的实数 $a=\frac{2}{9}$.

9·41 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是给定的不全为0的实数,如果实数 $r_1,r_2,\cdots,r_n$ 使得不等式

$$\sum_{k=1}^{n} r_k(x_k-a_k) \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

对任何实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都成立,求 $r_1,r_2,\cdots,r_n$ 的值.

(第3届中国中学生数学冬令营,1988年)

[解] 取 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$,由假设得

$$\sum_{k=1}^{n} r_k a_k \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}. \quad ①$$

取 $x_k=2a_k(k=1,2,\cdots,n)$,又得

$$\sum_{k=1}^{n} r_k a_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}. \quad ②$$

①和②给出

$$\sum_{k=1}^{n} r_k a_k = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}. \quad ③$$

由柯西不等式有

$$\sum_{k=1}^{n} r_k a_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} r_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

又 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 不全为0,从而再由③可得

$$\sum_{k=1}^{n} r_k^2 \geqslant 1. \quad ④$$

另一方面,取 $x_k=r_k(k=1,2,\cdots,n)$,利用③和假设可得

$$\sum_{k=1}^{n} r_k^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} r_k^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

再由④可推出

$$\sum_{k=1}^{n} r_k^2 \leqslant 1. \quad ⑤$$

于是 ④ 和 ⑤ 给出

$$\sum_{k=1}^{n} r_k^2 = 1. \qquad ⑥$$

由 ⑥ 和 ③ 可知

$$\sum_{k=1}^{n} r_k a_k = \left(\sum_{k=1}^{n} r_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

根据柯西不等式中等号成立的条件,则有实数 λ,使得

$$r_k = \lambda a_k, k = 1,2,\cdots,n,$$

再由 ③ 得到 $\lambda = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{-\frac{1}{2}}$.于是

$$r_i = \frac{a_i}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}}, i = 1,2,\cdots,n.$$

9・42　从已给的数 123456789101112…9899100 中画去100个数码,使得剩下的数最大.

(第 17 届莫斯科数学奥林匹克,1954 年)

[解]　由于两个位数相同的自然数,首位数码较大的数较大,所以先画去 50 以前不是 9 的 84 个数码得到

99999505152535455565758…99100.然后从所得数的第 6 位开始再连续画去 15 个数码 5,0,5,1,5,2,5,3,5,4,5,5,5,6,5,留下接在后面的 7,最后将 58 中的 5 画去.这样所得的数是

999997859606162…9899100,

显然这个数即为所求.

9・43　求 1,2,3,…,1962 的一个排列 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{1962}$ 使得如下形式的和达到最大:

$$|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \cdots + |a_{1961} - a_{1962}| + |a_{1962} - a_1|.$$

(第 25 届莫斯科数学奥林匹克,1962 年)

[解]　令 $S = |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \cdots + |a_{1962} - a_1|$.若把绝对值符号打开,$S$ 可写为 2×1962 个数之和,其中一半正数,一半负数.这些数的绝对值取遍 1,2,3,…,1962 且每个数被取两次.由此可知

$$S \leqslant 2(982 + 983 + \cdots + 1962) - 2(1 + 2 + \cdots + 981).$$

于是 1,2,3,…,1962 如下形式的排列就使得 S 达到最大:

1962,1,1961,2,1960,3,…,982,981.

9·44 设k是自然数.试问,当k为何值时,$A_k=\frac{19^k+66^k}{k!}$之值最大.

(第29届莫斯科数学奥林匹克,1966年)

[解] 当$1\leqslant k<19$时,由于

$$\frac{19^{k+1}}{(k+1)!}=\left(\frac{19}{k+1}\right)\cdot\frac{19^k}{k!}\geqslant\frac{19^k}{k!},$$
$$\frac{66^{k+1}}{(k+1)!}=\left(\frac{66}{k+1}\right)\cdot\frac{66^k}{k!}>\frac{66^k}{k!},$$

所以 $A_{k+1}>A_k$.以下讨论$k\geqslant 19$的情况.由于

$$\begin{aligned}(k+1)!(A_{k+1}-A_k&=19^{k+1}+66^{k+1}-(k+1)(19^k+66^k)\\&=66^k(66-k-1)-19^k(k+1-19),\end{aligned}$$

显然有 $A_{k+1}-A_k=\begin{cases}>0,19\leqslant k\leqslant 64;\\<0,k\geqslant 65.\end{cases}$

由此可知当$k=65$时,A_k取值最大.

9·45 已给$0<a_1<a_2<\cdots<a_n$,对于$a_1,a_2,\cdots,a_n$的任一排列$b_1,b_2,\cdots,b_n$,令

$$M=\prod_{i=1}^{n}\left(a_i+\frac{1}{b_i}\right).$$

求使得M取值最大的排列$b_1,b_2,\cdots,b_n$.

(罗马尼亚数学奥林匹克,1979年)

[解] 令$A=a_1a_2\cdots a_n$,则

$$M=\frac{1}{A}\prod_{i=1}^{n}(a_i\cdot b_i+1).$$

由于$(a_i\cdot b_i+1)^2=a_i^2\cdot b_i^2+2a_i\cdot b_i+1\leqslant a_i^2b_i^2+a_i^2+b_i^2+1$,
所以

$$(a_ib_i+1)\leqslant\sqrt{(a_i^2+1)(b_i^2+1)},$$

且等号成立的充分必要条件是$a_i=b_i$.由此可得

$$M\leqslant\frac{1}{A}\prod_{i=1}^{n}(1+a_i^2),$$

且等号成立$\Longleftrightarrow a_i=b_i,i=1,2,\cdots,n$,即当且仅当$b_1=a_1,b_2=a_2$,

$\cdots, b_n = a_n$ 时,M 取值最大.

9・46 设实数 a,b,c,d 满足 $a^2+b^2+c^2+d^2\leqslant 1$,求
$S=(a+b)^4+(a+c)^4+(a+d)^4+(b+c)^4+(b+d)^4+(c+d)^4$
的最大值.

(第 28 届国际数学奥林匹克候选题,1987 年)

[解]
$$\begin{aligned}S&\leqslant (a+b)^4+(a+c)^4+(a+d)^4+(b+c)^4+(b+d)^4\\&\quad+(c+d)^4+(a-b)^4+(a-c)^4+(a-d)^4+(b-c)^4+(b-d)^4+(c-d)^4\\&=6(a^4+b^4+c^4+d^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2a^2d^2+2b^2c^2\\&\quad+2b^2d^2+2c^2d^2)\\&=6(a^2+b^2+c^2+d^2)^2\leqslant 6.\end{aligned}$$

若 $a=b=c=d=\dfrac{1}{2}$,则 $S=6$. 于是 S 的最大值为 6.

9・47 试求如下表达式的最大值:
$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}.$$

(第 53 届莫斯科数学奥林匹克,1990 年)

[解] 由柯西不等式可得
$$\left|x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right|^2\leqslant (x^2+y^2)(2-x^2-y^2).$$
再用均值不等式得到
$$\left|x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right|\leqslant \frac{x^2+y^2+2-x^2-y^2}{2}=1.$$
若 $x=\dfrac{1}{2}, y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,则
$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=1.$$
于是所求之最大值为 1.

9・48 一堆石头的总重量是 100 千克,其中每块的重量都不超过 2 千克. 以各种方式取出其中的一些石头并求出这些石头重量之和与 10 千克的差. 在所有这些差中其绝对值的最小值记为 d. 在一切满足上述条件的石头堆中,求 d 的最大值.

(第 42 届莫斯科数学奥林匹克,1979 年)

[解] 任取一堆满足题设条件的石头,记其重量分别是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,不妨设 $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n$. 根据 d 的定义可知存在自然数 k 使

得

$$x_1+x_2+\cdots+x_k\geqslant 10+d \quad 且 \quad x_1+x_2+\cdots+x_{k-1}\leqslant 10-d.$$

由此可得 $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_k\geqslant 2d$. 又 $0<x_i\leqslant 2, i=1,2,\cdots,n$,所以 $k>5$. 于是有

$$10d\leqslant x_1+x_2+x_3+x_4+x_5\leqslant 10-d,$$

即 $d\leqslant\frac{10}{11}$.

另外,取 55 块重量都是$\frac{10}{11}$千克的石头. 易知在此情形下 $d=\frac{10}{11}$.

综上所述可得 d 的最大值为$\frac{10}{11}$.

9·49 (1) 任给实数 a_1,a_2,b_1,b_2,和正数 p_1,p_2,q_1,q_2. 求证:在 2×2 矩阵

$$\begin{pmatrix}\frac{a_1+b_1}{p_1+q_1} & \frac{a_1+b_2}{p_1+q_2}\\ \frac{a_2+b_1}{p_2+q_1} & \frac{a_2+b_2}{p_2+q_2}\end{pmatrix}$$

中可找到一个数,它既是同行数中的最大值又是同列数中的最小值.

(2) 任给实数 $a_1,a_2,\cdots,a_m,b_1,b_2,\cdots,b_n$ 和正数 $p_1,p_2,\cdots,p_m,q_1,q_2,\cdots,q_n$. 作一个 $m\times n$ 矩阵使得它的第 i 行,第 j 列交点处的数是

$$\frac{a_i+b_j}{p_i+q_j}, i=1,2,\cdots,m, j=1,2,\cdots,n.$$

求证:在此矩阵中存在一个数,它既是同行数中的最大值又是同列数中的最小值.

(第 9 届全苏数学奥林匹克,1975 年)

[证] 只需证(2),令

$$f(x)=\max_{1\leqslant i\leqslant m}(p_ix-a_i), g(x)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}(-q_jx+b_j)$$

由于 $p_1,p_2,\cdots,p_m,q_1,q_2,\cdots,q_n$ 都是正数,所以 $f(x)$ 严格单调增加且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $g(x)$ 严格单调下降且 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$. 从而存在惟一的实数 x_0 使得

$$f(x_0)=g(x_0).$$

由此可知存在 $1\leqslant k\leqslant m$ 和 $1\leqslant l\leqslant n$ 使得

$$f(x_0)=p_kx_0-a_k=g(x_0)=-q_lx_0+b_l,$$

即 $x_0=\dfrac{a_k+b_l}{p_k+q_l}$. 由 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义可知

$$p_kx_0-a_k=f(x_0)=g(x_0)\geqslant -q_jx_0+b_j,j=1,2,\cdots,n,$$

$$-q_lx_0+b_l=g(x_0)=f(x_0)\geqslant p_ix_0+a_i,i=1,2,\cdots,m,$$

即 $$x_0=\frac{a_k+b_l}{p_k+q_l}\geqslant\frac{a_k+b_j}{p_k+q_j},\text{对于任意 } j=1,2,\cdots,n,$$

$$x_0=\frac{a_k+b_l}{p_k+q_l}\leqslant\frac{a_i+b_l}{p_i+q_l},\text{对于任意 } i=1,2,\cdots,m.$$

显然$\dfrac{a_k+b_l}{p_k+q_l}$既是第 k 行中数的最大值又是第 j 列中数的最小值.

9·50　对于$(1,2,\cdots,n)$的每一个排列 $S(n\geqslant 2)$,令 $f(S)$ 是 S 中每两个相邻元素之差的绝对值的最小值. 求 $f(s)$ 的最大值.

(第 30 届国际数学奥林匹克预选题,1989 年)

[解]　设 $n=2k$ 为偶数,对任意 s,由于其元素 k 与其相邻元素之差的绝对值 $\leqslant k$,所以有

$$f(s)\leqslant k.$$

另一方面,取 $s=(k+1,1,k+2,2,\cdots,2k,k)$,则 $f(s)=k$,于是得

$$\max f(s)=k=\left[\frac{n}{2}\right].$$

设 $n=2k+1$,对任意 s,由于 $k+1$ 与其相邻元素之差的绝对值 $\leqslant k$,从而 $f(s)\leqslant k$,若取

$$S=(k+1,1,k+2,2,\cdots,2k,k,2k+1),$$

则 $f(s)=k$. 于是 $\max f(s)=k=\left[\dfrac{n}{2}\right]$.

无论何种情况都有 $\max f(s)=\left[\dfrac{n}{2}\right]$.

9·51　设 $m,n\in N$,求 $|12^m-5^n|$ 的最小值.

(加拿大国家集训队训练题,1989 年)

[解]　显然 $|12^m-5^n|$ 是奇数,且它不被 3 整除,也不被 5 整除.

由 $12^m-5^n\equiv -1(\mathrm{mod}4)$ 可知 12^m-5^n 不可能为 1.

若 $5^n-12^m=1$,则由

$$5^n-12^m\equiv 5^n\equiv(-1)^n(\mathrm{mod}3)$$

可得 n 是偶数,记 $n=2k$.又由于

$$5^n-12^m\equiv-2^m\equiv2^{m+2}(\bmod 5),$$

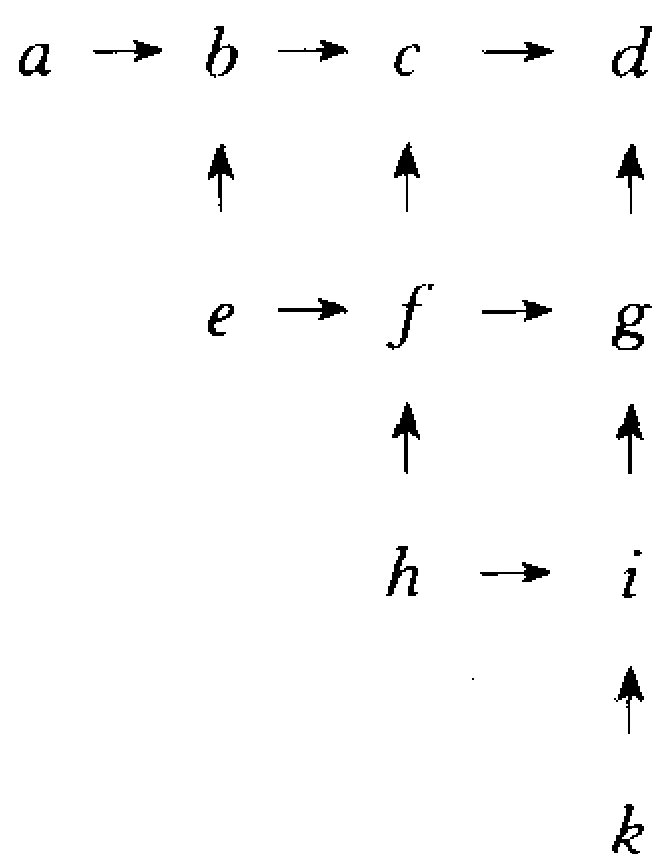
从而从 $5^n-12^m=1$ 可推出 $4\mid m+2$,即 $m=4l-2$.于是

$$5^n-12^m=5^{2k}-12^{4l-2}=(5^k+12^{2l-1})(5^k-12^{2l-1})$$
$$\geqslant5^k+12^{2l-1}>1,$$

矛盾!所以 5^n-12^m 也不可能为1.

综上所述得 $|12^m-5^n|\geqslant7$,又 $12-5=7$,从而所求之最小值为7.

9·52　右图中给出10个不同的自然数 $a,b,c,\cdots,k$.已知图中两个箭头所指的每一个数等于位于这两个箭头始端的数之和.求按这样排列的 d 的最小值.



(第19届全苏数学奥林匹克,1985年)

[解]　由假设易知 $d=a+3(e+h)+k$.

若 $e+h\geqslant6$,显然 $d\geqslant21$.

若 $e+h=5$,同样显然得 $d\geqslant20$.

若 $e+h=4$,不妨设 $e=1,h=3$,所以 $f=4$.

当 $k=2$ 时,则 $i=5$,由此可推得 $a\geqslant6$,于是 $d\geqslant20$.

当 $k\neq2$ 时,则 $k\geqslant5$,同样 $a\geqslant5$,所以 $d\geqslant22$.

若 $e+h=3$,不妨设 $e=1,h=2$.

当 $a=4$ 时,则 $b=5,f=3,c=8$,从而 $k\geqslant7$,由此得 $d\geqslant20$.

同样可证当 $k=4$ 时,$a\geqslant7$.当 $a\geqslant5,k\geqslant5$ 时,由于 $a\neq k$,所以 $a+k\geqslant11$.由此证明可知无论何种情况均有 $d\geqslant20$.

另一方面令 $a=4,e=1,h=2,k=7$,则 $b=5,f=3,i=9$,$c=8,g=12$,最后得 $d=20$.所以 d 的最小值是20.

9·53　设 x,y,z 都是正数且 $x^2+y^2+z^2=1$,求

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}$$

的最小值.

(加拿大国家集训队训练题,1989年)

[解]　记 $x = x_1, y = x_2, z = x_3$，由柯西不等式

$$1 = \left(\sum_{i=1}^{3} x_i^2\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{3}\sqrt{\frac{x_i}{1-x_i^2}} \cdot x_i^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-x_i^2}\right)^2$$
$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{3}\frac{x_i}{1-x_i^2}\right)\left(\sum_{i=1}^{3}x_i^3(1-x_i^2)\right), \qquad ①$$

由均值不等式可得

$$\frac{2x_i^2}{3\sqrt{3}} + x_i^5 \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{x_i^2}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{x_i^2}{3\sqrt{3}} \cdot x_i^5} = x_i^3,$$

从而 $$\frac{2}{3\sqrt{3}} + \sum_{i=1}^{3} x_i^5 \geqslant \sum_{i=1}^{3} x_i^3,$$

即 $$\sum_{i=1}^{3} x_i^3(1-x_i^2) \leqslant \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

再由 ① 可推出

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{x_i}{1-x_i^2} \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

另一方面，当 $x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时

$$\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

于是所求之最小值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

9·54　给定 $n \in N$ 与 $a \in [0, n]$，在条件

$$\sum_{i=1}^{n}\sin^2 x_i = a$$

的条件下，求 $\left|\sum_{i=1}^{n}\sin 2x_i\right|$ 的最大值.

（前捷克斯洛伐克数学奥林匹克，1983 年）

[解]　由于 $\sum_{i=1}^{n}\sin^2 x_i = a$，所以

$$\sum_{i=1}^{n}\cos 2x_i = \sum_{i=1}^{n}(1-2\sin^2 x_i) = n - 2a.$$

考虑平面上 n 个单位向量 $(\cos 2x_i, \sin 2x_i)$，$i = 1, 2, \cdots, n$. 它们的和的

长度不超过 n,即

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\cos 2x_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}\sin 2x_i\right)^2\leqslant n^2.$$

于是

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sin 2x_i\right|\leqslant\sqrt{n^2-(n-2a)^2}=2\sqrt{a(n-a)}.$$

另一方面,若取

$$x_1=x_2=\cdots=x_n=\arcsin\sqrt{\frac{a}{n}},$$

则 $$\sum_{i=1}^{n}\sin^2 x_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{a}{n}=a,\left|\sum_{i=1}^{n}\sin 2x_i\right|=\sum_{i=1}^{n}\frac{2\sqrt{a(n-a)}}{n}$$
$$=2\sqrt{a(n-a)}.$$

因此,所求的最大值是 $2\sqrt{a(n-a)}$.

9·55 设 $n\geqslant 2$,求乘积 $x_1x_2\cdots x_n$ 在条件 $x_i\geqslant\frac{1}{n}$,$i=1,2,\cdots,n$,与 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$ 下的最大值和最小值.

(第 21 届国际数学奥林匹克候选题,1979 年)

[解] 首先求最大值.由均值不等式可得

$$\sqrt[n]{x_1^2\cdot x_2^2\cdot\cdots\cdot x_n^2}\leqslant\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}=\frac{1}{n},$$

且当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{n}(n\geqslant 2)$ 时等号成立.从而所求的最大值是 $n^{-\frac{n}{2}}$.

以下求最小值.任取满足题中条件的 $x_1,x_2,\cdots,x_n$.令

$$y_1=x_1,\cdots,y_{n-2}=x_{n-2},y_{n-1}=\sqrt{x_{n-1}^2+x_n^2-\frac{1}{n^2}},y_n=\frac{1}{n},$$

则 $y_i\geqslant\frac{1}{n}$,$i=1,2,\cdots,n$,且 $y_1^2+\cdots+y_n^2=x_1^2+\cdots+x_n^2=1$,即 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 满足题中的条件,进一步,由于

$$y_{n-1}^2y_n^2-x_{n-1}^2x_n^2=\frac{1}{n^2}\left(x_{n-1}^2+x_n^2-\frac{1}{n^2}\right)-x_{n-1}^2x_n^2$$
$$=-\left(x_{n-1}^2-\frac{1}{n^2}\right)\left(x_n^2-\frac{1}{n^2}\right)\leqslant 0,$$

所以 $y_1y_2\cdots y_{n-2}y_{n-1}y_n \leqslant x_1x_2\cdots x_{n-2}x_{n-1}x_n$.

重复这个过程 $n-1$ 次可得

$$x_1x_2\cdots x_n \geqslant \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}\sqrt{1-\frac{n-1}{n^2}} = \frac{\sqrt{n^2-n+1}}{n^n}.$$

显然当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = \frac{1}{n}, x_n = \frac{\sqrt{n^2-n+1}}{n}$ 时,上述不等式中的等号成立,所以在题中条件下,乘积 $x_1x_2\cdots x_n$ 的最小值是 $\frac{\sqrt{n^2-n+1}}{n^n}$.

9·56 求

$$A = \sqrt{(1264-z_1-\cdots-z_n)^2+x_n^2+y_n^2} + \sqrt{z_n^2+x_{n-1}^2+y_{n-1}^2} + \cdots + \sqrt{z_2^2+x_1^2+y_1^2} + \sqrt{z_1^2+(948-x_1-\cdots-x_n)^2+(1185-y_1-\cdots-y_n)^2}$$

的最小值,其中 $x_i, y_i, z_i, i = 1,2,\cdots,n$,均为非负实数.

(基辅数学奥林匹克,1975 年)

[解] 在带有直角坐标系的三维空间中考虑以下的点:

$B = (0,0,1264)$;

$M_n = (x_n, y_n, z_1+\cdots+z_n)$,

$M_{n-1} = (x_{n-1}+x_n, y_{n-1}+y_n, z_1+\cdots+z_{n-1})$,

…………

$M_2 = (x_2+\cdots+x_n, y_2+\cdots+y_n, z_1+z_2)$,

$M_1 = (x_1+\cdots+x_n, y_1+\cdots y_n, z_1)$,

$C = (948,1185,0)$,

显然 $A = BM_n + M_nM_{n-1} + \cdots + M_2M_1 + M_1C$. 由三角不等式可知 $A \geqslant BC = \sqrt{948^2+1185^2+1264^2} = 1975$. 另一方面若取 $M_1 = M_2 = \cdots = M_n = B$,则 $A = BC = 1975$. 于是 A 的最小值是 1975.

9·57 设函数 $f(x) = |\cos x + \alpha\cos 2x + \beta\cos 3x|$,其中 α, β 是

实数,求:$M = \min\limits_{\alpha,\beta}\max\limits_{x} f(x)$.

(第 49 届莫斯科数学奥林匹克,1986 年)

[解] 显然 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left|\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\alpha}{2}\right|, f\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \left|\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{\alpha}{2}\right|$,

从而 $$\max f(x) \geqslant \frac{1}{2}\left(\left|\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\alpha}{2}\right| + \left|-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\alpha}{2}\right|\right)$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)\right] = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

于是得到 $$M \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad ①$$

另一方面,令 $\alpha = 0, \beta = -\frac{1}{6}$,则

$$f(x) = \left|\cos x - \frac{1}{6}\cos 3x\right| = \left|\frac{3}{2}\cos x - \frac{2}{3}\cos^3 x\right|.$$ 易知

$$\max_x f(x) = \max_{-1 \leqslant y \leqslant 1} |g(y)| = \max_{0 \leqslant y \leqslant 1} g(y),$$

其中 $g(y) = \frac{3}{2}y - \frac{2}{3}y^3$.因为

$$g(y) - g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left[\frac{3}{2} - \frac{2}{3}\left(y^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{3}{4}\right)\right],$$

所以当 $0 \leqslant y \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时,由 $y^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{3}{4} \leqslant \frac{9}{4}$ 可得

$$g(y) - g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \leqslant 0,$$

当 $\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant y \leqslant 1$ 时,由 $y^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{3}{4} \geqslant \frac{9}{4}$ 可得

$$g(y) - g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \leqslant 0.$$

于是得到 $$\max_x f(x) = \max_{0 \leqslant y \leqslant 1} g(y) = g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

由此可得 $$M \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad ②$$

综合 ① 和 ② 可知 $M = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

9·58　若二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 在 $[0,1]$ 上的值的绝对值不超过 1，试问 $|a|+|b|+|c|$ 最大可能的值是多少？

（第 52 届莫斯科数学奥林匹克，1989 年）

［解］　不妨设 $a>0$. 由假设可得

$$|c|\leqslant 1,\ |a+b+c|\leqslant 1. \qquad ①$$

若 $b\geqslant 0$，则 $|a|+|b|+|c|=|a+b|+|c|$

$$\leqslant|a+b+c|+2|c|\leqslant 3.$$

若 $b\leqslant -2a$，则 $a+b\leqslant -a$，从而 $|a|\leqslant|a+b|\leqslant 2$.

由此可得 $\qquad |a|+|b|+|c|\leqslant 2+4+1=7.$

若 $-2a<b<0$，则 $0<-\dfrac{b}{2a}<1$，利用假设还可得到

$$\left|\frac{b^2}{4a}-c\right|\leqslant 1. \qquad ②$$

由 ② 再注意到 $|c|\leqslant 1$ 可知

$$b^2\leqslant 4a(1+c). \qquad ③$$

不妨设 $a>2$，由 ① 推出

$$-a-1-c\leqslant b\leqslant -a+1-c<0. \qquad ④$$

从 ③ 和 ④ 可得

$$(-a+1-c)^2\leqslant b^2\leqslant 4a(1+c),$$

即 $\qquad a^2-2(3+c)a+(1-c)^2\leqslant 0.$

由此可知

$$2<a\leqslant 3+c+\sqrt{(3+c)^2-(1-c)^2}=3+c+\sqrt{8(1+c)},$$

再用 $|c|\leqslant 1$，所以 $\qquad |a|=a\leqslant 8.$

由 ③ 推得 $|b|\leqslant\sqrt{4a(1+c)}\leqslant\sqrt{8a}\leqslant 8.$

于是 $|a|+|b|+|c|\leqslant 17.$

另一方面易知 $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|8x^2-8x+1|=1$. 从而 $|a|+|b|+|c|$ 的最大值是 17.

9·59　设 $x_i\geqslant 0$，$i=1,2,\cdots,n$，$n\geqslant 2$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=1$，求 $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j(x_i+x_j)$ 的最大值.

（第 32 届国际数学奥林匹克预选题，1991 年）

[解] 记 $z=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n);x_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,n$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=1\}$，$F(v)=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j(x_i+x_j)$. 当 $n=2$ 时，显然

$$\max_{v\in z}F(v)=\frac{1}{4},$$

且当 $x_1=x_2=\frac{1}{2}$ 时达到. 考虑 $n\geqslant 3$ 的情况，任取 $v=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in z$，不妨设 $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n$. 令

$$w=(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}+x_n,0),$$

则 $w\in z$ 且

$$\begin{aligned}F(w)&=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n-2}x_ix_j(x_i+x_j)+\sum_{i=1}^{n-2}x_i(x_{n-1}+x_n)(x_i+x_{n-1}+x_n)\\&=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n-2}x_ix_j(x_i+x_j)+\sum_{i=1}^{n-2}x_ix_{n-1}(x_i+x_{n-1})\\&\quad+\sum_{i=1}^{n-2}x_ix_n(x_i+x_n)+2x_{n-1}x_n\sum_{i=1}^{n-2}x_i.\end{aligned}$$

于是

$$F(w)=F(v)+x_{n-1}x_n\Big(2\sum_{i=1}^{n-2}x_i-x_{n-1}-x_n\Big).$$

由于 $n\geqslant 3,x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n$，所以

$$\sum_{i=1}^{n-2}x_i\geqslant\frac{1}{3},\qquad x_{n-1}+x_n\leqslant\frac{2}{3}.$$

从而 $F(w)\geqslant F(v)$. 由归纳法易知，对于任何 $v\in z$，存在 $u=(a,b,0,\cdots,0)\in z$，使得

$$F(u)\geqslant F(v).$$

由此可得所求之最值是$\frac{1}{4}$，且当 $x_1=x_2=\frac{1}{2},x_3=\cdots=x_n=0$ 时达到.

9·60 设 x_1,x_2,x_3,x_4 均为正数，且 $x_1+x_2+x_3+x_4=\pi$，求表达式

$$\left(2\sin^2x_1+\frac{1}{\sin^2x_1}\right)\left(2\sin^2x_2+\frac{1}{\sin^2x_2}\right)\left(2\sin^2x_3+\frac{1}{\sin^2x_3}\right)\left(2\sin^2x_4+\frac{1}{\sin^2x_4}\right)$$

的最小值.

（中国国家集训队测验题,1991 年）

[解]　由均值不等式可得

$$2\sin^2 x_i+\frac{1}{\sin^2 x_i}=2\sin^2 x_i+\frac{1}{2\sin^2 x_i}+\frac{1}{2\sin^2 x_i}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{2\sin^2 x_i}},$$

所以 $$\prod_{i=1}^{4}\left(2\sin^2 x_i+\frac{1}{\sin^2 x_i}\right)\geqslant 81(4\sin x_1\sin x_2\sin x_3\sin x_4)^{-\frac{2}{3}}.$$

由函数 $f(x)=\ln\sin x$ 在 $(0,\pi)$ 的凹性可知

$$\sin x_1\sin x_2\sin x_3\sin x_4\leqslant \sin^4\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}=\frac{1}{4},$$

从而 $$\prod_{i=1}^{4}\left(2\sin^2 x_i+\frac{1}{\sin^2 x_i}\right)\geqslant 81.$$

又当 $x_1=x_2=x_3=x_4=\frac{\pi}{4}$ 时, $\prod_{i=1}^{4}\left(2\sin^2 x_i+\frac{1}{\sin^2 x_i}\right)=81$, 于是 81 即为所求之最小值.

9·61　已给自然数 $n\geqslant 2$. 求最小正数 λ, 使得对任意正数 a_1, $a_2,\cdots,a_n$, 及 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 中任意 n 个数 $b_1,b_2,\cdots,b_n$, 只要

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=1,$$

就有 $$a_1a_2\cdots a_n\leqslant\lambda(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n).$$

（中国国家集训队选拔试题,1992 年）

[解]　由柯西不等式得

$$1=\sum_{i=1}^{n}b_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{b_i}}{\sqrt{a_i}}\sqrt{a_ib_i}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^{\frac{1}{2}}.$$

从而

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}a_ib_i}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i}.$$

记 $M=a_1a_2\cdots a_n$, $A_i=\frac{M}{a_i}$, $i=1,2,\cdots,n$, 则

$$\frac{M}{\sum_{i=1}^{n}a_ib_i}\leqslant\sum_{i=1}^{n}b_iA_i.$$

由排序不等式，不妨设 $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n, A_1 \geqslant A_2 \geqslant \cdots \geqslant A_n$. 从而有

$$\sum_{i=1}^{n} b_i A_i \leqslant b_1 A_1 + (1 - b_1) A_2,$$

由于 $0 \leqslant b_1 \leqslant \frac{1}{2}, A_1 \geqslant A_2$，所以

$$\sum_{i=1}^{n} b_i A_i \leqslant \frac{1}{2}(A_1 + A_2) = \frac{1}{2}(a_1 + a_2) a_3 \cdots a_n.$$

再由均值不等式，注意到 $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ 可得

$$\sum_{i=1}^{n} b_i A_i \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}.$$

于是所求之 $\lambda \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$.

另一方面，当 $a_1 = a_2 = \frac{1}{2(n-1)}, a_3 = \cdots = a_n = \frac{1}{n-1}$, $b_1 = b_2 = \frac{1}{2}, b_3 = \cdots = b_n = 0$ 时，

$$a_1 a_2 \cdots a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \sum_{i=1}^{n} a_i b_i,$$

所以 $\lambda \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$.

综上所述得 $\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$.

9·62　求最小正数 λ，使得对于任一三角形的三边长 a, b, c，只要 $a \geqslant \frac{b+c}{3}$，就有

$$ac + bc - c^2 \leqslant \lambda(a^2 + b^2 + 3c^2 + 2ab - 4bc).$$

（中国国家集训队测验题，1993 年）

[解]　易知

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + 3c^2 + 2ab - 4bc &= (a + b - c)^2 + 2c^2 + 2ac - 2bc \\ &= (a + b - c)^2 + 2c(a + c - b). \end{aligned}$$

令　$I = \frac{(a + b - c)^2 + 2c(a + c - b)}{2c(a + b - c)} = \frac{a + b - c}{2c} + \frac{a + c - b}{a + b - c}.$

由于 $a \geqslant \frac{1}{3}(b+c)$，所以 $a \geqslant \frac{1}{4}(a+b-c)+\frac{c}{2}$，于是

$$a+c-b=2a-(a+b-c) \geqslant -\frac{1}{2}(a+b-c)+c.$$

由此可知

$$\begin{aligned} I &\geqslant \frac{a+b-c}{2c}-\frac{\frac{1}{2}(a+b-c)}{a+b-c}+\frac{c}{a+b-c} \\ &=-\frac{1}{2}+\frac{a+b-c}{2c}+\frac{c}{a+b-c} \\ &\geqslant -\frac{1}{2}+2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}-\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

即
$$\frac{ac+bc-c^2}{a^2+b^2+3c^2+2ab-4bc}=\frac{1}{2I} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}-1}=\frac{2\sqrt{2}+1}{7}.$$

从而所求之 $\lambda \leqslant \frac{2\sqrt{2}+1}{7}$.

另一方面，当 $a=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{2}, b=\frac{3\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{2}, c=1$，则

$$ac+bc-c^2=\sqrt{2},$$
$$a^2+b^2+3c^2+2ab-4bc=4-\sqrt{2},$$

所以
$$\frac{1}{2I}=\frac{\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}(4+\sqrt{2})}{14}=\frac{2\sqrt{2}+1}{7}.$$

于是所求之 $\lambda \geqslant \frac{2\sqrt{2}+1}{7}$.

综上可得 $\lambda=\frac{2\sqrt{2}+1}{7}$.

9·63 已给两个大于1的自然数 n 和 m. 求所有的自然数 l，使得对任意正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都有

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{s_k}\left(lk+\frac{1}{4} l^2\right)<m^2 \sum_{k=1}^{n}=\frac{1}{a_k},$$

其中 $s_k=a_1+a_2+\cdots+a_k$.

（中国国家集训队选拔试题，1992 年）

［解］ 易知

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{s_k}(lk+\frac{1}{4}l^2)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{s_k}\left(\frac{l}{2}+k\right)^2-\frac{k^2}{s_k}\right]$$
$$=\left(\frac{l}{2}+1\right)^2\frac{1}{s_1}-\frac{n^2}{s_n}+\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{s_k}\left(\frac{l}{2}+k\right)^2-\frac{(k-1)^2}{s_{k-1}}\right].$$

由于当 $k=2,\cdots,n$ 时,有

$$\frac{1}{s_k}\left(\frac{l}{2}+k\right)^2-\frac{(k-1)^2}{s_{k-1}}$$
$$=\frac{1}{s_ks_{k-1}}\left[\left(\frac{l}{2}+1\right)^2s_{k-1}+(l+2)(k-1)s_{k-1}\right.$$
$$\left.+(k-1)^2(s_{k-1}-s_k)\right]$$
$$=\frac{1}{s_ks_{k-1}}\left[\left(\frac{l}{2}+1\right)^2s_{k-1}-\left(\sqrt{a_k}(k-1)-\left(\frac{l}{2}+1\right)\frac{s_{k-1}}{\sqrt{a_k}}\right)^2\right.$$
$$\left.+\left(\frac{l}{2}+1\right)^2\frac{s_{k-1}^2}{a_k}\right]$$
$$\leqslant\frac{1}{s_ks_{k-1}}\left(\frac{l}{2}+1\right)^2\left(s_{k-1}+\frac{s_{k-1}^2}{a_k}\right)=\left(\frac{l}{2}+1\right)^2\frac{1}{a_k},$$

所以

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{s_k}\left(lk+\frac{1}{4}l^2\right)\leqslant\left(\frac{l}{2}+1\right)^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}-\frac{n^2}{s_n}$$
$$<\left(\frac{l}{2}+1\right)^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}.$$

显然$\frac{l}{2}+1\leqslant m$ 即$l\leqslant 2(m-1)$ 满足所要之条件.

另一方面,当 $l>2(m-1)$,即 $l\geqslant 2m-1$ 时,可以证明存在正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 使得所要求之不等式不成立.事实上,任意给定 $a_1>0$,令

$$a_k=\frac{l+2}{2(k-1)}s_{k-1},k=2,3,\cdots,n.$$

由前段证明可知

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{s_k}\left(lk+\frac{1}{4}l^2\right)=\left(\frac{l}{2}+1\right)^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}-\frac{n^2}{s_n}$$

$$=\left[\left(\frac{l}{2}+1\right)^2-1\right]\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}-\frac{n^2}{s_n}.$$

由 $l\geqslant 2m-1$ 可推出

$$\left(\frac{l}{2}+1\right)^2-1\geqslant\left(m+\frac{1}{2}\right)^2-1=m^2+m+\frac{1}{4}-1>m^2.$$

利用柯西不等式可得

$$n^2\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)=s_n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k},$$

即 $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}-\frac{n^2}{s_k}\geqslant 0.$$

从而

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{s_k}\left(lk+\frac{1}{4}l^2\right)>m^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}.$$

于是 $1,2,\cdots,2(m-1)$ 是满足要求的所有自然数 l.

9·64 已给大于1的自然数 n. 设 a,b,c,d 是自然数且满足

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}<1,a+c\leqslant n,$$

求 $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ 的最大值.

(中国国家集训队选拔试题,1993年)

[解] 首先设 $a+c=n$. 如果 $b,d\geqslant n+1$,则

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\leqslant\frac{n}{n+1},$$

又显然有 $$\frac{n}{n+1}<\frac{n-1}{n}+\frac{1}{n+1}<1,$$

所以不妨设 $b\leqslant n$.

取定 $b(2\leqslant b\leqslant n)$. 当 $a=b-1$ 时,由 $a+c=n$ 可得

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{b-1}{b}+\frac{n+1-b}{d}.$$

从而为使 $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}<1$, d 的最小值为 $d_1=b(n+1-b)+1$,此时

$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ 的最大值为

$$\frac{b-1}{b}+\frac{n+1-b}{b(n+1-b)+1}=1-\frac{1}{bd_1}.$$

当 $a=b-k, c=n+k-b$ 时.若 $d\geqslant d_1$,则

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{b-k}{b}+\frac{n+k-b}{d}\leqslant\frac{b-k}{b}+\frac{n+k-b}{d_1}.$$

再由 $b<d_1$,从而$\frac{k-1}{d_1}\leqslant\frac{k-1}{b}$,于是

$$\frac{b-k}{b}+\frac{n+k-b}{d_1}\leqslant\frac{b-1}{b}+\frac{n+1-b}{d_1}=1-\frac{1}{bd_1}.$$

由此得到当 $d\geqslant d_1$ 时,有

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\leqslant 1-\frac{1}{bd_1}.$$

若 $d<d_1$ 时,由于

$$\frac{b-k}{b}+\frac{n+k-b}{d}=\frac{m}{bd}<1,$$

所以 $$\frac{b-k}{b}+\frac{n+k-b}{d}\leqslant\frac{bd-1}{bd}<\frac{bd_1-1}{bd_1}=1-\frac{1}{bd_1}.$$

由此,固定 b,$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ 的最大值为 $1-\frac{1}{bd_1}$,从而,在 $a+c=n$,$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}<1$ 的条件下,所求的最大值是

$$\max_{\substack{2\leqslant b\leqslant n\\ b\in N}}\left\{1-\frac{1}{b(b(n+1-b)+1)}\right\}.$$

记 $f(b)=b(b(n+1-b)+1)=-b^3+(n+1)b^2+b$.由于

$$\begin{aligned}f(b+1)-f(b)&=-(3b^2+3b+1)+(n+1)(2b+1)+1\\&=-3b^2+(2n-1)b+n+1.\end{aligned}$$

令二次三项式 $-3b^2+(2n-1)b+n+1$ 的惟一正根为 $\overline{b}$,则

$$\overline{b}=\frac{1}{6}\left(2n-1+\sqrt{(2n-1)^2+12(n+1)}\right).$$

易知,当 $b<\overline{b}$ 时,$f(b+1)-f(b)>0$,当 $b>\overline{b}$ 时,$f(b+1)-f(b)<0$.从而当 b 等于不小于b_1 的最小整数时,$f(b)$ 最大.再由$(2n-1)^2+12(n+1)=4n^2+8n+13$ 可知

$$2n+2<\sqrt{(2n-1)^2+12(n+1)}<2n+3,$$

所以 $\frac{2n}{3}+\frac{1}{6}<\bar{b}<\frac{2n}{3}+\frac{1}{3}$.

于是易证不小于 b_1 的最大整数是 $\left[\frac{2n}{3}+\frac{1}{6}\right]+1$.

以上我们证明了,若 $a+c=n$,$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}<1$ 时,$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ 的最大值为

$$1-\frac{1}{\left[\frac{2n}{3}+\frac{7}{6}\right]\left(\left[\frac{2n}{3}+\frac{7}{6}\right]\left(n-\left[\frac{2n}{3}+\frac{1}{6}\right]\right)+1\right)}.$$

由于此数随 n 单增,从而它也是在 $a+c\leqslant n$,$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}<1$ 的条件下,$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ 的最大值.

9·65 设 u,v 是正实数,对于给定的正整数 n,求 u,v 所满足的充分必要条件,使得存在实数 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant 0$ 满足

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=u,$$
$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=v.$$

当这些数存在时,求 a_1 的最大值与最小值.

(加拿大国家集训队训练题,1989年)

[解] 若满足条件的 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 存在,由柯西不等式可得

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2\leqslant n(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2).$$

又显然有

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2\geqslant a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2.$$

从而得 u,v 所满足的必要条件:

$$v\leqslant u^2\leqslant nv. \qquad ①$$

可以证明 ① 也是充分条件.事实上,若 ① 成立,则取正数

$$a_1=\frac{u+\sqrt{(n-1)(nv-u^2)}}{n}.$$

由于 $nv-u^2\leqslant(n-1)u^2$,所以 $a_1\leqslant u$.若 $n>1$,再取

$$a_2=a_3=\cdots=a_n=\frac{u-a_1}{n-1},$$

则容易验证 $a_1+a_2+\cdots+a_n=u$,

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=v^2,$$

$$a_1 \geqslant \frac{u-a_1}{n-1}.$$

可以证明 a_1 的最大值就是$\frac{u+\sqrt{(n-1)(nv-u^2)}}{n}$. 事实上,若取 $a_1>\frac{u+\sqrt{(n-1)(nv-u^2)}}{n}$,则 $n>1$ 且

$$na_1^2-2ua_1+u^2-(n-1)v>0,$$

即 $$(n-1)(v-a_1^2)<(u-a_1)^2. \quad ②$$

若有 $a_2 \geqslant a_3 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant 0$,使得

$$a_2+a_3+\cdots+a_n=u-a_1,$$

$$a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2=v-a_1^2,$$

则由柯西不等式可得

$$(u-a_1)^2 \leqslant (n-1)(v-a_1^2),$$

与②矛盾.

以下求 a_1 的最小值. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足所要之条件,则对于任何 $1 \leqslant i,j \leqslant n$ 有

$$a_i^2+a_j^2 \leqslant (a_i+a_j)^2, \quad ③$$

$$a_i^2+a_j^2 \leqslant a_i^2+a_j^2+2(a_1-a_i)(a_1-a_j)$$

$$=a_1^2+(a_i+a_j-a_1)^2. \quad ④$$

若 $n=1$,显然 $u^2=v$ 且 $a_1=u$. 考虑 $n \geqslant 2$ 的情况. 显然有$\frac{u}{n} \leqslant a_1 \leqslant u$. 若存在 $k \in \{1,2,\cdots,n-1\}$ 使得 $a_1 \leqslant \frac{u}{k}$,则当 $a_i+a_j \leqslant a_1$ 时使用③,当 $a_i+a_j>a_1$ 时使用④,重复上述步骤有限多次可得

$$v=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2 \leqslant ka_1^2+(u-ka_1)^2. \quad ⑤$$

进一步若$\frac{u}{k+1} \leqslant a_1 \leqslant \frac{u}{k}$,由⑤和二次函数的性质可得

$$v=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2 \leqslant ka_1^2+(u-ka_1)^2 \leqslant \frac{u^2}{k}. \quad ⑥$$

由①可知$\frac{u^2}{n} \leqslant v \leqslant u^2$,显然 $v=\frac{u^2}{n}$ 的充要条件是$a_1=a_2=\cdots$

$= a_n = \frac{u}{n}$. 若 $v > \frac{u^2}{n}$，则存在 $k \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$ 使得 $\frac{u^2}{k+1} < v \leqslant \frac{u^2}{k}$. 可以证明

$$a_1 \geqslant \frac{ku + \sqrt{k[(k+1)v - u^2]}}{k(k+1)}. \quad ⑦$$

如果 ⑦ 不成立，则存在 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足题设中的条件且

$$a_1 < \frac{ku + \sqrt{k[(k+1)v - u^2]}}{k(k+1)}. \quad ⑧$$

由于 $0 < (k+1)v - u^2 \leqslant \frac{u^2}{k}$，所以 $a_1 \leqslant \frac{u}{k}$. 由 ⑤ 可知

$$v \leqslant ka_1^2 + (u - ka_1)^2,$$

即 $$k(k+1)a_1^2 - 2kua_1 + u^2 - v \geqslant 0.$$

再由 $k^2u^2 - k(k+1)(u^2 - v) = k[(k+1)v - u^2] > 0$ 和 ⑧ 可推出

$$a_1 \leqslant \frac{ku - \sqrt{k[(k+1)v - u^2]}}{k(k+1)} < \frac{u}{k+1}.$$

于是存在 $k + 1 \leqslant m \leqslant n - 1$，使得 $\frac{u}{m+1} \leqslant a_1 < \frac{u}{m}$. 由 ⑥ 得

$$v \leqslant \frac{u^2}{m} \leqslant \frac{u^2}{k+1},$$

与 $v > \frac{u^2}{k+1}$ 矛盾，所以 ⑦ 成立.

另一方面，在 $\frac{u^2}{k+1} < v \leqslant \frac{u^2}{k}$ 的条件下，若

$$a_1 = \frac{ku + \sqrt{k[(k+1)v - u^2]}}{k(k+1)},$$

则 $\frac{u}{k+1} < a_1 \leqslant \frac{u}{k}$，且 $k(k+1)a_1^2 - 2kua_1 + u^2 - v = 0$ 即

$$v = ka_1^2 + (u - ka_1)^2.$$

令 $a_1 = \cdots = a_k = \frac{u}{k}, a_{k+1} = u - ka_1, a_{k+2} = \cdots = a_n = 0$，则 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足所要条件.

综合上述各种情况可得：当 $\frac{u^2}{k+1} < v \leqslant \frac{u^2}{k}$ 时，其中 $k \in \{1, 2, \cdots,$

$n-1\}$，a_1 的最小值为

$$\frac{ku+\sqrt{k[(k+1)v-u^2]}}{k(k+1)}.$$

9·66　设实数 a 具有以下性质：对于任意的四个实数 x_1,x_2,x_3,x_4，总可以取整数 k_1,k_2,k_3,k_4，使得

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}[(x_i-k_i)-(x_j-k_j)]^2\leqslant a.$$

求这样的 a 的最小值.

（中国国家集训队选拔试题，1990 年）

［解］　对于实数 x_i 和整数 k_i，$i=1,2,3,4$，令

$$f=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}[(x_i-k_i)-(x_j-k_j)]^2,$$

则所求 a 的最小值为

$$\max_{x_i\in R}\min_{k_i\in E} f,$$

其中 R 和 E 分别表示实数集和整数集.

首先取 $x_1=0,x_2=\frac{1}{4},x_3=\frac{1}{2},x_4=\frac{3}{4}$，则

$$f=\left[(k_2-k_1)-\frac{1}{4}\right]^2+\left[(k_3-k_1)-\frac{1}{2}\right]^2+\left[(k_4-k_1)-\frac{3}{4}\right]^2+\left[(k_3-k_2)-\frac{1}{4}\right]^2+\left[(k_4-k_2)-\frac{1}{2}\right]^2+\left[(k_4-k_3)-\frac{1}{4}\right]^2.$$

经整理可得

$$f=\frac{5}{4}+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}(k_j-k_i)^2-3(k_4-k_1)-(k_3-k_2).\qquad ①$$

在 ① 中，若 $k_1=k_2=k_3=k_4$，则 $f=\frac{5}{4}$. 若 k_1,k_2,k_3,k_4 是不全相同的整数，则

$$(k_3-k_2)^2-(k_3-k_2)=\left(k_3-k_2-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\geqslant 0,$$

$$(k_4-k_1)^2-3(k_4-k_1)=\left(k_4-k_1-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\geqslant -2.$$

同时从 k_1,k_2,k_3,k_4 不全相同可知，(k_2-k_1)，(k_3-k_1)，(k_4-k_2)，

(k_4-k_3) 四个数中至少有两个为非零整数,所以

$$(k_2-k_1)^2+(k_3-k_1)^2+(k_4-k_2)^2+(k_4-k_3)^2\geqslant 2.$$

于是对任意整数 k_1,k_2,k_3,k_4 总有

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}(k_j-k_i)^2-3(k_4-k_1)-(k_3-k_2)\geqslant 0.$$

这样由 ① 可知,当 $x_1=0,x_2=\frac{1}{4},x_3=\frac{1}{2},x_4=\frac{3}{4}$ 时,

$$\min_{k_i\in E}f=\frac{5}{4},$$

从而所求 a 的最小值必不小于$\frac{5}{4}$.

以下证所求 a 的最小值也不大于$\frac{5}{4}$,只需证对任何实数 x_1,x_2,x_3,x_4 总有

$$\min_{k_i\in E}f\leqslant\frac{5}{4}. \qquad ②$$

事实上,取 $k_i=[x_i],i=1,2,3,4$.令 $\alpha_i=x_i-k_i$,则 $0\leqslant\alpha_i<1$,相应之 $f=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}(\alpha_i-\alpha_j)^2$.不妨设 $\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant\alpha_3\leqslant\alpha_4$,令

$$\beta_1=\alpha_2-\alpha_1,\beta_2=\alpha_3-\alpha_2,\beta_3=\alpha_4-\alpha_3,\beta_4=1+\alpha_1-\alpha_4,$$

则 $0\leqslant\beta_i\leqslant 1,\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4=1$,且

$$f=\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2+(\beta_1+\beta_2)^2+(\beta_2+\beta_3)^2+(\beta_1+\beta_2+\beta_3)^2.$$

若取 $k_i=[x_i],i=1,2,3,k_4=[x_4]+1$,则相应之

$$f=\beta_4^2+\beta_1^2+\beta_2^2+(\beta_4+\beta_1)^2+(\beta_1+\beta_2)^2+(\beta_4+\beta_1+\beta_2)^2.$$

若取 $k_i=[x_i],i=1,2,k_3=[x_3]+1,k_4=[x_4]+1$,则相应之

$$f=\beta_3^2+\beta_4^2+\beta_1^2+(\beta_3+\beta_4)^2+(\beta_4+\beta_1)^2+(\beta_3+\beta_4+\beta_1)^2.$$

若取 $k_1=[x_1],k_i=[x_i]+1,i=2,3,4$,则相应之

$$f=\beta_2^2+\beta_3^2+\beta_4^2+(\beta_2+\beta_3)^2+(\beta_3+\beta_4)^2+(\beta_2+\beta_3+\beta_4)^2.$$

在 $\beta_4=\max\{\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\}$ 时,估计

$$f=\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2+(\beta_1+\beta_2)^2+(\beta_2+\beta_3)^2+(\beta_1+\beta_2+\beta_3)^2,$$

其中 $0\leqslant\beta_i\leqslant\beta_4=1-(\beta_1+\beta_2+\beta_3),i=1,2,3$.为此,计算函数

$$g(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+x_2+x_3)^2$$

在条件

$$0 \leqslant x_i \leqslant 1-(x_1+x_2+x_3), i=1,2,3, \quad ③$$

下的最大值.任取(x_1,x_2,x_3)满足③,分以下三种情况讨论

(1)$x_2=\max\{x_1,x_2,x_3\}$.由于g关于x_2单增,且$0 \leqslant x_2 \leqslant \frac{1-x_1x_3}{2}$,所以

$$\begin{aligned} g(x_1,x_2,x_3) &\leqslant x_1^2+\left(\frac{1-x_1-x_3}{2}\right)^2+x_3^2+\left(\frac{1+x_1-x_3}{2}\right)^2 \\ &\quad +\left(\frac{1-x_1+x_3}{2}\right)^2+\left(\frac{1+x_1+x_3}{2}\right)^2 \\ &= x_1^2+x_3^2+2\left(\frac{1-x_3}{2}\right)^2+2\left(\frac{x_1}{2}\right)^2+ \\ &\quad 2\left(\frac{1+x_3}{2}\right)^2+2\left(\frac{x_1}{2}\right)^2 \\ &= 2(x_1^2+x_3^2)+1. \end{aligned}$$

由$x_2=\max\{x_1,x_2,x_3\}$可推出$\left\{x_1,\frac{1-x_1-x_3}{2},x_3\right\}$,也满足③,从而

$$0 \leqslant x_1 \leqslant 1-\left(x_1+\frac{1-x_1-x_3}{2}+x_3\right)=\frac{1-x_1-x_3}{2},$$

$$0 \leqslant x_3 \leqslant 1-\left(x_1+\frac{1-x_1-x_3}{2}+x_3\right)=\frac{1-x_1-x_3}{2}.$$

由此可得$0 \leqslant x_1+x_3 \leqslant \frac{1}{2}$,不妨设$0 \leqslant x_3 \leqslant \frac{1}{4}$.由于函数$h(x_1,x_3)=2(x_1^2+x_3^2)+1$关于$x_1$单增,又$0 \leqslant x_1 \leqslant \frac{1-x_3}{3}$,从而

$$\begin{aligned} g(x_1,x_2,x_3) &\leqslant 2\left(\left(\frac{1-x_3}{3}\right)^2+x_3^2\right)+1 \\ &= \frac{20}{9}x_3^2-\frac{4}{9}x_3+\frac{11}{9}, \end{aligned}$$

其中$0 \leqslant x_3 \leqslant \frac{1}{4}$.再由首项系数为正的二次函数在区间上的最大值必在端点达到的性质可知

$$g(x_1,x_2,x_3) \leqslant \max\left\{\frac{11}{9},\frac{5}{4}\right\} = \frac{5}{4}.$$

(ii) $x_1 = \max\{x_1,x_2,x_3\}$. 与(i)中证明相同可得

$$g(x_1,x_2,x_3) \leqslant \left(\frac{1-x_2-x_3}{2}\right)^2 + x_2^2 + x_3^2 + \left(\frac{1+x_2-x_3}{2}\right)^2 + (x_2+x_3)^2 + \left(\frac{1+x_2+x_3}{2}\right)^2$$

$$= 2\left(\frac{1-x_3}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{x_2}{2}\right)^2 + x_2^2 + x_3^2 + (x_2+x_3)^2 + \frac{1}{4}(1+x_2+x_3)^2$$

$$= \frac{11}{4}x_2^2 + \frac{5}{2}x_2x_3 + \frac{11}{4}x_3^2 + \frac{x_2}{2} - \frac{x_3}{2} + \frac{3}{4}, \quad ④$$

其中 $0 \leqslant x_2 \leqslant \frac{1-x_3}{3}, 0 \leqslant x_3 \leqslant \frac{1-x_2}{3}$，即

$$0 \leqslant x_3 \leqslant \frac{1}{3}, 0 \leqslant x_2 \leqslant \min\left\{\frac{1-x_3}{3}, 1-3x_3\right\}. \quad ⑤$$

若 $0 \leqslant x_3 \leqslant \frac{1}{4}$，由⑤可得 $0 \leqslant x_2 \leqslant \frac{1-x_3}{3}$. 再用④得到

$$g(x_1,x_2,x_3) \leqslant \frac{11}{4}\left(\frac{1-x_3}{3}\right)^2 + \frac{5}{2}\cdot\frac{x_3(1-x_3)}{3} + \frac{11}{4}x_3^2 + \frac{1-x_3}{6} - \frac{x_3}{2} + \frac{3}{4}$$

$$= \frac{20}{9}x_3^2 - \frac{4}{9}x_3 + \frac{11}{9}$$

$$\leqslant \max\left\{\frac{11}{9},\frac{5}{4}\right\} = \frac{5}{4}.$$

若 $\frac{1}{4} \leqslant x_3 \leqslant \frac{1}{3}$，由⑤可得 $0 \leqslant x_2 \leqslant 1-3x_3$. 再用④得到

$$g(x_1,x_2,x_3) \leqslant \frac{11}{4}(1-3x_3)^2 + \frac{5}{2}x_3(1-3x_3) + \frac{11}{4}x_3^2 + \frac{1}{2}(1-3x_3) - \frac{x_3}{2} + \frac{3}{4}$$

$$= 20x_3^2 - 16x_3 + 4$$

$$\leqslant \max\left\{\frac{8}{9},\frac{5}{4}\right\} = \frac{5}{4}.$$

(iii) $x_3 = \max(x_1, x_2, x_3)$，由对称性，与(ii)中证明相同可得

$$g(x_1, x_2, x_3) \leqslant \frac{5}{4}.$$

无论何种情况都有 $g(x_1, x_2, x_3) \leqslant \frac{5}{4}$. 从而在 $\beta_4 = \max\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$ 的条件下，

$$f = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 + (\beta_1 + \beta_2)^2 + (\beta_2 + \beta_3)^2 + (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)^2$$
$$\leqslant \frac{5}{4}.$$

于是易知在我们前面列举的 k_i 的四种取法中必有一种，使得相应之 $f \leqslant \frac{5}{4}$，所以②成立.

综上所述可得所求 a 的最小值为 $\frac{5}{4}$.

9·67　设 n 是一个固定的整数，$n \geqslant 2$.

(a) 确定最小常数 c，使得不等式

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leqslant c\left(\sum_{1\leqslant i\leqslant n} x_i\right)^4$$

对所有的非负实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0$ 都成立.

(b) 对于这个常数 c，确定等号成立的充要条件.

（第 40 届国际数学奥林匹克，1999 年）

[解]　由于不等式是齐次对称的，我们不妨设 $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant 0$，且

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1.$$

于是，只需讨论

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j (x_i^2 + y_j^2)$$

的最大值.

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中最后一个非零数为 x_{k+1} $(k \geqslant 2)$. 将

$$x = (x_1, \cdots, x_k, x_{k+1}, 0, \cdots, 0)$$

调整为

$$x' = (x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k + x_{k+1}, 0, \cdots, 0),$$

相应的函数值的差

$$\begin{aligned}
&F(x') - F(x) \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} x_i(x_k + x_{k+1})[x_i^2 + (x_k + x_{k+1})^2] - \sum_{i=1}^{k-1} x_i x_k (x_i^2 + x_k^2) - \\
&\quad \sum_{i=1}^{k-1} x_i x_{k+1}(x_i^2 - x_{k+1}^2) - x_k x_{k+1}(x_k^2 + x_{k+1}^2) \\
&= x_k x_{k+1}\left[3(x_k + x_{k+1})\sum_{i=1}^{k-1} x_i - x_k^2 - x_{k+1}^2\right] \\
&= x_k x_{k+1}[3(x_k + x_{k+1})(1 - x_k - x_{k+1}) - x_k^2 - x_{k+1}^2] \\
&= x_k x_{k+1}\{(x_k + x_{k+1})[3 - 4(x_k + x_{k+1})] + 2x_k x_{k+1}\}
\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}
1 &\geqslant x_1 + x_k + x_{k+1} \geqslant \frac{1}{2}(x_k + x_{k+1}) + x_k + x_{k+1} \\
&= \frac{3}{2}(x_k + x_{k+1}),
\end{aligned}$$

所以

$$x_k + x_{k+1} \leqslant \frac{2}{3},$$

从而有

$$F(x') - F(x) > 0$$

因此,将 x 调整为x'时,函数值 F 严格增加.对于任意的 $x = (x_1, \cdots, x_n)$,经过若干次调整,最终可得

$$\begin{aligned}
F(x) &\leqslant F(a, b, 0, \cdots, 0) \\
&= ab(a^2 + b^2) \\
&= \frac{1}{2}(2ab)(1 - 2ab) \\
&\leqslant \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

另一方面,我们有

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \cdots, 0\right) = \frac{1}{8}.$$

因此 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的最大值为$\frac{1}{8}$,从而所求的常数 $c = \frac{1}{8}$.

等号成立的条件是在 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中有 $n-2$ 个零,另外两个相等(相等的这两个也可以为零).

9·68 求实数 a 的取值范围,使得对于任意实数 x 和任意 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 恒有

$$(x+3+2\sin\theta\cos\theta)^2+(x+a\sin\theta+a\cos\theta)^2\geqslant\frac{1}{8}.$$

(中国高中数学联赛,1996 年)

[解] 易知原不等式等价于

$$(3+2\sin\theta\cos\theta-a\sin\theta-a\cos\theta)^2\geqslant\frac{1}{4} \quad ①$$

对任意 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 恒成立.

由 ① 可得

$$a\geqslant\frac{3+2\sin\theta\cos\theta+\frac{1}{2}}{\sin\theta+\cos\theta},\text{对任意 }\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \quad ②$$

或

$$a\leqslant\frac{3+2\sin\theta\cos\theta-\frac{1}{2}}{\sin\theta+\cos\theta},\text{对任意 }\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right], \quad ③$$

在条件 ② 下,由于 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,因此

$$1\leqslant\sin\theta+\cos\theta\leqslant\sqrt{2},$$

又因

$$\frac{3+2\sin\theta\cos\theta+\frac{1}{2}}{\sin\theta+\cos\theta}=(\sin\theta+\cos\theta)+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta},$$

而当 $1\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$ 时,$f(x)=x+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{x}$ 为减函数,所以

$$a\geqslant\max_{\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}\frac{3+2\sin\theta\cos\theta+\frac{1}{2}}{\sin\theta+\cos\theta}$$

$$=1+\frac{5}{2}=\frac{7}{2}.$$

在条件 ③ 下,由于

第九章 不等式

$$\frac{3+2\sin\theta\cos\theta-\dfrac{1}{2}}{\sin\theta+\cos\theta}=(\sin\theta+\cos\theta)+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$$

$$\geqslant 2\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}=\sqrt{6},$$

且等号在 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 时成立,因此

$$\min_{\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}\frac{3+2\sin\theta\cos\theta-\dfrac{1}{2}}{\sin\theta+\cos\theta}=\sqrt{6},$$

从而有 $a\leqslant\sqrt{6}$.

综上所述,可知 $a\geqslant\dfrac{7}{2}$ 或 $a\leqslant\sqrt{6}$ 即为所求的 a 的取值范围.

9·69 (1) 证明:对于 $n>2$,都有

$$3-\frac{2}{(n-1)!}<\frac{2}{2!}+\frac{7}{3!}+\cdots+\frac{n^2-2}{n!}<3.$$

(2) 求自然数 a,b,c,使得对任意 $n\in N,n>2$,都有

$$b-\frac{c}{(n-2)!}<\frac{2^3-a}{2!}+\frac{3^3-a}{3!}+\cdots+\frac{n^3-a}{n!}<b.$$

(世界城市际数学联赛,1996 年)

[解] (1) 对于 $n\geqslant 2$,令

$$d_n=3-\left(\frac{2}{2!}+\frac{7}{3!}+\cdots+\frac{n^2-2}{n!}\right).$$

我们先来证明 $d_n=\dfrac{n+2}{n!},n\geqslant 2$.

事实上,$d_2=3-\dfrac{2}{2!}=\dfrac{6-2}{2!}=\dfrac{2+2}{2!}$.

设 $d_k=\dfrac{k+2}{k!}$.

于是

$$\begin{aligned}d_{k+1}&=d_k-\frac{(k+1)^2-2}{(k+1)!}\\&=\frac{k+2}{k!}-\frac{(k+1)^2-2}{(k+1)!}\\&=\frac{(k+2)(k+1)-(k+1)^2+2}{(k+1)!}\end{aligned}$$

$$= \frac{(k+1)+2}{(k+1)!}$$

由数学归纳法原理,对于 $n \geqslant 2$,都有 $d_n = \frac{n+2}{n!}$.

又因为对于 $n > 2$ 有

$$0 < \frac{n+2}{n!} < \frac{2}{(n-1)!}$$

即 $$0 < d_n < \frac{2}{(n-1)!}$$

所以原不等式成立.

(2) 计算

$$\frac{2^3}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \cdots + \frac{6^3}{6!} - a\left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{6!}\right)$$

时发现,当 $a = 5$ 时,上式的值比9稍微小一点点.故先取 $a = 5, b = 9$.

令

$$e_n = 9 - \left(\frac{3}{2!} + \frac{22}{3!} + \cdots + \frac{n^3 - 5}{n!}\right), n \geqslant 2.$$

可以证明 $e_n = \frac{n^2 + 3n + 5}{n!}, n \geqslant 2$.

事实上,$e_2 = 9 - \frac{3}{2!} = \frac{15}{2!} = \frac{2^2 + 2 \times 3 + 5}{2!}$.

设 $$e_k = \frac{k^2 + 3k + 5}{k!},$$

于是
$$\begin{aligned} e_{k+1} &= e_k - \frac{(k+1)^3 - 5}{(k+1)!} \\ &= \frac{k^2 + 3k + 5}{k!} - \frac{(k+1)^3 - 5}{(k+1)!} \\ &= \frac{(k+1) \cdot [(k+1)^2 + (k+1) + 3] - [(k+1)^3 - 5]}{(k+1)!} \\ &= \frac{(k+1)^2 + 3(k+1) + 5}{(k+1)!}. \end{aligned}$$

由数学归纳法原理可知,对于自然数 $n \geqslant 2$,都有

$$e_n = \frac{n^2 + 3n + 5}{n!}.$$

显然 $e_n > 0$.因此只需再寻找 $c \in N$,使得对于 $n > 2$,有

$$e_n < \frac{c}{(n-2)!}.$$

若上式成立，则

$$\frac{n^2+3n+5}{n!} < \frac{c}{(n-2)!}, n > 2,$$

它等价于 $n^2+3n+5 < cn(n-1), n > 2.$

令 $n=3$，上式化为

$$23 < 6c,$$

所以 $c \geqslant 4.$

当 $c=4$ 时，

$$\begin{aligned} cn(n-1)-(n^2+3n+5) &= 4n(n-1)-n^2-3n-5 \\ &= 3n^2-7n-5 \\ &= 3n(n-3)+2(n-3)+1 \\ &> 0. \end{aligned}$$

因此，对于任意自然数 $n>2$，都有

$$e_n < \frac{4}{(n-2)!}.$$

从而，对于 $a=5, b=9, c=4$，以及任意自然数 $n>2$，都有

$$b-\frac{c}{(n-2)!} < \frac{2^3-a}{2!}+\frac{3^3-a}{3!}+\cdots+\frac{n^3-a}{n!} < b.$$

第3节　常量及整变量不等式

9·70　不得查表和使用计算器证明：

$$\sin 1 < \log_3 \sqrt{7}.$$

（第47届莫斯科数学奥林匹克，1984年）

［证］　显然有

$$\sin 1 < \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{7}{8}.$$

又 $3^7 < 7^4$，则

$$\sin 1 < \frac{7}{8} < \log_3 \sqrt{7}.$$

9・71　求证：$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdots\frac{99}{100}<\frac{1}{10}$.

（第 13 届莫斯科数学奥林匹克，1950 年）

［证 1］　因为

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\frac{99}{100}\right)^2$$
$$<\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\cdots\frac{99}{100}\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\cdots\frac{98}{99}\cdot 1\right)$$
$$=\frac{1}{100},$$

所以

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\cdots\cdot\frac{99}{100}<\frac{1}{10}.$$

［证 2］　令 $x_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}\cdot\sqrt{2n+1}$, $n=1,2,\cdots$

则

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n+1)\sqrt{2n+3}}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n+2)}\cdot\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)\sqrt{2n+1}}$$
$$=\frac{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}{2n+2}$$
$$<1.$$

由此可知对任何自然数 n 有 $x_n\leqslant x_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

取 $n=50$ 可得

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\cdots\cdot\frac{99}{100}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{101}}<\frac{1}{10}.$$

9・72　证明不等式

$$\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}>\frac{1}{4},$$

其中分子的根号比分母上的根号多一重.

（第 16 届莫斯科数学奥林匹克，1953 年）

［证］　记分母上的根号值为 a，易证

$$1 < a < 2. \quad ①$$

由于分子上的根号值为 $\sqrt{2+a}$,所以原不等式等价于

$$\frac{2-\sqrt{2+a}}{2-a} > \frac{1}{4}. \quad ②$$

由 $\frac{2-\sqrt{2+a}}{2-a} = \frac{1}{2+\sqrt{2+a}}$ 及 ①,立即可得 ② 成立.

9・73 求证:$16 < \sum_{k=1}^{80} \frac{1}{\sqrt{k}} < 17.$

(中国高中数学联赛,1992 年)

[证] 由 $\sqrt{k-1} < \sqrt{k} < \sqrt{k+1}$ 可得

$$\sqrt{k} + \sqrt{k-1} < 2\sqrt{k} < \sqrt{k} + \sqrt{k+1}.$$

从而
$$\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} < \frac{1}{\sqrt{k}} < \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}},$$

即
$$2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) < \frac{1}{\sqrt{k}} < 2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}).$$

于是对任何自然数 m, n 且 $m \leqslant n$ 有

$$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{m}) < \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2(\sqrt{n}-\sqrt{m-1}).$$

取 $n = 80, m = 1$ 得

$$\sum_{k=1}^{80} \frac{1}{\sqrt{k}} > 2(\sqrt{81}-1) = 16.$$

取 $n = 80, m = 2$ 得

$$\sum_{k=1}^{80} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \sum_{k=2}^{80} \frac{1}{\sqrt{k}} < 1 + 2(\sqrt{80}-1) < 17.$$

所以
$$16 < \sum_{k=1}^{80} \frac{1}{\sqrt{k}} < 17.$$

9・74 试比较下列两对数的大小:

(1)$2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}$ n 次与 $3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}$ $n-1$ 次.

(2)$3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}$ n 次与 $4^{4^{4^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{4}}}}}}$ $n-1$ 次.

(第 38 届莫斯科数学奥林匹克,1975 年)

[解] 记

$A_n = 2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^2}}}}}$ n 次， $B_n = 3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^3}}}}}$ n 次，

$C_n = 4^{4^{4^{\cdot^{\cdot^{\cdot^4}}}}}$ n 次.

(1) $n = 2$ 时，$A_2 = 4 > 3 = B_1$. 用归纳法易证当 $n \geqslant 3$ 时，$A_n < B_{n-1}$. 事实上，显然有

$$16 = A_3 < B_2 = 27.$$

若 $A_n < B_{n-1}$，则

$$A_{n+1} = 2^{A_n} < 2^{B_{n-1}} < 3^{B_{n-1}} = B_n.$$

(2) 可以证明当 $n \geqslant 2$ 时 $B_n > 2C_{n-1}$. 事实上，若 $n = 2$，则

$$B_2 = 27 > 2C_1 = 8.$$

设 $B_n > 2C_{n-1}$，则

$$B_{n+1} = 3^{B_n} > 3^{2C_{n-1}} = 9^{C_{n-1}} > 2 \cdot 4^{C_{n-1}} = 2C_n.$$

9・75　设 $a_1, a_2, \cdots, a_{1985}$ 是 $1, 2, \cdots, 1985$ 的一个排列，将每个数 a_k 乘以其足码 k. 求证：这 1985 个乘积的最大值不小于 993^2.

（第 48 届莫斯科数学奥林匹克，1985 年）

[证]　不小于 993 的 a_k 恰有 993 个，这些数中必有一个，记为 a_n，其足码 $n \geqslant 993$，从而

$$na_n \geqslant 993^2.$$

于是要证之结论成立.

9・76　求证：当整数 $n > 2$ 时，$(n!)^2 > n^n$.

（第 21 届莫斯科数学奥林匹克，1958 年）

[证 1]　$(n!)^2 = (1 \cdot n) \cdot (2 \cdot (n-1)) \cdot \cdots \cdot ((n-1) \cdot 2) \cdot (n \cdot 1)$.

对于 $1 < k < n$，由 $(k-1)n > (k-1)k$ 可得

$$k(n-k+1) > n.$$

由此立即可得　$(n!)^2 > n^n$，对于任意 $n \geqslant 3$.

[证 2]　用归纳法，当 $n = 3$ 时，显然

$$(3!)^2 = 36 > 27 = 3^3.$$

假设要证之不等于对于 $n = k (k \geqslant 3)$ 成立，则

$$[(k+1)!]^2 = (k!)^2 (k+1)^2 > k^k (k+1)^2.$$

再由$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k<3$可得

$$[(k+1)!]^2>\frac{1}{3}(k+1)^{k+2}>(k+1)^{k+1}.$$

即当$n=k+1$时要证之不等式也成立.

9·77 设a,b,c,d,e和f都是自然数且

$$\frac{a}{b}>\frac{c}{d}>\frac{e}{f}.$$

若$af-be=1$,求证:$d\geqslant b+f$.

(第35届莫斯科数学奥林匹克,1972年)

[证] 由假设可得

$$\begin{aligned}d&=d(af-be)=adf-bcf+bcf-bed\\&=f(ad-bc)+b(cf-ed).\end{aligned}$$

再由$ad-bc>0,cf-ed>0$且a,b,c,d,e,f都是自然数,所以

$$ad-bc\geqslant 1,cf-ed\geqslant 1.$$

由此可得 $d\geqslant b+f.$

9·78 对于大于1的自然数n和k,求证:

$$\sum_{i=2}^{n^k}\frac{1}{i}>k\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}.$$

(前民主德国数学竞赛,1980年)

[证] 令 $S_m=\frac{1}{n^{m-1}+1}+\frac{1}{n^{m-1}+2}+\cdots+\frac{1}{n^m}$,

则 $S=\sum_{i=2}^{n^k}\frac{1}{i}=\sum_{m=1}^{k}S_m.$

再令

$$S_{m,l}=\frac{1}{ln^{m-1}+1}+\frac{1}{ln^{m-1}+2}+\cdots+\frac{1}{(l+1)n^{m-1}},$$

则 $S_m=\sum_{l=1}^{n-1}S_{m,l}.$

显然有 $S_{m,l}>\frac{n^{m-1}}{(l+1)n^{m-1}}=\frac{1}{l+1}$,

所以 $S=\sum_{m=1}^{k}S_m>\sum_{m=1}^{k}\sum_{l=1}^{n-1}\frac{1}{l+1}=k\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}.$

9·79　设 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是不同的自然数，而且均大于1，求证

$$\left(1-\frac{1}{p_1^2}\right)\left(1-\frac{1}{p_2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_n^2}\right)>\frac{1}{2}.$$

（基辅数学奥林匹克，1970年）

［证］　设 $m=\max\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}$，则

$$\left(1-\frac{1}{p_1^2}\right)\left(1-\frac{1}{p_2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_n^2}\right)\geqslant\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{m^2}\right)$$

$$=\frac{2^2-1}{2^2}\cdot\frac{3^2-1}{3^2}\cdot\cdots\cdot\frac{m^2-1}{m^2}$$

$$=\frac{1\cdot3\cdot2\cdot4\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(m-1)(m+1)}{2^2\cdot3^2\cdot4^2\cdot\cdots\cdot m^2}$$

$$=\frac{m+1}{2m}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2m}>\frac{1}{2}.$$

9·80　设 $r>1$，k 是正整数.求证：存在正数 n，使得当 $m>n$ 时，(r^{m-1},r^m) 内的正整数的 k 次方之和大于 r^m.

（加拿大国家集训队训练题，1988年）

［证］　取正数 n 使得

$$r^{n-1}=\max\left(3,\frac{2}{r-1}\right).$$

当 $m>n$ 时，取正整数 u 满足

$$r^m-1\leqslant u<r^m,$$

则　$$r^m>u-1\geqslant r^m-2>r^{m-1}.$$

于是 $u,(u-1)\in(r^{m-1},r^m)$，且

$$(u-1)k+u^k\geqslant u-1+u\geqslant 2r^m-3\geqslant 2r^m-r^{n-1}>r^m.$$

9·81　设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 n 个不同的正整数，其十进制表示中都没有数字9，求证：

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<30.$$

（第30届国际数学奥林匹克预选题，1989年）

［证］　将所有十进制表示中没有数字9的正整数排为 $b_1,b_2,b_3,\cdots$ 易知

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{b_k}\leqslant c+\frac{9}{10}c+\left(\frac{9}{10}\right)^2c+\left(\frac{9}{10}\right)^3c+\cdots$$

第九章　不等式

其中 $c=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{8}$.由此可得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{b_k}\leqslant\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{8}\right)\times 10.$$

又 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{8}<3$,所以

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{b_k}<30.$$

9·82 设 m 和 n 是两个互素的自然数且 $n<m$.试比较以下两数

$$\sum_{k=1}^{n}\left[k\cdot\frac{m}{n}\right]\text{和}\sum_{k=1}^{m}\left[k\cdot\frac{n}{m}\right]$$

之大小.

(第 35 届莫斯科数学奥林匹克,1972 年)

[解] 由于

$$\frac{km}{n}=\left[\frac{km}{n}\right]+\frac{a_k}{n},k=1,2,\cdots,n,$$

其中 a_k 是整数且 $0\leqslant a_k\leqslant n-1$.又 m,n 互素,所以 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 是 $\{0,1,2,\cdots,n-1\}$ 的一个排列.从而

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left[k\cdot\frac{m}{n}\right]&=\sum_{k=1}^{n}\frac{km}{n}-\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{n}\\&=\frac{1}{2}m(n+1)-\frac{1}{2}(n-1)\\&=m+\frac{1}{2}(m-1)(n-1).\end{aligned}$$

同理可得
$$\sum_{k=1}^{m}\left[k\cdot\frac{n}{m}\right]=n+\frac{1}{2}(m-1)(n-1),$$

所以
$$\sum_{k=1}^{n}\left[k\cdot\frac{m}{n}\right]>\sum_{k=1}^{m}\left[k\cdot\frac{n}{m}\right].$$

9·83 在 $m\times m$ 的方格表的每一个小方格中都填入一个非负整数.如果某个小方格中填的是 0,那么这个小方格所在行与所在列的所有小方格中填数的总和不小于 m.求证:表中所填的所有数之和不小

于$\frac{m^2}{2}$.

（第 28 届莫斯科数学奥林匹克，1965 年）

［证］ 考虑每行所填数之和与每列所填数之和，在这 $2m$ 个数中最小者记为 p. 不妨设 p 是第一行所填数之和. 若 $p \geqslant \frac{m}{2}$，则要证之结论显然成立. 设 $p < \frac{m}{2}$，令 k 为第一行中填 0 的小方格的数目，则 $k > \frac{m}{2}$. 通过估计每列填数之和可知整个表中填的所有数之和 S 满足

$$\begin{aligned}S &\geqslant (m-p)k+(m-k)p = m(k+p)-2pk \\ &= m(k+p)-\frac{1}{2}(p+k)^2+\frac{1}{2}(p-k)^2 \\ &= \frac{m^2}{2}+\frac{1}{2}(p-k)^2-\frac{1}{2}(p+k-m)^2 = \frac{m^2}{2}+\frac{1}{2}(2p-m)(m-2k) \\ &> \frac{m^2}{2}.\end{aligned}$$

9·84 对任何正整数 a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3，求证：

$$(a_1b_2+a_1b_3+a_2b_1+a_2b_3+a_3b_1+a_3b_2)^2 \geqslant 4(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1)(b_1b_2+b_2b_3+b_3b_1).$$

并证当且仅当$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$时等号成立.

（第 28 届国际数学奥林匹克预选题，1987 年）

［证］ 令二次函数

$$f(x)=(b_1x-a_1)(b_2x-a_2)+(b_2x-a_2)(b_3x-a_3)+(b_3x-a_3)(b_1x-a_1).$$

如果要证的不等式不成立，显然对任意实数 x

有 $$f(x)>0.$$

由此可得
$$f\left(\frac{a_1}{b_1}\right)=b_2b_3\left(\frac{a_1}{b_1}-\frac{a_2}{b_2}\right)\left(\frac{a_1}{b_1}-\frac{a_3}{b_3}\right)>0,$$
$$f\left(\frac{a_2}{b_2}\right)=b_1b_3\left(\frac{a_2}{b_2}-\frac{a_1}{b_1}\right)\left(\frac{a_2}{b_2}-\frac{a_3}{b_3}\right)>0,$$

$$f\left(\frac{a_3}{b_3}\right)=b_1b_2\left(\frac{a_3}{b_3}-\frac{a_1}{b_1}\right)\left(\frac{a_3}{b_3}-\frac{a_2}{b_2}\right)>0.$$

从而 $$-\left(\frac{a_1}{b_1}-\frac{a_2}{b_2}\right)^2\left(\frac{a_1}{b_1}-\frac{a_3}{b_3}\right)^2\left(\frac{a_2}{b_2}-\frac{a_3}{b_3}\right)^2>0,$$

矛盾!所以要证之不等式成立.

若$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\lambda$,则

$$f(x)=(b_1b_2+b_2b_3+b_3b_1)(x-\lambda)^2.$$

于是 $f(x)$ 的判别式为 0,即

$$(a_1b_2+a_1b_3+a_2b_1+a_2b_3+a_3b_1+a_3b_2)^2$$
$$=4(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1)(b_1b_2+b_2b_3+b_3b_1). \quad ①$$

反之若 ① 成立,则对任何实数 x 有

$$f(x)\geqslant 0.$$

不妨设$\frac{a_1}{b_1}\geqslant\frac{a_2}{b_2}\geqslant\frac{a_3}{b_3}$,则

$$f\left(\frac{a_2}{b_2}\right)=b_1b_3\left(\frac{a_2}{b_2}-\frac{a_1}{b_1}\right)\left(\frac{a_2}{b_2}-\frac{a_3}{b_3}\right)\leqslant 0,$$

从而 $f\left(\frac{a_2}{b_2}\right)=0$,由此可得$\frac{a_1}{b_1}$,$\frac{a_3}{b_3}$ 中至少有一个等于$\frac{a_2}{b_2}$,不妨设$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\lambda$.由于 λ 是$f(x)$ 的二重根,所以

$$\lambda=\frac{a_1b_2+a_1b_3+a_2b_1+a_2b_3+a_3b_1+a_3b_2}{2(b_1b_2+b_2b_3+b_3b_1)}.$$

注意到 $a_1=\lambda b_1,a_2=\lambda b_2$,则

$$\lambda b_3(b_1+b_2)=a_3(b_1+b_2),$$

而$\frac{a_3}{b_3}=\lambda=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$.

9・85 任给自然数 k,在它的十进制表示中求证:其所有数码之和不大于 $8k$ 的所有数码之和的 8 倍.

(第 34 届莫斯科数学奥林匹克,1971 年)

[证] 对任何 $x\in N$,记 $S(x)$ 为 x 的十进制表示中所有数码之和,易知

$$s(a+b) \leqslant s(a)+s(b), \text{对于任意 } a, b \in N. \quad ①$$

设 a 的十进制表示为 $\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1}$，则

$$ab = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot 10^{k-1} b.$$

由 ① 可得

$$\begin{aligned} s(ab) &\leqslant \sum_{k=1}^{n} s(a_k \cdot 10^{k-1} b) \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k s(10^{k-1} b) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k s(b) \\ &= s(a)s(b) \end{aligned} \quad ②$$

由于 $s(k) = s(1000k)$，从 ② 可得

$$s(k) = s(125.8k) \leqslant s(125)s(8k) = 8s(k).$$

9·86　在一圆周上写上 n 个自然数($n \geqslant 3$)，使得与其中每一个数相邻的两数之和与该数的比都是自然数，记所有这些比值之和为 s_n. 求证：

$$2n \leqslant s_n < 3n.$$

（第 18 届全苏数学奥林匹克，1984 年）

[证]　将 n 个数依次标号为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，则

$$s_n = \frac{x_1+x_3}{x_2} + \cdots + \frac{x_{n-2}+x_n}{x_{n-1}} + \frac{x_{n-1}+x_1}{x_n} + \frac{x_n+x_2}{x_1}.$$

于是

$$\begin{aligned} s_n &= \left(\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}\right) + \left(\frac{x_3}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}\right) + \cdots + \left(\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_{n-1}}\right) \\ &\quad + \left(\frac{x_n}{x_1}+\frac{x_1}{x_n}\right) \\ &\geqslant 2n. \end{aligned}$$

以下用归纳法证 $s_n < 3n$.

当 $n=3$ 时，$s_3 = \dfrac{x_2+x_3}{x_1} + \dfrac{x_3+x_1}{x_2} + \dfrac{x_1+x_2}{x_3}$. 不妨设 $x_3 = \max\{x_1, x_2, x_3\}$，则 $\dfrac{x_1+x_2}{x_3} \leqslant 2$. 由假设 $\dfrac{x_1+x_2}{x_3}$ 是自然数，所以只有两种情况.

(i) $\dfrac{x_1+x_2}{x_3}=2$,再由 $x_3=\max\{x_1,x_2,x_3\}$ 可知 $x_1=x_2=x_3$,所以 $s_3=6<9$.

(ii) $\dfrac{x_1+x_2}{x_3}=1$,记 $P=\dfrac{x_2+x_3}{x_1}$,$q=\dfrac{x_3+x_1}{x_2}$,则 p,q 都是自然数且

$$2x_2=(p-1)x_1,2x_1=(q-1)x_2.$$

再由 x_1 和 x_2 都为正,所以 $P-1\geqslant 1,q-1\geqslant 1$ 且

$$(p-1)(q-1)=4.$$

若 $p-1=4,q-1=1$ 或者 $p-1=1,q-1=4$,则 $s_3=1+p+q=8<9$,若 $p-1=2,q-1=z$,则 $s_3=1+p+q=7<9$.无论何种情况都有 $s_3<9$.

设当 $n=k$ 时,$s_k<3k$.当 $n=k+1$ 时,

$$s_{k+1}=\frac{x_1+x_3}{x_2}+\cdots+\frac{x_{k-2}+x_k}{x_{k-1}}+\frac{x_{k-1}+x_{k+1}}{x_k}+\frac{x_k+x_1}{x_{k+1}}+\frac{x_{k+1}+x_2}{x_1}.$$

不妨设 $x_{k+1}=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_k,x_{k+1}\}$,则

$$s_{k+1}=\frac{x_1+x_3}{x_2}+\cdots+\frac{x_{k-2}+x_k}{x_{k-1}}+\frac{x_{k-1}+x_1}{x_k}+\frac{x_k+x_2}{x_1}-\frac{x_{k-1}+x_1}{x_k}-\frac{x_k+x_2}{x_1}+\frac{x_{k-1}+x_{k+1}}{x_k}+\frac{x_k+x_1}{x_{k+1}}+\frac{x_{k+1}+x_2}{x_1}.$$

由假设$\dfrac{x_k+x_1}{x_{k+1}}$是自然数,从而仅有两种情况.

(1) $\dfrac{x_1+x_k}{x_{k+1}}=2$.再由 $x_{k+1}=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_k,x_{k+1}\}$ 可得 $x_k=x_{k+1}=x_1$,从而 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 也满足题设条件,即与其中每一个数相邻的两数之和与该数之比都是自然数.由归纳假设可得

$$s_{k+1}<3k-\frac{x_{k-1}+x_1}{x_k}-\frac{x_k+x_2}{x_1}+\frac{x_{k-1}+x_{k+1}}{x_k}+\frac{x_k+x_1}{x_{k+1}}+$$

$$\frac{x_{k+1}+x_2}{x_1}$$
$$=3k+2<3(k+1).$$

(2) $\frac{x_1+x_k}{x_{k+1}}=1$,即 $x_{k+1}=x_1+x_k$.由于$\frac{x_{k-1}+x_{k+1}}{x_k}$,$\frac{x_{k+1}+x_2}{x_1}$是自然数且 $x_1,x_2,\cdots,x_k,x_{k+1}$ 都是自然数,所以$\frac{x_{k-1}+x_1}{x_k}$,$\frac{x_k+x_2}{x_1}$ 也是自然数.由归纳假设可得

$$s_{k+1}$$
$$<3k-\frac{x_{k-1}+x_1}{x_k}-\frac{x_k+x_2}{x_1}+\frac{x_{k-1}+x_{k+1}}{x_k}+\frac{x_k+x_1}{x_{k+1}}+\frac{x_{k+1}+x_2}{x_1}$$
$$=3k+1+\frac{x_{k+1}-x_1}{x_k}+\frac{x_{k+1}-x_k}{x_1}$$
$$=3(k+1),$$

即 $s_{k+1}<3(k+1)$.

所以对任意自然数 $n\geqslant 3$ 都有 $s_n<3n$.

9・87 利用公式 $1^3+2^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ 证明:对于互不相同的自然数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 有

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k^7+a_k^5)\geqslant 2\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^3\right)^2,$$

并问等号能否成立.

(第 45 届莫斯科数学奥林匹克,1982 年)

[证] 用归纳法.容易验证当 $n=1$ 时要证之不等式成立.假设对于 $n=k$ 不等式成立.当 $n=k+1$ 时,不妨设 $a_1<a_2<\cdots<a_k<a_{k+1}$.由于

$$\left(\sum_{i=1}^{k+1}a_i^3\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{k}a_i^3\right)^2+2a_{k+1}^3\sum_{i=1}^{k}a_i^3+a_{k+1}^6,$$

再由归纳假设可知只需证

$$2a_{k+1}^6+4a_{k+1}^3\sum_{i=1}^{k}a_i^3\leqslant a_{k+1}^7+a_{k+1}^5. \qquad ①$$

由立方和公式及 $a_1<a_2<\cdots<a_k<a_{k+1}$ 可得

$$a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_k^3 \leqslant 1^3 + 2^3 + \cdots + (a_{k+1} - 1)^3$$
$$= \frac{1}{4}(a_{k+1} - 1)^2 a_{k+1}^2.$$

又 $2a_{k+1}^6 + a_{k+1}^3(a_{k+1} - 1)^2 a_{k+1}^2 = a_{k+1}^7 + a_{k+1}^5$，所以①成立，即当 $n = k + 1$ 时要证的不等式也成立.

从以上证明可以看出当 $a_1 = 1, a_2 = 2, \cdots, a_n = n$ 时等号成立.

9·88　对于自然数 $n \geqslant 2$，求证：

$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\cdots\sqrt{(n-1)\sqrt{n}}}}} < 3.$$

（第 8 届国际城市际数学邀请赛，1986 年 ～ 1987 年）

[证]　可以证明更一般的命题：对于 $2 \leqslant m \leqslant n$ 有

$$\sqrt{m\sqrt{(m+1)\sqrt{\cdots\sqrt{n}}}} < m + 1.$$

关于 m 用倒推归纳法. 当 $m = n$ 时，显然有

$$\sqrt{n} < n + 1.$$

设命题对于 $m = k(2 < k \leqslant n)$ 成立，则当 $m = k - 1$ 时有

$$\sqrt{(k-1)\sqrt{k\sqrt{\cdots\sqrt{n}}}} < \sqrt{(k-1)(k+1)} < k,$$

即命题对于 $m = k - 1$ 也成立. 在此命题中取 $m = 2$ 就得到要证之不等式.

9·89　设 $n \in N$，求证：

$$\frac{2}{3}n\sqrt{n} < \sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n} < \frac{4n+3}{6}\sqrt{n}.$$

（第 13 届美国普特南数学竞赛，1953 年）

[证]　用归纳法. 当 $n = 1$ 时，显然有

$$\frac{2}{3} < 1 < \frac{7}{6}.$$

设当 $n = k$ 时，要证之不等式成立，则

$$\frac{2}{3}k\sqrt{k} + \sqrt{k+1} < \sum_{i=1}^{k+1}\sqrt{i} < \frac{4k+3}{6}\sqrt{k} + \sqrt{k+1}. \quad ①$$

经简单计算易知

$$2k\sqrt{k} > (2k-1)\sqrt{k+1},$$

由此可推出

$$\frac{2}{3}k\sqrt{k}+\sqrt{k+1}>\frac{2}{3}(k+1)\sqrt{k+1}. \qquad ②$$

又经简单计算易知

$$(4k+3)\sqrt{k}<(4k+1)\sqrt{k+1},$$

所以 $$\frac{4k+3}{6}\sqrt{k}<\frac{4(k+1)-3}{6}\sqrt{k+1},$$

于是可得

$$\frac{4k+3}{6}\sqrt{k}+\sqrt{k+1}<\frac{4(k+1)+3}{6}\sqrt{k+1}. \qquad ③$$

将 ② 和 ③ 代入 ① 得到

$$\frac{2}{3}(k+1)\sqrt{k+1}<\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{k+1}$$

$$<\frac{4(k+1)+3}{6}\sqrt{k+1},$$

即要证之不等式对 $n=k+1$ 也成立,这就完成了归纳证明.

9·90 对于任意自然数 n,求证:$\frac{n^2}{3}+n>(n!)^{\frac{2}{n}}$.

(基辅数学奥林匹克,1977 年)

[证] 由于$(n!)^2=(1\cdot n)(2\cdot(n-1))\cdots(n\cdot 1)\leqslant\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n}$,

所以 $$(n!)^{\frac{2}{n}}\leqslant\left(\frac{n+1}{2}\right)^2=\frac{(n+1)^2}{4}.$$

显然有 $$\frac{1}{4}(n+1)^2<\frac{n^2}{3}+n,$$

从而 $$\frac{n^2}{3}+n>(n!)^{\frac{2}{n}}.$$

9·91 对于 $0\leqslant k\leqslant n$,令 a_n,b_n 分别是被 3 除与 1,2 同余的二项式系数 c_n^k 的个数,求证:$a_n>b_n$.

(加拿大国家集训队训练题,1989 年)

[证] 设 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 是两个整系数多项式,如果 $P(x)-Q(x)$ 的系数都能被 3 整除,则记为

$$P(x)\equiv Q(x)(\bmod 3).$$

回到我们所讨论的问题.若 $n=0$,显然有 $a_n=1,b_n=0$.若 $n=$

$c\cdot 3^k$,其中 k 为非负整数,$c\in\{1,2\}$,则

$$(1+x)^n=(1+x)^{c\cdot 3^k}\equiv(1+x^{3^k})^c\pmod 3.$$

由此可得,对于 $n=c\cdot 3^k$ 有

$$a_n-b_n=\begin{cases}2,当\ c=1,\\1,当\ c=2.\end{cases}\qquad ①$$

若 $n=c\cdot 3^k+m$,其中 k 为正整数,$c\in\{1,2\}$,$1\leqslant m\leqslant 2\cdot 3^{k-1}$,则

$$(1+x)^n=(1+x)^{c\cdot 3^k+m}\equiv(1+x)^m=(1+x^{3^k})^c\pmod 3.$$

由于 $1\leqslant m<2\cdot 3^{k-1}<3^k$,所以易知

$$a_n-b_n=\begin{cases}2(a_m-b_m), & 当\ c=1\\a_m-b_m, & 当\ c=2.\end{cases}\qquad ②$$

对于任意正整数 n,则 n 可表示为

$$n=c_1\cdot 3^{k_1}+c_2\cdot 3^{k_2}+\cdots+c_l\cdot 3^{k_l},$$

其中 $k_1>k_2>\cdots>k_l\geqslant 0$ 均为整数,$c_i\in\{1,2\}$,$i=1,2,\cdots,l$,$l\geqslant 1$.若 $c_1,c_2,\cdots,c_l$ 中有 m 个 1,$0\leqslant m\leqslant l$,则由 ① 和 ② 得

$$a_n-b_n=2^m>0.$$

9·92 设 $s_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$,求证:

(i) $n(n+1)^{\frac{1}{n}}<n+s_n,\quad n>1$;

(ii) $(n-1)n^{-\frac{1}{n-1}}<n-s_n,n>2$.

(第 36 届美国普特南数学竞赛,1975 年)

[证] (i) 由均值不等式可得,当 $n>1$ 时有

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}(n+s_n)&=\frac{1}{n}\left((1+1)+\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\\&>\left(2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\\&=(n+1)^{\frac{1}{n}},\end{aligned}$$

所以 $\quad n(n+1)^{\frac{1}{n}}<n+s_n$,对于任意 $n>1$.

(ii) 当 $n>2$ 时,由均值不等式可得

$$\frac{1}{n-1}(n-s_n)=\frac{1}{n-1}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$> \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

$$= n^{-\frac{1}{n-1}},$$

所以 $\quad (n-1)n^{-\frac{1}{n-1}} < n - s_n.$

9·93 设 $p \geqslant 2$ 为自然数.求证:存在自然数 n_0,使得

$$\sum_{k=1}^{n_0} \frac{1}{k\sqrt[p]{k+1}} > p.$$

(第 29 届国际数学奥林匹克候选题,1988 年)

[证] 由于

$$1 = (k+1)^{\frac{p}{p}} - k^{\frac{p}{p}} = [(k+1)^{\frac{1}{p}} - k^{\frac{1}{p}}][(k+1)^{\frac{p-1}{p}} + (k+1)^{\frac{p-2}{p}}k^{\frac{1}{p}} + \cdots + k^{\frac{p-1}{p}}]$$

$$> [(k+1)^{\frac{1}{p}} - k^{\frac{1}{p}}]pk^{1-\frac{1}{p}},$$

所以 $\quad p[(k+1)^{\frac{1}{p}} - k^{\frac{1}{p}}] < \dfrac{k^{\frac{1}{p}}}{k}, k = 1,2,3,\cdots$

由此可得

$$p\left(\frac{1}{\sqrt[p]{k}} - \frac{1}{\sqrt[p]{k+1}}\right) < \frac{1}{k\sqrt[p]{k+1}},$$

于是 $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt[p]{k+1}} > p.$$

因此必存在自然数 n_0 使得

$$\sum_{k=1}^{n_0} \frac{1}{k\sqrt[p]{k+1}} > p.$$

9·94 已知实数 a 满足 $a^5 - a^3 + a = 2$,求证:

$3 < a^6 < 4.$

(第 14 届全俄数学奥林匹克,1988 年)

[证] 显然 $a \neq 0,1$.由于

$$a^6 + 1 = (a^2+1)(a^4 - a^2 + 1)$$

$$= (a^2+1) \cdot \frac{a^5 - a^3 + a}{a}$$

$$= (a^2 + 1) \cdot \frac{2}{a}$$

$$= 2\left(a + \frac{1}{a}\right),$$

所以 $a > 0$. 再用均值不等式可得

$$a^6 + 1 = 2\left(a + \frac{1}{a}\right) \geqslant 4,$$

且等号仅在 $a = 1$ 时成立. 从而有 $a^6 + 1 > 4$, 即

$$a^6 > 3.$$

另一方面, 考察函数

$$f(x) = x^5 - x^3 + x.$$

任取 $1 \leqslant y < x$, 则

$$f(x) - f(y)$$
$$= (x - y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 - x^2 - xy - y^2 + 1)$$
$$> 0.$$

从而当 $x \geqslant 1$ 时, $f(x)$ 严格递增. 由于

$$2^{\frac{5}{3}} > 3, 2^{\frac{1}{3}} > 1,$$

所以

$$f(4^{\frac{1}{6}}) = f(2^{\frac{1}{3}}) = 2^{\frac{5}{3}} - 2 + 2^{\frac{1}{3}} > 2.$$

于是 $a < 4^{\frac{1}{6}}$, 即 $a^6 < 4$.

9·95 (i) 求证: 存在不全为 0 的 3 个整数 a, b, c, 使得其中每一个的绝对值均小于 10^6, 且

$$|a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}| < 10^{-11}.$$

(ii) 设 a, b, c 是不全为 0 的整数, 且每一个的绝对值均小于 10^6. 求证

$$|a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}| > 10^{-21}.$$

(第 41 届美国普特南数学竞赛, 1980 年)

[证] (i) 记

$$S = \{r + s\sqrt{2} + t\sqrt{3}; r, s, t \in \{0, 1, 2, \cdots, 10^6 - 1\}\},$$

则 S 中的元素有 10^{18} 个. 令 $d = (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot 10^6$, 显然, S 中的每一个元素 x 都满足 $0 \leqslant x < d$, 把区间 $[0, d]$ 等分成 $10^{18} - 1$ 个小区间.

根据抽屉原理可知 S 中必有两个元素同属于一个小区间,所以这两个元素之差的绝对值不超过$\frac{d}{10^{18}-1}$,即存在不全为 0 的整数 a,b,c,使得其中每一个的绝对值均小于 10^6,且

$$|a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}|\leqslant\frac{d}{10^{18}-1}.$$

又因为

$$\frac{d}{10^{18}-1}=\frac{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})\cdot 10^6}{10^{18}-1}<\frac{5\cdot 10^6}{10^{18}-1}<10^{-11},$$

从而 $$|a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}|<10^{-11}.$$

(ii) 记 $p_1=a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}$, $p_2=a+b\sqrt{2}-c\sqrt{3}$, $p_3=a-b\sqrt{2}+c\sqrt{3}$, $p_4=a-b\sqrt{2}-c\sqrt{3}$. 由于 a,b,c 是不全为 0 的整数,所以易证 p_1,p_2,p_3,p_4 均不为 0. 又经简单计算易知 $p=p_1p_2p_3p_4$ 为整数,从而

$$|p|=|p_1p_2p_3p_4|\geqslant 1.$$

由假设 $|a|<10^6$, $|b|<10^6$, $|c|<10^6$,所以

$$|p_2|<10^7,\ |p_3|<10^7,\ |p_4|<10^7,$$

于是 $$|p_1|\geqslant\frac{1}{|p_2p_3p_4|}>10^{-21},$$

即 $$|a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}|>10^{-21}.$$

9・96 设自然数 k,l,m,n 满足 $k<l<m<n$,且 $lm=kn$,求证:

$$\left(\frac{n-k}{2}\right)^2\geqslant k+2.$$

(第 26 届独联体数学奥林匹克,1992 年)

[证] 设 $l=k+a$, $m=k+b$,则 a,b 都是自然数,且 $a<b$. 由于

$$kn=lm=(k+a)(k+b)=k^2+(a+b)k+ab,$$

所以 $k\mid ab$. 由此可得 $ab\geqslant k$. 于是

$$n-k=a+b+\frac{ab}{k}>2\sqrt{ab}+1\geqslant 2\sqrt{k}+1.$$

显然当 $k>3$ 时有

$$2\sqrt{k}+1>2\sqrt{k+2},$$

从而 $$n-k>2\sqrt{k+2},$$

即 $$\left(\frac{n-k}{2}\right)^2>k+2.$$

若 $k=1$ 或 2,则 $n\geqslant\frac{(k+1)(k+2)}{k}\geqslant 6.$

若 $k=3$,易知 $lm\geqslant 24$,所以 $n\geqslant 8.$

无论何情况均有 $\left(\frac{n-k}{2}\right)^2>k+2.$

9·97 设 $m\leqslant n$ 都是自然数.从$\{1,2,\cdots,n\}$中选出 m 个不同的数 $a_1,a_2,\cdots,a_m$,使得如果 $a_i+a_j\leqslant n$,则存在 a 满足$a_i+a_j=a_k$.求证:

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{m}\geqslant\frac{n+1}{2}.$$

(第 35 届国际数学奥林匹克,1994 年)

[证] 不妨设 $a_1<a_2<\cdots<a_m$,可以证明

$$a_i+a_{m-i+1}\geqslant n+1, i=1,2,\cdots,m. \quad ①$$

事实上,若存在 $1\leqslant i\leqslant m$,使得 ① 不成立,即

$$a_i+a_{m-i+1}\leqslant n.$$

不妨设 $i\leqslant m-i+1$,从而

$$a_l+a_{m-i+1}\leqslant n, l=1,2,\cdots,i.$$

由假设可知存在 $m-i+1<k_1<k_2<\cdots<k_i$,使得

$$a_{k_e}=a_l+a_{m-i+1}, l=1,2,\cdots,i,$$

但是 $a_{m-i+2},\cdots,a_m$ 仅有 $i-1$ 个,矛盾!

由 ① 可得

$$\begin{aligned}&2(a_1+a_2+\cdots+a_m)\\&=(a_1+a_m)+(a_2+a_{m-1})+\cdots+(a_m+a_1)\\&\geqslant m(n+1),\end{aligned}$$

所以 $$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{m}\geqslant\frac{n+1}{2}.$$

9·98 设 $A_1,A_2,\cdots,A_{29}$ 是 29 个由某些自然数所组成的集合.对于 $1\leqslant i,j\leqslant 29$ 及自然数 x,定义

$$N_i(x)=A_i\text{ 中}\leqslant x\text{ 的数的个数},$$

$N_{ij}(x) = A_i \cap A_j$ 中 $\leqslant x$ 的数的个数.

如果 $N_i(x) \geqslant x/e, i = 1,2,\cdots,29$,其中 $e = 2 \cdot 71828\cdots$ 求证:至少存在一对 $i,j(1 \leqslant i < j \leqslant 29)$,使得

$$N_{ij}(1988) > 200.$$

(第 29 届国际数学奥林匹克预选题,1988 年)

[证] 不妨假定 $Ai(1 \leqslant i \leqslant 29)$ 中的元素均 $\leqslant 1988$. 由假设得到

$$N_i(1988) \geqslant \frac{1988}{e} = 731 \cdot 3\cdots, i = 1,2,\cdots,29.$$

从而不妨设 $N_i(1988) = 732, i = 1,2,\cdots,29.$

对于 $1 \leqslant i \leqslant 29, 1 \leqslant i \leqslant 1988$,令

$$n_{ij} = \begin{cases} 1, 若\ j \in A_i \\ 0, 若\ j \in A_i, \end{cases}$$

则

$$\sum_{j=1}^{1988} n_{ij} = 732, i = 1,2,\cdots,29.$$

如果对任何 $1 \leqslant i < j \leqslant 29$ 都有

$$N_{ij}(1988) \leqslant 200,$$

那么

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{29}\sum_{t=1}^{29}\sum_{j=1}^{1988} n_{sj}n_{tj} &= \sum_{s=1}^{29}\sum_{t=1}^{29} N_{st}(1988) \\ &= \sum_{s=1}^{29}\sum_{t \neq s} N_{st}(1988) + \sum_{s=1}^{29} N_s(1988) \\ &\leqslant 29 \times 28 \times 200 + 29 \times 732 \\ &= 29 \times 6332.\end{aligned}$$

另一方面,由柯西不等式可得

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{29}\sum_{t=1}^{29}\sum_{j=1}^{1998} n_{sj}n_{tj} &= \sum_{j=1}^{1988}\sum_{s=1}^{29}\sum_{t=1}^{29} n_{sj}n_{tj} = \sum_{j=1}^{1988}\Big(\sum_{s=1}^{29} n_{sj}\Big)^2 \\ &\geqslant \frac{\Big[\sum\limits_j\Big(1 \cdot \sum\limits_s n_{sj}\Big)\Big]^2}{\sum\limits_j 1^2} = \frac{\Big(\sum\limits_j\sum\limits_s n_{sj}\Big)^2}{1988} \\ &= \frac{(29 \times 732)^2}{1988} > 29 \times 6332.\end{aligned}$$

于是得到矛盾!所以存在 $1 \leqslant i < j \leqslant 29$,使得

第九章 不等式

$N_{ij}(1988) > 200$.

9·99 设 $\delta(x)$ 是正整数 x 的最大奇因子. 对于任意正整数 x，求证：

$$\left|\sum_{n=1}^{x}\frac{\delta(n)}{n}-\frac{2}{3}x\right|<1.$$

（第 32 届美国普特南数学竞赛，1971 年）

［证］ 记 $S(x)=\sum_{n=1}^{x}\frac{\delta(n)}{n}$，显然 $s(1)=1$. 由于

$$\delta(2m+1)=2m+1,\delta(2m)=\delta(m),$$

所以
$$S(2x+1)=\sum_{n=1}^{2x}\frac{\delta(n)}{n}+\frac{\delta(2x+1)}{2x+1}=S(2x)+1,$$

$$S(2x)=\sum_{m=1}^{x}\frac{\delta(2m)}{2m}+\sum_{m=1}^{x}\frac{\delta(2m-1)}{2m-1}=\frac{1}{2}S(x)+x.$$

令 $F(x)=S(x)-\frac{2}{3}x$，用归纳法可以证明

$$0<F(x)<\frac{2}{3}，对于任意\ x\in N. \qquad ①$$

事实上，当 $x=1$ 时，$F(1)=S(1)-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$，显然 ① 成立. 设 $1\leqslant x\leqslant k$ 时，① 成立. 分两种情况讨论：

(i) k 为偶数，则 $k\geqslant 2$. 由于

$$F(k+1)=S(k+1)-\frac{2}{3}(k+1)$$
$$=F(k)+\frac{1}{3},$$

又
$$F(k)=S(k)-\frac{2}{3}k=\frac{1}{2}S\left(\frac{k}{2}\right)+\frac{1}{2}k-\frac{2}{3}k=\frac{1}{2}F\left(\frac{k}{2}\right),$$

所以
$$F(k+1)=\frac{1}{2}F\left(\frac{k}{2}\right)+\frac{1}{3}.$$

由归纳假设可知 $0<F\left(\frac{k}{2}\right)<\frac{2}{3}$，从而

$$0<F(k+1)<\frac{2}{3}.$$

(ii) k 为奇数，则 $F(k+1)=\frac{1}{2}F\left(\frac{k+1}{2}\right)$，

由归纳假设 $0 < F\left(\frac{k+1}{2}\right) < \frac{2}{3}$,所以

$$0 < F(k+1) < \frac{1}{3} < \frac{2}{3}.$$

综合(i)和(ii)两种情况可知,当 $n = k+1$ 时,① 也成立.因此 ① 对于任何 $x \in N$ 都成立,这就证明了更为精确的不等式.

9·100　已知数列 $\{r_n\}$ 满足 $r_1 = 2$,

$$r_n = r_1 r_2 \cdots r_{n-1} + 1, n = 2,3,\cdots$$

如果自然数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < 1,$$

求证:$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leqslant \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \cdots + \frac{1}{r_n}$.

(中国国家集训队选拔试题,1987 年)

[证]　首先,用归纳法易证数列 $\{r_n\}$ 满足

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \cdots + \frac{1}{r_n} = 1 - \frac{1}{r_1 r_2 \cdots r_n}, n = 1,2,\cdots. \quad ①$$

以下用归纳法证明原不等式.当 $n = 1$ 时显然原不等式成立.设原不等式对于 $n = 1,2,\cdots,k$ 都成立.任取自然 $a_1, a_2, \cdots, a_{k+1}$,不妨设 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_{k+1}$.如果 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{k+1}} < 1$,由归纳假设可知

$$\frac{1}{a_1} \leqslant \frac{1}{r_1},$$

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \leqslant \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2},$$

……

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k} \leqslant \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \cdots + \frac{1}{r_k}.$$

用反证法证明对于 $a_1, a_2, \cdots, a_{k+1}$,原不等式也成立.若不然,则

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{k+1}} > \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \cdots + \frac{1}{r_{k+1}}. \quad ②$$

将由归纳假设得到的 k 个不等式分别乘以 $(a_1 - a_2), (a_2 - a_3), \cdots, (a_k - a_{k+1})$,并将 ② 式乘以 a_{k+1},然后相加可得

第九章　不等式

$$\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_i}\right)(a_i-a_{i+1})+\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_{k+1}}\right)a_{k+1}$$

$$>\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{r_1}+\cdots+\frac{1}{r_i}\right)(a_i-a_{i+1})+\left(\frac{1}{r_1}+\cdots+\frac{1}{r_{k+1}}\right)a_{k+1}.$$

经化简得到

$$\frac{a_1}{a_1}+\frac{a_2}{a_2}+\cdots+\frac{a_{k+1}}{a_{k+1}}>\frac{a_1}{r_1}+\frac{a_2}{r_2}+\cdots+\frac{a_{k+1}}{r_{k+1}},$$

即

$$\frac{a_1}{r_1}+\frac{a_2}{r_2}+\cdots+\frac{a_{k+1}}{r_{k+1}}<k+1.$$

由均值不等式

$$\frac{a_1}{r_1}\cdot\frac{a_2}{r_2}\cdot\cdots\cdot\frac{a_{k+1}}{r_{k+1}}<1,$$

所以 $$1-\frac{1}{r_1r_2\cdots r_{k+1}}>1-\frac{1}{a_1a_2\cdots a_{k+1}}.$$

由 ① 得

$$1-\frac{1}{a_1a_2\cdots a_{k+1}}<\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\cdots+\frac{1}{r_{k+1}}.$$

由于 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{k+1}}<1$,又 $a_1,a_2,\cdots,a_{k+1}$ 都是正整数,从而

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{k+1}}\leqslant 1-\frac{1}{a_1a_2\cdots a_{k+1}}.$$

于是有

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{k+1}}<\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\cdots+\frac{1}{r_{k+1}},$$

与 ② 矛盾!所以 ② 不能成立,因此原不等式对于 $n=k+1$ 也成立.

9·101 对每个正整数 $n>1$,求证:

$$n\left((n+1)^{\frac{2}{n}}-1\right)<\sum_{j=1}^{n}\frac{2j+1}{j^2}<n\left(1-n^{-\frac{2}{n-1}}\right)+4.$$

(爱尔兰数学奥林匹克,1994 年)

[证] 显然

$$2j+1=(j+1)^2-j^2,$$

因此由上式及算术-几何平均不等式可得

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{2j+1}{j^2}=\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{(j+1)^2}{j^2}-1\right]$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{(j+1)^2}{j^2}-n$$
$$=\frac{2^2}{1^2}+\frac{3^2}{2^2}+\cdots+\frac{(n+1)^2}{n^2}-n$$
$$>n\cdot\left(\frac{2^2}{1^2}\cdot\frac{3^2}{2^2}\cdot\cdots\cdot\frac{(n+1)^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}-n$$
$$=n((n+1)^{\frac{2}{n}}-1),$$

于是,求证的前一个不等式成立.

下面证明求证的后一个不等式.显然,只需证明

$$n+4-\sum_{j=1}^{n}\frac{2j+1}{j^2}>n\cdot n^{-\frac{2}{n-1}}. \quad ①$$

事实上

$$n+4-\sum_{j=1}^{n}\frac{2j+1}{j^2}=4+\sum_{j=1}^{n}\left(1-\frac{2j+1}{j^2}\right)$$
$$=4+\sum_{j=1}^{n}\frac{(j-1)^2-2}{j^2}$$
$$=4+\sum_{j=1}^{n}\frac{(j-1)^2}{j^2}-2\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^2}, \quad ②$$

其中

$$2\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^2}<2\left(1+\frac{1}{4}+\sum_{j=3}^{n}\frac{1}{(j-1)j}\right)$$
$$=2\left[1+\frac{1}{4}+\sum_{j=3}^{n}\left(\frac{1}{j-1}-\frac{1}{j}\right)\right]$$
$$<2\cdot\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{7}{2}, \quad ③$$

通过引入参数 $k>0$,我们有

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{(j-1)^2}{j^2}=\frac{1}{4}-k+\left[k+\sum_{j=3}^{n}\frac{(j-1)^2}{j^2}\right]$$

$$> \frac{1}{4} - k + (n-1) \cdot \left(\frac{4k}{n^2}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

$$= \frac{1}{4} - k + (n-1) \cdot (4k)^{\frac{1}{n-1}} \cdot n^{-\frac{2}{n-1}}, \qquad ④$$

令

$$k = \frac{1}{4}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}, \quad n > 1,$$

于是

$$(n-1)(4k)^{\frac{1}{n-1}} = n,$$

将以上两式代入④,得

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{(j-1)^2}{j^2} > \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} + n \cdot n^{-\frac{2}{n-1}}. \qquad ⑤$$

注意到

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < e < 3,$$

其中 e 为自然对数底.因此,由⑤得

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{(j-1)^2}{j^2} > n \cdot n^{-\frac{2}{n-1}} - \frac{1}{2}. \qquad ⑥$$

将③和⑥代入②,得

$$n + 4 - \sum_{j=1}^{n} \frac{2j+1}{j^2} > 4 + n \cdot n^{-\frac{2}{n-1}} - \frac{1}{2} - \frac{7}{2}$$

$$= n \cdot n^{-\frac{2}{n-1}}.$$

因此,①成立,从而求证的后一个不等式成立.

9·102 证明:

$$\frac{1}{1999} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \cdots \cdot \frac{1997}{1998} < \frac{1}{44}.$$

(第29届加拿大数学奥林匹克,1997年)

[证] 令

$$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \cdots \cdot \frac{1997}{1998}.$$

将 p 中各分数的分母都加上1,其值显然变小.因此有

$$p > \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7} \cdot \cdots \cdot \frac{1995}{1997} \cdot \frac{1997}{1999} = \frac{1}{1999}.$$

另一方面,我们有

$$p^2 = \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdot \frac{5 \cdot 7}{6^2} \cdot \cdots \cdot \frac{1997 \cdot 1999}{1998^2} \cdot \frac{1}{1999}.$$

注意到

$$\frac{(k-1)(k+1)}{k^2} < 1, k = 2,4,\cdots,1998,$$

因此得

$$p^2 < \frac{1}{1999} < \frac{1}{44^2},$$

$$p < \frac{1}{44}.$$

第4节　一元函数和三角不等式

9·103　对 $|x| < 1$ 和整数 $n \geqslant 2$,求证:

$$(1-x)^n + (1+x)^n < 2^n.$$

(第15届莫斯科数学奥林匹克,1952年)

[证]　用归纳法.当 $n = 2$ 时,显然有

$$(1-x)^n + (1+x)^n = 2 + 2x^2 < 2^2.$$

设当　$n = k-1$ 时,要证之不等式成立,其中 $k \geqslant 3$.

当　$n = k$ 时有

$$(1-x)^k + (1+x)^k$$

$$= (1-x)^{k-1} + (1+x)^{k-1} + x[(1+x)^{k-1} - (1-x)^{k-1}].$$

由归纳假设　$(1-x)^{k-1} + (1+x)^{k-1} < 2^{k-1}$,

又由　$|x| < 1$ 可知

$$|x[(1+x)^{k-1} - (1-x)^{k-1}]| < (1+x)^{k-1} + (1-x)^{k-1} < 2^{k-1},$$

所以　$(1-x)^k + (1+x)^k < 2^k$,

即当　$n = k$ 时,要证的不等式也成立.

9·104　设　$f(x)$ 定义于 $[0,1]$ 且 $f(0) = f(1) = 0$.如果对于任意不同的 $x_1, x_2 \in [0,1]$,都有 $|f(x_2) - f(x_1)| < |x_2 - x_1|$,求

证：$|f(x_2)-f(x_1)|<\frac{1}{2}$.

（中国高中数学联赛，1983年）

［证］　不妨设　$0\leqslant x_1<x_2\leqslant 1$.

若　$|x_2-x_1|\leqslant\frac{1}{2}$，则由假设可得

$$|f(x_2)-f(x_1)|<|x_2-x_1|\leqslant\frac{1}{2}.$$

若 $|x_2-x_1|>\frac{1}{2}$，再由 $f(0)=f(1)=0$ 可得

$$\begin{aligned}|f(x_2)-f(x_1)|&=|f(x_2)-f(1)+f(0)-f(x_1)|\\&\leqslant|f(x_2)-f(1)|+|f(0)-f(x_1)|\\&<1-x_2+x_1\\&=1-|x_2-x_1|<\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

9·105　设 a,b 是实数使得不等式

$$a\cos x+b\cos 3x>1$$

无解．求证：$|b|\leqslant 1$.

（第15届全苏数学奥林匹克，1981年）

［证］　用反证法．设 $|b|>1$，取

$$x_1=\frac{1}{3}\arccos\frac{1}{b},$$

$$x_2=\frac{2}{3}\pi+x_1.$$

由于　$a\cos x+b\cos 3x>1$ 无解，所以

$$a\cos x_1\leqslant 0,\quad a\cos x_2\leqslant 0.$$

又　$0<x_1<\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}<x_2<\pi$，从而　$\cos x_1>0,\cos x_2<0$.

由此即得　$a=0$．显然当 $|b|>1$ 时，$b\cos 3x>1$ 有解，引出矛盾！于是 $|b|\leqslant 1$.

9·106　求证：存在惟一实数对 $(p,q)=\left(-1,\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$，使得不等式

$$|\sqrt{1-x^2}-px-q|\leqslant\frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

对任意 $x\in[0,1]$ 成立.

(加拿大国家集训队训练题,1988 年)

[证] 对于任意的 $x\in[0,1]$,记 $x=\sin\theta$, $\sqrt{1-x^2}=\cos\theta$,由此可推出

$$1\leqslant\sqrt{1-x^2}+x\leqslant\sqrt{2}.$$

于是有 $$-\frac{\sqrt{2}-1}{2}\leqslant\sqrt{1-x^2}+x-\frac{1+\sqrt{2}}{2}\leqslant\frac{\sqrt{2}-1}{2},$$

即 $$\left|\sqrt{1-x^2}+x-\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right|\leqslant\frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

以上证明了当 $p=-1,q=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ 时,

$$|\sqrt{1-x^2}-px-q|\leqslant\frac{\sqrt{2}-1}{2},\text{对于任意 } x\in[0,1]. \quad ①$$

另一方面,设实数 p,q 使得 ① 成立,则对于任意 $x\in[0,1]$ 有

$$\sqrt{1-x^2}-\frac{\sqrt{2}-1}{2}\leqslant px+q\leqslant\sqrt{1-x^2}+\frac{\sqrt{2}-1}{2}. \quad ②$$

记 $L:\ y=px+q,\ 0\leqslant x\leqslant 1,$

$$S_1:\ y=\sqrt{1-x^2}+\frac{\sqrt{2}-1}{2},\quad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

$$S_2:\ y=\sqrt{1-x^2}-\frac{\sqrt{2}-1}{2},\quad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

显然 L 是直线段,S_1,S_2 都是 $\dfrac{1}{4}$ 圆周,且 ② 成立的充要条件为 L 夹在 S_1 和 S_2 之间. S_1 的两个端点分别是 $A\left(0,\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$ 和 $B\left(1,\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$,$AB$ 所在直线的方程为

$$y=-x+\frac{\sqrt{2}+1}{2}.$$

由于 S_2 的圆心为 $\left(0,-\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$,它到 AB 所在直线的距离为 1,从而易知弦 AB 必与 S_2 相切. 于是 L 与 AB 重合,所以

$$(p,q)=\left(-1,\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right).$$

9·107　设 $x>0$,求证:$x^2+\pi x+\frac{15\pi}{2}\sin x>0$.

（第4届中国东北三省数学竞赛,1989年）

[证]　当　$x\in(0,\pi]$时,由于$\sin x\geqslant 0$,所以要证的不等式显然成立,当　$x\in\left[\frac{3\pi}{2},+\infty\right)$时,

$$x^2+\pi x+\frac{15\pi}{2}\sin x\geqslant\left(\frac{9}{4}+\frac{3}{2}\right)\pi^2-\frac{15\pi}{2}>0.$$

从而只需证明　$x\in\left(\pi,\frac{3}{2}\pi\right)$时原不等式成立.事实上,由于当

$x\in\left(\pi,\frac{3}{2}\pi\right)$时,

$\sin(x-\pi)<x-\pi$,

所以

$$\begin{aligned}x^2+\pi x+\frac{15\pi}{2}\sin x&=x^2+\pi x-\frac{15\pi}{2}\sin(x-\pi)\\&>x^2+\pi x-\frac{15\pi}{2}(x-\pi)\\&=x^2-\frac{13\pi}{2}x+\frac{15}{2}\pi^2\\&=\left(x-\frac{3}{2}\pi\right)(x-5\pi)>0.\end{aligned}$$

9·108　求证:对任何正数 t 有

$$t^4-t+\frac{1}{2}>0.$$

（第24届全苏数学奥林匹克,1990年）

[证]　由于　$$\begin{aligned}t^4-t+\frac{1}{2}&=\left(t^4-t^2+\frac{1}{4}\right)+\left(t^2-t+\frac{1}{4}\right)\\&=\left(t^2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(t-\frac{1}{2}\right)^2,\end{aligned}$$

又　$t^2-\frac{1}{2},t-\frac{1}{2}$不能同时为0,所以

$$t^4-t+\frac{1}{2}>0.$$

9·109　设$0 < x < a$，求证：

$$(a-x)^6 - 3a(a-x)^5 + \frac{5}{2}a^2(a-x)^4 - \frac{1}{2}a^4(a-x)^2 < 0.$$

（第4届美国普特南数学竞赛，1940年）

[证]　令　$y = \frac{1}{a}(a-x)$，则$0 < y < 1$，且只需证

$$f(y) = a^6y^6 - 3a^6y^5 + \frac{5}{2}a^6y^4 - \frac{1}{2}a^6y^2 < 0.$$

由于

$$\begin{aligned} f(y) &= a^6y^2\left(y^4 - 3y^3 + \frac{5}{2}y^2 - \frac{1}{2}\right) \\ &= a^6y^2(y-1)\left(y^3 - 2y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\right) \\ &= a^6y^2(y-1)^2\left(y^2 - y - \frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

又当　$0 < y < 1$时，

$$y^2 - y - \frac{1}{2} = \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} < -\frac{1}{2},$$

所以　$f(y) < 0$，　对于任意　$0 < y < 1$.

9·110　设实数a,b,c使得

$$|ax^2 + bx + c| \leqslant 1, \text{对于任意} -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

求证：$|cx^2 + bx + a| \leqslant 2$，对于任意$-1 \leqslant x \leqslant 1$.

（第7届全苏数学奥林匹克，1973年）

[证1]　记$f(x) = ax^2 + bx + c$，$g(x) = cx^2 + bx + a$，则

$$|g(1)| = |f(1)| \leqslant 1, \quad |g(-1)| = |f(-1)| \leqslant 1.$$

若$c = 0$或$c \neq 0$但$g(x)$的最大或最小值不在$(-1,1)$内达到，则由一次或二次函数的性质可得

$$|g(x)| = |cx^2 + bx + a| \leqslant 1, \text{对于任意} -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

若$c \neq 0$且$g(x)$的最值在$(-1,1)$内达到，记x_0为其最值点，则

$$g(x) = c(x - x_0)^2 + g(x_0).$$

于是　$|g(x_0)| \leqslant |g(1)| + |c||1 - x_0|^2 \leqslant 1 + |c|$，又

$$|c| = |f(0)| \leqslant 1.$$

所以　$|g(x_0)| \leqslant 2$. 由二次函数的性质可得

$$|g(x)| \leqslant \max(|g(x_0)|, |g(1)|, |g(-1)|) \leqslant 2, \text{对于任意}$$

$-1 \leqslant x \leqslant 1$.

[证 2] 令 $f(x)=ax^2+bx+c$,由假设可知

$$|f(0)|=|c|\leqslant 1,$$
$$|f(1)|=|a+b+c|\leqslant 1,$$
$$|f(-1)|=|a-b+c|\leqslant 1.$$

由于 $cx^2+bx+a=c(x^2-1)+(a+b+c)\dfrac{1+x}{2}+(a-b+c)\dfrac{1-x}{2}$,

所以对任意 $x\in[-1,1]$ 有

$$\begin{aligned}|cx^2+bx+a| &\leqslant |c||x^2-1|+|a+b+c|\left|\frac{1+x}{2}\right|+|a-b+c|\left|\frac{1-x}{2}\right|\\ &\leqslant |x^2-1|+\left|\frac{1+x}{2}\right|+\left|\frac{1-x}{2}\right|\\ &=1-x^2+\frac{1+x}{2}+\frac{1-x}{2}\\ &=2-x^2\\ &\leqslant 2.\end{aligned}$$

9·111 对任意自然数 n 和实数 a,求证:

$$|a|\cdot|a-1|\cdot\cdots\cdot|a-n|\geqslant\langle a\rangle\cdot\frac{n!}{2^n},$$

其中 $\langle a\rangle$ 表示 a 到最近一个整数的距离.

(第 16 届全苏数学奥林匹克,1982 年)

[证] 取 $0,1,2,\cdots,n$ 的一个排列 $x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n$

使得 $|a-x_0|\leqslant|a-x_1|\leqslant|a-x_2|\leqslant\cdots\leqslant|a-x_n|$.

显然 $\langle a\rangle\leqslant|a-x_0|$. ①

由于对任何自然数 k,满足 $|a-x|<\dfrac{k}{2}$ 的整数至多有 k 个,所以对任何 $1\leqslant k\leqslant n$ 有

$$|a-x_k|\geqslant\frac{k}{2}. \qquad ②$$

利用 ① 和 ② 立即可得

$$|a|\cdot|a-1|\cdot\cdots\cdot|a-n|$$
$$=|a-x_0|\cdot|a-x_1|\cdot\cdots\cdot|a-x_n|$$
$$\geqslant\langle a\rangle\frac{n!}{2^n}.$$

9·112　设 $x>0$，n 为正整数．求证：

$$[nx]\geqslant[x]+\frac{[2x]}{2}+\frac{[3x]}{3}+\cdots+\frac{[nx]}{n}.$$

（第 10 届美国数学奥林匹克，1981 年）

［证］　记　$x_k=\sum\limits_{m=1}^{k}\frac{[mx]}{m}$，原不等式可写为

$$x_n\leqslant[nx].\qquad ①$$

以下用归纳法证明 ① 成立．

当　$n=1$ 时，显然 ① 成立．

假设当 $n\leqslant k-1$ 时，① 成立，考虑 $n=k$ 时的情况．由于

$$x_m=x_{m-1}+\frac{[mx]}{m},m=2,3,\cdots \text{所以}$$
$$kx_k=(k-1)x_{k-1}+x_{k-1}+[kx],$$
$$(k-1)x_{k-1}=(k-2)x_{k-2}+x_{k-2}+[(k-1)x],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$3x_3=2x_2+x_2+[3x],$$
$$2x_2=x_1+x_1+[2x].$$

以上式子相加得到

$$kx_k=x_{k-1}+x_{k-2}+\cdots+x_2+x_1+x_1+[kx]+[(k-1)x]+\cdots+[2x].$$

由归纳假设　$x_m\leqslant[mx]$，$m=1,2,\cdots,k-1$，

从而得到

$$kx_k\leqslant2[(k-1)x]+2[(k-2)x]+\cdots+2[2x]+2[x]+[kx]$$
$$=([(k-1)x]+[x])+([(k-2)x]+[2x])+\cdots+([x]+[(k-1)x])+[kx]$$
$$\leqslant k[kx].$$

于是当 $n=k$ 时，① 也成立．

9·113　设函数 $f(x)$ 对一切正实数有定义且取正值．现知，当

a,b,c 是一三角形的三边长时,则 $f(a),f(b),f(c)$ 仍是某个三角形的三边长.求证:存在正数 A 和 B,使得对一切 $x>0$ 有

$$f(x)\leqslant Ax+B.$$

(前苏联教育部推荐试题,1990 年)

[证] 对任何 $0<x<2$,由于 $x,1,1$ 是一三角形的三边长,所以

$$f(x)<2f(1).\quad ①$$

设自然数 $n\geqslant 2$,由于 $2,n,n+1$ 是一三角形的三边长,从而 $f(n+1)<f(2)+f(n)$.由此利用归纳法易证对任何自然数 $n\geqslant 2$ 有

$$f(n)\leqslant(n-1)f(2).\quad ②$$

任取 $x\geqslant 2$,由于 $[x],x,[x]+1$ 是一三角形的三边长,所以

$$f(x)<f([x])+f([x]+1).$$

再由 ② 得到当 $x\geqslant 2$ 时,

$$f(x)<(2[x]-1)f(2)\leqslant(2x-1)f(2)\quad ③$$

综合 ① 和 ③ 可得对任何 $x>0$ 有

$$f(x)<2f(2)x+2f(1).$$

9·114 设二次三项式 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的系数全为正,且 $a+b+c=1$.求证:对于任何满足 $x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n=1$ 的正数,$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 恒有

$$f(x_1)\cdot f(x_2)\cdot\cdots\cdot f(x_n)\geqslant 1.$$

(第 24 届全苏数学奥林匹克,1990 年)

[证 1] 显然,$f(1)=1$.若 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$,则

$$f(x_1)\cdot f(x_2)\cdot\cdots\cdot f(x_n)=1.$$

若 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 不全相等,则其中必有 $x_i\geqslant 1$ 和 $x_j<1$,不妨设 $i=1,j=2$,于是有

$$\begin{aligned}f(x_1)f(x_2)&=(ax_1^2+bx_1+c)(ax_2^2+bx_2+c)\\&=a^2x_1^2x_2^2+b^2x_1x_2+c^2+ab(x_1^2x_2+x_1x_2^2)+ac(x_1^2\\&\quad+x_2^2)+bc(x_1+x_2).\end{aligned}$$

又 $$\begin{aligned}f(1)f(x_1x_2)&=(a+b+c)(ax_1^2x_2^2+bx_1x_2+c)\\&=a^2x_1^2x_2^2+b^2x_1x_2+c^2+ab(x_1^2x_2^2+x_1x_2)\\&\quad+ac(x_1^2x_2^2+1)+bc(x_1x_2+1),\end{aligned}$$

从而 $f(x_1)f(x_2)-f(x_1x_2)=abx_1x_2(x_1+x_2-x_1x_2-1)+$

$$ac(x_1^2+x_2^2-x_1^2x_2^2-1)+$$
$$bc(x_1+x_2-x_1x_2-1)$$
$$=abx_1x_2(x_1-1)(1-x_2)+$$
$$ac(x_1^2-1)(1-x_2^2)+$$
$$bc(x_1-1)(1-x_2)>0.$$

由此可知若令

$$x'_1=1, x'_2=x_1x_2, x'_k=x_k, k=3,4,\cdots,n,$$

则 $f(x'_1)\cdot f(x'_2)\cdot\cdots\cdot f(x'_n)<f(x_1)\cdot f(x_2)\cdot\cdots\cdot f(x_n).$

如果 $x'_1, x'_2, \cdots, x'_n$ 仍不全相等,则又可进行类似的变换.每次变换都可使 n 个正数中等于1的个数至少增加1个,所以至多经 $n-1$ 次变换,必可化为诸 x_i 全相等的情形,从而有

$$f(x_1)\cdot f(x_2)\cdot\cdots\cdot f(x_n)>[f(1)]^n=1.$$

[证 2] 显然有 $f(1)=1$. 任取 $x\cdot y>0$,记 $z=\sqrt{xy}$,则

$$\begin{aligned}f(x)\cdot f(y)-[f(z)]^2&=a^2(x^2y^2-z^4)+b^2(xy-z^2)+c^2(1-1)\\&\quad+ab(x^2y+xy^2-2z^3)+ac(x^2+y^2-2z^2)\\&\quad+bc(x+y-2z)\\&=ab(\sqrt{x^2y}-\sqrt{xy^2})^2+ac(x-y)^2\\&\quad+bc(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2.\end{aligned}$$

于是有 $f(x)f(y)\geqslant[f(\sqrt{xy})]^2$,对于任意 $x, y>0$. ①

如果 n 不是2的方幂,利用 $f(1)=1$ 可在数组 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 中补入若干个1使得数组中数的个数恰为 2^m 个,其中 m 为自然数.由①可得

$$\begin{aligned}f(x_1)\cdot f(x_2)\cdot\cdots\cdot f(x_n)&\geqslant[f(\sqrt{x_1x_2})]^2\cdot[f(\sqrt{x_3x_4})]^2\cdot\cdots\\&\quad\cdot[f(\sqrt{x_{2^m-1}x_{2^m}})]^2\\&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\geqslant[f(\sqrt[m]{x_1x_2\cdots x_n})]^m\\&=[f(1)]^m=1.\end{aligned}$$

9·115 设函数 $f(x)$ 对于 $x\geqslant 0$ 有定义,且满足条件:

(1) 对任何 $x, y\geqslant 0$ 有

$$f(x)f(y)\leqslant y^2f\left(\frac{x}{2}\right)+x^2f\left(\frac{y}{2}\right).$$

(2) 存在常数 $M>0$,当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时

$$|f(x)|\leqslant M.$$

求证:

$$f(x)\leqslant x^2,\text{对于任意 } x\geqslant 0.$$

(第 5 届中国中学生数学冬令营,1990 年)

[证 1]　在条件(1) 中取 $x = y = 0$,则

$$f^2(0)\leqslant 0,$$

从而　$f(0) = 0.$

用反证法证明所要之结论.设存在 $x_0 > 0$,使得

$$f(x_0) > x_0^2. \quad ①$$

在条件(1) 中取 $x = y = x_0$ 可得

$$(f(x_0))^2\leqslant 2x_0^2 f\left(\frac{x_0}{2}\right). \quad ②$$

由 ① 和 ② 可得

$$f\left(\frac{x_0}{2}\right)\geqslant \frac{1}{2}x_0^2.$$

再用条件(1) 可推出

$$f\left(\frac{x_0}{4}\right)\geqslant \frac{1}{2\left(\frac{x_0}{2}\right)^2}\left(f\left(\frac{x_0}{2}\right)\right)^2\geqslant \frac{1}{2}x_0^2.$$

一般用归纳法易证对于　$k = 1,2,3,\cdots$

$$f\left(\frac{x_0}{2^k}\right)\geqslant 2^{2^k-2k-1}\cdot x_0^2. \quad ③$$

又因为当 $k > 2$ 时有

$$2^k = (1+1)^k > 1 + k + \frac{k(k-1)}{2} = 1 + \frac{k(k+1)}{2},$$

所以当　$k\geqslant 5$ 时有　$2^k > 1 + 3k.$

取自然数 $N\geqslant 5$,使得　$\dfrac{x_0}{2^N}\leqslant 1,$

于是　$n\geqslant N$ 时由条件(2) 可得

$$M\geqslant f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)\geqslant 2^{2^n-2n-1}\cdot x_0^2 > 2^n x_0^2,$$

但这是不可能的.这一矛盾证明了所要之结论.

[证 2] 实际上可证明更强的结论:

$$f(x)\leqslant\frac{1}{2}x^2,\text{对于任意 } x\geqslant 0. \quad ④$$

首先由条件(1)可知,对任何 $x\geqslant 0$ 有

$$(f(x))^2\leqslant 2x^2 f\left(\frac{x}{2}\right). \quad ⑤$$

于是 $\left(f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)^2\leqslant 2\cdot\frac{x^2}{2^{2n}}f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\leqslant 4\cdot\frac{x^2}{2^{2n}}\cdot\frac{x^2}{2^{2n+2}}f\left(\frac{x}{2^{n+2}}\right).$

对任意固定的 $x\geqslant 0$,存在 $N>0$,使得当 $n\geqslant N$ 时有

$$0\leqslant\frac{x}{2^n}\leqslant 1.$$

从而由条件(2)可得,当 $n\geqslant N$ 时有

$$0\leqslant f\left(\frac{x}{2^n}\right)\leqslant\frac{\sqrt{M}x}{2^{2n}}. \quad ⑥$$

为证④,令 $h(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^2$,

由⑤可得 $\left(h(x)+\frac{1}{2}x^2\right)^2\leqslant 2x^2\left(h\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{8}x^2\right)$,

从而 $(h(x))^2+x^2h(x)\leqslant 2x^2h\left(\frac{x}{2}\right)$.

由此可知对任何 $x\geqslant 0$ 有 $h(x)\leqslant 2h\left(\frac{x}{2}\right)$.

利用归纳法易证对任意自然数 n

$$h(x)\leqslant 2^n h\left(\frac{x}{2^n}\right)\leqslant 2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

从⑥可知,对任何固定的 $x\geqslant 0$,存在 $N>0$,当 $n\geqslant N$ 时

$$h(x)\leqslant 2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right)\leqslant\frac{\sqrt{m}x}{2^n}.$$

令 $n\to+\infty$,所以 $h(x)\leqslant 0$,

即 $f(x)\leqslant\frac{1}{2}x^2$.

9·116 设函数 $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 且满足

$f(xy)\leqslant f(x)f(y)$,对于任意 $x>0,y>0$.

求证:对任何 $x>0,n\in N$,均有

$$f(x^n) \leqslant f(x)f(x^2)^{\frac{1}{2}}\cdots f(x^n)^{\frac{1}{n}}.$$

（第 8 届中国中学生数学冬令营，1993 年）

［证］ 令 $F_n(x) = f(x)f(x^2)^{\frac{1}{2}}\cdots f(x^n)^{\frac{1}{n}}$，则

$$F_n(x) = F_{n-1}(x)f(x^n)^{\frac{1}{n}}.$$

于是有

$$F_n^n(x) = F_{n-1}^n(x)f(x^n),$$

$$F_{n-1}^{n-1}(x) = F_{n-2}^{n-1}(x)f(x^{n-1}),$$

……

$$F_2^2(x) = F_1^2(x)f(x^2),$$

$$F_1(x) = f(x).$$

由此可得

$$F_n^n(x) = F(x^n)f(x^{n-1})\cdots f(x)F_{n-1}(x)\cdots F_2(x)F_1(x). \quad ①$$

以下用归纳法来证明所要的不等式，即

$$f(x^n) \leqslant F_n(x). \quad ②$$

显然当 $n = 1$ 时，② 成立．设当 $n \leqslant k$ 时，② 成立．由 ① 和归纳假设可得

$$F_{k+1}^{k+1}(x) \geqslant f(x^{k+1})f(x^k)\cdots f(x)f(x^k)f(x^{k-1})\cdots f(x)$$

$$= f(x^{k+1})[f(x^k)f(x)][f(x^{k-1})f(x^2)]\cdots[f(x)f(x^k)].$$

再由已知条件对任意 $x > 0, y > 0$ 都有

$$f(x)f(y) \geqslant f(xy),$$

从而 $F_{k+1}^{k+1}(x) \geqslant f^{k+1}(x^{k+1})$，

即当 $n = k + 1$ 时，② 也成立．

9・117 设 $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}, 0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$，求证：

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\alpha\sin^2\beta\cos^2\beta} \geqslant 9,$$

并问 α, β 取什么值时等号成立．

（中国高中数学联赛，1979 年）

［证］ 由于 $\dfrac{1}{\sin^2\beta\cos^2\beta} \geqslant 4$，当且仅当 $\beta = \dfrac{\pi}{4}$ 时等号成立．由均值不等式可得

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha\sin^2\beta\cos^2\beta}\geqslant\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{2}{\sin^2\alpha}+\frac{2}{\sin^2\alpha}$$
$$\geqslant 3\left(\frac{4}{\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha\cdot\sin^2\alpha}\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$=3\left(\frac{8}{2\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha\cdot\sin^2\alpha}\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$\geqslant 3\left[\frac{3^3\cdot 8}{(2\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+\sin^2\alpha)^3}\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$=9.$$

当且仅当 $\beta=\frac{\pi}{4}$,$2\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$ 即 $\alpha=\mathrm{arctg}\sqrt{2}$ 时等号成立.

9·118 (1) 分解因式 $x^{12}+x^9+x^6+x^3+1$.

(2) 对任意实数 θ,求证:$5+8\cos\theta+4\cos2\theta+\cos3\theta\geqslant 0$.

(中国高中数学联赛,1978年)

[解] (1) 由于 $x^{15}-1=(x^3-1)(x^{12}+x^9+x^6+x^3+1)$,

$$x^{15}-1=(x^5-1)(x^{10}+x^5+1),$$

所以 $$x^{12}+x^9+x^6+x^3+1=\frac{(x^4+x^3+x^2+1)(x^{10}+x^5+1)}{x^2+x+1}.$$

注意到若 $x^2+x+1=0$ 可推出 $x^{10}+x^5+1=0$,从而 $x^{10}+x^5+1$ 必可被 x^2+x+1 整除.用多项式除法易知

$$x^{10}+x^5+1=(x^2+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1),$$

所以 $$x^{12}+x^9+x^6+x^3+1=(x^4+x^3+x^2+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1).$$

(2) $$\begin{aligned}&5+8\cos\theta+4\cos2\theta+\cos3\theta\\&=5+8\cos\theta+4(2\cos^2\theta-1)+(4\cos^3\theta-3\cos\theta)\\&=1+5\cos\theta+8\cos^2\theta+4\cos^3\theta\\&=1+\cos\theta+4\cos\theta(1+\cos\theta)^2\\&=(1+\cos\theta)(2\cos\theta+1)^2\geqslant 0.\end{aligned}$$

9·119 设 α,β,γ 是一个三角形的三个内角.求证:

$$2\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}+\frac{\sin\beta}{\beta}+\frac{\sin\gamma}{\gamma}\right)\leqslant\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\sin\alpha+\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha}\right)\sin\beta+$$

$$\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\sin\gamma.$$

（第 22 届全苏数学奥林匹克，1988 年）

［证］ 不妨设 $\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma$，由于 α,β,γ 是一个三角形的三个内角，所以易知

$$\sin\alpha\leqslant\sin\beta\leqslant\sin\gamma.$$

由排序不等式可得

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha}+\frac{\sin\beta}{\beta}+\frac{\sin\gamma}{\gamma}\leqslant\frac{\sin\alpha}{\beta}+\frac{\sin\beta}{\gamma}+\frac{\sin\gamma}{\alpha},$$

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha}+\frac{\sin\beta}{\beta}+\frac{\sin\gamma}{\gamma}\leqslant\frac{\sin\alpha}{\gamma}+\frac{\sin\beta}{\alpha}+\frac{\sin\gamma}{\beta}.$$

两不等式相加即得要证之不等式.

9·120 设 A,B,C 是三角形的三个内角，求证：

$$-2<\sin3A+\sin3B+\sin3C\leqslant\frac{3}{2}\sqrt{3},$$

并确定其中的等号何时成立.

（第 10 届美国数学奥林匹克，1981 年）

［证］ 不妨设 $A\geqslant60^\circ$，则 $B+C=180^\circ-A\leqslant120^\circ$，

从而 $0^\circ\leqslant\frac{3}{2}|B-C|<\frac{3}{2}(B+C)\leqslant180^\circ.$

由此可得 $\cos\frac{3}{2}(B-C)>\cos\frac{3}{2}(B+C).$

再由 $\sin\frac{3}{2}(B+C)\geqslant0$，得到

$$2\sin\frac{3}{2}(B+C)\cos\frac{3}{2}(B-C)\geqslant2\sin\frac{3}{2}(B+C)\cos\frac{3}{2}(B+C),$$

即 $\sin3B+\sin3C\geqslant\sin3(B+C).$

于是 $\sin3A+\sin3B+\sin3C\geqslant\sin3A+\sin3(B+C)\geqslant-2.$

为使 $\sin3A+\sin3B+\sin3C=-2$，必须满足

$$\sin3A=-1,\sin3(B+C)=-1,\sin\frac{3}{2}(B+C)=0,$$

但这是不可能的，从而

$$\sin3A+\sin3B+\sin3C>-2.$$

另一方面，由 $A\geqslant60^\circ$ 可知

$$\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C=\sin 3A+2\sin\frac{3}{2}(B+C)\cos\frac{3}{2}(B-C)$$
$$\leqslant \sin 3A+2\sin\frac{3}{2}(B+C).$$

记 $\alpha=\frac{3}{2}(B+C)$,则 $0<\alpha\leqslant 180^\circ$,且

$$A=180^\circ-(B+C)=180^\circ-\frac{2}{3}\alpha.$$

于是 $\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C\leqslant \sin(3\times 180^\circ-2\alpha)+2\sin\alpha$

$$=\sin 2\alpha+2\sin\alpha$$
$$=2\sin\alpha(1+\cos\alpha)$$
$$=8\sin\frac{\alpha}{2}\cos^3\frac{\alpha}{2}.$$

由均值不等式可得

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cos^3\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^6\frac{\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1}{3}\cdot 3\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^6\frac{\alpha}{2}}$$
$$\leqslant\sqrt{\frac{1}{3}\left[\frac{3\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}{4}\right]^4}$$
$$=\frac{3\sqrt{3}}{16}.$$

由此可得 $\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C\leqslant\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

从以上证明可知,当且仅当

$$3\sin^2\frac{\alpha}{2}=\cos^2\frac{\alpha}{2},\cos\frac{3}{2}(B-C)=1,$$

即 $A=140^\circ,B=C=20^\circ$ 时,等号成立.

9·121　求证:对于每个自然数 n,不等式

$$|\sin 1|+|\sin 2|+\cdots+|\sin(3n-1)|+|\sin 3n|>\frac{8}{5}n \text{ 成立.}$$

(第 20 届全苏数学奥林匹克,1986 年)

[证]　令 $f(x)=|\sin x|+|\sin(x+1)|+|\sin(x+2)|$,显然只需证明对任何实数 x 有

$$f(x)>\frac{8}{5}. \qquad ①$$

由于$f(x)$是以π为周期的周期函数,所以只需对于$x\in[0,\pi]$证明①成立即可.

当$0\leqslant x\leqslant\pi-2$时,$f(x)=\sin x+\sin(x+1)+\sin(x+2)$.
由于$1\leqslant x+1$且 $1\leqslant\pi-(x+1)$,
所以 $\sin(x+1)\geqslant\sin1$.
又 $\sin x+\sin(x+2)=2\sin(x+1)\cos1>\sin(x+1)\geqslant\sin1$,
从而 $f(x)>2\sin1$.

当$\pi-2<x\leqslant\pi-1$时,$f(x)=\sin x+\sin(x+1)-\sin(x+2)$.
显然$\sin x\geqslant\sin1$.由

$$\sin(x+1)-\sin(x+2)=-2\sin\frac{1}{2}\cos\left(x+\frac{3}{2}\right),$$

以及 $\pi-\frac{1}{2}<x+\frac{3}{2}\leqslant\pi+\frac{1}{2}$,可得

$$\sin(x+1)-\sin(x+2)\geqslant2\sin\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}=\sin1.$$

所以 $f(x)\geqslant2\sin1$.

当$\pi-1<x\leqslant\pi$时,$f(x)=\sin x+\sin(x+1)-\sin(x+2)$.
因为$\pi+1<x+2\leqslant\pi+2$,所以$-\sin(x+2)>\sin1$.又

$$\sin x-\sin(x+1)=-2\sin\frac{1}{2}\cos\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

以及$\pi-\frac{1}{2}<x+\frac{1}{2}\leqslant\pi+\frac{1}{2}$,从而

$$\sin x-\sin(x+1)\geqslant2\sin\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}=\sin1.$$

于是 $f(x)>2\sin1$.

以上证明了对任何实数x有$f(x)\geqslant2\sin1$,又$\sin1>\sin54^\circ=\frac{1+\sqrt{5}}{4}>\frac{4}{5}$,所以对任意实数$x$①式成立.

9·122 设实数$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n$满足

$$\sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_n=0,$$

求证:$|\sin\theta_1+2\sin\theta_2+\cdots+n\sin\theta_n|\leqslant\left[\frac{n^2}{4}\right]$.

(第28届国际数学奥林匹克候选题,1987年)

[证] 记 $x_k = \sin\theta_k, k = 1,2,\cdots,n$.

当 $n = 2m$ 时,

$$\begin{aligned}\left[\frac{n^2}{4}\right]-\sum_{k=1}^{n}kx_k &= m^2-\sum_{k=1}^{n}kx_k\\ &=\sum_{k=1}^{m}(m+k)-\sum_{k=1}^{m}k-\sum_{k=1}^{2m}kx_k\\ &=\sum_{k=1}^{m}(m+k)(1-x_{m+k})-\sum_{k=1}^{m}k(1+x_k)\\ &\geqslant m\left[\sum_{k=1}^{m}(1-x_{m+k})-\sum_{k=1}^{m}(1+x_k)\right]\\ &=-m\sum_{k=1}^{n}x_k\\ &=0.\end{aligned}$$

当 $n = 2m + 1$ 时,

$$\begin{aligned}\left[\frac{n^2}{4}\right]-\sum_{k=1}^{n}kx_k &= m(m+1)-\sum_{k=1}^{n}kx_k\\ &=\sum_{k=2}^{m+1}(m+k)-\sum_{k=1}^{m}k-\sum_{k=1}^{2m+1}kx_k\\ &=\sum_{k=2}^{m+1}(m+k)(1-x_{m+k})-\sum_{k=1}^{m}k(1+x_k)-(m+1)x_{m+1}\\ &\geqslant(m+1)\left[\sum_{k=2}^{m+1}(1-x_{m+k})-\sum_{k=1}^{m}(1+x_k)-x_{m+1}\right]\\ &=-(m+1)\sum_{k=1}^{2m+1}x_k\\ &=0.\end{aligned}$$

无论何种情况均有 $\sum_{k=1}^{n}kx_k\leqslant\left[\frac{n^2}{4}\right]$.

令 $y_k = -x_k$,则 $-\sum_{k=1}^{n}kx_k=\sum_{k=1}^{n}ky_k\leqslant\left[\frac{n^2}{4}\right]$.

综上所述可得

$$\left|\sum_{k=1}^{n} k\sin\theta_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} kx_k\right| \leqslant \left[\frac{n^2}{4}\right].$$

9・123　设 α,β 是实数,且 $\cos\alpha \neq \cos\beta$,$k$ 是大于 1 的正整数.求证:

$$\left|\frac{\cos k\beta\cos\alpha - \cos k\alpha\cos\beta}{\cos\beta - \cos\alpha}\right| < k^2 - 1.$$

(第 17 届美国普特南数学竞赛,1957 年)

[证]　令 $x = \frac{1}{2}(\alpha - \beta), y = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$,则

$$\begin{aligned}
&\cos k\beta\cos\alpha - \cos k\alpha\cos\beta \\
&= \frac{1}{2}[\cos(k\beta + \alpha) + \cos(k\beta - \alpha) - \cos(k\alpha + \beta) - \cos(k\alpha - \beta)] \\
&= \frac{1}{2}[\cos(k\beta + \alpha) - \cos(k\alpha + \beta)] + \frac{1}{2}[\cos(k\beta - \alpha) - \cos(k\alpha - \beta)] \\
&= \sin(k-1)x\sin(k+1)y + \sin(k+1)x\sin(k-1)y,
\end{aligned}$$

$$\cos\beta - \cos\alpha = 2\sin x\sin y,$$

从而

$$\left|\frac{\cos k\beta\cos\alpha - \cos k\alpha\cos\beta}{\cos\beta - \cos\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|\frac{\sin(k-1)x}{\sin x}\cdot\frac{\sin(k+1)y}{\sin y}\right| + \frac{1}{2}\left|\frac{\sin(k+1)x}{\sin x}\cdot\frac{\sin(k-1)y}{\sin y}\right|.$$

由此可知只需再证:对任何 $n \in N$ 和实数 r 有

$$|\sin n\gamma| \leqslant n|\sin\gamma|, \tag{①}$$

且等号仅在 $n = 1$ 或者 $\sin\gamma = 0$ 时成立.事实上,不妨设 $n > 1, \sin\gamma \neq 0$,从而 $|\cos\gamma| < 1$.当 $n = 2$ 时,

$$|\sin 2\gamma| = |2\sin\gamma\cos\gamma| < 2|\sin\gamma|,$$

即 ① 式中严格不等号成立.

设 ① 式对于 $n = m \geqslant 2$ 成立,当 $n = m + 1$ 时,

$$\begin{aligned}
|\sin(m+1)\gamma| &\leqslant |\sin m\gamma\cos\gamma| + |\sin\gamma\cos m\gamma| \\
&< |\sin m\gamma| + |\sin\gamma| \\
&< (m+1)|\sin\gamma|,
\end{aligned}$$

即 ① 中的严格不等号对于 $n = m + 1$ 也成立.这样就完成了对于 ① 式的归纳证明,且证明了只当 $n = 1$ 或者 $\sin\gamma = 0$ 时,① 中的等号才能成

立.

9・124 设 $\alpha_i>0,\beta_i>0\quad(1\leqslant i\leqslant n,n>1)$ 且

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=\sum_{i=1}^{n}\beta_i=\pi.$$

求证：$\sum_{i=1}^{n}\frac{\cos\beta_i}{\sin\alpha_i}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\mathrm{ctg}\alpha_i$.

（第 29 届国际数学奥林匹克候选题，1988 年）

［证］ 用归纳法，当 $n=2$ 时，显然有

$$\frac{\cos\beta_1}{\sin\alpha_1}+\frac{\cos\beta_2}{\sin\alpha_2}=0=\mathrm{ctg}\alpha_1+\mathrm{ctg}\alpha_2.$$

考虑 $n=3$ 的情况，记

$$S=\cos\beta_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3+\cos\beta_2\sin\alpha_1\sin\alpha_3+\cos\beta_3\sin\alpha_1\sin\alpha_2,$$

由 $\sin\alpha_3=\sin(\alpha_1+\alpha_2),\cos\beta_3=-\cos(\beta_1+\beta_2)$ 可得

$$\begin{aligned}S=&\cos\beta_1\cos\alpha_1\sin^2\alpha_2+\cos\beta_1\cos\alpha_2\sin\alpha_1\sin\alpha_2+\cos\beta_2\cos\alpha_2\sin^2\alpha_1\\&+\cos\beta_2\cos\alpha_1\sin\alpha_1\sin\alpha_2-\cos(\beta_1+\beta_2)\sin\alpha_1\sin\alpha_2\\=&\cos(\beta_1-\alpha_1)\sin^2\alpha_2+\cos(\beta_2-\alpha_2)\sin^2\alpha_1+\cos(\beta_1+\alpha_2)\\&\sin\alpha_1\sin\alpha_2+\cos(\beta_2+\alpha_1)\sin\alpha_1\sin\alpha_2-\cos(\beta_1+\beta_2)\sin\alpha_1\sin\alpha_2.\end{aligned}$$

由于 $\cos(\beta_i-\alpha_i)=1-2\sin^2\frac{\beta_i-\alpha_i}{2},i=1,2$，所以

$$\begin{aligned}S=&\sin^2\alpha_1+\sin^2\alpha_2-2\sin^2\alpha_2\sin^2\frac{\beta_1-\alpha_1}{2}-2\sin^2\alpha_1\sin^2\frac{\beta_2-\alpha_2}{2}\\&+\cos(\alpha_1+\alpha_2)\sin\alpha_1\sin\alpha_2+\sin\alpha_1\sin\alpha_2[\cos(\beta_1+\alpha_2)\\&+\cos(\beta_2+\alpha_1)]-\sin\alpha_1\sin\alpha_2[\cos(\beta_1+\beta_2)+\cos(\alpha_1+\alpha_2)].\end{aligned}$$

易知

$$\begin{aligned}&\sin^2\alpha_2\sin^2\frac{\beta_1-\alpha_1}{2}+\sin^2\alpha_1\sin^2\frac{\beta_2-\alpha_2}{2}\\\geqslant&2\sin\alpha_1\sin\alpha_2\left|\sin\frac{\beta_1-\alpha_1}{2}\sin\frac{\beta_2-\alpha_2}{2}\right|,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\cos(\beta_1+\alpha_2)+\cos(\beta_2+\alpha_1)-\cos(\beta_1+\beta_2)-\cos(\alpha_1+\alpha_2)\\=&2\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2}{2}\Bigl(\cos\frac{\beta_1+\alpha_2-\beta_2-\alpha_1}{2}\end{aligned}$$

$$-\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2-\beta_1-\beta_2}{2}\Big)$$

$$=4\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2}{2}\sin\frac{\alpha_2-\beta_2}{2}\sin\frac{\alpha_1-\beta_1}{2}$$

$$\leqslant 4\left|\sin\frac{\alpha_2-\beta_2}{2}\sin\frac{\alpha_1-\beta_1}{2}\right|,$$

由此可得 $S\leqslant\sin^2\alpha_1+\sin^2\alpha_2+\cos(\alpha_1+\alpha_2)\sin\alpha_1\sin\alpha_2$

$$=\sin^2\alpha_1+\sin^2\alpha_2+2\cos(\alpha_1+\alpha_2)\sin\alpha_1\sin\alpha_2+\cos\alpha_3\sin\alpha_1\sin\alpha_2.$$

因为 $\sin^2\alpha_1+\cos(\alpha_1+\alpha_2)\sin\alpha_1\sin\alpha_2$

$$=\sin^2\alpha_1\cos^2\alpha_2+\cos\alpha_1\cos\alpha_2\sin\alpha_1\sin\alpha_2$$

$$=\cos\alpha_2\sin\alpha_1\sin(\alpha_1+\alpha_2)=\cos\alpha_2\sin\alpha_1\sin\alpha_3,$$

$$\sin^2\alpha_2+\cos(\alpha_1+\alpha_2)\sin\alpha_1\sin\alpha_2=\cos\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3,$$

从而 $S\leqslant\cos\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3+\cos\alpha_2\sin\alpha_1\sin\alpha_3+\cos\alpha_3\sin\alpha_1\sin\alpha_2.$

由此立即可得当 $n=3$ 时,原不等式成立.

假设对 $n-1(\geqslant 3)$ 原不等式成立,则对于 n

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\cos\beta_i}{\sin\alpha_i}=\frac{\cos\beta_1}{\sin\alpha_1}+\frac{\cos\beta_2}{\sin\alpha_2}+\sum_{i=3}^{n}\frac{\cos\beta_i}{\sin\alpha_i}$$

$$=\frac{\cos\beta_1}{\sin\alpha_1}+\frac{\cos\beta_2}{\sin\alpha_2}+\frac{-\cos(\beta_1+\beta_2)}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}+\frac{\cos(\beta_1+\beta_2)}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}+\sum_{i=3}^{n}\frac{\cos\beta_i}{\cos\alpha_i}$$

$$\leqslant\operatorname{ctg}\alpha_1+\operatorname{ctg}\alpha_2+\operatorname{ctg}(\pi-\alpha_1-\alpha_2)+\operatorname{ctg}(\alpha_1+\alpha_2)+\sum_{i=3}^{n}\operatorname{ctg}\alpha_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\operatorname{ctg}\alpha_i.$$

于是原不等式对于一切 $n\geqslant 2$ 成立.

9·125 α,β,γ 是一个给定三角形的三个内角.求证:

$$\csc^2\frac{\alpha}{2}+\csc^2\frac{\beta}{2}+\csc^2\frac{\gamma}{2}\geqslant 12.$$

并求等号成立的条件.

(韩国数学奥林匹克,1994 年)

[证]　由算术-几何平均不等式,有

$$\csc^2\frac{\alpha}{2}+\csc^2\frac{\beta}{2}+\csc^2\frac{\gamma}{2}\geqslant 3\left(\csc\frac{\alpha}{2}\cdot\csc\frac{\beta}{2}\cdot\csc\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

等号当且仅当 $\alpha=\beta=\gamma$ 时成立.

再由算术-几何平均不等式及凸函数的性质,有

$$\begin{aligned}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{1}{3}}&\leqslant\frac{\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}}{3}\\&\leqslant\sin\frac{\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}}{3}\\&=\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{6}\\&=\sin\frac{\pi}{6}\\&=\frac{1}{2},\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\csc^2\frac{\alpha}{2}+\csc^2\frac{\beta}{2}+\csc^2\frac{\gamma}{2}&\geqslant 3\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}\\&\geqslant 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\\&=12.\end{aligned}$$

并且等号当且仅当 $\alpha=\beta=\gamma$ 时成立.

第5节　两个或三个变量的不等式

9·126　设实数 x,y 满足 $|x|<1$, $|y|<1$.求证:

$$\left|\frac{x-y}{1-xy}\right|<1.$$

(第15届莫斯科数学奥林匹克,1952年)

[证]　因为 $|x|<1$, $|y|<1$,所以

$$(1-x^2)(1-y^2)>0.$$

由此可得 $x^2+y^2<1+x^2y^2$.

于是有 $(x-y)^2<(1-xy)^2$.

从而 $|x-y|<|1-xy|$,

即 $\left|\dfrac{x-y}{1-xy}\right|<1$.

9·127 求证:对任意 $x>\sqrt{2}$ 和 $y>\sqrt{2}$ 都有

$$x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4>x^2+y^2.$$

(第46届莫斯科数学奥林匹克,1983年)

[证] 由于 $x>\sqrt{2},y>\sqrt{2}$,则

$$\frac{(x^2+y^2)^2}{4}\geqslant x^2y^2,$$

$$\frac{(x^2+y^2)^2}{2}\geqslant (x^2+y^2)xy,$$

$$\frac{(x^2+y^2)^2}{4}>(x^2+y^2).$$

从而有 $(x^2+y^2)^2>(x^2+y^2)(1+xy)+x^2y^2$,

即 $x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4>x^2+y^2$.

9·128 设对于任意实数 x 都有

$$\cos(a\sin x)>\sin(b\cos x),$$

求证:$a^2+b^2<\dfrac{\pi^2}{4}$.

(基辅数学奥林匹克,1975年)

[证] 用反证法,设 $a^2+b^2\geqslant\dfrac{\pi^2}{4}$.由于

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi),$$

其中 φ 取为仅依赖于 a,b 的固定实数,使得

$$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

由于 $\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\dfrac{\pi}{2}$,从而存在实数 x_0,使得

$$\sqrt{a^2+b^2}\sin(x_0+\varphi)=\frac{\pi}{2},$$

即 $a\sin x_0+b\cos x_0=\dfrac{\pi}{2}$.

由此可得 $\cos(a\sin x_0)=\sin(b\cos x_0)$,

与假设矛盾!于是 $a^2+b^2<\dfrac{\pi^2}{4}$.

9·129 已知 a,b 是正实数且 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=1$. 求证:对每一 $n\in N$,

$$(a+b)^n-a^n-b^n\geqslant 2^{2n}-2^{n+1}.$$

(中国高中数学联赛,1988年)

[证 1] 用归纳法. 当 $n=1$ 时,显然等式成立. 设 $n=k$ 时,不等式成立即

$$(a+b)^k\geqslant a^k+b^k+2^{2k}-2^{k+1}.$$

则

$$\begin{aligned}(a+b)^{k+1}&=(a+b)^k(a+b)\\&\geqslant(a+b)(a^k+b^k)+(2^{2k}-2^{k+1})(a+b)\\&=a^{k+1}+b^{k+1}+ba^k+ab^k+(2^{2k}-2^{k+1})(a+b).\end{aligned}$$

因为 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=1$,所以 $ab=a+b\geqslant 4$. 于是

$$\begin{aligned}(a+b)^{k+1}&\geqslant a^{k+1}+b^{k+1}+ab(a^{k-1}+b^{k-1}+2^{2k}-2^{k+1})\\&\geqslant a^{k+1}+b^{k+1}+4a^{k-1}+4b^{k-1}+2^{2k+2}-2^{k+3},\end{aligned}$$

又

$$4a^{k-1}+4b^{k-1}\geqslant 8(ab)^{\frac{k-1}{2}}\geqslant 2^{k+2},$$

所以

$$\begin{aligned}(a+b)^{k+1}&\geqslant a^{k+1}+b^{k+1}+2^{2k+2}-2^{k+3}+2^{k+2}\\&=a^{k+1}+b^{k+1}+2^{2(k+1)}-2^{k+2}.\end{aligned}$$

即当 $n=k+1$ 时不等式也成立. 从而对任意 $n\in N$ 不等式成立.

[证 2] 当 $n=1$ 时,命题显然成立. 设 $n\geqslant 2$,由二项式定理可得

$$(a+b)^n-a^n-b^n=\sum_{k=1}^{n-1}C_n^k a^k b^{n-k}.$$

因为 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}C_n^k=2^n-2$,由均值不等式

$$\sum_{k=1}^{n-1}C_n^k a^k b^{n-k}\geqslant(2^n-2)(a^m b^l)^{\frac{1}{2^n-2}},$$

其中 $\displaystyle m=\sum_{k=1}^{n-1}kC_n^k,\ l=\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)C_n^k$. 再由

$$kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1},\ (n-k)C_n^k=nC_{n-1}^k,$$

所以 $m=l=n(2^{n-1}-1)$. 又 $ab\geqslant 4$,从而

第九章 不等式

$$(a+b)^n-a^n-b^n \geqslant (2^n-2)\cdot 2^n \cdot \frac{(2^n-2)}{2^n-2}=2^{2n}-2^{n+1}.$$

9·130 设 $a>1,b>1$,求证:

$$\frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{a-1}\geqslant 8.$$

(第26届独联体数学奥林匹克,1992年)

[证] 令 $x=a-1,y=b-1$,则 $x>0,y>0$,且

$$\frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{a-1}=\frac{(x+1)^2}{y}+\frac{(y+1)^2}{x}$$

$$=\frac{x^2}{y}+\frac{2x}{y}+\frac{1}{y}+\frac{y^2}{x}+\frac{2y}{x}+\frac{1}{x}.$$

由于

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}\geqslant 2\sqrt{xy},$$

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geqslant 2,$$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\geqslant \frac{1}{2\sqrt{xy}},$$

所以

$$\frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{a-1}\geqslant 2\sqrt{xy}+4+2\frac{1}{\sqrt{xy}}\geqslant 8.$$

9·131 设 $a<b$,求证:

$$a^3-3a\leqslant b^3-3b+4,$$

并问等号何时成立?

(第30届国际数学奥林匹克候选题,1989年)

[证] 记 $c=b-a>0$,则

$$b^3-3b+4-a^3+3a=3ca^2+3c^2a+c^3-3c+4$$

$$=3c\left(a+\frac{c}{2}\right)^2+\frac{1}{4}c^3-3c+4.$$

再由 $\frac{1}{4}c^3-3c+4=\frac{1}{4}(c^3-12c+16)=\frac{1}{4}(c^3-16c+4c+16)$

$$=\frac{1}{4}(c+4)(c^2-4c+4)=\frac{1}{4}(c+4)(c-2)^2,$$

可得 $b^3-3b+4-a^3+3a\geqslant 0,$

即要证之不等式成立.显然当且仅当 $a=-1,b=1$ 时等号成立.

9·132 证明或否定命题:若 x,y 为实数且

$$y\geqslant 0, y(y+1)\leqslant(x+1)^2,$$

则

$$y(y-1)\leqslant x^2.$$

(加拿大国家集训队训练题,1989年)

[解] 我们证明命题成立.用反证法.设

$$y(y-1)>x^2,$$

则由 $y\geqslant 0$ 可推出 $y>1$,进一步可得

$$y>\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+x^2}.$$

由假设 $y(y+1)\leqslant(x+1)^2$ 和 $y>1$ 可知

$$y\leqslant-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+(x+1)^2}.$$

于是得到

$$\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+x^2}<-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+(x+1)^2},$$

即

$$1+\sqrt{\frac{1}{4}+x^2}<\sqrt{\frac{1}{4}+(x+1)^2}.$$

由此可推出

$$1+\frac{1}{4}+x^2+2\sqrt{\frac{1}{4}+x^2}<\frac{1}{4}+x^2+2x+1,$$

即

$$\sqrt{\frac{1}{4}+x^2}<x,$$

矛盾!所以原命题成立.

9·133 设 x,y 是两个不同的正数,记

$$R=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}, A=\frac{x+y}{2}, G=\sqrt{xy}, H=\frac{2xy}{x+y}.$$

试确定 $R-A, A-G, G-H$ 三个数的大小关系.

(加拿大国家集训队训练题,1989年)

[解] 显然 $G<A$.由于 $R=\sqrt{2A^2-G^2}$,所以

$$R-A=\sqrt{2A^2-G^2}-A=\frac{(A+G)(A-G)}{\sqrt{2A^2-G^2}+A}.$$

又从 $G<A$ 立即可推出

$$A+G<A+\sqrt{2A^2-G^2},$$

于是有 $R - A < A - G$.

从 $G^2 < 2A^2 - G^2$ 可知

$$G\sqrt{2A^2 - G^2} = \sqrt{G^2(2A^2 - G^2)} < A^2.$$

由此得到 $AG + G\sqrt{2A^2 - G^2} < AG + A^2$,即

$$\frac{G}{A} < \frac{A + G}{\sqrt{2A^2 - G^2} + A}.$$

注意到 $H = \frac{G^2}{A}$,则 $G - H = \frac{G}{A}(A - G) < R - A$.

总之得 $G - H < R - A < A - G$.

9・134 求证:对于非负实数 x,y 有

$$[5x] + [5y] \geqslant [3x + y] + [3y + x].$$

(第 4 届美国数学奥林匹克,1975 年)

[证] 令 $x = [x] + a, y = [y] + b$,则

$$0 \leqslant a < 1, 0 \leqslant b < 1.$$

原不等式等价于.

$$[x] + [y] + [5a] + [5b] \geqslant [3a + b] + [3b + a].$$

只需证 $[5a] + [5b] \geqslant [3a + b] + [3b + a]$. ①

用反证法,设 ① 不成立,即

$$[5a] + [5b] < [3a + b] + [3b + a]. \quad ②$$

若 $[5a] < [3a + b]$,则 $2a < b$ 且 $[3a + b] \geqslant 1$. 由此可得 $\left[\frac{5}{2}b\right] \geqslant 1$,所以

$$b \geqslant \frac{2}{5}. \quad ③$$

从 $5b > 3b + a$ 可推出 $[5b] \geqslant [3b + a]$,又

$$[3a + b] \leqslant [3a] + 1 \leqslant [5a] + 1,$$

则从 ② 可得

$$[5b] = [3b + a]. \quad ④$$

再由 $a < \frac{b}{2}$ 推出 $[5b] \leqslant \left[\frac{7}{2}b\right] \leqslant 3$,

从而 $b < \frac{4}{5}$.

又可推出 $\frac{7}{2}b < \frac{28}{10}$,

所以 $[5b] \leqslant \left[\frac{7}{2}b\right] \leqslant 2$,

于是有 $b < \frac{3}{5}$.

因此 $3a + b < \frac{5}{2}b < \frac{3}{2}$,

从而 $[3a + b] \leqslant 1$.

由于$[5a] < [3a + b]$,所以$[5a] = 0$,即 $a < \frac{1}{5}$.

由 $3b + a < \frac{9}{5} + \frac{1}{5} = 2$ 以及 ④ 可知$[5b] \leqslant 1$,即 $b < \frac{2}{5}$,与 ③ 矛盾!以上证明了$[5a] \geqslant [3a + b]$.同理可证,在条件 ② 下$[5b] \geqslant [3b + a]$.这样就引出矛盾,所以 ② 不能成立,即 ① 成立.

9·135　设 $0 < a < 1, x^2 + y = 0$,求证:

$$\log_a(a^x + a^y) \leqslant \log_a^2 + \frac{1}{8}.$$

(中国高中数学联赛,1991 年)

[证]　由于 $0 < a < 1, a^x + a^y \geqslant 2a^{\frac{x+y}{2}}$,从而

$$\log_a(a^x + a^y) \leqslant \log_a^2 + \frac{x + y}{2}.$$

利用 $x^2 + y = 0$ 可得

$$\frac{x + y}{2} = \frac{1}{2}x(1 - x) = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{8} \leqslant \frac{1}{8},$$

所以

$$\log_a(a^x + a^y) \leqslant \log_a 2 + \frac{1}{8}.$$

9·136　设实数 a, b, c 满足

$$abc > 0, a + b + c > 0.$$

求证:对任何自然数 n 都有

$$a^n + b^n + c^n > 0.$$

(第 26 届莫斯科数学奥林匹克,1963 年)

[证]　由 $abc > 0$ 可知,或者 a, b, c 全是正数,或者 a, b, c 中有一

个正数和两个负数. 当 a,b,c 全为正时,显然 $a^n+b^n+c^n>0$. 对于后一种情况,不妨设 $a>0,b<0,c<0$ 且 n 为奇数. 由于 $a+b+c>0$,所以

$$a>|b|+|c|.$$

由此可得

$$a^n>(|b|+|c|)^n>|b|^n+|c|^n=-b^n-c^n$$

即 $\quad a^n+b^n+c^n>0$.

9·137 已知 a,b,c 都是正数,求证:

$$a^ab^bc^c\geqslant(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

(第 3 届美国数学奥林匹克,1974 年)

[证] 由于

$$3(a\lg a+b\lg b+c\lg c)-(a+b+c)(\lg a+\lg b+\lg c)$$
$$=(a-b)(\lg a-\lg b)+(a-c)(\lg a-\lg c)+(b-c)(\lg b-\lg c)\geqslant0,$$

所以 $\quad a\lg a+b\lg b+c\lg c\geqslant\frac{1}{3}(a+b+c)(\lg a+\lg b+\lg c).$

于是要证之不等式成立.

9·138 设 $a>b>c$,求证:

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)>0.$$

(第 54 届莫斯科数学奥林匹克,1991 年)

[证]
$$\begin{aligned}&a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\\=&a^2(b-c)+b^2(c-b+b-a)+c^2(a-b)\\=&(a^2-b^2)(b-c)+(c^2-b^2)(a-b)\\=&(a-b)(b-c)(a+b-c-b)\\=&(a-b)(b-c)(a-c)>0.\end{aligned}$$

9·139 如果 $a>b>0$ 且 $\frac{x}{a}<\frac{y}{b}$,求证:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)>\frac{x+y}{a+b}.$$

(第 50 届莫斯科数学奥林匹克,1987 年)

[证] 由于 $0<(a-b)\left(\frac{y}{b}-\frac{x}{a}\right)$,所以

$$x+y<b\cdot\frac{x}{a}+a\cdot\frac{y}{b}.$$

由此可得 $x+y<\frac{a+b}{2}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)$,即

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)>\frac{x+y}{a+b}.$$

9・140 设正数 x,y,z 使得

$$\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y+\operatorname{arctg}z<\pi.$$

求证:$x+y+z>xyz$.

(第 26 届莫斯科数学奥林匹克,1963 年)

[证] 记 $\alpha=\operatorname{arctg}x,\beta=\operatorname{arctg}y,\gamma=\operatorname{arctg}z$,则

$$0<\alpha<\frac{\pi}{2},0<\beta<\frac{\pi}{2},0<\gamma<\frac{\pi}{2}.$$

若 $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$. 由 $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\operatorname{ctg}\gamma$ 可得

$$1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha=0,$$

即 $1-xy-yz-zx=0.$

所以 $x+y+z-xyz=x(1-yz)+y+z>0.$

若 $\alpha+\beta+\gamma\neq\frac{\pi}{2}$,则

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha}=\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}.$$

当 $\alpha+\beta+\gamma<\frac{\pi}{2}$ 时,由 $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)<\operatorname{ctg}\gamma$ 可知

$$1-xy-yz-zx>0,$$

又 $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)>0$,从而 $x+y+z-xyz>0$. 当 $\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta+\gamma<\pi$ 时,由 $1-xy-yz-zx<0$ 及 $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)<0$ 也可得 $x+y+z-xyz>0$.

无论何种情况都有

$$x+y+z>xyz.$$

9・141 设 a,b,c 为一三角形的三边长,求证:

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\geqslant\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}s^{n-1},$$

其中 $s=\frac{1}{2}(a+b+c), n \geqslant 1$.

（第 28 届国际数学奥林匹克候选题，1987 年）

[证] 由排序不等式可得

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b} \geqslant \frac{1}{3}(a^n+b^n+c^n)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right).$$

由于 $n \geqslant 1$，从而

$$a^n+b^n+c^n \geqslant \frac{1}{3^{n-1}}(a+b+c)^n=\frac{2^n}{3^{n-1}} s^n.$$

由均值不等式可得

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b} \geqslant \frac{3}{\sqrt[3]{(b+c)(c+a)(a+b)}} \geqslant \frac{9}{4 s}.$$

综合以上三个不等式立即可得要证之不等式成立.

9·142 设 a, b, c 是某三角形的三边长，求证：

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leqslant 3 a b c.$$

（第 6 届国际数学奥林匹克，1964 年）

[证] 令 $x+y=a, y+z=b, z+x=c$. 由于 a, b, c 是某三角形的三边长，所以 x, y, z 都是正数且原不等式等价于

$$2 z(x+y)^2+2 x(y+z)^2+2 y(z+x)^2 \leqslant 3(x+y)(y+z)(z+x).$$

由于上式左端 $=2 z(x^2+y^2)+2 x(y^2+z^2)+2 y(z^2+x^2)+12 x y z$,

右端 $=3 z(x^2+y^2)+3 x(y^2+z^2)+3 y(z^2+x^2)+6 x y z$,

从而原不等式等价于

$$6 x y z \leqslant x(y^2+z^2)+y(z^2+x^2)+z(x^2+y^2). \qquad ①$$

由于 $y^2+z^2 \geqslant 2 y z, z^2+x^2 \geqslant 2 z x, x^2+y^2 \geqslant 2 x y$，所以 ① 成立.

9·143 设 a, b, c 都是正数，求证：

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b} \geqslant \frac{1}{2}(a+b+c).$$

（第 2 届友谊杯国际数学竞赛，1988 年）

[证] 令 $s=a+b+c$，则

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b} &=\frac{a^2}{s-a}+\frac{b^2}{s-b}+\frac{c^2}{s-c} \\ &=\frac{a^2-s^2+s^2}{s-a}+\frac{b^2-s^2+s^2}{s-b}+\frac{c^2-s^2+s^2}{s-c}\end{aligned}$$

$$= -4s + s^2\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c}\right).$$

由均值不等式可得

$$\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

$$\geqslant \frac{9}{3s-(a+b+c)} = \frac{9}{2s},$$

从而

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geqslant -4s + \frac{9s^2}{2s} = \frac{1}{2}(a+b+c).$$

9・144 设 $0 \leqslant a \leqslant 1, 0 \leqslant b \leqslant 1, 0 \leqslant c \leqslant 1$,求证:

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leqslant 1.$$

(第 9 届美国数学奥林匹克,1980 年)

[证] 不妨设 $a \leqslant b \leqslant c$,只需证

$$\frac{a+b+c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leqslant 1,$$

即 $$(1-c)\left[(1-a)(1-b) - \frac{1}{a+b+1}\right] \leqslant 0. \quad ①$$

由于 $0 \leqslant a \leqslant 1, 0 \leqslant b \leqslant 1$,所以

$$(1-a^2)(1-b^2) = (1-a)(1+a)(1-b)(1+b) \leqslant 1.$$

由此可得 $$(1-a)(1-b) \leqslant \frac{1}{(1+a)(1+b)} \leqslant \frac{1}{a+b+1},$$

即 $$(1-a)(1-b) - \frac{1}{a+b+1} \leqslant 0.$$

再由 $0 \leqslant c \leqslant 1$,可得 ① 成立.

9・145 设 a, b, c 为非负实数满足 $a+b+c=1$,求证:

$$(1+a)(1+b)(1+c) \geqslant 8(1-a)(1-b)(1-c).$$

(第 17 届全俄数学奥林匹克,1991 年)

[证] 由 $$1+a = 1-b+1-c \geqslant 2\sqrt{(1-b)(1-c)},$$
$$1+b = 1-a+1-c \geqslant 2\sqrt{(1-a)(1-c)},$$
$$1+c = 1-a+1-b \geqslant 2\sqrt{(1-a)(1-b)},$$

所以 $$(1+a)(1+b)(1+c) \geqslant 8(1-a)(1-b)(1-c).$$

代数卷

9·146　求证：任给3个互不相同的正数，可将它们分别记为 a，b，c 使得

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}>\frac{a}{c}+\frac{c}{a}.$$

（第17届全俄数学奥林匹克，1991年）

［证］　给定的三个正数分别记为 x_1,x_2,x_3 且假设 $x_1<x_2<x_3$.

若 $\frac{x_3}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}>\frac{x_3}{x_1}+\frac{x_1}{x_3}$，则记 $x_3=a,x_2=b,x_1=c$ 就得 $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}>\frac{a}{c}+\frac{c}{a}$.

否则即 $\frac{x_3}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}\leqslant\frac{x_3}{x_1}+\frac{x_1}{x_3}$，
此时令 $x_3=a,x_2=c,x_1=b$，
所以

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}=\frac{x_3}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}>\frac{x_3}{x_1}+\frac{x_1}{x_3}\geqslant\frac{x_3}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$$
$$>\frac{x_3}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}=\frac{a}{c}+\frac{c}{a}$$

9·147　设 a,b,c 是正数，求证：

$$\sqrt{ab(a+b)}+\sqrt{bc(b+c)}+\sqrt{ca(c+a)}$$
$$>\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

（第16届全俄数学奥林匹克，1990年）

［证］　原不等式左端的平方等于

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+2b\sqrt{ac(a+b)(b+c)}$$
$$+2a\sqrt{bc(a+b)(c+a)}+2c\sqrt{ab(b+c)(c+a)}.$$

由于 $b\sqrt{ac(a+b)(b+c)}>b\sqrt{ac\cdot ac}=abc$，
$a\sqrt{bc(a+b)(c+a)}>abc$，
$c\sqrt{ab(b+c)(c+a)}>abc$，所以原不等式左端的平方大于

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+6abc.$$

另一方面易知

$$(a+b)(b+c)(c+a)=ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+2abc,$$

所以原不等式成立.

9·148　已知非负实数 a,b,c 满足 $a+b+c\leqslant 3$，求证：

$$\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}+\frac{c}{1+c^2}\leqslant\frac{3}{2}\leqslant\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}.$$

（第 15 届全俄数学奥林匹克，1989 年）

［证］ 显然，$\frac{a}{1+a^2}\leqslant\frac{1}{2}$，$\frac{b}{1+b^2}\leqslant\frac{1}{2}$，$\frac{c}{1+c^2}\leqslant\frac{1}{2}$，从而原左半不等式成立. 现证右半不等式. 记

$$x=1+a, y=1+b, z=1+c,$$

则 $x+y+z\leqslant 6$. 于是

$$6\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geqslant(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

$$=1+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+1+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+1.$$

再由 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geqslant 2$，$\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\geqslant 2$，$\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\geqslant 2$，所以

$$9\leqslant 6\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right),$$

即要证的右半不等式成立.

9·149 设 $0<x<1$，$0<y<1$，$0<z<1$，求证：

$$x(1-y)+y(1-z)+z(1-x)<1.$$

（第 15 届全俄数学奥林匹克，1989 年）

［证］ 记 $s=x(1-y)+y(1-z)+z(1-x)$，则

$$s=x(1-y-z)+y(1-z)+z.$$

若 $1-y-z>0$，则

$$s<1-y-z+y(1-z)+z=1-yz<1.$$

若 $1-y-z\leqslant 0$，则

$$s\leqslant y(1-z)+z<1-z+z=1.$$

无论何种情况均有 $s<1$.

9·150 设 $0\leqslant x,y,z\leqslant 1$，求证：

$$2(x^3+y^3+z^3)-(x^2y+y^2z+z^2x)\leqslant 3.$$

（列宁格勒数学奥林匹克，1989 年）

［证］ 由于 $x^2y\geqslant\min\{x^3,y^3\}$，所以

$$x^3+y^3-x^2y\leqslant\max\{x^3,y^3\}\leqslant 1.$$

同理可得 $\quad y^3+z^3-y^2z\leqslant\max\{y^3,z^3\}\leqslant 1,$

$$z^3+x^3-z^2x\leqslant\max\{z^3,x^3\}\leqslant 1.$$

于是 $\quad 2(x^3+y^3+z^3)-(x^2y+y^2z+z^2x)\leqslant 3.$

9·151 对于正数 a,b,c 求证:

$$a^3+b^3+c^3+3abc\geqslant ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a).$$

(第 9 届全苏数学奥林匹克,1975 年)

[证] 不妨设 $c=\min\{a,b,c\}$. 由于

$$a^3+b^3+2abc-ab(a+b)-c(a^2+b^2)=(a+b-c)(a-b)^2,$$

$$c^3+abc-c^2(a+b)=c(a-c)(b-c),$$

所以要证之不等式

$$\text{左端}-\text{右端}=(a+b-c)(a-b)^2+c(a-c)(b-c)\geqslant 0,$$

显然要证之不等式成立.

9·152 设 a,b,c 都大于 1,求证:

$$2\left(\frac{\log_b a}{a+b}+\frac{\log_c b}{b+c}+\frac{\log_a c}{c+a}\right)\geqslant\frac{9}{a+b+c}.$$

(前南斯拉夫数学奥林匹克,1976 年)

[证] 由于 $a>1,b>1,c>1$,所以

$$\log_b a\cdot\log_c b\cdot\log_a c=1.$$

利用均值不等式可得

$$\frac{\log_b a}{a+b}+\frac{\log_c b}{b+c}+\frac{\log_a c}{c+a}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{(a+b)(b+c)(c+a)}}.$$

再用均值不等式得到

$$3\sqrt[3]{\frac{1}{(a+b)(b+c)(c+a)}}\geqslant\frac{9}{2(a+b+c)},$$

于是要证之不等式成立.

9·153 求证:如果三个实数的乘积为 1,且其和大于其倒数之和,则这三个数中恰有一数大于 1.

(前南斯拉夫数学奥林匹克,1976 年)

[证] 设 x,y,z 满足题设条件,则

$$xyz=1,$$

$$x+y+z-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}>0.$$

从而

$$\begin{aligned}&(x-1)(y-1)(z-1)\\=\ &xyz-xy-yz-zx+x+y+z-1\\=\ &x+y+z-xyz\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\\=\ &x+y+z-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)>0.\end{aligned}$$

于是 $x-1,y-1,z-1$ 要么恰有一个是正的,要么三个都是正的.再由 $xyz=1$,可知 $x-1,y-1,z-1$ 恰有一个为正,所以 x,y,z 中恰有一个大于 1.

9・154　设 $a=\dfrac{m^{m+1}+n^{n+1}}{m^m+n^n}$,其中 m,n 是正整数.求证:

$$a^m+a^n\geqslant m^m+n^n.$$

(第 20 届美国数学奥林匹克,1991 年)

[证]　对于正整数 p,由于

$$a^p-p^p=(a-p)(a^{p-1}+a^{p-2}p+\cdots+ap^{p-2}+p^{p-1}),$$

所以无论 p 的大小如何总有

$$a^p-p^p\geqslant(a-p)p^p.$$

由此可得

$$\begin{aligned}a^m+a^n-m^m-n^n&=(a^m-m^m)+(a^n-n^n)\\&\geqslant(a-m)m^m+(a-n)n^n\\&=a(m^m+n^n)-(m^{m+1}+n^{n+1}),\end{aligned}$$

又 $a=\dfrac{m^{m+1}+n^{n+1}}{m^m+n^n}$,所以

$$a^m+a^n\geqslant m^m+n^n.$$

9・155　设 a,b,c 为正数,证明:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}.$$

(第 26 届莫斯科数学奥林匹克,1963 年)

[证 1]　原不等式等价于

$$2[a(a+c)(a+b)+b(b+c)(b+a)+c(c+a)(c+b)]$$
$$\geqslant3(a+b)(b+c)(c+a).$$

经计算易知原不等式等价于

$$2(a^3+b^3+c^3) \geqslant a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b. \quad ①$$

由于①式

左端－右端

$= (a+b)(a-b)^2+(b+c)(b-c)^2+(a+c)(a-c)^2$

$\geqslant 0,$

所以①成立.

[证 2] 令 $s=a+b+c$,则

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}=s\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right)-3,$$

由均值不等式可得

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b} \geqslant 3\left(\frac{1}{(b+c)(a+c)(a+b)}\right)^{\frac{1}{3}} \geqslant \frac{9}{2s}.$$

于是$\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{a+c}+\dfrac{c}{a+b} \geqslant \dfrac{9}{2}-3=\dfrac{3}{2}.$

9·156 设实数 x_1,x_2,x_3 其任意两数之和大于第三个数,求证:

$$\frac{2}{3}\left(\sum_{i=1}^{3}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{3}x_i^2\right)>\sum_{i=1}^{3}x_i^3+x_1x_2x_3.$$

(第 13 届美国普特南数学竞赛,1953 年)

[证] 令 $\begin{cases}2y_1=x_2+x_3-x_1\\2y_2=x_3+x_1-x_2\\2y_3=x_1+x_2-x_3\end{cases}$

则 $y_1>0,y_2>0,y_3>0$,且 $x_1=y_2+y_3$, $x_2=y_3+y_1$, $x_3=y_1+y_2$.所以

$$\sum_{i=1}^{3}x_i=2\sum_{i=1}^{3}y_i,$$

$$\sum_{i=1}^{3}x_i^2=2\sum_{i=1}^{3}y_i^2+2\sum_{i\neq j}y_iy_j,$$

$$\sum_{i=1}^{3}x_i^3=2\sum_{i=1}^{3}y_i^3+3\sum_{i\neq j}y_i^2y_j,$$

$$x_1x_2x_3=\sum_{i\neq j}y_i^2y_j+2y_1y_2y_3.$$

于是可得

$$\left(\sum_{i=1}^{3}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{3}x_i^2\right)=4\left[\left(\sum_{i=1}^{3}y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{3}y_i^2\right)+\left(\sum_{i=1}^{3}y_i\right)\left(\sum_{i\neq j}y_iy_j\right)\right]$$
$$=4\left(\sum_{i=1}^{3}y_i^3+2\sum_{i\neq j}y_i^2y_j+3y_1y_2y_3\right),$$

$$\sum_{i=1}^{3}x_i^3+x_1x_2x_3=2\sum_{i=1}^{3}y_i^3+4\sum_{i\neq j}y_i^2y_j+2y_1y_2y_3.$$

再由 y_1,y_2,y_3 都是正数,显然有

$$\frac{2}{3}\left(\sum_{i=1}^{3}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{3}x_i^2\right)>\sum_{i=1}^{3}x_i^3+x_1x_2x_3.$$

9·157 设 a,b,c 是非负实数,求证:

$$a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)+a^2bc+b^2ac+c^2ab\geqslant 0.$$

(第 45 届莫斯科数学奥林匹克,1982 年)

[证] 经计算易知原不等式左端为

$$(a+b+c)[abc-(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)].$$

由于 $a,b,c\geqslant 0$,所以 $a+b-c,b+c-a,c+a-b$ 三个数中至多有一个为负.若上述三个数中有一个为负,则原不等式显然成立.设 $a+b-c\geqslant 0,b+c-a\geqslant 0,c+a-b\geqslant 0$,由此可推得

$$a^2\geqslant(b-c)^2,b^2\geqslant(c-a)^2,c^2\geqslant(a-b)^2.$$

于是 $$a^2b^2c^2\geqslant(a^2-(b-c)^2)(b^2-(c-a)^2)(c^2-(a-b)^2)$$
$$=(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)(b-c+a)(c+a-b)(c-a+b)$$
$$=(a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2.$$

因此 $$abc\geqslant(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b),$$

所以原不等式成立.

9·158 设 a,b,c 为非负实数,求证:

$$\frac{1}{3}(a+b+c)^2\geqslant a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab}.$$

(第 25 届全苏数学奥林匹克,1991 年)

[证] 由均值不等式可得

$$a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab}=\sqrt{abc}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})$$

$$\leqslant \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{\frac{3}{2}}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}).$$

再由柯西不等式可知

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \leqslant \sqrt{3} \cdot \sqrt{a+b+c}.$$

综合上述两个不等式得到

$$a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab} \leqslant \frac{1}{3}(a+b+c)^2.$$

9·159　设 $0 \leqslant p \leqslant 1, 0 \leqslant q \leqslant 1$，且对任意实数 x, y 恒有

$$(px+(1-p)y)^2 = Ax^2+Bxy+Cy^2,$$
$$(px+(1-p)y)(qx+(1-q)y) = \alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2.$$

求证：(i) $\max(A,B,C) \geqslant \frac{4}{9}$；

(ii) $\max(\alpha,\beta,\gamma) \geqslant \frac{4}{9}$.

（第28届美国普特南数学竞赛，1967年）

［证］ (i) 由于

$$(px+(1-p)y)^2 \equiv Ax^2+Bxy+Cy^2,$$

所以　$A=p^2, B=2p(1-p), C=(1-p)^2, 0 \leqslant p \leqslant 1.$

如果 $A=p^2<\frac{4}{9}, C=(1-p)^2<\frac{4}{9}$，则

$$\frac{1}{3}<p<\frac{2}{3}.$$

从而

$$B=2p(1-p)=2\left[-\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]$$
$$>2\left(-\frac{1}{36}+\frac{1}{4}\right)=\frac{4}{9}.$$

又 $p=\frac{1}{3}$ 时，$A=\frac{1}{9}, B=C=\frac{4}{9}$，所以对于任意 $p \in [0,1]$，总有

$$\max(A,B,C) \geqslant \frac{4}{9}.$$

(ii) 由　$(px+(1-p)y)(qx+(1-q)y) \equiv \alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2$

立即可得

$$\alpha=pq, \beta=p(1-q)+q(1-p), \gamma=(1-p)(1-q),$$

其中 $0 \leqslant p \leqslant 1, 0 \leqslant q \leqslant 1$.

显然,若 $p=q=\frac{1}{3}$,即 $\alpha=\frac{1}{9},\beta=\gamma=\frac{4}{9}$.

若 $\alpha=pq<\frac{4}{9},\gamma=1-p-q+pq<\frac{4}{9}$,可以证明 $\beta=p+q-2pq>\frac{4}{9}$.

事实上,若不然,则 $\beta\leqslant\frac{4}{9}$.由 $\gamma<\frac{4}{9}$ 可推出 $p+q-pq>\frac{5}{9}$,从而

$$\frac{4}{9}\geqslant\beta=p+q-2pq>\frac{5}{9}-pq,$$

即得 $pq>\frac{1}{9}$.另一方面由

$$\frac{4}{9}\geqslant\beta=p+q-2pq\geqslant2\sqrt{pq}-2pq,$$

可得 $$-\left(\sqrt{pq}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\leqslant\frac{2}{9},$$

即 $\left|\sqrt{pq}-\frac{1}{2}\right|\geqslant\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{2}{9}}=\frac{1}{6}$.再由 $pq<\frac{4}{9}$,所以 $\sqrt{pq}\leqslant\frac{1}{3}$,与 $pq>\frac{1}{9}$ 矛盾!综上可知 $\max(\alpha,\beta,\gamma)\geqslant\frac{4}{9}$.

9·160 求证:对任何正数 a,b,c 如下不等式成立:

$$\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}\geqslant\sqrt{a^2+ac+c^2},$$

并证当且仅当 $\frac{1}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$ 时等号成立.

(前苏联教育部推荐试题,1988 年)

[证] 只需证

$$\sqrt{a^2-ab+b^2}\geqslant\left|\sqrt{a^2+ac+c^2}-\sqrt{b^2-bc+c^2}\right|. \quad ①$$

显然 ①⇔

$$a^2-ab+b^2\geqslant a^2+ac+c^2+b^2-bc+c^2-2\sqrt{a^2+ac+c^2}\sqrt{b^2-bc+c^2},$$

即 $$4(a^2+ac+c^2)(b^2-bc+c^2)\geqslant(2c^2+ab+ac-bc)^2.$$

于是经简单计算可知 ①⇔

$$a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2-2a^2bc-2abc^2+2ab^2c\geqslant0. \quad ②$$

由于 ② 的左端 $=(ac-ab-bc)^2$,所以 ② 成立.由此可知原不等式成立.

若原不等式中等号成立⇒① 中的等号成立⇒$ac-ab-bc=0$,即 $\frac{1}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$.

反之若$\frac{1}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$,则 ① 中等号成立且 $b<a,b<c$,所以

$$\sqrt{a^2+ac+c^2}>\sqrt{b^2-bc+c^2},$$

于是原不等式中的等号成立.

9・161 已知 x,y,z 都是非负实数且 $x+y+z=1$,求证:

$$0\leqslant xy+yz+zx-2xyz\leqslant\frac{7}{27}.$$

(第 25 届国际数学奥林匹克,1984 年)

[证 1] 不妨设 $x\geqslant y\geqslant z$,则 $0\leqslant z\leqslant\frac{1}{3}$,由于

$$xy-2xyz=xy(1-2z)\geqslant 0,$$

所以 $$xy+yz+zx-2xyz\geqslant 0.$$

另一方面,若 $x\geqslant\frac{1}{2}$,则 $yz-2xyz\leqslant 0$,所以

$$xy+yz+zx-2xyz\leqslant xy+zx=x(1-x)\leqslant\frac{1}{4}<\frac{7}{27}.$$

若 $x<\frac{1}{2}$,则 $y<\frac{1}{2},z<\frac{1}{2}$.由于

$$(1-2x)(1-2y)(1-2z)=1-2+4(xy+yz+zx)-8xyz,$$

又由均值不等式

$$(1-2x)(1-2y)(1-2z)\leqslant\left(\frac{3-2(x+y+z)}{3}\right)^3=\frac{1}{27},$$

从而 $$xy+yz+zx-2xyz\leqslant\frac{1}{4}\left(\frac{1}{27}+1\right)=\frac{7}{27}.$$

[证 2] $xy+yz+zx-2xyz\geqslant 0$ 的证法与[证 1]中相同.不妨设 $x\geqslant y\geqslant z$,令 $x=\frac{1}{3}+\delta_1,y=\frac{1}{3}+\delta_2,z=\frac{1}{3}+\delta_3$,则 $\delta_1\geqslant 0$,$-\frac{1}{3}\leqslant\delta_3\leqslant 0,\delta_1+\delta_2+\delta_3=0$,且

$$xy+yz+zx-2xyz=\frac{7}{27}+\frac{1}{3}(\delta_1\delta_2+\delta_2\delta_3+\delta_3\delta_1)$$
$$-2\delta_1\delta_2\delta_3.$$

由于 $0=(\delta_1+\delta_2+\delta_3)^2=\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2+2(\delta_1\delta_2+\delta_2\delta_3+\delta_3\delta_1)$,

所以 $xy+yz+zx-2xyz=\frac{7}{27}-\frac{1}{6}(\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2)-2\delta_1\delta_2\delta_3.$

若 $\delta_2\leqslant 0$,则 $\delta_1\delta_2\delta_3\geqslant 0$,所以

$$xy+yz+zx-2xyz\leqslant\frac{7}{27}.$$

若 $\delta_2>0$,由 $\delta_3=-(\delta_1+\delta_2)$,则

$$\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2=2(\delta_1-\delta_2)^2+6\delta_1\delta_2.$$

于是 $xy+yz+zx-2xyz=\frac{7}{27}-\frac{1}{3}(\delta_1-\delta_2)^2-\delta_1\delta_2-2\delta_1\delta_2\delta_3$

$$\leqslant\frac{7}{27}-\delta_1\delta_2(1+2\delta_3)<\frac{7}{27}.$$

9・162 设 a,b,c 是一三角形的三边长,实数 p,q,r 之和为 0,求证:$a^2pq+b^2qr+c^2rp\leqslant 0.$

(第 10 届国际城市际数学邀请赛,1988 年 ~ 1989 年)

[证] 令 $x+y=a,y+z=b,z+x=c$,由于 a,b,c 是一三角形的三边长,所以 $x>0,y>0,z>0$.将上述变换代入原不等式左端,则

$$a^2pq+b^2qr+c^2rp=(x+y)^2pq+(y+z)^2qr+(z+x)^2rp$$
$$=x^2(pq+rp)+y^2(pq+qr)+z^2(qr+rp)+2xypq+2yzqr+2zxrp$$
$$=-p^2x^2-q^2y^2-r^2z^2+2xypq+2yzqr+2zxrp.$$

由于 $p+q+r=0$,从而 pq,qr,rp 中必有两个非正,例如 $pq\leqslant 0,qr\leqslant 0$.于是

$$a^2pq+b^2qr+c^2rp\leqslant -p^2x^2-q^2y^2-r^2z^2+2zxrp$$
$$=-(px-rz)^2-q^2y^2\leqslant 0.$$

9・163 设实数 x,y,z 满足 $x^2+y^2+z^2=2$,求证:

$$x+y+z\leqslant xyz+2.$$

(第 28 届国际数学奥林匹克候选题,1987 年)

[证 1] 若 x,y,z 中至少有一个非正,不妨设 $z\leqslant 0$.由于 $x^2+y^2\leqslant 2$,则

$$x+y\leqslant\sqrt{2(x^2+y^2)}\leqslant 2, xy\leqslant\frac{1}{2}(x^2+y^2)\leqslant 1.$$

由此可得

$$x+y+z-2-xyz=(x+y-2)+z(1-xy)\leqslant 0.$$

若 x,y,z 全正,不妨设 $x\leqslant y\leqslant z$.若 $0<z\leqslant 1$,则

$$2+xyz-x-y-z=(1-x)(1-y)+(1-z)(1-xy)\geqslant 0.$$

若 $z>1$,则

$$x+y+z\leqslant\sqrt{2(z^2+(x+y)^2)}=2\sqrt{1+xy}\leqslant 2+xy<2+xyz.$$

无论何种情况要证之不等式成立.

[证 2] 只需证 $(x+y+z-xyz)^2\leqslant 4$. ①

由于 $x^2+y^2+z^2=2$,所以 ①⇔

$$2(xy+yz+zx)-2xyz(x+y+z)+x^2y^2z^2\leqslant 2,$$

即

$$1-(xy+yz+zx)+xyz(x+y+z)-\frac{1}{2}x^2y^2z^2\geqslant 0. \quad ②$$

由于

$$1-(xy+yz+zx)+xyz(x+y+z)-x^2y^2z^2=(1-xy)(1-yz)(1-zx),$$

又

$$1-xy=\frac{1}{2}(2-2xy)=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2-2xy)=\frac{1}{2}[(x-y)^2+z^2]\geqslant 0,$$

$$1-yz=\frac{1}{2}[x^2+(y-z)^2]\geqslant 0,$$

$$1-zx=\frac{1}{2}[y^2+(z-x)^2]\geqslant 0,$$

所以 ② 成立.

9·164 设 a,b,c 均为非负实数,求证:

$$a+b+c\geqslant\frac{a(bc+c+1)}{ca+a+1}+\frac{b(ca+a+1)}{ab+b+1}+\frac{c(ab+b+1)}{bc+c+1}.$$

(全苏数学夏令营,1991 年)

[证] 原不等式等价于

$$a+b+c\geqslant\frac{abc}{ca+a+1}+\frac{abc}{ab+b+1}+\frac{abc}{bc+c+1}+3-\frac{1}{ca+a+1}-\frac{1}{ab+b+1}-\frac{1}{bc+c+1},$$

即 $$3 \leqslant b-\frac{abc}{ca+a+1}+\frac{1}{ca+a+1}+c-\frac{abc}{ab+b+1}+\frac{1}{ab+b+1}+a-\frac{abc}{bc+c+1}+\frac{1}{bc+c+1}. \quad ①$$

由于

$$b-\frac{abc}{ca+a+1}+\frac{1}{ca+a+1}=\frac{ab+b+1}{ca+a+1},$$
$$c-\frac{abc}{ab+b+1}+\frac{1}{ab+b+1}=\frac{bc+c+1}{ab+b+1},$$
$$a-\frac{abc}{bc+c+1}+\frac{1}{bc+c+1}=\frac{ca+a+1}{bc+c+1},$$

利用均值不等式立即可知 ① 成立,从而原不等式成立.

9·165 设 a,b,c 是一三角形的三边长且 $a+b+c=1$,求证:

$$a^2+b^2+c^2+4abc<\frac{1}{2}.$$

(第 23 届全苏数学奥林匹克,1989 年)

[证 1] 令 $x+y=a, y+z=b, z+x=c$,则 x,y,z 均为正数且 $x+y+z=\frac{1}{2}(a+b+c)=\frac{1}{2}$.由于

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &= (x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2 \\ &= 2(x^2+y^2+z^2)+2(xy+yz+zx) \\ &= x^2+y^2+z^2+(x+y+z)^2 \\ &= x^2+y^2+z^2+\frac{1}{4}, \end{aligned}$$

又 $$\begin{aligned} 4abc &= 4(x+y)(y+z)(z+x) \\ &= 4\left(\frac{1}{2}-x\right)\left(\frac{1}{2}-y\right)\left(\frac{1}{2}-z\right) \\ &= 2(xy+yz+zx)-4xyz, \end{aligned}$$

所以 $$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2+4abc &= (x+y+z)^2+\frac{1}{4}-4xyz \\ &= \frac{1}{2}-4xyz<\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

[证 2] 原不等式等价于

$$(a+b+c)^2-2ab-2bc-2ca+4abc<\frac{1}{2}. \quad ①$$

由于 $a+b+c=1$,所以 ① 等价于

$$ab+bc+ca-2abc>\frac{1}{4}. \quad ②$$

因为 a,b,c 是一三角形的三边长,由两边之和大于第三边的性质及 $a+b+c=1$ 可推出

$$0<a<\frac{1}{2},0<b<\frac{1}{2},0<c<\frac{1}{2},$$

从而 $$\left(\frac{1}{2}-a\right)\left(\frac{1}{2}-b\right)\left(\frac{1}{2}-c\right)>0.$$

于是 $$\frac{1}{8}-\frac{1}{4}(a+b+c)+\frac{1}{2}(ab+bc+ca)-abc>0,$$

即 $$ab+bc+ca-2abc>\frac{1}{4}.$$

9·166 设长方体的棱长分别是 x,y 和 z 且 $x<y<z$.记 $p=4(x+y+z),s=2(xy+yz+zx),d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.求证:

$$x<\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}p-\sqrt{d^2-\frac{1}{2}s}\right),$$

$$z>\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}p+\sqrt{d^2-\frac{1}{2}s}\right).$$

(第 14 届全苏数学奥林匹克,1980 年)

[证] 令 $\alpha=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}p-\sqrt{d^2-\frac{1}{2}s}\right)$,

且 $\beta=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}p+\sqrt{d^2-\frac{1}{2}s}\right)$.以 α,β 为两个根的二次三项式为

$$f(t)=t^2-\frac{1}{6}pt+\frac{1}{6}s.$$

显然有 $$x<\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{1}{3}(x+y+z)<z.$$

又 $$f(x)=x^2-\frac{1}{6}px+\frac{1}{6}s=\frac{1}{3}(x^2-xy-xz+yz)$$

$$=\frac{1}{3}(y-x)(z-x)>0,$$

$$f(z)=z^2-\frac{1}{6}pz+\frac{1}{6}s=\frac{1}{3}(z^2-xz-yz+xy)$$

$$= \frac{1}{3}(z-x)(z-y) > 0,$$

所以 $\quad x < \alpha < \beta < z.$

9·167 设 a,b,c 是一三角形的三边长,求证:

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a) \geqslant 0,$$

并说明等号成立的条件.

(第 24 届国际数学奥林匹克,1983 年)

[证 1] 显然存在正数 x,y,z 使得 $y+z=a, z+x=b, x+y=c$. 由于

$$\begin{aligned} a^2b(a-b) &= (y+z)^2(z+x)(y-x) \\ &= (y+z)^2(z+x)(y-z+z-x) \\ &= (y+z)(z+x)(y^2-z^2)+(y+z)^2(z^2-x^2), \\ b^2c(b-c) &= (z+x)^2(x+y)(z-y) \\ &= (z+x)^2(x+y)(z-x+x-y) \\ &= (z+x)(x+y)(z^2-x^2)+(z+x)^2(x^2-y^2), \\ c^2a(c-a) &= (x+y)^2(y+z)(x-z) \\ &= (x+y)^2(y+z)(x-y+y-z) \\ &= (x+y)(y+z)(x^2-y^2)+(x+y)^2(y^2-z^2), \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} s &= a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a) \\ &= 2x(y-z)y^2+2y(z-x)z^2+2z(x-y)x^2. \end{aligned}$$

原不等式即 $s \geqslant 0$ 等价于

$$xyz(x+y+z) \leqslant xy^3+yz^3+zx^3 \tag{①}$$

由柯西不等式

$$\begin{aligned} x+y+z &= \frac{x}{\sqrt{y}}\sqrt{y}+\frac{y}{\sqrt{z}}\sqrt{z}+\frac{z}{\sqrt{x}}\sqrt{x} \\ &\leqslant \left(\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\right)^{\frac{1}{2}}(x+y+z)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{②}$$

则 $\quad x+y+z \leqslant \frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}.$

于是 ① 成立.

原不等式中等号成立的条件就是柯西不等式 ② 中等号成立的条件.

即 $\frac{x}{y}=\frac{y}{z}=\frac{z}{x}\Leftrightarrow x=y=z\Leftrightarrow a=b=c.$

[证 2] 不妨设 $a\geqslant\max(b,c)$. 由于

$$ba^3+b^2c(b-c)=b(a-b)(a-c)(a+b-c)+2bca^2+(b^3-b^2c-bc^2)a,$$

则

$$\begin{aligned}s&=a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\\&=ba^3-(b^2+c^2)a^2+c^3a+b^2c(b-c)\\&=b(a-b)(a-c)(a+b-c)-(b-c)^2a^2+(b+c)(b-c)^2a\\&=b(a-b)(a-c)(a+b-c)+a(b-c)^2(b+c-a).\end{aligned}$$

由 $a\geqslant b,a\geqslant c,b+c\geqslant a$ 可得 $s\geqslant 0$, 即原不等式成立. 显然等号成立的充分必要条件是 $a=b=c$.

9·168 设 $f_a(x,y)=x^2+axy+y^2$, 其中 $0\leqslant a\leqslant 2$. 对于任何 (x,y) 令

$$\overline{f_a}(x,y)=\min_{m,n\in z}f_a(x-m,y-n).$$

(1) 求证: $\overline{f_1}(x,y)<\frac{1}{2}$;

(2) 求证: $\overline{f_1}(x,y)\leqslant\frac{1}{3}$, 并求出所有使得 $\overline{f_a}(x,y)=\frac{1}{3}$ 的 (x,y);

(3) 对于任意固定的 $a\in[0,2]$, 求最小的正数 c, 使得对任何 (x,y) 有 $\overline{f_a}(x,y)\leqslant c$.

(第 5 届全苏数学奥林匹克, 1971 年)

[解] 只需做问题(3), 并求出使得(3)中等式成立的所有 (x,y).

对任何 (x,y), 显然存在 $m',n'\in z$ 使得 $|x'=x-m'|\leqslant\frac{1}{2}$, $|y'|=|y-n'|\leqslant\frac{1}{2}$ 且

$$\overline{f_a}(x,y)=\overline{f_a}(x',y').$$

因此在条件 $|x|\leqslant\frac{1}{2}$, $|y|\leqslant\frac{1}{2}$ 下讨论 $\overline{f_a}(x,y)$ 即可.

当 $a=0$ 时, 由于 $|x|\leqslant\frac{1}{2}$, $|y|\leqslant\frac{1}{2}$, 显然

$$f_0(x,y)=x^2+y^2\leqslant\frac{1}{2},$$

当且仅当 $|x|=\dfrac{1}{2}$，$|y|=\dfrac{1}{2}$ 时等号成立.当 $a=2$ 时，

$$\begin{aligned}f_2(x,y)&=\min_{m,n\in z}f_2(x-m,y-n)\\&=\min_{m,n\in z}((x-m)^2+2(x-m)(y-n)+(y-n)^2)\\&=\min_{m,n\in z}(x+y-m-n)^2\leqslant\frac{1}{4},\end{aligned}$$

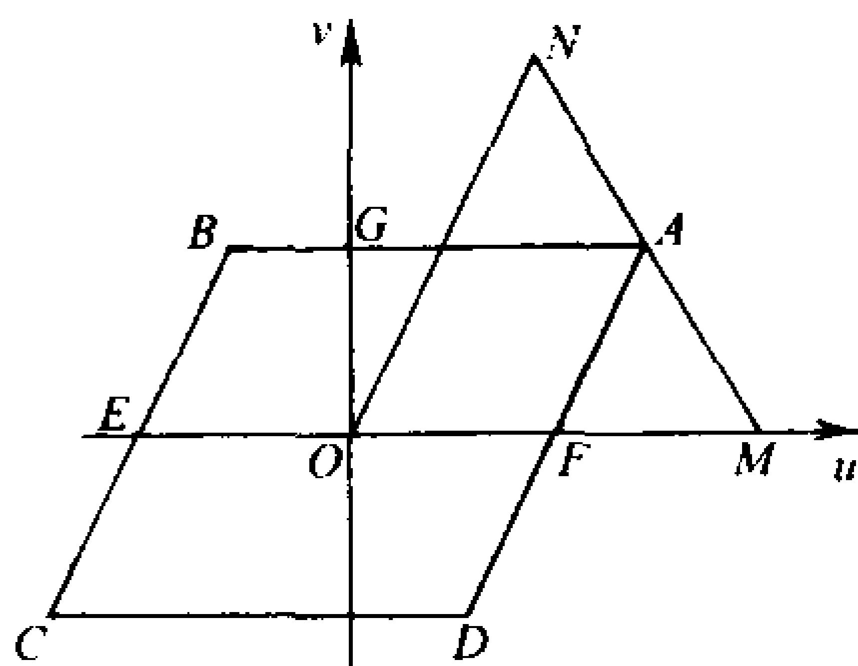
当且仅当 $|x+y|=\dfrac{1}{2}$ 时等号成立.

以下讨论 $0<a<2$ 的情况.易知

$$\begin{aligned}f_a(x-m,y-n)&=(x-m)^2+a(x-m)(y-n)+(y-n)^2\\&=\left[\left(x+\frac{a}{2}y\right)-\left(m+\frac{a}{2}n\right)\right]^2+(by-bn)^2,\end{aligned}$$

其中 $b=\dfrac{1}{2}\sqrt{4-a^2}$.令

$$\begin{cases}u=x+\dfrac{a}{2}y\\v=by,\end{cases}$$



令 $|x|\leqslant\dfrac{1}{2}$，$|y|\leqslant\dfrac{1}{2}$，则 $\left|v-\dfrac{2b}{a}u\right|=\left|\dfrac{2b}{a}x\right|\leqslant\dfrac{b}{a}$，$|v|\leqslant\dfrac{b}{2}$ 即一切 (u,v) 在 uv 平面上组成如图所示的平行四边形 $ABCD$ 的内部及边界.经简单计算可知

$$A\left(\frac{1}{2}+\frac{a}{4},\frac{b}{2}\right),B\left(-\frac{1}{2}+\frac{a}{4},\frac{b}{2}\right),C\left(-\frac{1}{2}-\frac{a}{4},-\frac{b}{2}\right),$$

$D\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{a}{4},-\dfrac{b}{2}\right)$.由于平行四边形 $ABCD$ 关于原点 O 中心对称，所以只要在其上半平面部分平行四边形 $ABEF$ 上讨论就够了，其中 $E\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$，$F\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$.过原点 O 作 BC 的平行线分别交直线 $v=\dfrac{b}{2}$ 和 $v=b$ 于 G 和 N，连 NA 并延长交 u 轴于 M.易知 $G\left(\dfrac{a}{4},\dfrac{b}{2}\right)$，$N\left(\dfrac{a}{2},b\right)$，$M(1,0)$.

显然$\left\{(x,y);0\leqslant y\leqslant\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 0\right\}$对立于

$$\left\{(u,v);0\leqslant v\leqslant\frac{b}{2},-\frac{b}{a}\leqslant\frac{2b}{a}u-v\leqslant 0\right\},$$

即平行四边形 $GBEO$ 内及边界,又 $f_a(x-m,y-n)$ 等于相应之点(u,v)到点$\left(m+\frac{a}{2}n,bn\right)$距离的平方,由此易知

$$f_a(x,y)=\left(x+\frac{a}{2}y\right)^2+b^2y^2=u^2+v^2.$$

由 $EO=GO=\frac{1}{2}$,

$$BO^2=\left(-\frac{1}{2}+\frac{a}{4}\right)^2+\frac{b^2}{4}=\frac{1}{4}+\frac{a^2}{16}-\frac{a}{4}+\frac{4-a^2}{16}=\frac{1}{2}-\frac{a}{4}.$$

于是可得

$$\overline{f_a}(x,y)\leqslant\max\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}-\frac{a}{4}\right),对于任意$$

$$-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 0,0\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}.$$

若(x,y)满足$0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},0\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}$,则与之对应的$(u,v)$在平行四边形 $AGOF$ 内或其边界上,而且不难证明$\overline{f_a}(x,y)$ 等于(u,v) 到点 M,N 和 O 距离平方的三个数中最小的数,所以当

$$0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},0\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}\text{ 时}$$

$$\overline{f_a}(x,y)\leqslant R^2,$$

其中 R 是 $\triangle MNO$ 的外接圆半径,且等号成立的充分必要条件是(u,v)是 $\triangle MNO$ 的外心.经简单计算易知 $R^2=\frac{1}{a+2}$,$\triangle MNO$ 的外心为$\left(\frac{1}{2},\frac{b}{2+a}\right)$.由

$$\begin{cases}x+\frac{a}{2}y=\frac{1}{2}\\ by=\frac{b}{2+a}\end{cases}$$

解得 $x = y = \frac{1}{2+a}$.

显然 $\max\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2} - \frac{a}{4}\right) < \frac{1}{a+2}$,对于任意 $0 < a < 2$.

总之,对任何 $a \in [0,2]$,存在 $c = \frac{1}{a+2}$ 使得对任何 (x,y) 有

$$\overline{f_a}(x,y) \leqslant c.$$

若 $x = x' + m, y = y' + n$,其中 $|x'| \leqslant \frac{1}{2}$, $|y'| \leqslant \frac{1}{2}$, $m, n \in z$,则 $\overline{f_a}(x,y) = c \Leftrightarrow$ 当 $a = 0$ 时, $|x'| = |y'| = \frac{1}{2}$;当 $a = 2$ 时 $|x' + y'| = \frac{1}{2}$;当 $0 < a < 2$ 时 $x' = \frac{1}{a+2}, y' = \frac{1}{a+2}$ 或 $x' = -\frac{1}{a+2}, y' = -\frac{1}{a+2}$.

9・169 设 x, y, z 是正实数,且 $xyz = 1$.证明:

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geqslant \frac{3}{4}.$$

(第 39 届国际数学奥林匹克预选题,1998 年)

[证] 原不等式等价于

$$x^4 + x^3 + y^4 + y^3 + z^4 + z^3 \geqslant \frac{3}{4}(1+x)(1+y)(1+z)$$

由于对任意正数 u, v, w,有

$$u^3 + v^3 + w^3 \geqslant 3uvw,$$

因此,只需证明

$$x^4 + x^3 + y^4 + y^3 + z^4 + z^3 \geqslant \frac{1}{4}[(x+1)^3 + (y+1)^3 + (z+1)^3]. \quad ①$$

令

$$f(t) = t^4 + t^3 - \frac{1}{4}(t+1)^3,$$
$$g(t) = (t+1)(4t^2 + 3t + 1),$$

则

$$f(t) = \frac{1}{4}(t-1)g(t),$$

且 $g(t)$ 是在 $(0,+\infty)$ 上的严格递增函数. 显然, ① 式等价于

$$f(x)+f(y)+f(z)\geqslant 0,$$

即

$$\frac{1}{4}(x-1)g(x)+\frac{1}{4}(y-1)g(y)+\frac{1}{4}(z-1)g(z)\geqslant 0. \quad ②$$

因此, 只需证明 ② 式就可以了.

不妨设 $x\geqslant y\geqslant z$, 则 $g(x)\geqslant g(y)\geqslant g(z)>0$, 由 $xyz=1$ 得 $x\geqslant 1, z\leqslant 1$, 从而有

$$(x-1)g(x)\geqslant(x-1)g(y),$$
$$(z-1)g(y)\leqslant(z-1)g(z),$$

故

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}(x-1)g(x)+\frac{1}{4}(y-1)g(y)+\frac{1}{4}(z-1)g(z)\\ \geqslant&\frac{1}{4}[(x-1)+(y-1)+(z-1)]g(y)\\ =&\frac{1}{4}(x+y+z-3)g(y)\\ \geqslant&\frac{1}{4}(3\sqrt[3]{xyz}-3)g(y)\\ =&0\end{aligned}$$

从而原不等式成立. 等号仅当 $x=y=z$ 时成立.

9·170 设 $x,y,z\geqslant 0$, 且满足

$$yz+zx+xy=1.$$

求证:

$$x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-z^2)(1-x^2)+z(1-x^2)(1-y^2)\leqslant\frac{4}{9}\sqrt{3}.$$

(中国香港数学奥林匹克, 1994 年)

[证] 令

$$x=\operatorname{tg}\frac{A}{2}, y=\operatorname{tg}\frac{B}{2}, z=\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

这里 $A,B,C\in[0,\pi)$. 由于

$$\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)=\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)+\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{1-\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{\dfrac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{1-\dfrac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}-\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}},$$

因此,

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)=\frac{1-\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{1-(xy+yz+zx)}{x+y+z-xyz}. \quad ①$$

由已知条件,y,z 不全为零,且

$$0\leqslant yz\leqslant 1,$$

从而有

$$x+y+z>x\geqslant xyz\geqslant 0.$$

因此①式的分母大于零,但由已知条件可知,①式的分子等于零,于是有,

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)=0.$$

由已知条件,x,y,z 不全为零,从而 A,B,C 不全为零,所以

$$0<\frac{1}{2}(A+B+C)<\frac{3\pi}{2},$$

由上面两式,得

$$\frac{1}{2}(A+B+C)=\frac{\pi}{2},$$

代数卷

即

$$A+B+C=\pi. \qquad ②$$

将求证的不等式的左边化为三角函数式,有

$$x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-z^2)(1-x^2)+z(1-x^2)(1-y^2)$$

$$=\operatorname{tg}\frac{A}{2}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\right)\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\right)+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\right)\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\right)+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\right)\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\right)$$

$$=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}\cdot\frac{\cos B}{\cos^2\frac{B}{2}}\cdot\frac{\cos C}{\cos^2\frac{C}{2}}+\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}}\cdot\frac{\cos C}{\cos^2\frac{C}{2}}\cdot\frac{\cos A}{\cos^2\frac{A}{2}}+\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}}\cdot\frac{\cos A}{\cos^2\frac{A}{2}}\cdot\frac{\cos B}{\cos^2\frac{B}{2}}$$

$$=\frac{\sin A\cos B\cos C+\sin B\cos C\cos A+\sin C\cos A\cos B}{2\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}} \qquad ③$$

利用 ②,将 ③ 式的分子化简,有

$$\begin{aligned}&\sin A\cos B\cos C+\sin B\cos C\cos A+\sin C\cos A\cos B\\&=\cos C\cdot\sin(A+B)+\sin C\cos A\cos B\\&=\cos C\cdot\sin C+\sin C\cos A\cos B\\&=\sin C[-\cos(A+B)+\cos A\cos B]\\&=\sin C\cdot\sin A\sin B\end{aligned}$$

将这个结果代入 ③ 式,有

$$\begin{aligned}&x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-z^2)(1-x^2)+z(1-x^2)(1-y^2)\\&=4\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\\&=4xyz.\end{aligned} \qquad ④$$

由算术-几何平均不等式,有

$$(xyz)^2=xy\cdot yz\cdot zx$$

$$\leqslant \left(\frac{xy + yz + zx}{3}\right)^3$$

$$= \frac{1}{27},$$

从而

$$xyz \leqslant \frac{1}{9}\sqrt{3}.$$

将上式代入 ④,得

$$x(1-y^2)(1-z^2) + y(1-z^2)(1-x^2) + z(1-x^2)(1-y^2)$$

$$\leqslant \frac{4}{9}\sqrt{3}.$$

9 · 171　设 a,b,c 为正实数且满足 $abc = 1$. 试证:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

(第 36 届国际数学奥林匹克,1995 年)

[证]　令

$$A = \frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)},$$

则由 $\frac{1}{a} = bc$ 可得

$$A = \frac{b^2c^2}{a(b+c)} + \frac{c^2a^2}{b(c+a)} + \frac{a^2b^2}{c(a+b)}.$$

利用柯西不等式和算术-几何平均不等式可得

$$[a(b+c) + b(c+a) + c(a+b)] \cdot A$$

$$\geqslant \left(\sqrt{a(b+c)} \cdot \frac{bc}{\sqrt{a(b+c)}} + \sqrt{b(c+a)} \cdot \frac{ca}{\sqrt{b(c+a)}} + \sqrt{c(a+b)} \cdot \frac{ab}{\sqrt{c(a+b)}}\right)^2$$

$$= (bc + ca + ab)^2$$

$$\geqslant (bc + ca + ab) \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{bc \cdot ca \cdot ab}$$

$$= 3(bc + ca + ab),$$

即　$2(bc + ca + ab) \cdot A \geqslant 3(bc + ca + ab)$,

$$A \geqslant \frac{3}{2}.$$

9・172　设 a,b,c 是正实数,并且满足 $abc=1$.证明:

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca}\leqslant 1,$$

并且指明等号在什么条件下成立.

(第37届国际数学奥林匹克预选题,1996年)

[证]　由

$$a^5+b^5-a^2b^2(a+b)=(a^2-b^2)(a^3-b^3)\geqslant 0,$$

可得

$$a^5+b^5\geqslant a^2b^2(a+b) \tag{①}$$

由已知和①式可知

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}=\frac{a^2b^2c}{a^5+b^5+a^2b^2c}$$

$$\leqslant\frac{a^2b^2c}{a^2b^2(a+b)+a^2b^2c}=\frac{c}{a+b+c}, \tag{②}$$

同理可得　$$\frac{bc}{b^5+c^5+bc}\leqslant\frac{a}{a+b+c}, \tag{③}$$

$$\frac{ca}{c^5+a^5+ca}\leqslant\frac{b}{a+b+c}, \tag{④}$$

②+③+④得

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca}$$

$$\leqslant\frac{c}{a+b+c}+\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}=1.$$

由于①式当且仅当 $a=b$ 时等式成立,因此②式当且仅当 $a=b$ 时等号成立.同理,③式当且仅当 $b=c$ 时等号成立,④式当且仅当 $c=a$ 时等号成立.

故原不等式当且仅当 $a=b=c=1$ 时等号成立.

9・173　设 x,y,z 为实数,证明:

$$|x|+|y|+|z|\leqslant|x+y-z|+|x-y+z|+|-x+y+z|.$$

(第58届莫斯科数学奥林匹克,1996年)

[证]　因为

$$(x+y-z)+(x-y+z)=2x,$$

所以

$$|x+y-z|+|x-y+z| \geqslant 2|x|. \quad ①$$

同理可得

$$|x-y+z|+|-x+y+z| \geqslant 2|z|, \quad ②$$

$$|x+y-z|+|-x+y+z| \geqslant 2|y|, \quad ③$$

① + ② + ③ 得

$$2(|x+y-z|+|x-y+z|+|-x+y+z|)$$
$$\geqslant 2(|x|+|y|+|z|),$$

于是原不等式得证.

9・174　命题(*):设 a,b,c 是非负实数,如果 $a^4+b^4+c^4 \leqslant 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$,则

$$a^2+b^2+c^2 \leqslant 2(ab+bc+ca).$$

(1) 证明命题(*)是正确的;

(2) 试写出命题(*)的逆命题,并判定你写出的逆命题是否是真命题,写出理由.

(中国北京市中学生数学竞赛,1996 年)

[解] (1) 设

$$D = 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)$$
$$= 4a^2b^2-(a^2+b^2)^2+2c^2(a^2+b^2)-c^4$$
$$= (2ab)^2-(a^2+b^2-c^2)^2.$$

由已知,$D \geqslant 0$,所以

$$(2ab)^2 \geqslant (a^2+b^2-c^2)^2$$
$$2ab \geqslant |a^2+b^2-c^2|.$$

由对称性,不妨设 $a \geqslant b \geqslant c$. 于是有

$$a^2+b^2+c^2 = |a^2+b^2-c^2|+2c^2 \leqslant 2ab+2c^2$$
$$\leqslant 2(ab+bc+ca).$$

(2)(*)的逆命题:设 a,b,c 是非负实数. 如果 $a^2+b^2+c^2 \leqslant 2(ab+bc+ca)$,则

$$a^4+b^4+c^4 \leqslant 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2).$$

(*)的逆命题不真.

事实上,当 $a=4, b=c=1$ 时,

$a^2+b^2+c^2=18$,

$2(ab+bc+ca)=18$,

满足(＊)的逆命题的题设条件 $a^2+b^2+c^2\leqslant 2(ab+bc+ca)$.

而 $a^4+b^4+c^4=258$,

$2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=66$,

不满足(＊)的逆命题的结论.

因此,(＊)的逆命题不成立.

第6节 多个变量的不等式

9·175 设实数 a,b,c,d,p,q 满足:

$$ab+cd=2pq,ac\geqslant p^2>0.$$

求证 $bd\leqslant q^2$.

(第16届全俄数学奥林匹克,1990年)

[证] 用反证法.如果 $bd>q^2$,则

$$4abcd=4(ac)(bd)>4p^2q^2=(ab+cd)^2$$
$$=a^2b^2+2abcd+c^2d^2.$$

由此可得 $(ab-cd)^2<0$,

矛盾!

9·176 设 a,b,c,d 都是正数.求证:下列三个不等式至少有一个不成立,

①$a+b<c+d$,

②$(a+b)(c+d)<ab+cd$,

③$(a+b)cd<ab(c+d)$.

(第3届全苏数学奥林匹克,1969年)

[证] 将前两个不等式两端分别相乘可得

$$(a+b)^2<ab+cd.$$

再由$(a+b)^2\geqslant 4ab$,所以 $3ab<cd$.

同理由后两个不等式可得 $(a+b)^2cd<ab(ab+cd)$.

再由$(a+b)^2\geqslant 4ab$,从而$3cd<ab$.于是三个不等式不可能同时成立.

9·177 设 a,b,c,d 为正实数,求证:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\geqslant\frac{64}{a+b+c+d}.$$

（列宁格勒数学奥林匹克，1988 年）

［证］ $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\right)(a+b+c+d)$

$$=1+\frac{a}{b}+\frac{4a}{c}+\frac{16a}{d}+\frac{b}{a}+1+\frac{4b}{c}+\frac{16b}{d}+$$

$$+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+4+\frac{16c}{d}+\frac{d}{a}+\frac{d}{b}+\frac{4d}{c}+16$$

$$=22+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{4a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{16a}{d}+\frac{d}{a}\right)+$$

$$\left(\frac{4b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{16b}{d}+\frac{d}{b}\right)+\left(\frac{16c}{d}+\frac{4d}{c}\right)$$

$$\geqslant 22+2+4+8+4+8+16$$

$$=64.$$

于是原不等式得证.

9·178 设 $f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx$，其中 a_1，$a_2,\cdots,a_n$ 是实数，n 是正整数. 如果对所有实数 x 有

$$|f(x)|\leqslant|\sin x|,$$

求证：$|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\leqslant 1$.

（第 28 届美国普特南数学竞赛，1967 年）

［证］ 令 $M=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$. 对于正整数 $k(1\leqslant k\leqslant n)$，由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{\sin x}=k,$$

所以任给 $\varepsilon>0$，存在实数 x，使 $\sin x\neq 0$，且

$$\left|\frac{\sin kx}{\sin x}-k\right|<\frac{\varepsilon}{M}, k=1,2,\cdots,n.$$

由此可得

$$1\geqslant\left|\frac{f(x)}{\sin x}\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k\sin kx}{\sin x}\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}ka_k-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\sin kx}{\sin x}-k\right)a_k\right|$$

$$\geqslant\left|\sum_{k=1}^{n}ka_k\right|-\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\sin kx}{\sin x}-k\right||a_k|\geqslant\left|\sum_{k=1}^{n}ka_k\right|-\varepsilon,$$

由 ε 的任意性可知要证之不等式成立.

9·179 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是自然数，其中 $n>2$，且 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots$

$\leqslant a_n$.求证:对一切不全为0的实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,不等式

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} > 0$$

恒成立的充要条件是 $a_2 \geqslant 2$.

(第11届奥地利-波兰数学竞赛,1988年)

[证] 必要性.如果 $a_2 = 1$,则 $a_1 = 1$.取

$$x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = \frac{1}{a_3}, x_4 = \cdots = x_n = 0,$$

则
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} &= x_1^2 + x_2^2 + a_3 x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 \\ &= -\frac{1}{a_3} < 0.\end{aligned}$$

与假设矛盾,故 $a_2 \geqslant 2$.

充分性.由于 $2 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \cdots \leqslant a_n$,所以

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} &\geqslant x_1^2 + 2\sum_{i=2}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} \\ &= (x_1 + x_2)^2 + \cdots + (x_{n-1} + x_n)^2 + x_n^2 \\ &\geqslant 0,\end{aligned}$$

且最后的等号仅在 $x_n = x_{n-1} = \cdots = x_1 = 0$ 时成立.

9・180 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$ 都是实数.求证:使得对任何满足 $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$ 的实数,不等式

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} b_i x_i$$

都成立的充分必要条件是

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \geqslant \sum_{i=1}^{k} b_i, k = 1,2,\cdots,n-1,$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

(中国国家集训队选拔试题,1986年)

[证] 先证必要性.令 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$,则

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

再令 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = -1$,得

$$-\sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant -\sum_{i=1}^{n} b_i.$$

故 $$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

对于 $1 \leqslant k \leqslant n-1$,令 $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0, x_{k+1} = \cdots = x_n = 1$,

得 $$\sum_{i=k+1}^{n} a_i \leqslant \sum_{i=k+1}^{n} b_i.$$

又由 $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i$ 可得

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \geqslant \sum_{i=1}^{k} b_i.$$

再证充分性.令 $S_0 = 0, s_k = \sum_{i=1}^{k}(a_i - b_i), k = 1,2,\cdots,n$.由假设可知 $s_k \geqslant 0, k = 1,2,\cdots,n-1, s_n = 0$ 且

$$a_k - b_k = s_k - s_{k-1}, k = 1,2,\cdots,n.$$

任取实数 $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$,则

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_i x_i - \sum_{i=1}^{n} b_i x_i &= \sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n}(s_i - s_{i-1})x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} s_i x_i - \sum_{i=1}^{n} s_{i-1} x_i.\end{aligned}$$

由于 $s_0 = s_n = 0$,所以

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_i x_i - \sum_{i=1}^{n} b_i x_i &= \sum_{i=1}^{n-1} s_i x_i - \sum_{i=1}^{n-1} s_i x_{i+1} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} s_i(x_i - x_{i+1}) \leqslant 0.\end{aligned}$$

于是得到

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} b_i x_i.$$

9·181 设 a,b,A,B 为已给实数,

$$f(\theta) = 1 - a\cos\theta - b\sin\theta - A\cos 2\theta - B\sin 2\theta.$$

如果对一切实数 θ 都有 $f(\theta) \geqslant 0$,求证:

$$a^2+b^2\leqslant 2, A^2+B^2\leqslant 1.$$

（第 19 届国际数学奥林匹克，1977 年）

［证］ 取 $\beta, r\in[0,2\pi]$ 使得

$$a\cos\theta+b\sin\theta=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\beta),$$

$$A\cos2\theta+B\sin2\theta=\sqrt{A^2+B^2}\cos(2\theta-\gamma),$$

则对于一切实数 θ 均有

$$\sqrt{A^2+B^2}\cos(2\theta-\gamma)\leqslant 1-\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\beta).$$

分别取 θ 满足 $2\theta-\gamma=0, 2\theta-\gamma=2\pi$，则

$$\sqrt{A^2+B^2}\leqslant 1-\sqrt{a^2+b^2}\cos\left(\frac{\gamma}{2}-\beta\right),$$

$$\sqrt{A^2+B^2}\leqslant 1+\sqrt{a^2+b^2}\cos\left(\frac{\gamma}{2}-\beta\right).$$

由此可知 $\sqrt{A^2+B^2}\leqslant 1$，所以 $A^2+B^2\leqslant 1$.

分别取 θ 满足 $\theta-\beta=\frac{\pi}{4}$ 和 $\theta-\beta=-\frac{\pi}{4}$，则

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2+b^2}\leqslant 1+\sqrt{A^2+B^2}\sin(2\beta-\gamma),$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2+b^2}\leqslant 1-\sqrt{A^2+B^2}\sin(2\beta-\gamma).$$

由此推得 $\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2+b^2}\leqslant 1$，所以 $a^2+b^2\leqslant 2$.

9·182 设 a,b,c,d 都是正数，求证：

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\geqslant 2.$$

（中国四川省高中数学联赛，1989 年）

［证］ 分两种情况讨论.

(i) $\frac{b}{b+c}+\frac{a}{a+b}+\frac{d}{d+a}+\frac{c}{c+d}\leqslant 2$. 由均值不等式可得

$$\frac{a+b}{b+c}+\frac{d+a}{a+b}+\frac{c+d}{d+a}+\frac{b+c}{c+d}\geqslant 4,$$

由此可知原不等式成立.

(ii) $\frac{b}{b+c}+\frac{a}{a+b}+\frac{d}{d+a}+\frac{c}{c+d}>2$. 显然有

$$\frac{c}{b+c}+\frac{b}{a+b}+\frac{a}{d+a}+\frac{d}{c+d}<2.$$

由于

$$\begin{aligned}&\frac{a+c}{b+c}+\frac{b+d}{c+d}+\frac{a+c}{d+a}+\frac{b+d}{a+b}\\&=(a+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{d+a}\right)+(b+d)\left(\frac{1}{c+d}+\frac{1}{a+b}\right)\\&\geqslant\frac{2(a+c)}{\sqrt{(b+c)(d+a)}}+\frac{2(b+d)}{\sqrt{(c+d)(a+b)}}\\&\geqslant\frac{4(a+c)}{a+b+c+d}+\frac{4(b+d)}{a+b+c+d}=4\end{aligned}$$

所以原不等式也成立.

9·183　设 a,b,c,d 均是非负实数且满足

$$ab+bc+cd+da=1.$$

求证:

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{a+c+d}+\frac{c^3}{a+b+d}+\frac{d^3}{a+b+c}\geqslant\frac{1}{3}.$$

(第 31 届国际数学奥林匹克预选题,1990 年)

[证]　记 $a=x_1,b=x_2,c=x_3,d=x_4,s=x_1+x_2+x_3+x_4$,原不等式可写为

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{x_i^3}{s-x_i}\geqslant\frac{1}{3}.\qquad①$$

由切比雪夫不等式可得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4}\frac{x_i^3}{s-x_i}&\geqslant\frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{s-x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{4}x_i^3\right)\\&\geqslant\frac{s}{16}\left(\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{s-x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{4}x_i^2\right).\end{aligned}$$

再由均值不等式得

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{s-x_i}&\geqslant\sqrt[4]{\frac{1}{(s-x_1)(s-x_2)(s-x_3)(s-x_4)}}\\&\geqslant\frac{4}{3s}.\end{aligned}$$

于是

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{x_i^3}{s-x_i}\geqslant\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{4}x_i^2.$$

利用假设和柯西不等式

$$1=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1\leqslant x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2,$$

从而 ① 成立.

9·184 设 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 都是正数,求证:

$$(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^2>4(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_1).$$

(第 7 届全苏数学奥林匹克,1973 年)

[证] 由轮换对称性不妨设

$$x_1=\min\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\},$$

记 $x_{5+k}=x_k,k=1,2,3,4,5$. 由于

$$\Big(\sum_{k=1}^{5}x_k\Big)^2-4\sum_{k=1}^{5}x_kx_{k+1}=\sum_{k=1}^{5}x_k^2=2\sum_{k=1}^{5}x_kx_{k+1}+2\sum_{k=1}^{5}x_kx_{k+2}$$

$$=(x_1-x_2+x_3-x_4+x_5)^2-4x_1x_5+4x_1x_4+4x_2x_5$$

$$=(x_1-x_2+x_3-x_4+x_5)^2+4(x_2-x_1)x_5+4x_1x_4>0,$$ 所以原不等式成立.

9·185 已知 5 个非负数之和为 1,求证:可以把这些数排在一个圆周上,使得每两个相邻的数乘积之和不大于$\frac{1}{5}$.

(第 47 届莫斯科数学奥林匹克,1984 年)

[证 1] 用 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 表示已知的 5 个数,

并记 $$x_{5k+r}=x_r,$$

其中 k 为非负整数,$r\in\{1,2,3,4,5\}$. 由于 $\sum_{i=1}^{5}x_i=1$,则

$$\sum_{i=1}^{5}x_i^2+2\sum_{i=1}^{5}x_ix_{i+1}+2\sum_{i=1}^{5}x_{2i-1}x_{2i+1}=1.$$

由柯西不等式

$$1=\Big(\sum_{i=1}^{5}x_i\Big)^2\leqslant 5\cdot\sum_{i=1}^{5}x_i^2,$$

从而 $\sum_{i=1}^{5}x_ix_{i+1}+\sum_{i=1}^{5}x_{2i-1}x_{2i+1}\leqslant\frac{2}{5}$.

于是 $\sum_{i=1}^{5}x_ix_{i+1}$ 和 $\sum_{i=1}^{5}x_{2i-1}x_{2i+1}$ 中必有一个不大于$\frac{1}{5}$,即 $x_1x_2+x_2x_3$

$+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_1$ 和 $x_1x_3+x_3x_5+x_5x_2+x_2x_4+x_4x_1$ 中必有一个不大于$\frac{1}{5}$.

由此立即可知要证之结论成立.

[证 2] 用 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 表示已知的5个数,不妨设 $x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant x_4\leqslant x_5$,令

$$a=x_3-x_1,b=x_3-x_2,c=x_4-x_3,d=x_5-x_3,$$

则 a,b,c,d 非负,且

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=5x_3-a-b+c+d=1. \quad ①$$

于是

$$\begin{aligned}&x_1x_4+x_4x_3+x_3x_2+x_2x_5+x_5x_1\\=&(x_3-a)(x_3+c)+(x_3+c)x_3+x_3(x_3-b)\\&+(x_3-b)(x_3+d)+(x_3+d)(x_3-a).\end{aligned}$$

记上式右端为 S,则

$$\begin{aligned}S&=5x_3^2-ax_3+cx_3-ac+cx_3-bx_3-bx_3+dx_3-bd+dx_3-\\&\quad ax_3-ad\\&=5x_3^2-2(a+b-c-d)x_3-ac-bd-ad.\end{aligned}$$

由①可得

$$\begin{aligned}S&=2x_3-5x_3^2-ac-bd-ad\\&=-5\left(x_3-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{1}{5}-ac-bd-ad\\&\leqslant\frac{1}{5}.\end{aligned}$$

于是 $\quad x_1x_4+x_4x_3+x_3x_2+x_2x_5+x_5x_1\leqslant\frac{1}{5}$,

由此立即可知要证之结论成立.

9·186 设 x_1,x_2,y_1,y_2,z_1,z_2 都是实数且满足

$$x_1>0,x_2>0,x_1y_1-z_1^2>0,x_2y_2-z_2^2>0.$$

求证 $\quad \dfrac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2}\leqslant\dfrac{1}{x_1y_1-z_1^2}+\dfrac{1}{x_2y_2-z_2^2}$,

并且给出上式中等号成立的充分必要条件.

(第11届国际数学奥林匹克,1969年)

[证]　记 $k_1 = x_1y_1 - z_1^2, k_2 = x_2y_2 - z_2^2$,则 $k_1, k_2 > 0$ 且

$$x_1y_2 + x_2y_1 = \frac{x_1}{x_2}x_2y_2 + \frac{x_2}{x_1}x_1y_1 = \frac{x_1}{x_2}(k_2 + z_2^2) + \frac{x_2}{x_1}(k_1 + z_1^2)$$
$$\geqslant 2\sqrt{k_1k_2} + 2z_1z_2.$$

从而
$$(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2 = k_1 + k_2 + x_1y_2 + x_2y_1 - 2z_1z_2$$
$$\geqslant 4\sqrt{k_1k_2}.$$

由此可知

$$\frac{8}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2} \leqslant \frac{2}{\sqrt{k_1k_2}} \leqslant \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2},$$

即要证的不等式成立. 显然等号成立的充分必要条件是 $k_1 = k_2, x_1 = x_2, z_1 = z_2$ 即 $x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2$.

9・187　设正数 $b_1, b_2, \cdots, b_{1989}$ 使得方程组

$$x_{r-1} - 2x_r + x_{r+1} + b_rx_r = 0, r = 1, 2, \cdots, 1989$$

有解,且 $x_0 = x_{1989} = 0, x_1, x_2, \cdots, x_{1989}$ 不全为 0.

求证: $b_1 + b_2 + \cdots + b_{1989} \geqslant \frac{2}{995}$.

(第 30 届国际数学奥林匹克预选题,1989 年)

[证]　记 $n = 1989$, $|x_k| = \max\limits_{0\leqslant i\leqslant n} |x_i| > 0$. 由于

$$\sum_{r=1}^{k} -rb_rx_r = \sum_{r=1}^{k} r(x_{r-1} - 2x_r + x_{r+1})$$
$$= x_0 + \sum_{r=1}^{k-1}(r + 1 - 2r + r - 1)x_r - 2kx_k + (k - 1)x_k + kx_{k+1}$$
$$= -(k + 1)x_k + kx_{k+1},$$

$$\sum_{r=k+1}^{n} -(n - r + 1)b_rx_r = \sum_{r=k+1}^{n}(n - r + 1)(x_{r-1} - 2x_r + x_{r+1})$$
$$= (n - k)x_k - (n - k + 1)x_{k+1},$$

所以

$$(n - k + 1)\sum_{r=1}^{k} rb_rx_r + k\sum_{r=k+1}^{n}(n - r + 1)b_rx_r = (n + 1)x_k.$$

又 $$(n-k+1)r\leqslant(n-k+1)k\leqslant\frac{(n+1)^2}{4},r=1,2,\cdots,k,$$

$$k(n-r+1)<k(n-k+1)\leqslant\frac{(n+1)^2}{4},r=k+1,\cdots,n,$$

从而 $$\frac{(n+1)^2}{4}\sum_{r=1}^{n}b_r\mid x_r\mid\geqslant(n+1)\mid x_k\mid.$$

注意到 $n=1989,\mid x_k\mid=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant 1989}\mid x_i\mid$,

于是得到 $$b_1+b_2+\cdots+b_{1989}\geqslant\frac{4}{n+1}=\frac{2}{995}.$$

9·188 设 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_{10}$,求证:

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_6}{6}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{10}}{10}.$$

(第43届莫斯科数学奥林匹克,1980年)

[证] 记 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_6}{6}=k$,由假设可知

$$k\leqslant a_n,n=7,8,9,10.$$

于是有 $$a_1+a_2+\cdots+a_{10}\geqslant 6k+4k=10k,$$

即 $$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{10}}{10}\geqslant k=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_6}{6}.$$

9·189 设 A,B,C,D 是空间中的四个点,求证:

$$\mid AC\mid^2+\mid BD\mid^2+\mid AD\mid^2+\mid BC\mid^2\geqslant\mid AB\mid^2+\mid CD\mid^2.$$

(第4届美国数学奥林匹克,1975年)

[证] 设 $(x_i,y_i,z_i),i=1,2,3,4$,分别是 A,B,C,D 的直角坐标,则

$$\mid AC\mid^2=(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2+(z_1-z_3)^2,$$

$$\mid BD\mid^2=(x_2-x_4)^2+(y_2-y_4)^2+(z_2-z_4)^2,$$

$$\mid AD\mid^2=(x_1-x_4)^2+(y_1-y_4)^2+(z_1-z_4)^2,$$

$$\mid BC\mid^2=(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+(z_2-z_3)^2,$$

$$\mid AB\mid^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2,$$

$$\mid CD\mid^2=(x_3-x_4)^2+(y_3-y_4)^2+(z_3-z_4)^2.$$

由于

$$(x_1-x_3)^2+(x_2-x_4)^2+(x_1-x_4)^2+(x_2-x_3)^2-(x_1-x_2)^2-$$

$(x_3 - x_4)^2$
$= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_4 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_1x_2 + 2x_3x_4$
$= (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2,$

$(y_1 - y_3)^2 + (y_2 - y_4)^2 + (y_1 - y_4)^2 + (y_2 - y_3)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (y_3 - y_4)^2$
$= (y_1 + y_2 - y_3 - y_4)^2,$

$(z_1 - z_3)^2 + (z_2 - z_4)^2 + (z_1 - z_4)^2 + (z_2 - z_3)^2 - (z_1 - z_2)^2 - (z_3 - z_4)^2$
$= (z_1 + z_2 - z_3 - z_4)^2.$

所以 $|AC|^2 + |BD|^2 + |AD|^2 + |BC|^2 - |AB|^2 - |CD|^2 \geqslant 0$,即原不等式成立.

9·190 已知正数 a,b,c,x,y,z 和 k 满足

$$a + x = b + y = c + z = k.$$

求证:$ay + bz + cx < k^2$.

(第21届全苏数学奥林匹克,1987年)

[证] 因为 $k^3 = (a + x)(b + y)(c + z)$
$= abc + acy + bcx + cxy + abz + ayz + bxz + xyz$
$= abc + xyz + k(ay + bz + cx),$

所以 $ay + bz + cx < k^2.$

9·191 设 $x_i \in [0,1], i = 1,2,3,4,5,6$.求证:

$$(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_4)(x_4 - x_5)(x_5 - x_6)(x_6 - x_1) \leqslant \frac{1}{16}.$$

(列宁格勒数学奥林匹克,1988年)

[证] 记 $y_i = x_i - x_{i+1}, i = 1,2,3,4,5, y_6 = x_6 - x_1$.不妨设 $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$ 均不为0.设有 l 个 y_i 为负,其余 $6 - l$ 个 y_i 为正,由 $\sum_{i=1}^{6} y_i = 0$,所以 $1 \leqslant l \leqslant 5$.若 $l = 1,3,5$,则原不等式左端为负,从而该不等式成立.只需讨论 $l = 2,4$ 的情况.

当 $l = 2$ 时,不妨设 $y_1 < 0$.如果 $y_2 < 0$,则

$$y_1y_2y_3y_4y_5y_6 \leqslant y_3y_4y_5y_6 \leqslant \left(\frac{|x_3 - x_1|}{4}\right)^4 \leqslant \frac{1}{4^4} < \frac{1}{16}.$$

如果 $y_3 < 0$,则

$$y_1y_2y_3y_4y_5y_6 \leqslant y_4y_5y_6 \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^3 < \frac{1}{16}.$$

如果 $y_4 < 0$,则

$$y_1y_2y_3y_4y_5y_6 \leqslant y_2y_3y_5y_6 \leqslant \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}.$$

$y_5 < 0$ 和 $y_6 < 0$ 两种情况的证明分别与 $y_3 < 0$ 和 $y_2 < 0$ 情况的证明相同.

当 $l = 4$ 时,令 $x'_i = x_{6-i+1}, i = 1,2,3,4,5,6$,则化为 $l = 2$ 的情况.

9·192　设 $0 < p \leqslant a,b,c,d,e \leqslant q$,求证

$$(a+b+c+d+e)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right)$$
$$\leqslant 25 + 6\left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2,$$

并且决定何时等号成立.

(第 6 届美国数学奥林匹克,1977 年)

[证]　给定正数 u, v,考虑函数

$$f(x) = (u+x)\left(v+\frac{1}{x}\right), 0 \leqslant p \leqslant x \leqslant q.$$

可以证明对任何 $x \in [p,q]$ 有

$$f(x) \leqslant \max\{f(p), f(q)\}. \qquad ①$$

事实上,不妨设 $p < q$,令 $\lambda = \dfrac{q-x}{q-p}$,则 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$

且　$x = \lambda p + (1-\lambda)q.$

由于　$pq \leqslant \lambda^2 pq + (1-\lambda)^2 pq + \lambda(1-\lambda)(p^2+q^2)$
$= [\lambda p + (1-\lambda)q][\lambda q + (1-\lambda)p],$

所以　$\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\lambda p + (1-\lambda)q} \leqslant \dfrac{\lambda}{p} + \dfrac{1-\lambda}{q}.$

由此可得

$$f(x) = uv + 1 + vx + \frac{u}{x}$$
$$= uv + 1 + v(\lambda p + (1-\lambda)q) + \frac{u}{\lambda p + (1-\lambda)q}$$

$$\leqslant uv+1+v(\lambda p+(1-\lambda)q)+\frac{\lambda u}{p}+\frac{(1-\lambda)u}{q}$$
$$=\lambda f(p)+(1-\lambda)f(q)\leqslant \max\{f(p),f(q)\},$$

即①成立.

由①可知,当 a,b,c,d,e 取端点值 p 或 q 时,$(a+b+c+d+e)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right)$可取其最大值.设 a,b,c,d,e 中有 x 个取 p,$5-x$ 个取 q,其中 x 是不大于5的非负整数.由于

$$[xp+(5-x)q]\left[\frac{x}{p}+\frac{5-x}{q}\right]$$
$$=x^2+(5-x)^2+x(5-x)\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}\right)$$
$$=25+x(5-x)\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2,$$

又 $x(5-x)-6=-(x-2)(x-3)$,所以当 $x=2$ 或者3时,$[xp+(5-x)q]\left[\frac{x}{p}+\frac{5-x}{q}\right]$取到最大值 $25+6\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2$.于是所证不等式成立,并且当 a,b,c,d,e 中有两个或者3个数等于 p,其余等于 q 时,等号成立.

9·193 任给8个实数 a,b,c,d,e,f,g,h.求证:$ac+bd,ae+bf,ag+bh,ce+df,cg+dh,eg+fh$6个数中至少有1个非负.

(第41届莫斯科数学奥林匹克,1978年)

[证] 记$\vec{v_1}=(a,b),\vec{v_2}=(c,d),\vec{v_3}=(e,f),\vec{v_4}=(g,h)$.

显然$\vec{v_1}\cdot\vec{v_2}=ac+bd,\vec{v_1}\cdot\vec{v_3}=ae+bf,\vec{v_1}\cdot\vec{v_4}$
$=ag+bh,\vec{v_2}\cdot\vec{v_3}=ce+df,\vec{v_2}\cdot\vec{v_4}$
$=cg+dh,\vec{v_3}\cdot\vec{v_4}=eg+fh.$

由于平面上任意4个向量至少有两个夹角不超过$\frac{\pi}{2}$,从而这两个向量的内积不小于0.所以要证的结论成立.

9·194 求证:对于任何实数 $a_1,a_2,\cdots,a_{1987}$ 和任何正数 $b_1,b_2,\cdots,b_{1987}$ 都有

$$\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_{1987})^2}{b_1+b_2+\cdots+b_{1987}} \leqslant \frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_{1987}^2}{b_{1987}}.$$

（第 50 届莫斯科数学奥林匹克，1987 年）

［证］ 记 $s=b_1+b_2+\cdots+b_{1987}$，则原不等式左端

为 $$s\cdot\left(\frac{b_1}{s}\cdot\frac{a_1}{b_1}+\frac{b_2}{s}\cdot\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{b_{1987}}{s}\cdot\frac{a_{1987}}{b_{1987}}\right)^2.$$

由函数 $f(x)=x^2$ 的凸性可知

$$\text{原不等式左端} \leqslant s\cdot\left(\frac{b_1}{s}\cdot\frac{a_1^2}{b_1^2}+\frac{b_2}{s}\cdot\frac{a_2^2}{b_2^2}+\cdots+\frac{b_{1987}}{s}\cdot\frac{a_{1987}^2}{b_{1987}^2}\right)$$

$$=\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_{1987}^2}{b_{1987}}.$$

9·195 在平面上已给 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$，求证 $|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|+|\vec{d}| \geqslant |\vec{a}+\vec{d}|+|\vec{b}+\vec{d}|+|\vec{c}+\vec{d}|$. ①

（第 10 届全苏数学奥林匹克，1976 年）

［证］ 显然 ① 的左端关于 $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ 对称. 由 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$ 可知

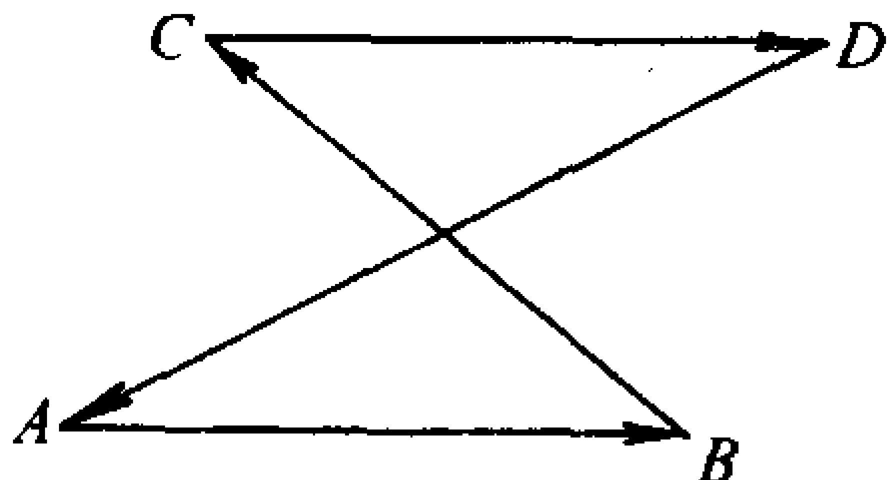
$$|\vec{a}+\vec{d}|=|\vec{b}+\vec{c}|,\ |\vec{b}+\vec{d}|=|\vec{a}+\vec{c}|,\ |\vec{c}+\vec{d}|=|\vec{a}+\vec{b}|,$$

所以 ① 的右端关于 $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ 也是对称的.

若四个向量两两相互平行或者其中一个是 $\vec{0}$ 时，容易证明 ① 成立. 只需证其余的情况. 如果有三个向量两两相互平行，由四个向量之和为 $\vec{0}$ 可知四个向量两两相互平行，从而只有以下两种情况：

(1) 仅有两个向量相互平行，如 $\vec{a}\,/\!/\,\vec{c}$. 在平面上适当选择 A,B,C,D 使得 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$，$\vec{b}=\overrightarrow{BC}$，$\vec{c}=\overrightarrow{CD}$，$\vec{d}=\overrightarrow{DA}$.

若 $\vec{a}$ 与 $\vec{c}$ 指向相同，则 $ABCDA$ 是自相交的封闭折线（如右图），于是



$$|\vec{a}+\vec{d}|+|\vec{c}+\vec{d}|=BD+CA.$$

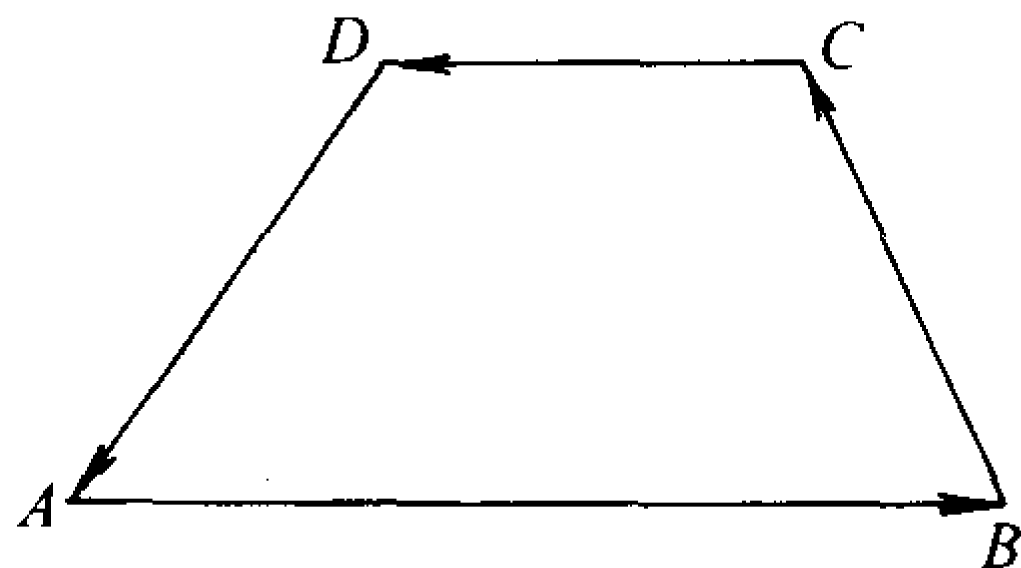
显然 $BD+CA<BC+DA=|\vec{b}|+|\vec{d}|$，

又 $|\vec{b}+\vec{d}|=|\vec{a}+\vec{c}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{c}|$，

所以 ① 成立.

若 $\vec{a}$ 与 $\vec{c}$ 指向相反，不妨设 $|\vec{c}|\leqslant|\vec{a}|$，则 $ABCDA$ 是一梯形的边

界(如右图).从而



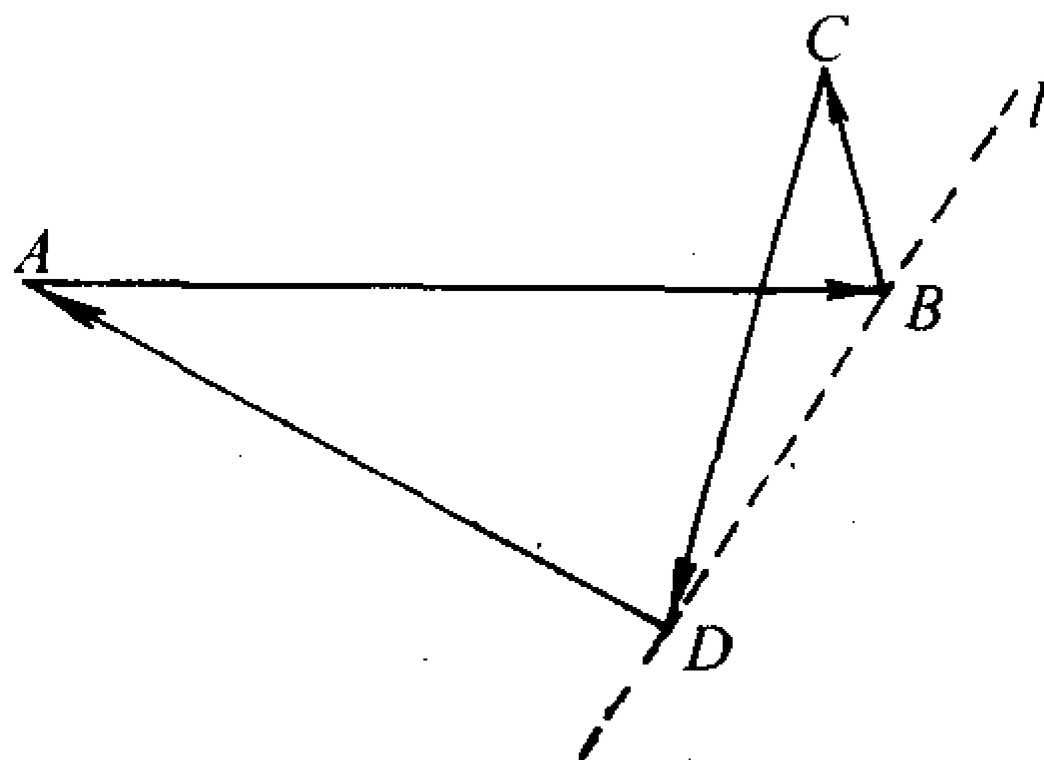
$$|\vec{a}+\vec{d}|+|\vec{c}+\vec{d}|=BD+CA<BC+DA+2CD=|\vec{b}|+|\vec{d}|+2|\vec{c}|$$,又 $|\vec{b}+\vec{d}|=|\vec{a}+\vec{c}|=|\vec{a}|-|\vec{c}|$,所以 ① 也成立.

(2)$\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ 任两个都不平行.在平面上适当选择坐标系使得已给的四个向量中最长的记为 $\vec{a}$,其坐标为 $(x_1,0)$,其中 $x_1>0$.其余三个向量的坐标分别记为 $(x_2,y_2),(x_3,y_3),(x_4,y_4)$,则 $x_1+x_2+x_3+x_4=0,y_2+y_3+y_4=0$

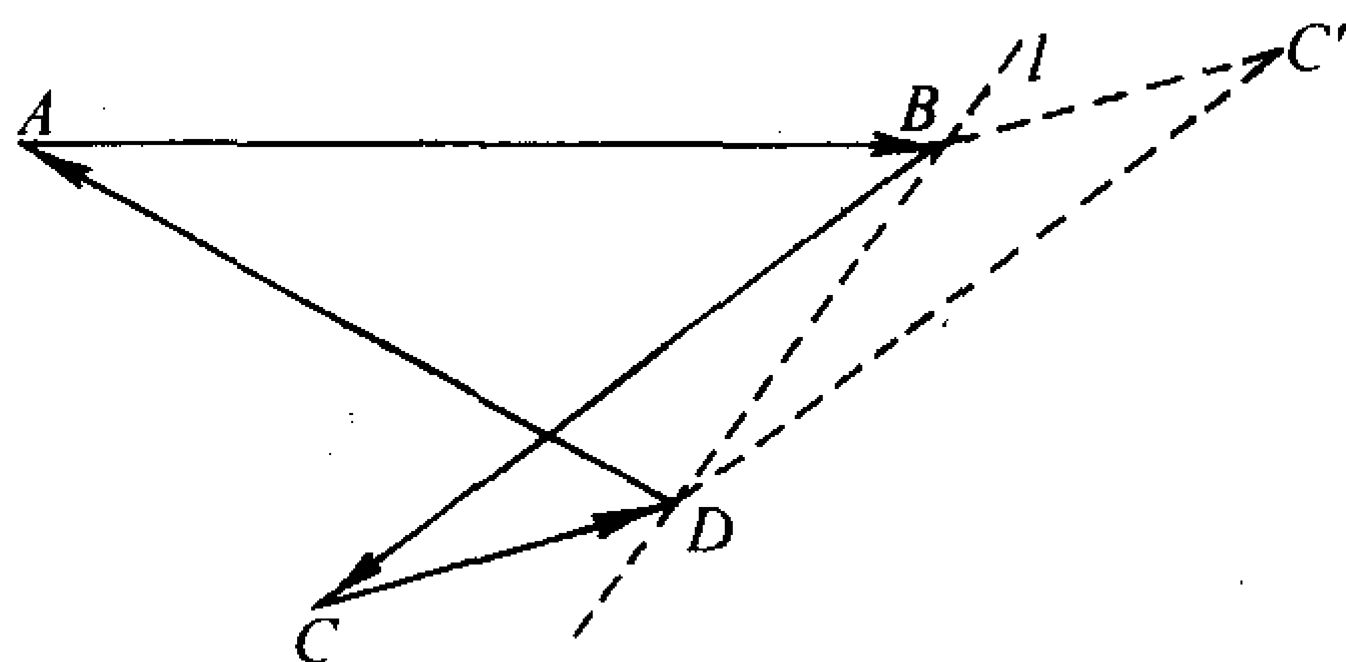
由于四个向量没有两个相互平行,所以 $y_i\neq 0,i=2,3,4$,不妨设 $y_2>0,y_4>0,y_3<0$.又

$$\sqrt{x_i^2+y_i^2}\leqslant x_1,i=2,3,4,$$

从而 x_2,x_3,x_4 中至多有一个非负,不妨设 $x_4<0$.令 $\vec{a}(x_1,0),\vec{d}(x_4,y_4)$.在平面上取点 $A(0,0),B(x_1,0),D(-x_4,-y_4)$,则 $\vec{AB}=\vec{a}$,$\vec{DA}=\vec{d}$.记 B,D 所在的直线为 l,显然点 (x_1+x_2,y_2) 与 (x_1+x_3,y_3) 都不在直线 l 上,否则 $\vec{b}/\!/\vec{c}/\!/l$,矛盾!



如果 (x_1+x_2,y_2) 与 $A(0,0)$ 在 l 的同侧,则记 $C(x_1+x_2,y_2)$,$\vec{b}=(x_2,y_2)=\overrightarrow{BC}$,$\vec{c}=(x_3,y_3)=\overrightarrow{CD}$ ($\overrightarrow{CD}=(-(x_1+x_2+x_4),-(y_2+y_4))=(x_3,y_3)$).如果 (x_1+x_2,y_2) 与 $A(0,0)$ 在 l 的异侧,记 $C'(x_1+x_2,y_2)$,连 $C'D$.过 B 作 $BC \mathrel{\underline{/\!/}} C'D$,显然 $C(x_1+x_3,y_2)$,$\vec{b}=(x_3,y_3)=$



$\overrightarrow{BC}$, $\vec{c}=(x_2,y_2)=\overrightarrow{CD}$. 无论何种情况显然 $ABCDA$ 都是自相交的封闭折线，由(1)中的证明可知 ① 成立.

9·196 已知 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是正数且 $a_1\cdot a_2\cdots\cdot a_n=1$. 求证：

$$(2+a_1)(2+a_2)\cdots(2+a_n)\geqslant 3^n.$$

（中国高中数学联赛，1989 年）

［证］ 由均值不等式

$$2+a_k=1+1+a_k\geqslant 3a_k^{\frac{1}{3}},k=1,2,\cdots,n.$$

将 n 个不等式两端分别相乘，注意到 $a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n=1$ 即得要证的不等式.

9·197 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都是正数，求证：

$$\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}+\frac{x_n^2}{x_1}\geqslant x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

（中国高中数学联赛，1984 年）

［证 1］ 由于 $\frac{x_1^2}{x_2}+x_2\geqslant 2x_1,\frac{x_2^2}{x_3}+x_3\geqslant 2x_2,\cdots,\frac{x_{n-1}^2}{x_n}+x_n\geqslant 2x_{n-1},\frac{x_n^2}{x_1}+x_1\geqslant 2x_n$，将这些不等式相加即得要证的不等式.

［证 2］ 由柯西不等式可得

$$\begin{aligned}&x_1+x_2+\cdots+x_n\\=&\frac{x_1}{\sqrt{x_2}}\sqrt{x_2}+\frac{x_2}{\sqrt{x_3}}\sqrt{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{\sqrt{x_n}}\sqrt{x_n}+\frac{x_n}{\sqrt{x_1}}\sqrt{x_1}\\\leqslant&(x_1+x_2+\cdots+x_n)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}+\frac{x_n^2}{x_1}\right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

所以要证之不等式成立.

9·198 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 都是 $1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n}$ 的一个排列. 如果

$$a_1+b_1\geqslant a_2+b_2\geqslant\cdots\geqslant a_n+b_n,$$

求证：$a_m + b_m \leqslant \frac{4}{m}, m = 1,2,\cdots,n$.

（第 2 届全苏数学奥林匹克，1968 年）

［证］ 任取 $1 \leqslant m \leqslant n$，在 $a_1 - b_1, a_2 - b_2, \cdots, a_m - b_m$ 这 m 个数中，或者有不少于 $\frac{m}{2}$ 个为非负，或者有不少于 $\frac{m}{2}$ 个为非正. 不妨设有不少于 $\frac{m}{2}$ 个为非负即存在 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 使得 $1 \leqslant i_l \leqslant m, l = 1,2, \cdots, k, k \geqslant \frac{m}{2}$

且 $$a_{i_l} \geqslant b_{i_l}, l = 1,2,\cdots,k.$$

由于 $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_k}$ 互不相同，不妨设

$$a_{i_1} < a_{i_2} < \cdots < a_{i_k}.$$

由 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}$ 的一个排列且 $k \geqslant \frac{m}{2}$ 可得 $a_{i_1} \leqslant \frac{2}{m}$，所以

$$a_m + b_m \leqslant a_{i_1} + b_{i_1} \leqslant 2a_{i_1} \leqslant \frac{4}{m}.$$

9 · 199 设实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足 $n \geqslant 2$ 且

$$0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant 2a_1, a_2 \leqslant a_3 \leqslant 2a_2, \cdots, a_{n-1} \leqslant a_n \leqslant 2a_{n-1}.$$

求证：在 $S = \pm a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n$ 中可适当选择符号使得

$$0 \leqslant S \leqslant a_1.$$

（第 6 届全俄数学奥林匹克，1966 年）

［证］ 用归纳法. 当 $n = 2$ 时，取 $S = -a_1 + a_2$. 由于 $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant 2a_1$，则 $0 \leqslant S \leqslant a_1$.

假设当 $n = k$ 时命题成立，讨论 $n = k + 1$ 的情况.

任取 $a_1, a_2, \cdots, a_k, a_{k+1}$ 满足题设条件. 对于 $a_2, \cdots, a_k, a_{k+1}$ 用归纳假设得 $S' = \varepsilon_2 a_2 + \varepsilon_3 a_3 + \cdots + \varepsilon_{k+1} a_{k+1}$，其中 $\varepsilon_m \in \{-1, 1\}, m = 2,3,\cdots,k+1$，满足 $0 \leqslant S' \leqslant a_2$. 令

$$S = \begin{cases} a_1 - S', S' \leqslant a_1; \\ -a_1 + S', S' > a_1. \end{cases}$$

由 $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant 2a_1$ 可知

$$0 \leqslant S \leqslant a_1.$$

即命题对 $n=k+1$ 也成立.

9·200 已知 $x_i, y_i (i=1,2,\cdots,n)$ 是实数且

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n,$$

$$y_1 \geqslant y_2 \geqslant \cdots \geqslant y_n.$$

又 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 是 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的任一种排列,求证:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2.$$

(第 17 届国际数学奥林匹克,1975 年)

[证] $\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}x_i^2 + \sum_{i=1}^{n}y_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$, $\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2$

$$= \sum_{i=1}^{n}x_i^2 + \sum_{i=1}^{n}z_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n}x_iz_i.$$

由于 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 是 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的一个排列,所以 $\sum_{i=1}^{n}y_i^2 = \sum_{i=1}^{n}z_i^2$. 再由假设和排序不等式可知

$$\sum_{i=1}^{n}x_iy_i \geqslant \sum_{i=1}^{n}x_iz_i.$$

从而要证之不等式成立.

9·201 沿圆周放$3n(n \geqslant 4)$个非负数,它们的总和为 1,现将每两个相邻数相乘,求证:所得 n 个乘积之和不大于$\frac{1}{4}$.

(第 47 届莫斯科数学奥林匹克,1984 年)

[证] 只需证当 $n \geqslant 4$ 时对任何非负数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,只要 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$,就有

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 \leqslant \frac{1}{4}. \quad ①$$

用归纳法. 当 $n=4$ 时,由于

$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1 = (x_1 + x_3)(x_2 + x_4) = (x_1 + x_3)(1 - x_1 - x_3)$,显然 ① 成立. 设 $n = k(k \geqslant 4)$ 时 ① 成立. 考虑 $n = k + 1$ 的情况. 不妨设 $x_1 = \max\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$. 显然有

$$x_1(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)x_4 \geqslant x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4. \quad ②$$

令 $y_1 = x_1, y_2 = x_2 + x_3, y_3 = x_4, \cdots, y_k = x_{k+1}$,则 $y_1 + y_2 + \cdots + y_k = 1$.由归纳假设可得

$$y_1y_2 + y_2y_3 + \cdots + y_{k-1}y_k + y_ky_1 \leqslant \frac{1}{4}.$$

再利用②则

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_kx_{k+1} + x_{k+1}x_1 \leqslant y_1y_2 + y_2y_3 + \cdots + y_{k-1}y_k + y_ky_1 \leqslant \frac{1}{4},$$

即①对于 $n = k + 1$ 也成立.所以对于 $n \geqslant 4$,①成立.

9·202 已给非负实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$.如果 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n$,求证:

$$\frac{x_1}{1 + x_1^2} + \frac{x_2}{1 + x_2^2} + \cdots + \frac{x_n}{1 + x_n^2} \leqslant \frac{1}{1 + x_1} + \frac{1}{1 + x_2} + \cdots + \frac{1}{1 + x_n}.$$

(前苏联教育部推荐试题,1989年)

[证] 对于 $1 \leqslant k \leqslant n$ 有

$$\frac{x_k}{1 + x_k^2} - \frac{1}{1 + x_k} = \frac{x_k - 1}{(1 + x_k^2)(1 + x_k)}.$$

若 $x_k \geqslant 1$,则 $(1 + x_k^2)(1 + x_k) \geqslant 4$.若 $x_k < 1$,则 $(1 + x_k^2)(1 + x_k) < 4$.于是无论何情况都有

$$\frac{x_k - 1}{(1 + x_k^2)(1 + x_k)} \leqslant \frac{x_k - 1}{4}.$$

由此可得

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k}{1 + x_k^2} - \frac{1}{1 + x_k}\right) \leqslant \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}(x_k - 1) = 0,$$

即原不等式成立.

9·203 已知实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n (n \geqslant 2)$ 满足:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a,$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = \frac{a^2}{n - 1},$$

其中 $a > 0$,求证:

$$0 \leqslant x_i \leqslant \frac{2a}{n}, i = 1,2,\cdots,n.$$

(中国四川省高中数学联赛,1988年)

[证] 先证 $x_i \geqslant 0, i = 1,2,\cdots,n$.若不然,则存在 $i \in \{1,2,\cdots,n\}$,使得 $x_i < 0$.由 $a > 0$ 可知必存在 $j \in \{1,2,\cdots,n\}$,使得 $x_j > 0$.由对称性不妨设 $x_1 < 0, x_2 > 0$.于是

$$\begin{aligned}&(x_1 + x_2)^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2\\ = &x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2 < \frac{a^2}{n-1},\end{aligned}$$

另一方面由柯西不等式可得

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2)^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2 &\geqslant \frac{1}{n-1}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2\\ &= \frac{a^2}{n-1}.\end{aligned}$$

从而引出矛盾!

再证 $x_i \leqslant \frac{2a}{n}, i = 1,2,\cdots,n$.由假设可得

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} = a - x_n,$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 = \frac{a^2}{n-1} - x_n^2.$$

利用柯西不等式,则

$$\begin{aligned}(a - x_n)^2 &= (x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1})^2\\ &\leqslant (n-1)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2)\\ &= a^2 - (n-1)x_n^2.\end{aligned}$$

从而得到 $\qquad -2ax_n + nx_n^2 \leqslant 0,$

再由 $x_n \geqslant 0$ 可得 $x_n \leqslant \frac{2a}{n}$.由对称性可知对任何 $i \in \{1,2,\cdots,n\}$ 都有

$$x_i \leqslant \frac{2a}{n}.$$

9·204 已知 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 都是实数,$n \geqslant 2$,且

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k| = 1, \sum_{i=1}^{n} x_i = 0.$$

求证：$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{k}\right|\leqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$.

代数卷

（中国高中数学联赛，1989 年）

［证 1］ 由假设易知

$$\sum_{x_k>0}x_k=\frac{1}{2},\sum_{x_k<0}x_k=-\frac{1}{2}.$$

所以 $\sum_{x_k>0}\frac{x_k}{k}\leqslant\frac{1}{2},\sum_{x_k<0}\frac{|x_k|}{k}\geqslant\frac{1}{2n}$. 由此可得

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{k}\right|=\left|\sum_{x_k>0}\frac{x_k}{k}-\sum_{x_k<0}\frac{|x_k|}{k}\right|\leqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}.$$

［证 2］ 令 $S_0=0,S_1=x_1,S_2=x_1+x_2,\cdots,S_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$. 由于 $\sum_{k=1}^{n}|x_k|=1,\sum_{k=1}^{n}x_k=0$，所以 $S_n=0$ 且

$$|S_k|\leqslant\frac{1}{2},k=0,1,2,\cdots,n.$$

因为 $\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}(S_k-S_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}S_k-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}S_{k-1}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}S_k-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}S_k.$$

注意到 $S_0=S_n=0$，所以

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{k}\right|=\left|\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)S_k\right|\leqslant\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}.$$

9·205 对任何正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，求证：

$$\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\cdots+\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_{n-1}}{a_n+a_1}+\frac{a_n}{a_1+a_2}>\frac{n}{4}.$$

（第 3 届全苏数学奥林匹克，1969 年）

［证］ 记 $a_{n+k}=a_k,k=1,2,3,\cdots,n$，则不等式左端可写为

$S=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{a_{k+1}+a_{k+2}}$，不妨设

$$a_1=\max_{1\leqslant k\leqslant n}a_k.$$

记 $\quad n_1 = 1;$

$$n_2 = \begin{cases} 2, a_2 \geqslant a_3, \\ 3, a_2 < a_3; \end{cases}$$

$$n_3 = \begin{cases} n_2 + 1, a_{n_2+1} \geqslant a_{n_2+2}, \\ n_2 + 2, a_{n_2+1} \geqslant a_{n_2+2}. \end{cases}$$

$$\cdots\cdots$$

显然存在$\frac{n}{2} \leqslant r < n$ 使得 $\quad n_r = n + 1$. 由于

$$S > \frac{1}{2}\left(\frac{a_{n_1}}{a_{n_2}} + \frac{a_{n_2}}{a_{n_3}} + \cdots + \frac{a_{n_{r-1}}}{a_{n_r}}\right)$$

又 $a_{n_1} = a_{n_r} = a_1$，利用均值不等式可得

$$S > \frac{r}{2} \geqslant \frac{n}{4}.$$

9 · 206 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 均为实数，如果它们中任意两数之和非负，那么对于满足

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$$

的任意非负实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，有以下不等式成立：

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \geqslant a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_n^2.$$

请证明上述命题及逆命题.

（第 1 届中国中学生数学冬令营，1986 年）

[证] 命题的证明：

$$\begin{aligned} & a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \\ = & (a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \\ = & \sum_{i,j=1}^{n} a_ix_ix_j \\ = & \sum_{i=1}^{n} a_ix_i^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_i + a_j)x_ix_j \\ \geqslant & a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_n^2. \end{aligned}$$

逆命题的陈述：设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是实数. 如果对于任意满足

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$$

的非负实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，都有

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\geqslant a_1x_1^2+a_2x_2^2+\cdots+a_nx_n^2,$$

则在 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中任意两数之和非负.

逆命题的证明:设 i,j 为自然数且满足

$$1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant n,i\neq j.$$

取 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为:$x_i=x_j=\frac{1}{2},x_k=0(k\neq i,k\neq j)$.

由 $$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\geqslant a_1x_1^2+a_2x_2^2+\cdots+a_nx_n^2,$$

可得 $$\frac{1}{2}(a_i+a_j)\geqslant\frac{1}{4}(a_i+a_j),$$

即 $$a_i+a_j\geqslant 0.$$

9·207 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都是非负实数,记

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=a.$$

求证:$x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n\leqslant\frac{a^2}{4}$.

(加拿大国家集训队训练题,1988 年)

[证] 当 $n=2,3$ 时,显然有

$$x_1x_2\leqslant\frac{(x_1+x_2)^2}{4}=\frac{a^2}{4},$$

$$x_1x_2+x_2x_3=x_2(x_1+x_3)\leqslant\frac{(x_1+x_2+x_3)^2}{4}=\frac{a^2}{4}.$$

当 $n\geqslant 4$ 时,可以证明更强的不等式

$$x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n+x_nx_1\leqslant\frac{a^2}{4}.\qquad ①$$

事实上,当 $n=4$ 时,由于

$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1=(x_1+x_3)(x_2+x_4)\leqslant\frac{a^2}{4},$$

所以①成立.设当 $n=k(k\geqslant 4)$ 时,①成立.任取非负实数 $x_1,x_2,\cdots,x_k,x_{k+1}$,由①式左端的轮换对称性可设 $x_{k+1}=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_k,x_{k+1}\}$.令

$$y_1=x_1+x_2,y_2=x_3,\cdots,y_{k-1}=x_k,y_k=x_{k+1},$$

则 $$y_1+y_2+\cdots+y_k=x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}=a.$$

由归纳假设可知

$$y_1y_2+y_2y_3+\cdots+y_{k-1}y_k+y_ky_1\leqslant\frac{a^2}{4}.$$

再由 $$y_1y_2+y_ky_1=(x_1+x_2)x_3+x_{k+1}(x_1+x_2)$$
$$\geqslant x_1x_2+x_2x_3+x_{k+1}x_1$$

可得 $$x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_kx_{k+1}+x_{k+1}x_1\leqslant\frac{a^2}{4},$$

即 ① 对于 $n=k+1$ 也成立. 所以对于 $n\geqslant 4$, ① 成立.

9・208 设 $0\leqslant t\leqslant 1, 1\geqslant x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n>0$, 求证:

$(1+x_1+x_2+\cdots+x_n)^t\leqslant 1+x_1^t+2^{t-1}x_2^t+\cdots+n^{t-1}x_n^t.$

(加拿大国家集训队训练题, 1988 年)

[证] 用归纳法. 当 $n=1$ 时, 由 $0\leqslant t\leqslant 1, 0\leqslant x_1\leqslant 1$, 则

$$(1+x_1)^t\leqslant 1+x_1\leqslant 1+x_1^t.$$

设要证之不等式对于 $n=k$ 成立, 则

$$\begin{aligned}&(1+x_1+\cdots+x_k+x_{k+1})^t\\
&=\left(1+\frac{x_{k+1}}{1+x_1+\cdots+x_k}\right)^t(1+x_1+\cdots+x_k)^t\\
&\leqslant\left(1+\frac{x_{k+1}}{1+x_1+\cdots+x_k}\right)(1+x_1+\cdots+x_k)^t\\
&=(1+x_1+\cdots+x_k)^t+x_{k+1}(1+x_1+\cdots+x_k)^{t-1}\\
&\leqslant 1+x_1^t+2^{t-1}x_2^t+\cdots+k^{t-1}x_k^t+x_{k+1}[(k+1)x_{k+1}]^{t-1}\\
&=1+x_1^t+2^{t-1}x_2^t+\cdots+k^{t-1}x_k^t+(k+1)^{t-1}x_{k+1}^t.\end{aligned}$$

于是要证之不等式对于 $n=k+1$ 也成立.

9・209 设实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 满足

$a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n>0,$

$b_1\geqslant a_1,$

$b_1b_2\geqslant a_1a_2,$

$b_1b_2b_3\geqslant a_1a_2a_3,$

……

$b_1b_2\cdots b_n\geqslant a_1a_2\cdots a_n.$

求证: $b_1+b_2+\cdots+b_n\geqslant a_1+a_2+\cdots+a_n$,

并确定等号成立的条件.

(加拿大国家集训队训练题, 1988 年)

[证] 记 $k_i = \dfrac{b_i}{a_i}, i = 1,2,\cdots,n$,则

$$k_1 \geqslant 1, k_1k_2 \geqslant 1, \cdots, k_1k_2\cdots k_n \geqslant 1. \quad ①$$

要证之不等式等价于

$$a_1(k_1-1)+a_2(k_2-1)+\cdots+a_n(k_n-1)\geqslant 0.$$

令 $$d_m=(k_1-1)+(k_2-1)+\cdots+(k_m-1), m=1,2,\cdots,n,$$

则要证之不等式等价于

$$d_1(a_1-a_2)+d_2(a_2-a_3)+\cdots+d_{n-1}(a_{n-1}-a_n)+a_nd_n\geqslant 0.$$

由均值不等式和 ① 可得

$$d_m \geqslant m(\sqrt[m]{k_1k_2\cdots k_m})\geqslant 0, m=1,2,\cdots,n,$$

又 $$a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n>0,$$

所以 $d_1(a_1-a_2)+d_2(a_2-a_3)+\cdots+d_{n-1}(a_{n-1}-a_n)+a_nd_n\geqslant 0$,

即要证之不等式成立.

由以上证明可知,等号成立的充分必要条件是

$$a_i=b_i, i=1,2,\cdots,n.$$

9·210 设实数 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $a_n=0$ 且

$$a_k=c+\sum_{i=k}^{n-1}a_{i-k}(a_i+a_{i+1}), k=0,1,2,\cdots,n-1.$$

求证:$c\leqslant\dfrac{1}{4n}$.

(第 30 届国际数学奥林匹克预选题,1989 年)

[证] 记 $s_k=\sum\limits_{i=0}^{k}a_i, k=0,1,2,\cdots,n$,则

$$\begin{aligned}
s_n &= \sum_{k=0}^{n}a_k=\sum_{k=0}^{n-1}a_k = nc+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=k}^{n-1}a_{i-k}(a_i+a_{i+1})\\
&= nc+\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{i}a_{i-k}(a_i+a_{i+1})\\
&= nc+\sum_{i=0}^{n-1}(a_i+a_{i+1})\sum_{k=0}^{i}a_{i-k}\\
&= nc+\sum_{i=0}^{n-1}(a_i+a_{i+1})s_i
\end{aligned}$$

$$= nc + s_1 s_0 + (s_2 - s_0)s_1 + (s_3 - s_1)s_2 + \cdots + (s_n - s_{n-2})s_{n-1}$$

$$= nc + s_n s_{n-1}.$$

由 $a_n = 0$ 可得 $s_{n-1} = s_n$,所以

$$s_n \geqslant nc + s_n^2,$$

从而 $1 - 4nc \geqslant 0$,即

$$c \leqslant \frac{1}{4n}.$$

9·211 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都是正数($n \geqslant 2$),$k \geqslant 1$,求证:

$$\left(\frac{a_1}{a_2 + \cdots + a_n}\right)^k + \left(\frac{a_2}{a_3 + \cdots + a_n + a_1}\right)^k + \cdots + \left(\frac{a_n}{a_1 + \cdots + a_{n-1}}\right)^k \geqslant \frac{n}{(n-1)^k}.$$

(第 30 届国际数学奥林匹克预选题,1989 年)

[证] 记 $s = a_1 + \cdots + a_n$,要证之不等式可写为

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{S - a_i}\right)^k \geqslant \frac{n}{(n-1)^k}. \quad ①$$

由均值不等式可得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{S - a_i} = S\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{S - a_i} - n$$

$$\geqslant nS\sqrt[n]{\frac{1}{(S - a_1)\cdots(S - a_n)}} - n$$

$$\geqslant nS\frac{n}{(n-1)S} - n = \frac{n}{n-1}.$$

由于 $k \geqslant 1$,所以 $f(x) = x^k$ 在 $x \geqslant 0$ 是凸函数,从而

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{S - a_i}\right)^k \geqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{S - a_i}\right)^k \geqslant \left(\frac{1}{n-1}\right)^k,$$

而 ① 成立.

9·212 对于任意正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$,求证:

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt[k]{a_1 \cdots a_k} \leqslant e\sum_{k=1}^{n}a_k,$$

其中 $e=\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$.

（第 23 届国际数学奥林匹克预选题，1982 年）

［证］ 已知 $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$ 单调增加收敛于 e，从而对任意 $i\in N$ 有 $i\left(1+\frac{1}{i}\right)^i\leqslant ie$；记 $b_i=i\left(1+\frac{1}{i}\right)^i$，则

$$\frac{b_i}{i}\leqslant e.$$

由 $b_1b_2\cdots b_k=2\cdot\frac{3^2}{2}\cdot\frac{4^3}{3^2}\cdot\cdots\cdot\frac{k^{k-1}}{(k-1)^{k-2}}\cdot\frac{(1+k)^k}{k^{k-1}}=(1+k)^k$ 可得

$$\sqrt[k]{a_1\cdots a_k}=\frac{1}{1+k}\sqrt[k]{(a_1b_1)\cdots(a_kb_k)}.$$

由均值不等式有

$$\sqrt[k]{a_1\cdots a_k}\leqslant\frac{1}{k(1+k)}\sum_{i=1}^{k}a_ib_i=\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\sum_{i=1}^{k}a_ib_i,$$

从而

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\sqrt[k]{a_1\cdots a_k}&\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\sum_{i=1}^{k}a_ib_i\\&=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\sum_{k=i}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{n+1}\right)b_ia_i\\&<\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{i}a_i<e\sum_{i=1}^{n}a_i.\end{aligned}$$

9・213 已知 $5n$ 个实数 r_i,s_i,t_i,u_i,v_i 都大于 $1(1\leqslant i\leqslant n)$，记 $R=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}r_i$，$S=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}s_i$，$T=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i$，$U=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}u_i$，$V=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}v_i$. 求证：

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{r_is_it_iu_iv_i+1}{r_is_it_iu_iv_i-1}\right)\geqslant\left(\frac{RSTUV+1}{RSTUV-1}\right)^n.$$

（中国国家集训队选拔试题，1994 年）

［证］ 首先证明对任何 n 个大于 1 的实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 有

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{x_i+1}{x_i-1}\geqslant\left(\frac{A+1}{A-1}\right)^n, \qquad ①$$

其中 $A=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots\cdots x_n}$.

事实上，记 $x_i=\max(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$x_j=\min(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，则 $\qquad x_j\leqslant A\leqslant x_i$.

由于

$(x_i+1)(x_j+1)(A-1)(x_ix_j-A)-(x_i-1)(x_j-1)(A+1)(x_ix_j+A)=2(x_ix_j+1)(A-x_i)(x_j-A)\geqslant 0$,

又 $\quad x_ix_j>x_i\geqslant A$，所以

$$\frac{(x_i+1)(x_j+1)}{(x_i-1)(x_j-1)}\geqslant\left(\frac{A+1}{A-1}\right)\left(\frac{\frac{x_ix_j}{A}+1}{\frac{x_ix_j}{A}-1}\right) \qquad ②$$

由 ② 可得

$$\prod_{l=1}^{n}\frac{x_l+1}{x_l-1}\geqslant\left(\frac{A+1}{A-1}\right)\left[\frac{\frac{x_ix_j}{A}+1}{\frac{x_ix_j}{A}-1}\right]\prod_{\substack{l\neq i\\ l\neq j}}\frac{x_l+1}{x_l-1}.$$

显然 $n-1$ 个实数 $x_l(l\neq i,l\neq j,1\leqslant l\leqslant n)$，$\frac{x_ix_j}{A}$ 都大于 1 且其几何平均值仍为 A，从而由归纳法易知 ① 成立.

在 ① 中令 $x_i=r_is_it_iu_iv_i(1\leqslant i\leqslant n)$，则

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{r_is_it_iu_iv_i+1}{r_is_it_iu_iv_i-1}\geqslant\left(\frac{B+1}{B-1}\right)^n, \qquad ③$$

其中 $B=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}r_is_it_iu_iv_i}$.

$$\begin{aligned}&RSTUV\\ =&\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}r_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}s_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}u_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}v_i\right)\\ \geqslant& B,\end{aligned}$$

所以 $(B+1)(RSTUV-1)-(B-1)(RSTUV+1)=2(RSTUV-B)\geqslant 0$,

即 $$\frac{RSTUV+1}{RSTUV-1}\leqslant\frac{B+1}{B-1}.$$

再用③可知要证之不等式成立.

9·214 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都是正数($n\geqslant 2$)且

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=1,$$

求证:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{n-1}}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}.$$

(第4届中国中学生数学冬令营,1989年)

[证] 由对称性可设 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$,于是有

$$\frac{1}{\sqrt{1-x_1}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{1-x_2}}\leqslant\cdots\leqslant\frac{1}{\sqrt{1-x_n}}.$$

由切比雪夫不等式可得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}\geqslant\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1-x_i}}\right)$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1-x_i}}.$$

再由幂平均不等式得

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1-x_i}}\geqslant\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x_i}}\right)^{-2}\right]^{-\frac{1}{2}}$$
$$=\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)\right]^{-\frac{1}{2}}$$
$$=\sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

从而有 $$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}\geqslant\sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

由柯西不等式 $\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\leqslant\sqrt{n}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i}=\sqrt{n}$,

所以 $$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{n-1}}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}.$$

9·215　设 $-1\leqslant x_i\leqslant 1, i=1,2,\cdots,n$ 且

$$x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3=0.$$

求证：$x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant\frac{n}{3}$.

（列宁格勒数学奥林匹克，1991 年）

［证］　由于当 $x\geqslant -1$ 时，$(x+1)(2x-1)^2\geqslant 0$，即

$$4x^3-3x+1\geqslant 0,$$

所以　$4\sum_{k=1}^{n}x_k^3-3\sum_{k=1}^{n}x_k+n=-3\sum_{k=1}^{n}x_k+n\geqslant 0$. 由此立即可知要证之不等式成立.

9·216　设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 均为实数，对于自然数 $k(1\leqslant k\leqslant n)$，令

$$S_k=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k},$$

求证：

$$S_kS_{n-k}\geqslant (C_n^k)^2a_1a_2\cdots a_n.$$

（亚太地区数学奥林匹克，1990 年）

［证］　由均值不等式 $S_k\geqslant C_n^k\left(\prod_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}\right)^{\frac{1}{C_n^k}}$

$$=C_n^k(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{C_{n-1}^{k-1}}{C_n^k}}.$$

由于 $C_n^k=C_n^{n-k}, C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^{n-1-k}=C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^k=C_n^k$，所以

$$S_kS_{n-k}\geqslant (C_n^k)^2a_1a_2\cdots a_n.$$

9·217　设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都是正数，令 $s=x_1+x_2+\cdots+x_n$，求证：

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\leqslant 1+s+\frac{s^2}{2!}+\cdots+\frac{s^n}{n!}.$$

（亚太地区数学奥林匹克，1989 年）

［证］　由均值不等式可得

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\leqslant\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1+x_i)\right]^n$$

$$=\left(1+\frac{s}{n}\right)^n.$$

利用二项式展开,则

$$\left(1+\frac{s}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\frac{s}{n}\right)^k.$$

由于

$$C_n^k\left(\frac{s}{n}\right)^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{s^k}{n^k}\leqslant\frac{s^k}{k!},$$

从而

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\leqslant 1+S+\frac{s^2}{2!}+\cdots+\frac{s^n}{n!}.$$

9·218　设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 同号,记 $S=\sum_{i=1}^{n}a_i$,求证:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{2s-a_i}\geqslant\frac{n}{2n-1}.$$

(前联邦德国数学奥林匹克,1982 年)

[证]　不妨设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 均为正,则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{2s-a_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i-2s+2s}{2s-a_i}=-n+2s\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2s-a_i}.$$

由均值不等式可得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2s-a_i}\geqslant n\left(\frac{1}{(2s-a_1)\cdots(2s-a_n)}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\geqslant\frac{n^2}{(2s-a_1)+\cdots+(2s-a_n)}$$

$$=\frac{n^2}{(2n-1)s}.$$

于是　$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{2s-a_i}\geqslant -n+\frac{2n^2}{2n-1}=\frac{n}{2n-1}.$$

9·219　设 $x_1,x_2,\cdots,x_n(n\geqslant 3)$ 是非负实数,且

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=1.$$

求证:$x_1^2x_2+x_2^2x_3+\cdots+x_{n-1}^2x_n+x_n^2x_1\leqslant\frac{4}{27}$.

(第 1 届中国台北市数学奥林匹克,1992 年)

[证]　用归纳法.当 $n=3$ 时,不妨设 $x_1\geqslant x_2,x_1\geqslant x_3$.
若 $x_2\geqslant x_3$,则由均值不等式可得

$$
\begin{aligned}
x_1^2x_2+x_2^2x_3+x_3^2x_1 &\leqslant x_1^2x_2+x_1x_2x_3+x_1x_2x_3\\
&= x_1x_2(x_1+2x_3)\\
&= \frac{1}{2}x_1\cdot 2x_2\cdot(x_1+2x_3)\\
&\leqslant \frac{1}{2}\left[\frac{2(x_1+x_2+x_3)}{3}\right]^3\\
&= \frac{4}{27}.
\end{aligned}
$$

若 $x_2\leqslant x_3$,由于

$$
\begin{aligned}
&x_1^2x_3+2x_1x_2x_3-x_1^2x_2-x_2^2x_3-x_3^2x_1\\
&=(x_1^2-x_1x_3)(x_3-x_2)+x_2x_3(x_1-x_2)\geqslant 0,
\end{aligned}
$$

所以同样有

$$x_1^2x_2+x_2^2x_3+x_3^2x_1\leqslant x_1x_3(x_1+2x_2)\leqslant\frac{4}{27}.$$

设当 $n=k$ 时原不等式成立. 当 $n=k+1$ 时,不妨设 $x_1=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_k,x_{k+1}\}$. 由于

$$x_1^2x_2+x_2^2x_3+x_3^2x_4\leqslant x_1^2(x_2+x_3)+(x_2+x_3)^2x_4,$$

从而如果

$$y_1=x_1,y_2=x_2+x_3,y_3=x_4,y_4=x_5,\cdots,y_k=x_{k+1},$$

则 $$x_1^2x_2+x_2^2x_3+\cdots+x_k^2x_{k+1}+x_{k+1}^2x_1\leqslant y_1^2y_2+y_2^2y_3+\cdots+y_{k-1}^2y_k+y_k^2y_1.$$

又 $y_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,k$,且 $y_1+y_2+\cdots+y_k=x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{k+1}=1$,由归纳假设可得

$$x_1^2x_2+x_2^2x_3+\cdots+x_k^2x_{k+1}+x_{k+1}^2x_1\leqslant\frac{4}{27},$$

即原不等式对 $n=k+1$ 也成立.

9·220 设 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_{2n-1}\geqslant 0$,求证:

$$a_1^2-a_2^2+a_3^2-\cdots+a_{2n-1}^2\geqslant(a_1-a_2+a_3-\cdots+a_{2n-1})^2.$$

(第 7 届国际城市际数学邀请赛,1985 年 ~ 1986 年)

[证] 用归纳法,当 $n=1$ 时,命题显然成立. 设 $n=2$,由于

$$
\begin{aligned}
&a_1^2-a_2^2+a_3^2-(a_1-a_2+a_3)^2\\
&=(a_1-a_2)(a_1+a_2-a_1+a_2-2a_3)
\end{aligned}
$$

$$= 2(a_1 - a_2)(a_2 - a_3) \geqslant 0.$$

所以命题成立.

设当 $n = k(k \geqslant 2)$ 时,命题成立.当 $n = k+1$ 时,由归纳假设可得

$$\begin{aligned} & a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + \cdots + a_{2k+1}^2 \\ = & a_1^2 - a_2^2 + (a_3^2 - a_4^2 + a_5^2 - \cdots + a_{2k+1}^2) \\ \geqslant & a_1^2 - a_2^2 + (a_3 - a_4 + a_5 - \cdots + a_{2k+1}^2)^2. \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} a_3 - a_4 + a_5 - \cdots + a_{2k+1} &= (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2k-1} - a_{2k}) + a_{2k+1} \\ &= a_3 - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2k} - a_{2k+1}), \end{aligned}$$

所以

$$0 \leqslant a_3 - a_4 + a_5 - \cdots + a_{2k+1} \leqslant a_3 \leqslant a_2 \leqslant a_1.$$

再用归纳假设,则

$$a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - \cdots + a_{2k+1}^2 \geqslant (a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \cdots - a_{2k+1})^2,$$

即命题对 $n = k+1$ 也成立,

9·221　设 $0 < p \leqslant a_i \leqslant q(i = 1,2,\cdots,n)$, $b_1, b_2 \cdots b_n$ 是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的一个排列,求证:

$$n \leqslant \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} \leqslant n + \left[\frac{n}{2}\right]\left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2.$$

(匈牙利数学奥林匹克,1935 年)

[证]　由均值不等式显然有

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} \geqslant n,$$

从而只需证右边的不等式.不妨设

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n,$$

根据排序不等式可知

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} \leqslant \frac{a_1}{a_n} + \frac{a_2}{a_{n-1}} + \cdots + \frac{a_n}{a_1}.$$

当 $n=2k$ 为偶数时,则

$$\frac{a_1}{b_1}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}\leqslant\left(\frac{a_1}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}\right)+\cdots+\left(\frac{a_k}{a_{k+1}}+\frac{a_{k+1}}{a_k}\right).$$

又对于 $x\in\left[\frac{p}{q},\frac{q}{p}\right]$有

$$x+\frac{1}{x}=\left|\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right|^2+2\leqslant\left(\sqrt{\frac{q}{p}}-\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^2+2.$$

从而

$$\frac{a_1}{b_1}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}\leqslant 2k+k\left(\sqrt{\frac{q}{p}}-\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^2$$

$$=n+\frac{n}{2}\left(\sqrt{\frac{q}{p}}-\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^2.$$

当 $n=2k-1$ 为奇数时,则

$$\frac{a_1}{b_1}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}\leqslant\left(\frac{a_1}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}\right)+\cdots+\left(\frac{a_{k-1}}{a_{k+1}}+\frac{a_{k+1}}{a_{k-1}}\right)+\frac{a_k}{a_k}$$

$$\leqslant 2(k-1)+(k-1)\left(\sqrt{\frac{q}{p}}-\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^2+1$$

$$=n+\frac{n-1}{2}\left(\sqrt{\frac{q}{p}}-\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^2.$$

综合以上两种情况,立即可得要证之不等式成立.

9·222 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都是实数($n\geqslant 3$),令

$$p=\sum_{i=1}^{n}x_i,q=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j.$$

求证:

(i) $\frac{(n-1)p^2}{n}-2q\geqslant 0,$

(ii) $\left|x_i-\frac{p}{n}\right|\leqslant\frac{n-1}{n}\sqrt{p^2-\frac{2n}{n-1}q},i=1,2,\cdots,n.$

(中国国家集训队选拔试题,1986年)

[证] (i) 由于

$$(n-1)p^2-2nq=(n-1)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2-2n\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j$$

$$= (n-1)\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j$$
$$= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (x_i - x_j)^2,$$

所以 $$\frac{(n-1)p^2}{n} - 2q \geqslant 0.$$

(ii) $$\left|x_i - \frac{p}{n}\right| = \left|\frac{nx_i - \sum_{k=1}^{n} x_k}{n}\right|$$
$$= \frac{n-1}{n}\left|\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_i - x_k)\right|.$$

由幂平均不等式可得

$$\left|x_i - \frac{p}{n}\right| \leqslant \frac{n-1}{n}\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_i - x_k)^2}$$
$$\leqslant \frac{n-1}{n}\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}(x_j - x_k)^2}.$$

利用(i)中的结果

$$\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}(x_j - x_k)^2 = (n-1)p^2 - 2nq,$$

从而得到

$$\left|x_i - \frac{p}{n}\right| \leqslant \frac{n-1}{n}\sqrt{p^2 - \frac{2n}{n-1}q}.$$

9・223 设 $a_i \in [-1,1]$, $a_i a_{i+1} \neq -1$, $i = 1,2,\cdots,n$, 其中 $a_{n+1} = a_1$. 求证:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i a_{i+1}} \geqslant \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i^2}.$$

(圣彼得堡市数学选拔考试,1993年)

[证] 由于

$$\frac{1}{1+a_i a_{i+1}} - \frac{1}{1+a_i^2} = \frac{a_i(a_i - a_{i+1})}{(1+a_i a_{i+1})(1+a_i^2)},$$
$$\frac{1}{1+a_i a_{i+1}} - \frac{1}{1+a_{i+1}^2} = \frac{a_{i+1}(a_{i+1} - a_i)}{(1+a_i a_{i+1})(1+a_{i+1}^2)},$$

所以

$$\frac{2}{1+a_ia_{i+1}}-\frac{1}{1+a_i^2}-\frac{1}{1+a_{i+1}^2}$$
$$=\frac{a_i-a_{i+1}}{1+a_ia_{i+1}}\left(\frac{a_i}{1+a_i^2}-\frac{a_{i+1}}{1+a_{i+1}^2}\right)$$
$$=\frac{(a_i-a_{i+1})^2(1-a_ia_{i+1})}{(1+a_ia_{i+1})(1+a_i^2)(1+a_{i+1}^2)}\geqslant 0.$$

于是得到

$$2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_ia_{i+1}}\geqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_{i+1}^2}=2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i^2},$$

即
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_ia_{i+1}}\geqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i^2}.$$

9・224 设 $0\leqslant x_i\leqslant 1, i=1,2,\cdots,n, n\geqslant 2$.求证:存在 i 满足:$1\leqslant i\leqslant n-1$ 且

$$x_i(1-x_{i+1})\geqslant\frac{1}{4}x_1(1-x_n).$$

(第 32 届国际数学奥林匹克预选题,1991 年)

[证] 令 $x_k=a=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,
$x_t=b=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$.

如果 $x_2\leqslant\frac{1+b}{2}$,则

$$x_1(1-x_2)\geqslant x_1\left(1-\frac{1+b}{2}\right)=\frac{1}{2}x_1(1-b)$$
$$\geqslant\frac{1}{4}x_1(1-x_n).$$

从而取 $i=1$ 即可.如果 $x_2>\frac{1+b}{2}$,由于 $\frac{a}{2}\leqslant\frac{1+b}{2}$ 且 $x_t=b\leqslant\frac{1+b}{2}$,所以有以下两种情况:

(i) $x_1=b, x_2>\frac{1+b}{2},\cdots,x_n>\frac{1+b}{2}$.令

$x_m=\min\{x_2,\cdots,x_n\}$,

其中 $2\leqslant m\leqslant n$,显然

$$x_{m-1}(1-x_m)\geqslant x_1(1-x_n)\geqslant\frac{1}{4}x_1(1-x_n).$$

(ii) 存在 $2 \leqslant i \leqslant n-1$,使得 $x_i > \frac{1+b}{2}, x_{i+1} \leqslant \frac{1+b}{2}$,于是

$$x_i(1-x_{i+1}) \geqslant \frac{1+b}{2}\left(1-\frac{1+b}{2}\right) \geqslant \frac{a}{4}(1-b) \geqslant \frac{1}{4}x_1(1-x_n).$$

无论何种情况,要证之结论都成立.

9·225　已知正数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 和 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 满足

(1)　$x_1 > x_2 > \cdots > x_n, y_1 > y_2 > \cdots > y_n$,

(2)　$x_1 > y_1, x_1 + x_2 > y_1 + y_2, \cdots, x_1 + x_2 + \cdots + x_n > y_1 + y_2 + \cdots + y_n$.

求证:对任何自然数 k 有

$$x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k > y_1^k + y_2^k + \cdots + y_n^k.$$

(第 35 届莫斯科数学奥林匹克,1972 年)

[证]　记　$S_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_i, i = 1,2,\cdots,n, S_0 = 0$,
$T_i = y_1 + y_2 + \cdots + y_i, i = 1,2,\cdots,n, T_0 = 0$.

对于任何正数 $a_1 > a_2 > \cdots > a_n$ 有

$$\sum_{k=1}^{n} a_k x_k = \sum_{k=1}^{n} a_k(S_k - S_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} a_k S_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} S_k$$
$$= a_n S_n + \sum_{k=1}^{n-1}(a_k - a_{k+1})S_k.$$

由于 $a_n > 0, a_k - a_{k+1} > 0, S_n > T_n, S_k > T_k$,从而

$$\sum_{k=1}^{n} a_k x_k > a_n T_n + \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1})T_k = \sum_{k=1}^{n} a_k y_k. \quad ①$$

对于任意自然数 k,由(1)再多次用不等式①可得

$$x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k > x_1^{k-1}y_1 + x_2^{k-1}y_2 + \cdots + x_n^{k-1}y_n$$
$$> x_1^{k-2}y_1^2 + x_2^{k-2}y_2^2 + \cdots + x_n^{k-2}y_n^2$$
$$\cdots\cdots$$
$$> y_1^k + y_2^k + \cdots + y_n^k.$$

9·226　设 $a_1, a_2, \cdots, a_n (n \geqslant 2)$ 是 n 个互不相同的实数,$S = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2, M = \min_{1 \leqslant i < j \leqslant n}(a_i - a_j)^2$.求证:

$$\frac{S}{M} \geqslant \frac{n(n^2-1)}{12}.$$

(中国数学奥林匹克选拔试题,1990 年)

[证]　不妨设 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$,则

$$(a_i - a_j)^2 \geqslant M \mid i - j \mid^2. \quad ①$$

记 $A = nS - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2$,则

$$A = \sum_{i,j=1}^{n} a_i^2 - \sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_i(a_i - a_j).$$

又
$$A = \sum_{i,j=1}^{n} a_j^2 - \sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_j(a_j - a_i),$$

从而

$$A = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(a_i - a_j)^2. \quad ②$$

由 ① 和 ② 可得

$$nS \geqslant A \geqslant \frac{M}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(i - j)^2$$
$$= M[n(1 + 2^2 + \cdots + n^2) - (1 + 2 + \cdots + n)^2].$$

再利用公式

$$1 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1),$$

可推出

$$nS \geqslant \left[\frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n^2(n+1)^2}{4}\right]M$$
$$= \frac{1}{12}n^2(n+1)(4n+2-3n-3)M$$
$$= \frac{1}{12}n^2(n^2-1)M,$$

即
$$\frac{S}{M} \geqslant \frac{n(n^2-1)}{12}.$$

9・227　设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 都是非负实数,a 是它们中的最小值,记 $x_{n+1} = x_1$.求证:

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1+x_j}{1+x_{j+1}} \leqslant n + \frac{1}{(1+a)^2}\sum_{j=1}^{n}(x_j - a)^2,$$

其中等号成立当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

（第 7 届中国中学生数学冬令营，1992 年）

［证］ 用归纳法. 当 $n = 1$ 时要证之不等式显然成立. 设当 $n = k$ 时本题之结论成立. 当 $n = k + 1$ 时，由轮换对称性，不妨设 x_{k+1} 最大. 于是由归纳假设可得

$$\sum_{j=1}^{k-1} \frac{1 + x_j}{1 + x_{j+1}} + \frac{1 + x_k}{1 + x_1} \leqslant k + \frac{1}{(1 + a)^2} \sum_{j=1}^{k} (x_j - a^2). \qquad ①$$

由 ① 可知，为证原不等式，只需证

$$\frac{1 + x_k}{1 + x_{k+1}} + \frac{1 + x_{k+1}}{1 + x_1} - \frac{1 + x_k}{1 + x_1} \leqslant 1 + \frac{1}{(1 + a)^2}(x_{k+1} - a)^2. \qquad ②$$

将 ② 化简得等价不等式

$$\frac{(x_{k+1} - x_k)(x_{k+1} - x_1)}{(1 + x_{k+1})(1 + x_1)} \leqslant \frac{1}{(1 + a)^2}(x_{k+1} - a)^2. \qquad ③$$

由于 $a = \min\{x_1, x_2, \cdots, x_{k+1}\}$，$x_{k+1} = \max\{x_1, x_2, \cdots, x_{k+1}\}$，显然 ③ 成立. 这就证明了当 $n = k + 1$ 时要证之不等式成立. 而且为使 $n = k + 1$ 时要证之不等式中的等号成立，当且仅当 ① 和 ③ 中的等号成立. 由归纳假设 ① 中等号成立的充要条件是

$$a = x_1 = x_2 = \cdots = x_k.$$

从而 ③ 中等号成立的充要条件是

$$x_{k+1} = a.$$

故当 $n = k + 1$ 时，原不等式中等号成立当且仅当

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{k+1}.$$

9·228 给两组实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和 $b_1, b_2, \cdots, b_n$. 将 $\{a_k\}$ 按递增排列，将 $\{b_k\}$ 按递减排列可得

$$a_{i_1} \leqslant a_{i_2} \leqslant \cdots \leqslant a_{i_n},$$

$$b_{k_1} \geqslant b_{k_2} \geqslant \cdots \geqslant b_{k_n}.$$

求证：

$$\max\{a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n\} \geqslant \max\{a_{i_1} + b_{i_1}, a_{i_2} + b_{i_2}, \cdots, a_{i_n} + b_{i_n}\}.$$

（第 34 届莫斯科数学奥林匹克，1971 年）

[证]　设 $a_{i_l}+b_{k_l}=\max\{a_{i_1}+b_{k_1},\cdots,a_{i_n}+b_{k_n}\}$,由于 $i_l,i_{l+1},\cdots,i_n$,是$\{1,2,\cdots,n\}$中的 $n-l+1$ 个不同的数,又 $b_{k_1}\geqslant b_{k_2}\geqslant\cdots\geqslant b_{k_l}$,所以

$$\max\{b_{i_l},b_{i_{l+1}},\cdots,b_{i_n}\}\geqslant b_{k_l}.$$

于是存在 $l\leqslant m\leqslant n$ 使得 $b_{i_m}\geqslant b_{k_l}$,又 $a_{i_m}\geqslant a_{i_l}$,

从而 $$a_{i_l}+b_{k_l}\leqslant a_{i_m}+b_{i_m}.$$

由此立即可知要证之不等式成立.

9·229　设 1959 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_{1959}$ 之和为 1,其中 1000 项之乘积为 $a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_{1000}}$,$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_{1000}$,所有这些乘积之和记为 S.求证:

$$S<1.$$

(第 22 届莫斯科数学奥林匹克,1959 年)

[证]　因为

$$1=\left(\sum_{i=1}^{1959}a_i\right)^{1000}$$

$$=\sum\frac{1959!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\cdots\cdot k_{1959}!}a_1^{k_1}\cdot a_2^{k_2}\cdot\cdots\cdot a_{1959}^{k_{1959}},$$

其中关于一切其和为 1000 的非负整数 $k_1,k_2,\cdots,k_{1995}$ 求和,所以

$$S<\frac{1}{1959!}<1.$$

9·230　求证:对任意正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,不等式

$$\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_1+a_2}+\cdots+\frac{n}{a_1+\cdots+a_n}<4\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$$

成立.

(第 20 届全苏数学奥林匹克,1986 年)

[证]　不妨设 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$,记

$S_n=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{2}{a_1+a_2}+\cdots+\dfrac{n}{a_1+\cdots+a_n}$.当 $n<4$ 时,要证之不等式显然成立.以下用归纳法证明当 $n\geqslant 4$ 时

$$S_n \leqslant \begin{cases} 4\left(\dfrac{1}{a_1}+\cdots+\dfrac{1}{a_{\frac{n}{2}-1}}\right), n \text{ 为偶数;} \\ 4\left(\dfrac{1}{a_1}+\cdots+\dfrac{1}{a_{\frac{n-1}{2}}}\right), n \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

由此立即可得要证之不等式当 $n \geqslant 4$ 时也成立.

显然有 $S_4 \leqslant \dfrac{4}{a_1}, S_5 < 4\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}\right)$. 假设当 $n \leqslant k(k \geqslant 5)$ 时,命题成立.若 $k+1$ 为偶数,则 $k+1 \geqslant 6$,从而 $k-1 \geqslant 4$ 且为偶数,由归纳假设得

$$S_{k+1} \leqslant 4\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_{\frac{k-1}{2}-1}}\right)+\frac{k}{a_1+\cdots+a_k}+\frac{k+1}{a_1+\cdots+a_k+a_{k+1}}.$$

又

$$\begin{aligned} &\frac{k}{a_1+\cdots+a_k}+\frac{k+1}{a_1+\cdots+a_{k+1}} \\ &< \frac{k}{\frac{k+1}{2}+1} a_{\frac{k-1}{2}}^{-1}+\frac{k+1}{\frac{k+1}{2}+2} a_{\frac{k-1}{2}}^{-1} \\ &< 4 a_{\frac{k-1}{2}}^{-1}, \end{aligned}$$

所以 $S_{k+1} < 4\left(\dfrac{1}{a_1}+\cdots+\dfrac{1}{a_{\frac{k-1}{2}}}\right)$,即命题成立.同理可证若 $k+1$ 为奇数时,命题也成立.

9·231 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个实数,记

$$\begin{aligned} &b_k=\frac{1}{k}(a_1+a_2+\cdots+a_k), k=1,2,\cdots,n, \\ &C=(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+\cdots+(a_n-b_n)^2, \\ &D=(a_1-b_n)^2+(a_2-b_n)^2+\cdots+(a_n-b_n)^2. \end{aligned}$$

求证:$C \leqslant D \leqslant 2C$.

(第 12 届全苏数学奥林匹克,1978)

[证] 用归纳法,当 $n=1$ 时,命题显然成立.设 $n=k$ 时命题成立.任取 $k+1$ 个实数 $a_1, a_2, \cdots, a_{k+1}$. 记 $C_k=\sum\limits_{i=1}^{k}(a_i-b_i)^2$, $C_{k+1}=\sum\limits_{i=1}^{k+1}(a_i-b_i)^2, D_k=\sum\limits_{i=1}^{k}(a_i-b_k)^2, D_{k+1}=\sum\limits_{i=1}^{k+1}(a_i-b_{k+1})^2$,则

$$D_k = \sum_{i=1}^{k}(a_i - b_{k+1} + b_{k+1} - b_k)^2$$
$$= \sum_{i=1}^{k}(a_i - b_{k+1})^2 + 2(b_{k+1} - b_k)\sum_{i=1}^{k}(a_i - b_{k+1}) + k(b_{k+1} - b_k)^2$$
$$= D_{k+1} - (a_{k+1} - b_{k+1})^2 - k(b_{k+1} - b_k)^2. \quad ①$$

由归纳假设可知

$$C_{k+1} = C_k + (a_{k+1} - b_{k+1})^2 \leqslant D_k + (a_{k+1} - b_{k+1})^2.$$

再由 ① 得　$C_{k+1} \leqslant D_{k+1}$.

另一方面,由 ① 和归纳假设可得

$$D_{k+1} = D_k + (a_{k+1} - b_{k+1})^2 + k(b_{k+1} - b_k)^2$$
$$\leqslant 2C_k + (a_{k+1} - b_{k+1})^2 + k(b_{k+1} - b_k)^2,$$

又　$k(b_{k+1} - b_k)^2 = k\left[\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1}}{k+1} - \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k}\right]^2$

$$= \frac{1}{k(k+1)^2}[(k+1)a_{k+1} - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1})]^2$$
$$= \frac{1}{k}(a_{k+1} - b_{k+1})^2$$
$$\leqslant (a_{k+1} - b_{k+1})^2,$$

所以　$D_{k+1} \leqslant 2C_k + 2(a_{k+1} - b_{k+1})^2 = 2C_{k+1}$.

即命题对 $n = k + 1$ 也成立.

9・232　若 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in [a, b]$,其中 $0 < a < b$,求证:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \leqslant \frac{(a+b)^2}{4ab}n^2.$$

(第 12 届全苏数学奥林匹克,1978 年)

[证]　由 $0 < a \leqslant x_i \leqslant b, i = 1, 2, \cdots, n$ 可得

$$\left(\sqrt{x_i} - \frac{b}{\sqrt{x_i}}\right)\left(\sqrt{x_i} - \frac{a}{\sqrt{x_i}}\right) \leqslant 0,$$

即　$x_i + \frac{ab}{x_i} \leqslant a + b, i = 1, 2, \cdots, n,$

从而　$\sum_{i=1}^{n} x_i + ab\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i} \leqslant (a + b)n.$

又 $$2\sqrt{ab}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\sum_{i=1}^{n}x_i+ab\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i},$$

所以 $$(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\leqslant\frac{(a+b)^2}{4ab}n^2.$$

9·233　设 n 是大于2的自然数.求证:当且仅当 $n=3$ 或 $n=5$ 时,对任意实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 下面的不等式成立:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_1)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_n)\geqslant 0.$$

(第13届国际数学奥林匹克,1971年)

[证]　当 $n=3$ 时,不妨设 $a_1\leqslant a_2\leqslant a_3$.原不等式

$$\begin{aligned}\text{左端}&=(a_1-a_2)(a_1-a_3)+(a_2-a_1)(a_2-a_3)+(a_3-a_1)(a_3-a_2)\\&=(a_1-a_2)^2+(a_3-a_1)(a_3-a_2).\end{aligned}$$

所以原不等式成立.

当 $n=5$ 时,不妨设 $a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant a_4\leqslant a_5$.由于

$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_1-a_5)+(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)(a_2-a_5)\geqslant 0$$

$$(a_5-a_1)(a_5-a_2)(a_5-a_3)(a_5-a_4)+(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)(a_4-a_5)\geqslant 0,$$

又 $$(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)(a_3-a_5)\geqslant 0,$$

所以要证之不等式也成立.

当 $n=4$ 时,取 $a_1=0,a_2=a_3=a_4=1$,当 $n\geqslant 6$ 时,取 $a_1=0,a_2=a_3=a_4=1,a_5=a_6=\cdots=a_n=-1$,则原不等式左端 $=(-1)^3$,故不成立.

9·234　设 $0<t_1\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant t_n<1$,求证:

$$(1-t_n)^2\left[\frac{t_1}{(1-t_1{}^2)^2}+\frac{t_2{}^2}{(1-t_2{}^3)^2}+\cdots+\frac{t_n{}^n}{(1-t_n{}^{n+1})^2}\right]<1.$$

(第28届国际数学奥林匹克预选题,1987年)

[证]　由于 $\dfrac{(1-t_n)^2}{(1-t_k)^2}\leqslant 1,k=1,2,\cdots,n$,所以

$$\frac{t_1(1-t_n)^2}{(1-t_1{}^2)^2}\leqslant\frac{t_1}{(1+t_1)^2}<\frac{t_1}{1+t_1}=1-\frac{1}{1+t_1},$$

$$\frac{t_2^{\,2}(1-t_n)^2}{(1-t_2^{\,3})^2} \leqslant \frac{t_2^{\,2}}{(1+t_2+t_2^{\,2})^2} < \frac{1}{1+t_2} - \frac{1}{1+t_2+t_2^{\,2}}$$
$$\leqslant \frac{1}{1+t_1} - \frac{1}{1+t_2+t_2^{\,2}},$$

……

$$\frac{t_k^{\,k}(1-t_n)^2}{(1-t_k^{\,k+1})^2} \leqslant \frac{t_k^{\,k}}{(1+t_k+\cdots+t_k^{\,k})^2}$$
$$< \frac{1}{1+t_k+\cdots+t_k^{\,k-1}} - \frac{1}{1+t_k+\cdots+t_k^{\,k}}$$
$$\leqslant \frac{1}{1+t_{k-1}+\cdots+t_{k-1}^{\,k-1}} - \frac{1}{1+t_k+\cdots+t_k^{\,k}},$$

$k=3,4,\cdots,n$. 将以上不等式两边分别相加得到要证之不等式.

9·235　设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是大于 1 的实数且

$$|a_{k+1}-a_k|<1, k=1,2,\cdots,n-1.$$

求证:

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}<2n-1.$$

（第 17 届全俄数学奥林匹克,1991 年）

[证]　对于 $k=1,2,\cdots,n-1$,若 $a_k<a_{k+1}$,则 $\frac{a_k}{a_{k+1}}<1$,若 $a_k \geqslant a_{k+1}$,由 $a_k<a_{k+1}+1$ 和 $a_{k+1}>1$ 可知 $\frac{a_k}{a_{k+1}}<1+\frac{1}{a_{k+1}}<2$. 现设有 l 个 k 值满足

$$1 \leqslant k \leqslant n-1 \text{ 且 } a_k<a_{k+1},$$

其余 $n-1-l$ 个 k 值有 $a_k \geqslant a_{k+1}$. 由于

$$a_n-a_1=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)$$
$$\leqslant l,$$

所以　$$\frac{a_n}{a_1} \leqslant 1+\frac{l}{a_1}<l+1.$$

于是有

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}<l+2(n-1-l)+l+1$$

$$= 2n - 1.$$

9·236　在黑板上写有若干个正数，现知它们两两乘积的和是1. 求证：可以从中擦去一个数，使得剩下的正数之和小于$\sqrt{2}$.

（第16届全俄数学奥林匹克，1990年）

［证］　设黑板上写的正数为$x_1, x_2, \cdots, x_n$且

$$x_n = \max\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}.$$

由假设可知

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 = {x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2 + 2,$$

从而　$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1})^2 + 2x_n(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1})$$
$$= {x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_{n-1}}^2 + 2.$$

由于　$$2x_n(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}) > {x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_{n-1}}^2,$$

所以　$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1})^2 < 2.$$

即擦去最大数x_n，剩下的正数之和小于$\sqrt{2}$.

9·237　求证：不论对下式左边x的奇次幂的"+"和"-"号如何选配，总有

$$x^{2n} \pm x^{2n-1} + x^{2n-2} \pm x^{2n-3} + \cdots + x^2 \pm x + 1 > \frac{1}{2}.$$

（第46届莫斯科数学奥林匹克，1983年）

［证］　显然只需对任何$x \geqslant 0$证明

$$f(x) = x^{2n} - x^{2n-1} + x^{2n-2} - x^{2n-3} + \cdots + x^2 - x + 1 > \frac{1}{2} \quad ①$$

就够了. 事实上由于$f(x) = \dfrac{1 + x^{2n+1}}{1 + x}$，若$x \geqslant 1$或$x = 0$，则有$f(x) \geqslant 1$. 若$0 < x < 1$，则

$$f(x) > \frac{1}{1 + x} \geqslant \frac{1}{2}.$$

无论何种情况①都成立.

9·238　设$a_1, a_2, \cdots a_n$均为正数，它们的和是1. 求证：

$$\frac{a_1^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2}{a_2 + a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1} + a_n} + \frac{a_n^2}{a_n + a_1} \geqslant \frac{1}{2}.$$

（第24届全苏数学奥林匹克，1990年）

［证］　由于

$$\frac{a_1^2-a_2^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2-a_3^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2-a_n^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n^2-a_1^2}{a_n+a_1}=0,$$

所以

$$\begin{aligned}&\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\\=&\frac{a_2^2}{a_1+a_2}+\frac{a_3^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_1^2}{a_n+a_1}.\end{aligned}$$

再由

$$\frac{a_1^2+a_2^2}{a_1+a_2}\geqslant\frac{1}{2}(a_1+a_2),$$

$$\frac{a_2^2+a_3^3}{a_2+a_3}\geqslant\frac{1}{2}(a_2+a_3),$$

……

$$\frac{a_n^2+a_1^2}{a_n+a_1}\geqslant\frac{1}{2}(a_n+a_1),$$

从而$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\geqslant\frac{1}{2}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=\frac{1}{2}$.

9·239 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 都是正实数,且

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}b_k.$$

求证:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{a_k+b_k}\geqslant\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}a_k.$$

(亚太地区数学奥林匹克,1991 年)

[证] 由于

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{a_k+b_k}&=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2+a_kb_k-a_kb_k}{a_k+b_k}\\&=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}\frac{a_kb_k}{a_k+b_k},\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_kb_k}{a_k+b_k}&\leqslant\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{(a_k+b_k)^2}{a_k+b_k}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}a_k,\end{aligned}$$

所以 $$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{a_k+b_k}\geqslant\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}a_k.$$

9·240 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是正数,且对于任意 $1\leqslant k\leqslant n$,有 $a_1a_2\cdots a_k\geqslant 1$. 求证:

$$\frac{1}{1+a_1}+\frac{2}{(1+a_1)(1+a_2)}+\cdots+\frac{n}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)}<2.$$

(基辅数学奥林匹克,1971年)

[证] 对于任意 $1\leqslant k\leqslant n$,由于

$$1+a_1\geqslant 2\sqrt{a_1}$$

$$1+a_2\geqslant 2\sqrt{a_2}$$

……

$$1+a_k\geqslant 2\sqrt{a_k}$$

所以 $(1+a_1)\cdots(1+a_k)\geqslant 2^k\sqrt{a_1\cdots a_k}\geqslant 2^k$. 于是

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(1+a_1)\cdots(1+a_k)}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}.$$

令 $S=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}$,则 $2S=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^{k-1}}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k+1}{2^k}$,从而

$$S=2S-S=1-\frac{n}{2^n}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^k}=2-\frac{n}{2^n}-\frac{1}{2^{n-1}}<2.$$

于是得到

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(1+a_1)\cdots(1+a_k)}\leqslant S<2.$$

9·241 设复数 $z_k=x_k+iy_k$, $k=1,2,\cdots,n$, x_k 和 y_k 为实数, $i=\sqrt{-1}$. 令 r 表示 $\sqrt{z_1^2+z_2^2+\cdots+z_n^2}$ 的实数之绝对值,求证:

$$r\leqslant|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|.$$

(第40届美国普特南数学竞赛,1979年)

[证] 设 $a+ib=\sqrt{z_1^2+z_2^2+\cdots+z_n^2}$,其中 a,b 为实数,则

$$a^2-b^2=\sum_{k=1}^{n}x_k^2-\sum_{k=1}^{n}y_k^2, \qquad ①$$

$$ab=\sum_{k=1}^{n}x_ky_k. \qquad ②$$

如果 $r=|a|>\sum_{k=1}^{n}|x_k|$,由于$\sum_{k=1}^{n}|x_k|\geqslant\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$,所以 $|a|>\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$. 利用 ② 和柯西不等式可得

$$|a||b|\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n}y_k^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

从而得到 $|b|\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}y_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$,代入 ①,则

$$a^2=\sum_{k=1}^{n}x_k^2+b^2-\sum_{k=1}^{n}y_k^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}x_k^2,$$

与假设 $|a|>\sum_{k=1}^{n}|x_k|$ 矛盾!于是所要结论得证.

9·242　设 p 和 n 都是正整数,$C_{h,k}\in[0,1]$,$h=1,2,\cdots,n$,$k=1,2,\cdots,ph$. 求证:

$$\sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{ph}\left(\frac{C_{h,k}}{h}\right)^2\leqslant 2p\sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{ph}C_{h,k}.$$

(第 39 届美国普特南数学竞赛,1978 年)

[证]　令 $a_h=\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{ph}C_{h,k}$,则 $0\leqslant a_h\leqslant p$. 由于

$$\sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{ph}\left(\frac{C_{h,k}}{h}\right)^2\leqslant\left(\sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{ph}\frac{C_{h,k}}{h}\right)^2,$$

从而只需证

$$\left(\sum_{h=1}^{n}a_h\right)^2\leqslant 2p\sum_{h=1}^{n}ha_h. \qquad ①$$

由 $0\leqslant a_h\leqslant p$,$h=1,2,\cdots,n$ 可推出

$$a_1^2+\cdots+a_n^2\leqslant pa_1+\cdots+pa_n,$$
$$2a_n(a_1+\cdots+a_{n-1})\leqslant 2(n-1)pa_n,$$
$$2a_{n-1}(a_1+\cdots+a_{n-2})\leqslant 2(n-2)pa_{n-1},$$
$$\cdots\cdots$$
$$2a_3(a_2+a_1)\leqslant 4pa_3,$$
$$2a_2a_1\leqslant 2pa_2.$$

以上 n 个不等式相加可得

$$\left(\sum_{h=1}^{n}a_h\right)^2 \leqslant pa_1 + 3pa_2 + 5pa_3 + \cdots + (2n-1)pa_n$$

$$\leqslant 2p\sum_{h=1}^{n}ha_h.$$

即 ① 成立.

9·243　求证:对任意实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,存在自然数 k,$1\leqslant k\leqslant n$,使得对任意 $1\geqslant b_1\geqslant b_2\cdots\geqslant b_n\geqslant 0$,都有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}b_ia_i\right| \leqslant \left|\sum_{i=1}^{k}a_i\right|.$$

(第 23 届国际数学奥林匹克预选题,1982 年)

[证]　令 $s_0=0,s_i=a_1+a_2+\cdots+a_i,i=1,2,\cdots,n$,则

$$a_i = s_i - s_{i-1},i=1,2,\cdots,n.$$

于是有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}b_ia_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}b_i(s_i-s_{i-1})\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}b_is_i - \sum_{i=1}^{n-1}b_{i+1}s_i\right|.$$

$$=\left|\sum_{i=1}^{n-1}(b_i-b_{i+1})s_i + b_ns_n\right|$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n-1}|b_i-b_{i+1}||s_i| + |b_n||s_n|$$

令　$|s_k| = \max\{|s_1|,|s_2|,\cdots,|s_n|\}$.

由于 $|b_i-b_{i+1}| = b_i - b_{i+1}$, $|b_n| = b_n$,所以

$$\left|\sum_{i=1}^{n}b_ia_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n-1}(b_i-b_{i+1})+b_n\right)|s_k| = b_1|s_k| \leqslant |s_k|,$$

即　$$\left|\sum_{i=1}^{n}b_ia_i\right| \leqslant \left|\sum_{i=1}^{k}a_i\right|.$$

9·244　设实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n(n\geqslant 2)$ 和 A 满足

$$A + \sum_{i=1}^{n}a_i^2 < \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2.$$

求证:对于 $1\leqslant i<j\leqslant n$ 有

$$A < 2a_ia_j.$$

(第 38 届美国普特南数学竞赛,1977 年)

[证]　用反证法.设有 $1\leqslant i<j\leqslant n$,使得

$$A \geqslant 2a_ia_j,$$

不妨设 $i=1, j=2$. 于是有

$$A+\sum_{i=1}^{n}a_i^2 \geqslant 2a_1a_2+\sum_{i=1}^{n}a_i^2=(a_1+a_2)^2+a_3^2+\cdots+a_n^2.$$

由柯西不等式

$$(a_1+a_2)^2+a_3^2+\cdots+a_n^2 \geqslant \frac{1}{n-1}(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2,$$

从而得到

$$A+\sum_{i=1}^{n}a_i^2 \geqslant \frac{1}{n-1}\Big(\sum_{i=1}^{n}a_i\Big)^2,$$

与假设矛盾!所以对任何 $1 \leqslant i < j \leqslant n$ 有

$$A < 2a_ia_j.$$

9·245　设 $0 < x_i \leqslant 1, 0 < y_i \leqslant 1, i=1,2,\cdots,n$, 且

$$x_i+y_j=1, i=1,2,\cdots,n.$$

对任意自然数 m, 求证:

$$(1-x_1\cdots x_n)^m+(1-y_1^m)\cdots(1-y_n^m) \geqslant 1.$$

(波兰数学奥林匹克,1984年)

[证]　首先对于任意的 $a, b \in [0,1]$, 用归纳法证明对任意自然数 m 有

$$(a+b-ab)^m \geqslant a^m+b^m-a^mb^m. \qquad ①$$

当 $m=1$ 时,显然①式两端相等. 设当 $m=k$ 时,①式成立. 由此可得

$$\begin{aligned}(a+b-ab)^{k+1} &= (a+b-ab)^k(a+b-ab)\\ &\geqslant (a^k+b^k-a^kb^k)(a+b-ab).\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}&(a+b-ab)^{k+1}-(a^{k+1}+b^{k+1}-a^{k+1}b^{k+1})\\ \geqslant\ & ab^k-a^{k+1}b^k+a^kb-a^kb^{k+1}-a^{k+1}b-ab^{k+1}+2a^{k+1}b^{k+1}\\ =\ & ab^k(1-b)+a^kb(1-a)+a^{k+1}b^k(b-1)+a^kb^{k+1}(a-1)\\ =\ & ab^k(1-b)(1-a^k)+a^kb(1-a)(1-b^k) \geqslant 0,\end{aligned}$$

即①式对于 $m=k+1$ 也成立.

以下证明对任意给定 $m \in N$ 原不等式成立,即

$$(1-x_1\cdots x_n)^m+(1-y_1^m)\cdots(1-y_n^m) \geqslant 1. \qquad ②$$

关于 n 用归纳法. 当 $n=1$ 时,则

$$(1-x_1)^m+1-y_1^m=y_1^m+1-y_1^m=1,$$

即②式成立. 设当 $n=k$ 时,②式成立,由归纳假设可知

$$
\begin{aligned}
&(1-x_1\cdots x_{k+1})^m+(1-y_1^m)\cdots(1-y_{k+1}^m)\\
&=(1-x_1\cdots x_k(1-y_{k+1}))^m+(1-y_1^m)\cdots(1-y_k^m)(1-y_{k+1}^m)\\
&\geqslant(1-x_1\cdots x_k+x_1\cdots x_ky_{k+1})^m+[1-(1-x_1\cdots x_k)^m](1-\\
&\quad y_{k+1}^m)
\end{aligned}
$$

记 $a=1-x_1\cdots x_k, b=y_{k+1}$,则 $a,b\in[0,1]$ 且

$$
\begin{aligned}
&(1-x_1\cdots x_{k+1})^m+(1-y_1^m)\cdots(1-y_{k+1}^m)\\
&\geqslant(a+(1-a)b)^m+(1-a^m)(1-b^m)\\
&=(a+b-ab)^m+1-(a^m+b^m-a^mb^m).
\end{aligned}
$$

由 ① 可得

$$(1-x_1\cdots x_{k+1})^m+(1-y_1^m)\cdots(1-y_{k+1}^m)\geqslant 1,$$

即当 $n=k+1$ 时,② 也成立.以上就完成了归纳证明.

9·246　如果正数 M 与数组

$$
\begin{aligned}
&a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n}\\
&a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n}\\
&a_{n1},a_{n2},\cdots,a_{nn}
\end{aligned}
$$

使得对任意 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\{-1,1\}$ 有

$$\sum_{k=1}^{n}|a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\cdots+a_{kn}x_n|\leqslant M,$$

求证:$|a_{11}|+|a_{22}|+\cdots+|a_{nn}|\leqslant M.$

(前南斯拉夫数学奥林匹克,1972 年)

[证]　设集合

$$X=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n);x_k\in\{-1,1\},k=1,2,\cdots,n\}.$$

显然 X 的元素的个数为 2^n,且对任何$(x_1,\cdots,x_n)\in X$ 有

$$\sum_{k=1}^{n}|a_{k1}x_1+\cdots+a_{kn}x_n|\leqslant M.$$

从而有

$$\frac{1}{2^n}\sum_{(x_1,\cdots,x_n)\in X}\sum_{k=1}^{n}|a_{k1}x_1+\cdots+a_{kn}x_n|\leqslant M.$$

令　$$s_k=\sum_{(x_1,\cdots,x_n)\in X}|a_{k1}x_1+\cdots+a_{kn}x_n|,$$

则　$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^n}s_k\leqslant M.$$

对于每一个 $k \in \{1,2,\cdots,n\}$,令

$$X_k = \{(x_1,\cdots,x_n) \in X; x_k = 1\},$$

显然 X_k 的元素的个数为 2^{n-1},且

$$s_k = \sum_{(x_1,\cdots,x_n)\in X_k} (|A_k + a_{kk}| + |A_k - a_{kk}|),$$

其中 $A_k = a_{k1}x_1 + \cdots + a_{kk-1}x_{k-1} + a_{kk+1}x_{k+1} + \cdots + a_{kn}x_n$. 显然有

$$|A_k + a_{kk}| + |A_k - a_{kk}| \geqslant |A + a_{kk} - (A - a_{kk})| = 2|a_{kk}|,$$

从而 $\qquad s_k \geqslant 2^{n-1} \cdot 2|a_{kk}| = 2^n |a_{kk}|$.

由此立即可得

$$\sum_{k=1}^{n} |a_{kk}| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^n} s_k \leqslant M.$$

9·247 求证:对任意 $a_1,a_2,\cdots,a_n \in [0,2], n \geqslant 2$,有

$$\sum_{i,j=1}^{n} |a_i - a_j| \leqslant n^2.$$

并确定对于什么样的 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 上式中的等号成立.

(波兰数学奥林匹克,1982 年)

[证] 不妨设 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$,则

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i,j=1}^{n} |a_i - a_j| = 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_i - a_j) \\ &= 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i - 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_j \\ &= 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} a_i - 2\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} a_j \\ &= 2\sum_{i=1}^{n}(n-i)a_i - 2\sum_{j=2}^{n}(j-1)a_j \\ &= 2\sum_{i=1}^{n}(n-2i+1)a_i. \end{aligned}$$

由此可知如果

$$a_i = \begin{cases} 2, \text{当 } i < \dfrac{n+1}{2}; \\ 0, \text{当 } i > \dfrac{n+1}{2}, \end{cases}$$

则相应之 S 取值最大. 于是当 $n = 2k-1, k \in N$ 时

$$S \leqslant 4\sum_{i=1}^{k}(2k-2i) = 4[2k^2 - k(k+1)]$$
$$= 4k^2 - 4k < (2k-1)^2 = n^2,$$

当 $n = 2k, k \in N$ 时

$$S \leqslant 4\sum_{i=1}^{k}(2k-2i+1)$$
$$= 4[(2k+1)k - k(k+1)]$$
$$= 4k^2 = n^2.$$

无论何种情况要证的不等式都成立,而且若 n 为奇数等号不能成立,若 n 为偶数,当且仅当 $\frac{n}{2}$ 个 a_i 取 2 另外 $\frac{n}{2}$ 个 a_i 取 0 时等号成立.

9·248　对任意正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$,记 $a_{n+1} = a_1$,问不等式

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{a_{i+1}}\right)^n \geqslant \sum_{i=1}^{n}\frac{a_{i+1}}{a_i}$$

是否成立?

(美国纽约数学竞赛,1975 年)

[解]　由均值不等式可得

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_2}{a_3}\cdot\frac{a_3}{a_4}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}}\cdot 1$$
$$\leqslant \frac{1}{n}\left[\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^n + \left(\frac{a_3}{a_4}\right)^n + \cdots + \left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^n + 1\right],$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{a_3}{a_4}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}}\cdot\frac{a_1}{a_2}\cdot 1$$
$$\leqslant \frac{1}{n}\left[\left(\frac{a_3}{a_4}\right)^n + \cdots + \left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^n + \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^n + 1\right],$$

……

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_3}\cdot\cdots\cdot\frac{a_{n-1}}{a_n}\cdot 1$$
$$\leqslant \frac{1}{n}\left[\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^n + \left(\frac{a_2}{a_3}\right)^n + \cdots + \left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^n + 1\right],$$

$$1 = \frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_3}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}}$$

$$\leqslant \frac{1}{n}\left[\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^n+\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^n+\cdots+\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^2\right].$$

将上述 $n+1$ 个式子相加可得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{i+1}}{a_i}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{a_{i+1}}\right)^n,$$

即原不等式成立.

9·249　对于任意正数 $a_k,b_k,k=1,2,\cdots,n$,求证:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_kb_k}{a_k+b_k}\leqslant\frac{AB}{A+B}.$$

其中　$A=\sum_{k=1}^{n}a_k,B=\sum_{k=1}^{n}b_k.$

(圣彼得堡市数学选拔考试,1993 年)

[证]　首先证明对任意正数 x_1,y_1,x_2,y_2 有

$$\frac{x_1y_1}{x_1+y_1}+\frac{x_2y_2}{x_2+y_2}\leqslant\frac{(x_1+x_2)(y_1+y_2)}{x_1+x_2+y_1+y_2}. \quad ①$$

事实上 ①

$$\Leftrightarrow\quad \frac{x_1y_1}{x_1+y_1}+\frac{x_2y_2}{x_2+y_2}\leqslant\frac{x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+x_2y_2}{x_1+x_2+y_1+y_2},$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{x_1y_1(x_2+y_2)}{x_1+y_1}+\frac{x_2y_2(x_1+y_1)}{x_2+y_2}\leqslant x_1y_2+x_2y_1,$$

$$\Leftrightarrow\quad \left(\frac{y_1}{x_1+y_1}+\frac{x_2}{x_2+y_2}\right)x_1y_2+\left(\frac{x_1}{x_1+y_1}+\frac{y_2}{x_2+y_2}\right)x_2y_1$$

$$\leqslant\quad x_1y_2+x_2y_1,$$

$$\Leftrightarrow\quad -\frac{x_1y_2(x_1y_2-x_2y_1)}{(x_1+y_1)(x_2+y_2)}+\frac{x_2y_1(x_1y_2-x_2y_1)}{(x_1+y_1)(x_2+y_2)}\leqslant 0,$$

$$\Leftrightarrow\quad -(x_1y_2-x_2y_1)^2\leqslant 0.$$

因此 ① 成立.

其次,用归纳法证明原不等式.显然当 $n=1$ 时,原不等式成立.设 $n=m$ 时原不等式成立.当 $n=m+1$ 时,由归纳假设可得

$$\sum_{k=1}^{m+1}\frac{a_kb_k}{a_k+b_k}\leqslant\frac{A'B'}{A'+B'}+\frac{a_{m+1}b_{m+1}}{a_{m+1}+b_{m+1}},$$

其中 $A'=\sum_{k=1}^{m}a_k,B'=\sum_{k=1}^{m}b_k$.再用 ① 得

$$\sum_{k=1}^{m+1}\frac{a_k b_k}{a_k+b_k}\leqslant\frac{AB}{A+B},$$

其中 $A=A'+a_{m+1}=\sum_{k=1}^{m+1}a_k$，$B=B'+b_{m+1}=\sum_{k=1}^{m+1}b_k$，即原不等式对于 $n=m+1$ 也成立.

9·250　在长度为1的线段上标出一些两两没有公共内部的区间，不论是同一区间或是不同区间中的任何两点的距离都不等于0.1.求证：所标出区间长度之和不超过0.5.

（第42届莫斯科数学奥林匹克，1979年）

［证］　不妨设长度为1的线段是[0,1].记 M 是所标出区间上的点的并集，$N=[0,1]\setminus M$，即 N 是属于[0,1]但不属于 M 的点的集合，显然 N 也是[0,1]上一些两两没有公共内部的区间上的点之并集.设 k 是自然数且 $1\leqslant k\leqslant 10$，分别用 x_k 和 y_k 表示 $M\cap\left[\frac{k-1}{10},\frac{k}{10}\right]$ 和 $N\cap\left[\frac{k-1}{10},\frac{k}{10}\right]$ 所组成区间的长度之和.由于 M 中任何两点的距离不等于0.1，所以当 $k=1,3,5,7,9$ 时，$y_k\geqslant x_{k+1}$.当 $k=2,4,6,8,10$ 时，$y_k\geqslant x_{k-1}$.再由 $\sum_{k=1}^{10}(x_k+y_k)=1$ 可知所标出区间的长度之和 $\sum_{k=1}^{10}x_k\leqslant\frac{1}{2}$.

9·251　对于平面上一组长度都不超过1的向量 $v_1,v_2,\cdots,v_{1989}$，求证：存在 $\varepsilon_k\in\{-1,1\}$，$k=1,2,\cdots,1989$，使得

$$\left|\sum_{k=1}^{1989}\varepsilon_k v_k\right|\leqslant\sqrt{3}.$$

（第30届国际数学奥林匹克预选题，1989年）

［证］　用归纳法证明更强的命题：平面上任给 n 个长度都不超过1的向量 $v_1,v_2,\cdots,v_n$，则存在 $\varepsilon_k\in\{-1,1\}$，$k=1,2,\cdots,n$，使得

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k v_k\right|\leqslant\sqrt{2}.\qquad ①$$

当 $n=1$ 时，显然①成立.当 $n=2$ 时，由于 $\pm v_1$，$\pm v_2$ 四个向量中必有两个的夹角 $\geqslant 90°$，显然这两个向量和的长度 $\leqslant\sqrt{2}$，即命题成立.设 $n=k$ 时，命题成立.任取 $k+1$ 个长度都不超过1的向量 $v_1,v_2,$

$\cdots, v_{k+1}, k+1 \geqslant 3$. 由于在 $\pm v_1, \pm v_2, \pm v_3$ 六个向量中必有两个的夹角 $\geqslant 120°$, 不妨设为 v_1, v_2, 则 $|v_1 + v_2| \leqslant 1$. 对于

$$v_1 + v_2, v_3, \cdots, v_{k+1}$$

用归纳法可知当 $n = k+1$ 时, 命题也成立.

9·252　平面上 m 个向量 $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_m$ 满足

$$|\vec{u}_i| \leqslant 1, i = 1,2,\cdots,m, \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \cdots + \vec{u}_m = \vec{0}.$$

求证: 可将这 m 个向量重排为 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m$, 使得

$$|\vec{v}_1| \leqslant \sqrt{5}, |\vec{v}_1 + \vec{v}_2| \leqslant \sqrt{5}, |\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3| \leqslant \sqrt{5}, \cdots,$$
$$|\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \cdots + \vec{v}_m| \leqslant \sqrt{5}.$$

(第 29 届国际数学奥林匹克候选题, 1988 年)

[证]　首先证明一个引理: 设实数 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 满足:

$$|x_i| \leqslant 1, i = 1,2,\cdots,m, x_1 + x_2 + \cdots + x_m = 0,$$

则可将它们重排为 $y_1, y_2, \cdots, y_m$, 使得

$$|y_1| \leqslant 1, |y_1 + y_2| \leqslant 1, |y_1 + y_2 + y_3| \leqslant 1,$$
$$|y_1 + y_2 + \cdots + y_m| \leqslant 1. \quad ①$$

事实上, 不妨设 $x_i \neq 0, i = 1,2,\cdots,m$. 进一步设 $x_1, x_2, \cdots, x_l$ 为正, $x_{l+1}, \cdots, x_m$ 为负, 其中 $1 \leqslant l \leqslant m-1$. 令 $y_1 = x_1, y_2 = x_{l+1}$. 若 $x_1 + x_{l+1} \leqslant 0$ 且 $m > 2$, 则令 $y_3 = x_2$. 若 $x_1 + x_{l+1} > 0$, 则存在正整数 r, 使得

$$x_1 + x_{l+1} + \cdots + x_{l+r} > 0,$$
$$x_1 + x_{l+1} + \cdots + x_{l+r} + x_{l+r+1} \leqslant 0,$$

此时令 $y_2 = x_{l+1}, \cdots, y_{r+1} = x_{l+r}, y_{r+2} = x_{l+r+1}$. 若 $r+2 = m$, 则所有的数已重新排序, 否则 $r+2 < m$, 从而有 $l \geqslant 2$, 可令 $y_{r+3} = x_2$. 若 $y_1 + \cdots + y_{r+3} < 0$, 则 $l \geqslant 3$, 可令 $y_{r+4} = x_3$, 继续这种排序方法直到所有重新排过序的数之和为非负. 如果仍有未被重排序的数, 那么重复上述方法, 先在负数中排序, 再在正数中排序, 直到某一步, m 个数被重新排完为止. 由此排法易知

$$|y_1| \leqslant 1, |y_1 + \cdots + y_k| \leqslant \max\{|y_1 + \cdots + y_{k-1}|, |y_k|\},$$

$2 \leqslant k \leqslant m$.

由此用归纳法立即可得 ① 成立.

回到我们要证之命题. 在 $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_m\}$ 中任取一个或若干个向

量之和,不妨设在所有这些向量中以$\vec{u_1}+\vec{u_2}+\cdots+\vec{u_p}$的长度为最大且不等于0,则$1\leqslant p\leqslant m-1$.以$\vec{u_1}+\vec{u_2}+\cdots+\vec{u_p}$的方向为$x$轴正向建立直角坐标系,令

$$\vec{u_i}=(x_i,y_i),i=1,2,\cdots,m,$$

则
$$x_i^2+y_i^2\leqslant 1,i=1,2,\cdots,m,$$
$$x_1+x_2+\cdots+x_m=0,y_1+y_2+\cdots+y_m=0.$$

由$\vec{u_1}+\cdots+\vec{u_p}$的取法及坐标的选择易知

$$x_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,p,$$
$$x_i\leqslant 0,i=p+1,\cdots,m,$$
$$y_1+y_2+\cdots+y_p=0.$$

从而$y_{p+1}+\cdots+y_m=0$.利用引理,不妨设

$$|y_1+\cdots+y_k|\leqslant 1,k=1,2,\cdots,p, \quad ②$$
$$|y_{p+1}+\cdots+y_{p+k}|\leqslant 1,k=1,2,\cdots,m-p. \quad ③$$

令$\vec{v_1}=\vec{u_1}=(x_1,y_1)$,$\vec{v_2}=\vec{u_{p+1}}=(x_{p+1},y_{p+1})$.根据向量$x$坐标之正负,利用引理证明中的排序方法可将原来$m$个向量重排为$\vec{v_1},\vec{v_2},\cdots,\vec{v_m}$.对于任何自然数$m$,显然$\vec{v_1}+\cdots+\vec{v_m}$的$x$坐标的绝对值$\leqslant 1$,注意到②③,则其$y$坐标的绝对值$\leqslant 2$.于是可得

$$|\vec{v_1}+\vec{v_2}+\cdots+\vec{v_k}|\leqslant\sqrt{5},k=1,2,\cdots,m.$$

9·253　在圆周上已给n个实数($n\geqslant 2$),假设其和为0且其中有一个数等于1.

(1) 求证:存在两个相邻的数,它们之差不小于$\frac{4}{n}$;

(2) 求证:存在一个数,使得它的两个相邻数的算术平均值与其差不小于$\frac{8}{n^2}$.

(3) 对任意的n,改进(2)中所作的估计,即用一个较大的数代替(2)中的8.

(4) 当$n=30$时,求证:在圆周上存在一个数,使得它的两个相邻数的算术平均值与这个数的差不小于$\frac{2}{113}$.并举出在圆周上给出30个实数的例子,使得其中任一个数与其相邻数的算术平均值之差都不大

于$\frac{2}{113}$.

（第 10 届全苏数学奥林匹克，1976 年）

[解] (1) 设相邻两数差的最大值为 ε，显然 $\varepsilon > 0$. 令 $m = \left[\frac{n}{2}\right]$，$x_0 = 1, x_1, x_2, \cdots, x_m$ 为自 x_0 开始顺时针方向接连排着的数，$x_{-1}, x_{-2}, \cdots, x_{-(m-1)}$ 为自 x_0 开始逆时针方向接连排着的数. 当 $n = 2m+1$ 时，还有 x_{-m}. 显然有

$x_0 = 1, x_1 \geqslant 1-\varepsilon, x_2 \geqslant 1-2\varepsilon, \cdots, x_m \geqslant 1-m\varepsilon, x_{-1} \geqslant 1-\varepsilon, x_{-2} \geqslant 1-2\varepsilon, \cdots, x_{-(m-1)} \geqslant 1-(m-1)\varepsilon$.

当 $n = 2m+1$ 时，$x_{-m} \geqslant 1 - m\varepsilon$. 由于所有数之和为 0，所以当 $n = 2m$ 时，$n - [m + (m-1)m]\varepsilon \leqslant 0$ 即 $\varepsilon \geqslant \frac{n}{m^2} = \frac{4}{n}$.

当 $n = 2m+1$ 时，$n - m(m+1)\varepsilon \geqslant 0$，即 $\varepsilon \geqslant \frac{n}{m(m+1)} > \frac{4}{n}$.

(2) 设相邻两数差的最大值为 ε，由(1)知 $\varepsilon \geqslant \frac{4}{n}$. 将圆周上的 n 个数按某种方向旋转顺序标号为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，使得存在 $1 < k \leqslant n$ 满足

$$x_k - x_{k-1} = \varepsilon.$$

令 $x_{n+m} = x_m, m = 1,2,3,\cdots, y_m = \frac{1}{\varepsilon}(x_m - x_{m-1}), m = 2,3,\cdots,n, n+1$. 将 $y_2, y_3, \cdots, y_n, y_{n+1}$ 依次放在圆周上. 由于 $y_k = 1$ 且

$$\sum_{m=2}^{n+1} y_m = \frac{1}{\varepsilon}\sum_{m=2}^{n+1} x_m - \frac{1}{\varepsilon}\sum_{m=2}^{n+1} x_{m-1} = 0,$$

从(1)可知存在 $2 \leqslant m \leqslant n+1$ 使得

$$|y_{m+1} - y_m| \geqslant \frac{4}{n}.$$

其中 $y_{n+2} = \frac{1}{\varepsilon}(x_{n+2} - x_{n+1}) = \frac{1}{\varepsilon}(x_2 - x_1) = y_2$. 由此可得

$$\left|\frac{x_{m+1} - x_m}{2} - \frac{x_m - x_{m-1}}{2}\right| \geqslant \frac{4}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \frac{8}{n^2},$$

即 $$\left|\frac{x_{m+1} + x_{m-1}}{2} - x_m\right| \geqslant \frac{8}{n^2}.$$

(3) 设 δ 是圆周上的数与其相邻数的算术平均值之差的最大绝对

值.与(1)中的记号相同,$m=\left[\frac{n}{2}\right]$,当 $n=2m$ 时,n 个数标记为 $x_{-(m-1)},x_{-(m-2)},\cdots,x_{-1},x_0=1,x_1,x_2,\cdots,x_m$,当 $n=2m+1$ 时,还有 x_{-m}.令

$$y_0=x_0,y_k=y_{-k}=\frac{1}{2}(x_k+x_{-k}),k=1,2,\cdots,(m-1).$$

当 $n=2m$ 时,$y_m=x_m$,当 $n=2m+1$ 时,$y_m=y_{-m}=\frac{1}{2}(x_m+x_{-m})$.

显然 $y_0=1,\sum\limits_i y_i=0$ 且

$$|y_1+y_{-1}-2y_0|=|x_1+x_{-1}-2x_0|\leqslant 2\delta,$$

$$\begin{aligned}&|y_{k+1}+y_{k-1}-2y_k|\\=&\left|\frac{x_{k+1}+x_{-(k+1)}}{2}+\frac{x_{k-1}+x_{-(k-1)}}{2}-(x_k+x_{-k})\right|\\\leqslant&\left|\frac{x_{k+1}+x_{k-1}}{2}-x_k\right|+\left|\frac{x_{-(k+1)}+x_{-(k-1)}}{2}-x_{-k}\right|\\\leqslant&2\delta,\end{aligned}$$

其中 $k=1,2,\cdots,m-1$.当 $n=2m$ 时,

$$\begin{aligned}|y_{m-1}+y_{-(m-1)}-2y_m|&=2|y_{m-1}-y_m|\\&=2\left|\frac{x_{m-1}+x_{-(m-1)}}{2}-x_m\right|\leqslant 2\delta.\end{aligned}$$

当 $n=2m+1$ 时

$$\begin{aligned}&|y_{m-1}+y_{-m}-2y_m|\\=&|y_{m-1}-y_m|=\left|\frac{x_{m-1}+x_{-(m-1)}}{2}-\frac{x_m+x_{-m}}{2}\right|\\\leqslant&\left|\frac{x_{m-1}+x_{-m}}{2}-x_m\right|+\left|\frac{x_m+x_{-(m-1)}}{2}-x_{-m}\right|\\\leqslant&2\delta.\end{aligned}$$

为了得到 δ 的精确估计,分4种情况.

(i)$n=2m,m=2l+1$,即 $n=4l+2$.由于

$$y_0-y_1\leqslant\frac{1}{2}|2y_0-y_1-y_{-1}|\leqslant\delta,$$

$$y_1-y_2=y_0-y_1+(-y_0-y_2+2y_1)$$

$$\leqslant \delta + | y_0 + y_2 - 2y_1 | \leqslant 3\delta,$$

$$y_2 - y_3 \leqslant 5\delta,$$

……

$$y_{k-1} - y_k \leqslant (2k-1)\delta.$$

另一方面 $y_{m-1} - y_m \leqslant \frac{1}{2} | y_{m-1} + y_{-(m-1)} - 2y_m | \leqslant \delta,$

$$y_{m-2} - y_{m-1} = y_{m-1} - y_m + (y_{m-2} + y_m - 2y_{m-1})$$

$$\leqslant \delta + | y_{m-2} + y_m - 2y_{m-1} | \leqslant 3\delta,$$

$$y_{m-3} - y_{m-2} \leqslant 5\delta,$$

……

$$y_{m-k} - y_{m-(k-1)} \leqslant (2k-1)\delta.$$

注意到 $m = 2l + 1$,则

$$y_0 - y_1 \leqslant \delta,$$

$$y_1 - y_2 \leqslant 3\delta,$$

……

$$y_{l-1} - y_l \leqslant (2l-1)\delta,$$

$$y_l - y_{l+1} \leqslant (2l+1)\delta,$$

$$y_{l+1} - y_{l+2} \leqslant (2l-1)\delta,$$

……

$$y_{2l-1} - y_{2l} \leqslant 3\delta,$$

$$y_{2l} - y_{2l+1} \leqslant \delta.$$

由此可得 $y_k \geqslant 1 - S_k\delta, k = 0,1,2,\cdots,2l+1.$

显然,$S_0 = 0$,

$$S_{2l+1} = 1 + 3 + \cdots + 2l - 1 + 2l + 1 + 1 + 3 + \cdots + 2l - 1$$

$$= (l+1)^2 + l^2$$

且

$$S_0 + S_{2l+1} = S_1 + S_{2l} = S_2 + S_{2l-1} = \cdots = S_l + S_{l+1}.$$

由 $y_0 + 2\sum_{k=1}^{2l} y_k + y_{2l+1} = 0$ 可得

$$(S_0 + S_{2l+1} + 2\sum_{k=1}^{2l} S_k)\delta \geqslant 4l + 2.$$

即 $\delta \geqslant \frac{2}{S_{2l+1}} = \frac{2}{l^2+(l+1)^2}$.

再从 $n=4l+2$,则 $\delta \geqslant \frac{16}{n^2+4}$.

反之,当 $n=4l+2$ 时,令 $\delta = \frac{16}{n^2+4}$,

$$x_k = 1 - S_k\delta, k = 0,1,2,\cdots,2l+1,$$

$$x_{-k} = x_k, k = 1,2,\cdots,2l,$$

即 $x_0 = 1$,

$$x_k = x_{-k} = \begin{cases} 1-k^2\delta, k=1,2,\cdots,l \\ -1+(2l+1-k)^2\delta, k=l+1,l+2,\cdots,2l, \end{cases}$$

$x_{2l+1}=-1$,易知每一个数与其相邻数的算术平均值之差的绝对值都等于 δ.

(ii) $n=2m$, $m=2l$,即 $n=4l$.类似于(i)中之证明可得 $\delta \geqslant \frac{16}{n^2}$.

(iii) $n=2m+1$, $m=2l$,即 $n=4l+1$.与(i)中证明类似有

$$y_0 - y_1 \leqslant \delta,$$

$$y_1 - y_2 \leqslant 3\delta,$$

……

$$y_{k-1} - y_k \leqslant (2k-1)\delta.$$

与(i)中证明不同的是

$$y_{m-1} - y_m = y_{m-1} + y_{-m} - 2y_m \leqslant 2\delta,$$

$$y_{m-2} - y_{m-1} = y_{m-1} - y_m + (y_{m-2} + y_m - 2y_{m-1}) \leqslant 4\delta,$$

……

$$y_{m-k} - y_{m-(k-1)} \leqslant 2k\delta.$$

注意到 $m=2l$,则

$$y_0 - y_1 \leqslant \delta,$$

$$y_1 - y_2 \leqslant 3\delta,$$

……

$$y_{l-1} - y_l \leqslant (2l-1)\delta,$$

$$y_l - y_{l+1} \leqslant 2l\delta,$$

$$y_{l+1} - y_{l+2} \leqslant 2(l-1)\delta,$$

$$\cdots\cdots$$

$$y_{2l-1}-y_{2l}\leqslant 2\delta.$$

由此可得 $\qquad y_k\geqslant 1-S_k\delta,k=0,1,2,\cdots,2l,$

其中 $S_0=0$,

$$S_k=\begin{cases}k^2,k=1,2,\cdots,l.\\ l^2+l(l+1)-(2l-k)(2l-k+1),k=l+1,\cdots,2l.\end{cases}$$

所以 $\sum\limits_{k=1}^{2l}S_k=\frac{1}{2}(4l^3+3l^2+l)$. 再由 $y_0+2\sum\limits_{k=1}^{2l}y_k=0$ 可得

$$\delta\geqslant\frac{4l+1}{4l^3+3l^2+l},$$

即 $$\delta\geqslant\frac{16n}{n^3+n-2}.$$

(iv) $n=2m+1,m=2l+1$, 即 $n=4l+3$. 类似于(iii)中的证明可得

$$\delta\geqslant\frac{16n}{n^3+n+2}.$$

(4) 在(3)的(i)中,令 $n=30$, 由 $\frac{16}{904}=\frac{2}{113}$ 可得所要的结果.

9·254 设 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$ 是满足下列条件的 n 个实数:对任何整数 $k>0$,都有

$$a_1^k+a_2^k+\cdots+a_n^k\geqslant 0$$

成立,令

$$p=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_n|\}.$$

证明: $p=a_1$, 并且对任何 $x>a_1$, 都有

$$(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)\leqslant x^n-a_1^n.$$

(第37届国际数学奥林匹克预选题,1996年)

[证] 先用反证法证明 $p=a_1$.

事实上,若 $p\neq a_1$, 则 $p=|a_n|$, 并且 $p>a_1,a_n<0$.

设 $n-k+1\leqslant m\leqslant n$ 时, $a_m=a_n$; 而 $m\leqslant n-k$ 时, $a_m>a_n$, 这里 $1\leqslant k\leqslant n-1$. 则

$$a_1^{2l+1}+a_2^{2l+1}+\cdots+a_n^{2l+1}$$

$$=a_n^{2l+1}\left[\left(\frac{a_1}{a_n}\right)^{2l+1}+\cdots+\left(\frac{a_{n-k}}{a_n}\right)^{2l+1}+k\right].$$

由于$\left|\frac{a_1}{a_n}\right|<1,\cdots,\left|\frac{a_{n-k}}{a_n}\right|<1$,因此存在$l\in N$,使得

$$\left|\frac{a_1}{a_n}\right|\leqslant\frac{1}{n},\cdots,\left|\frac{a_{n-k}}{a_n}\right|\leqslant\frac{1}{n}.$$

于是

$$\left(\frac{a_1}{a_n}\right)^{2l+1}+\cdots+\left(\frac{a_{n-k}}{a_n}\right)^{2l+1}+k$$

$$\geqslant-\left|\frac{a_1}{a_n}\right|^{2l+1}-\cdots-\left|\frac{a_{n-k}}{a_n}\right|^{2l+1}+k$$

$$\geqslant-\frac{n-k}{n}+k$$

$$>0,$$

从而有

$a_1^{2l+1}+a_2^{2l+1}+\cdots+a_n^{2l+1}<0$,与已知矛盾.

故$p=a_1$.

下面证明:当$x>a_1$时,都有

$$(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)\leqslant x^n-a_1^n.$$

事实上,当$x>a_1$时,

$$(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$$

$$\leqslant(x-a_1)\left[\frac{(x-a_2)+\cdots+(x-a_n)}{n-1}\right]^{n-1}$$

$$=(x-a_1)\left(x-\frac{a_2+\cdots+a_n}{n-1}\right)^{n-1}$$

$$\leqslant(x-a_1)\left(x+\frac{a_1}{n-1}\right)^{n-1}$$

$$=(x-a_1)\cdot\sum_{t=0}^{n-1}C_{n-1}^t\cdot\left(\frac{a_1}{n-1}\right)^t x^{n-1-t}$$

$$=(x-a_1)\cdot\sum_{t=0}^{n-1}\frac{C_{n-1}^t}{(n-1)^t}\cdot a_1^t\cdot x^{n-1-t}.$$

由于当$1\leqslant t\leqslant n-1$时,

$$C_{n-1}^t=\frac{(n-1)\cdots(n-t)}{t!}$$

$$= \frac{(n-1)}{t} \cdot \cdots \cdot \frac{n-t}{1} \leqslant (n-1)^t,$$

而当 $t = 0$ 时,

$$C_{n-1}^t = 1 = (n-1)^0 = (n-1)^t,$$

故当 $0 \leqslant t \leqslant n-1$ 时,恒有

$$\frac{C_{n-1}^t}{(n-1)^t} \leqslant 1.$$

于是有

$$\begin{aligned} &(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n) \\ \leqslant &(x-a_1)\sum_{t=0}^{n-1} a_1^t x^{n-1-t} \\ = &x^n - a_1^n. \end{aligned}$$

9·255 若 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$,证明:$\frac{a_1^4}{a_1^3 + a_1^2 a_2 + a_1 a_2^2 + a_2^3} + \frac{a_2^4}{a_2^3 + a_2^2 a_3 + a_2 a_3^2 + a_3^3} + \cdots + \frac{a_n^4}{a_n^3 + a_n^2 a_1 + a_n a_1^2 + a_1^3} \geqslant \frac{1}{4}$.

(中国河南省高中数学竞赛,1998 年)

[证] 令

$$A = \frac{a_1^4}{a_1^3 + a_1^2 a_2 + a_1 a_2^2 + a_2^3} + \frac{a_2^4}{a_2^3 + a_2^2 a_3 + a_2 a_3^2 + a_3^3} + \cdots + \frac{a_n^4}{a_n^3 + a_n^2 a_1 + a_n a_1^2 + a_1^3},$$

$$B = \frac{a_2^4}{a_1^3 + a_1^2 a_2 + a_1 a_2^2 + a_2^3} + \frac{a_3^4}{a_2^3 + a_2^2 a_3 + a_2 a_3^2 + a_3^3} + \cdots + \frac{a_1^4}{a_n^3 + a_n^2 a_1 + a_n a_1^2 + a_1^3},$$

则 $A - B = \frac{a_1^4 - a_2^4}{(a_1^2 + a_2^2)(a_1 + a_2)} + \frac{a_2^4 - a_3^4}{(a_2^2 + a_3^2)(a_2 + a_3)} + \cdots + \frac{a_n^4 - a_1^4}{(a_n^2 + a_1^2)(a_n + a_1)}$

$$= (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_n - a_1)$$

$$= 0,$$

即 $A = B$.

于是,我们有

$$A = \frac{1}{2}(A + B)$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{a_1^4 + a_2^4}{(a_1^2 + a_2^2)(a_1 + a_2)} + \frac{a_2^4 + a_3^4}{(a_2^2 + a_3^2)(a_2 + a_3)} + \cdots + \frac{a_n^4 + a_1^4}{(a_n^2 + a_1^2)(a_n + a_1)}\right],$$

注意到 $2(x^4 + y^4) \geqslant (x^2 + y^2)^2$,可得

$$A \geqslant \frac{1}{4}\left[\frac{a_1^2 + a_2^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2 + a_3^2}{a_2 + a_3} + \cdots + \frac{a_n^2 + a_1^2}{a_n + a_1}\right]$$
$$\geqslant \frac{1}{8}[(a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) + \cdots + (a_n + a_1)]$$
$$= \frac{1}{4}.$$

9·256 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 n 个非负实数,且 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n$. 证明:

$$\frac{a_1^2}{1 + a_1^4} + \frac{a_2^2}{1 + a_2^4} + \cdots + \frac{a_n^2}{1 + a_n^4} \leqslant \frac{1}{1 + a_1} + \frac{1}{1 + a_2} + \cdots + \frac{1}{1 + a_n}.$$

(中国安徽省合肥市高中数学竞赛,1994 年)

[证] 因为对任意实数 a,都有

$$2a^2 \leqslant 1 + a^4,$$

所以,原不等式左端 $\leqslant \frac{n}{2}$.

又由算术-调和平均不等式可得

$$\frac{(1 + a_1) + (1 + a_2) + \cdots + (1 + a_n)}{n}$$
$$\geqslant \frac{n}{\frac{1}{1 + a_1} + \frac{1}{1 + a_2} + \cdots + \frac{1}{1 + a_n}}$$

即 $$\frac{1}{1 + a_1} + \frac{1}{1 + a_2} + \cdots + \frac{1}{1 + a_n} \geqslant \frac{n}{2}.$$

故原不等式得证.

9·257 给定 $a>2$, $\{a_n\}$ 递归定义如下: $a_0=1, a_1=a$,

$a_{n+1}=\left(\frac{a_n^2}{a_{n-1}^2}-2\right)a_n$.

证明:对任何 $K\in N$,有

$$\frac{1}{a_0}+\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_k}<\frac{1}{2}\left(2+a-\sqrt{a^2-4}\right).$$

(第 37 届国际数学奥林匹克预选题,1996 年)

[证] 设 $f(x)=x^2-2$. 则

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=f\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)=f^{(2)}\left(\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\right)=\cdots=f^{(n)}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)=f^{(n)}(a).$$

于是

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_1}{a_0}\cdot a_0\\&=f^{(n-1)}(a)\cdot f^{(n-2)}(a)\cdot\cdots\cdot f^{(0)}(a).\end{aligned}$$

其中 $f^{(0)}(a)=a$.

下面证明对任何 $K\in N\cup\{0\}$,本题结论成立.

$K=0$ 时, $\frac{1}{a_0}=1<\frac{1}{2}\left(2+a-\sqrt{a^2-4}\right)$,结论成立.

假设结论对 $K=m$ 成立,即

$$1+\frac{1}{f^{(0)}(a)}+\frac{1}{f^{(1)}(a)\cdot f^{(0)}(a)}+\cdots+\frac{1}{f^{(m-1)}(a)\cdot f^{(m-2)}(a)\cdot\cdots\cdot f^{(0)}(a)}<\frac{1}{2}\left(2+a-\sqrt{a^2-4}\right)\quad①$$

由于 $a>2$ 时, $f(a)=a^2-2>2$,且 ① 式对所有的 $a>2$ 都成立,因此可用 $f(a)$ 代替 ① 式中的 a,得

$$1+\frac{1}{f^{(1)}(a)}+\frac{1}{f^{(2)}(a)\cdot f^{(1)}(a)}+\cdots+\frac{1}{f^{(m)}(a)\cdot f^{(m-1)}(a)\cdot\cdots\cdot f^{(1)}(a)}$$

$$< \frac{1}{2}\left(2 + f(a) - \sqrt{f^2(a) - 4}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(a^2 - \sqrt{a^4 - 4a^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}a\left(a - \sqrt{a^2 - 4}\right).$$

于是,我们有

$$\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_{m+1}}$$

$$= 1 + \frac{1}{f^{(0)}(a)} + \frac{1}{f^{(1)}(a) \cdot f^{(0)}(a)} + \cdots + \frac{1}{f^{(m)}(a) \cdot f^{(m-1)}(a) \cdot \cdots \cdot f^{(0)}(a)}$$

$$= 1 + \frac{1}{f^{(0)}(a)} \cdot \left(1 + \frac{1}{f^{(1)}(a)} + \cdots + \frac{1}{f^{(m)}(a) \cdot f^{(m-1)}(a) \cdot \cdots \cdot f^{(1)}(a)}\right)$$

$$< 1 + \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{2}a\left(a - \sqrt{a^2 - 4}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2 + a - \sqrt{a^2 - 4}\right).$$

即 $k = m + 1$ 时结论也成立.

由数学归纳法原理,对所有 $k \in N \cup \{0\}$,结论成立.

9·258 设 $2n$ 个实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n; b_1, b_2, \cdots, b_n (n \geqslant 3)$ 满足条件:

(1) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$;

(2) $0 < a_1 = a_2, a_i + a_{i+1} = a_{i+2} (i = 1, 2, \cdots, n-2)$;

(3) $0 < b_1 \leqslant b_2, b_i + b_{i+1} \leqslant b_{i+2} (i = 1, 2, \cdots, n-2)$.

求证:$a_{n-1} + a_n \leqslant b_{n-1} + b_n$.

(中国中学生数学冬令营,1995 年)

[证] 如果 $a_1 \leqslant b_1$,则由已知递推关系式可知 $a_i \leqslant b_i (i = 2, 3, \cdots, n)$,从而结论成立.

如果存在 i_0,使得 $2 \leqslant i_0 \leqslant n-1$, $a_{i_0} \leqslant b_{i_0}$ 且 $a_{i_0+1} \leqslant b_{i_0+1}$,则当 $i_0 = n-1$ 时,立刻得到结论;而当 $2 \leqslant i_0 \leqslant n-2$ 时,由递推关系式可

知，对一切 $i \geqslant i_0+2$，均有 $a_i \leqslant b_i$，从而结论成立.

如果以上两种情况都不出现，那么必有 $a_1 > b_1$，并且在集合

$$I=\{i \mid a_i \leqslant b_i, 2 \leqslant i \leqslant n-2\}$$

中无相邻的自然数.这就是说，对任何 $i \in I$，必有 $a_i \leqslant b_i, a_{i-1} > b_{i-1}, a_{i+1} > b_{i+1}$.于是有

$$a_{i-1}+a_i=a_{i+1}>b_{i+1} \geqslant b_{i-1}+b_i, i \in I. \qquad ①$$

而对于任何未在 ① 式出现的下标 $j \leqslant n-2$，都有

$$a_j > b_j. \qquad ②$$

将所有 ① 和 ② 中的不等式相加，得

$$\sum_{j=1}^{n-2} a_j > \sum_{j=1}^{n-2} b_j,$$

又由条件 $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$

得

$$a_{n-1}+a_n \leqslant b_{n-1}+b_n.$$

9·259　设 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant a_{n+1}=0$ 是实数序列.证明：

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}\left(\sqrt{a_k}-\sqrt{a_{k+1}}\right).$$

（第 38 届国际数学奥林匹克预选题，1997 年）

［证 1］　对欲证的结论改述如下：

对每个非增、非负实数序列 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$.不等式

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{k}\left(\sqrt{a_k}-\sqrt{a_{k+1}}\right)+\sqrt{n a_n}. \qquad ①$$

成立.

对 n 用数学归纳法.$n=1$ 时，对“空”取和的值为零，显然成立.

假设对某个 $n \geqslant 1$，每个非增、非负、长为 n 的实数列，① 式成立.

考察长为 $n+1$，其项满足条件 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_{n+1} \geqslant 0$ 的实数列.由归纳假设，对此数列的前 n 项，① 式成立.为此，如能证明

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n+1} a_k}-\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k} \leqslant -\sqrt{n a_{n+1}}+\sqrt{(n+1) a_{n+1}}. \qquad ②$$

把 ① 与 ② 相加，就可得到对序列 $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$ 我们所要证明的结

果.现证②如下:

令 $s=\sum_{k=1}^{n}a_k, b=a_{n+1}$.把②式化为

$$\sqrt{s+b}-\sqrt{s}\leqslant-\sqrt{nb}+\sqrt{(n+1)b}. \quad ③$$

在 $b=0$ 时,③式显然成立.如 $b>0$,上式除以$\sqrt{b}$,并设 $U=\frac{s}{b}$,则③式化为

$$\sqrt{U+1}-\sqrt{U}\leqslant\sqrt{n-1}-\sqrt{n},$$

它等价于

$$\frac{1}{\sqrt{U+1}+\sqrt{U}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

因为 $b=a_{n+1}\leqslant\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\leqslant\frac{s}{n}$,所以 $U\geqslant n$,从而上式成立.

综上所述,原命题得证.

[证2] 令 $x_k=\sqrt{a_k}-\sqrt{a_{k+1}}, k=1,2,\cdots,n$.于是

$$\begin{cases}a_1=(x_1+\cdots+x_n)^2,\\ a_2=(x_2+\cdots+x_n)^2,\\ \cdots\cdots\\ a_n=x_n^2.\end{cases}$$

把这些式子的右端展开后相加,有

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}kx_k^2+2\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}kx_kx_l. \quad ④$$

把欲证的不等式的右端以 $x_k=\sqrt{a_k}-\sqrt{a_{k+1}}$ 代入,然后平方,得

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}x_k\right)^2=\sum_{k=1}^{n}kx_k^2+2\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}\sqrt{kl}x_kx_l \quad ⑤$$

④的值显然不大于⑤的值,所以要证的不等式成立.

9·260 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是满足下列条件的实数.

$$|x_1+x_2+\cdots+x_n|=1,$$

且
$$|x_i|\leqslant\frac{n+1}{2}, i=1,2,\cdots,n.$$

证明:存在 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一个排列 $y_1,y_2,\cdots,y_n$,使得

$$|y_1+2y_2+\cdots+ny_n|\leqslant\frac{n+1}{2}.$$

（第 38 届国际数学奥林匹克，1997 年）

［证］ 对于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的任意一个排列 $\pi=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$. 记

$$S(\pi)=y_1+2y_2+\cdots+ny_n.$$

及 $$r=\frac{n+1}{2}.$$

要证存在某个排列 π，使 $|S(\pi)|\leqslant r$.

令 $\pi_0=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\bar{\pi}=(x_n,x_{n-1},\cdots,x_1)$.

如果 $|S(\pi_0)|\leqslant r$ 或 $|S(\bar{\pi})|\leqslant r$，则题目得证. 如果 $|S(\pi_0)|>r$ 且 $|S(\bar{\pi})|>r$. 注意到

$$\begin{aligned}S(\pi_0)+S(\bar{\pi})&=(x_1+2x_2+\cdots+nx_n)+(x_n+2x_{n-1}+\cdots+nx_1)\\&=(n+1)(x_1+x_2+\cdots+x_n),\end{aligned}$$

所以 $$|S(\pi_0)+S(\bar{\pi})|=n+1=2r.$$

又因为 $|S(\pi_0)|$ 和 $|S(\bar{\pi})|$ 都大于 r，所以 $S(\pi_0)$ 和 $S(\bar{\pi})$ 的符号相反，并且它们其中之一大于 r，另一个小于 $-r$.

从 π_0 开始，通过若干次交换两个相邻元素的位置，我们可以得到任意一个排列. 特别地，存在一个排列的序列

$$\pi_0,\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_m,$$

其中 $\pi_m=\bar{\pi}$，并且对每个 $i\in\{0,1,\cdots,m-1\}$，排列 π_{i+1} 是通过交换 π_i 的两个相邻元素的位置而得到的. 也就是说，若

$\pi_i=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，$\pi_{i+1}=(z_1,z_2,\cdots,z_n)$，则存在 $k\in\{1,2,\cdots,n-1\}$，使得

$z_k=y_{k+1}$，$z_{k+1}=y_k$；$z_j=y_j$，$j\notin\{k,k+1\}$ 时. 因为 $|x_i|\leqslant r$，$i=1,2,\cdots,n$，所以

$$\begin{aligned}|S(\pi_{i+1})-S(\pi_i)|&=|kz_k+(k+1)z_{k+1}-ky_k-(k+1)y_{k+1}|\\&=|y_k-y_{k+1}|\leqslant|y_k|+|y_{k+1}|\leqslant 2r.\end{aligned}$$

这说明，在序列 $S(\pi_0),S(\pi_1),\cdots,S(\pi_m)$ 中，任意两个相邻数的距离不超过 $2r$. 注意到 $S(\pi_0)$ 和 $S(\pi_m)$ 都落在区间 $[-r,r]$ 的外面，且分别位于该区间的两侧，所以至少有一个数 $S(\pi_i)$ 落在该区间内. 即存在排列 π_i，使

$$|S(\pi_i)|\leqslant r.$$

代数卷

故原命题得证.

9·261　设 n 是一个整数，$n \geqslant 3$，并设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是一列实数，且满足 $x_i < x_{i+1}, 1 \leqslant i \leqslant n-1$.

证明：$\frac{n(n-1)}{2} \sum_{i<j} x_i x_j > \left(\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)x_i\right)\left(\sum_{j=2}^{n}(j-1)x_j\right)$.

（第 36 届国际数学奥林匹克预选题，1995 年）

［证］　令 $y_i = \sum_{j=i+1}^{n} x_j, y = \sum_{j=2}^{n}(j-1)x_j$,

$c = \frac{n(n-1)}{2}, z_i = cy_i - (n-i)y$. 则

$$\begin{aligned}
&\frac{n(n-1)}{2} \sum_{i<j} x_i x_j - \left(\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)x_i\right)\left(\sum_{j=2}^{n}(j-1)x_j\right) \\
&= c \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} x_i x_j - \sum_{i=1}^{n-1}(n-i)x_i y \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} x_i \cdot c \sum_{j=i+1}^{n} x_j - \sum_{i=1}^{n-1} x_i(n-i)y \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} x_i(cy_i - (n-i)y) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} x_i z_i.
\end{aligned}$$

下面只需证明：$\sum_{i=1}^{n-1} x_i z_i > 0$.

事实上，因为

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1} y_i &= (x_2 + \cdots + x_n) + (x_3 + \cdots + x_n) + \cdots + x_n \\
&= \sum_{j=2}^{n}(j-1)x_j \\
&= y
\end{aligned}$$

且

$$\sum_{i=1}^{n-1}(n-i) = \frac{n(n-1)}{2} = c,$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n-1} z_i = c\sum_{i=1}^{n-1} y_i - y\sum_{i=1}^{n-1}(n-i) = 0.$$

又因为

$$y = \sum_{j=2}^{n}(j-1)x_j < \sum_{j=2}^{n}(j-1)x_n = cx_n,$$

所以有

$$z_{n-1} = cy_{n-1} - y = cx_n - y > 0 \text{ 且存在某个 } z_k < 0.$$

因为

$$\frac{z_{i+1}}{c(n-i-1)} - \frac{z_i}{c(n-i)} = \frac{y_{i+1}}{n-i-1} - \frac{y_i}{n-i}$$
$$= \frac{x_{i+2} + \cdots + x_n}{n-i-1} - \frac{x_{i+1} + \cdots + x_n}{n-i} > 0,$$

所以

$$\frac{z_1}{n-1} < \frac{z_2}{n-2} < \frac{z_3}{n-3} < \cdots \frac{z_{n-2}}{2} < z_{n-1}.$$

从而,存在一个整数 k,使得

$$\begin{cases} z_i \leqslant 0, \text{当 } 1 \leqslant i \leqslant k \text{ 时}; \\ z_i > 0, \text{当 } k+1 \leqslant i \leqslant n-1 \text{ 时}. \end{cases}$$

因此,对每个 i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$,都有

$$(x_i - x_k)z_i \geqslant 0$$

即 $$x_i z_i \geqslant x_k z_i.$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i z_i \geqslant x_k \sum_{i=1}^{n-1} z_i = 0.$$

又因为

$$(x_{n-1} - x_k) \cdot z_{n-1} > 0,$$
$$x_{n-1}z_{n-1} > x_k z_{n-1}.$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i z_i > x_k \sum_{i=1}^{n-1} z_i = 0.$$

至此,原不等式得证.

9·262　设 n 是正整数,且 $n \geqslant 3$.又设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是实数,其中 $2 \leqslant a_i \leqslant 3$, $i = 1, 2, \cdots, n$.若取 $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.证明:

$$\frac{a_1^2+a_2^2-a_3^2}{a_1+a_2-a_3}+\frac{a_2^2+a_3^2-a_4^2}{a_2+a_3-a_4}+\cdots+\frac{a_n^2+a_1^2-a_2^2}{a_n+a_1-a_2}\leqslant 2s-2n.$$

（第36届国际数学奥林匹克预选题，1995年）

［证］ $\dfrac{a_i^2+a_{i+1}^2-a_{i+2}^2}{a_i+a_{i+1}-a_{i+2}}$

$$=a_i+a_{i+1}+a_{i+2}-\frac{2a_ia_{i+1}}{a_i+a_{i+1}-a_{i+2}},$$

注意到

$$1=2+2-3\leqslant a_i+a_{i+1}-a_{i+2}\leqslant 3+3-2=4,$$

以及由$(a_i-2)(a_{i+1}-2)\geqslant 0$可得

$$-2a_ia_{i+1}\leqslant -4(a_i+a_{i+1}-2),$$

所以有

$$\frac{a_i^2+a_{i+1}^2-a_{i+2}^2}{a_i+a_{i+1}-a_{i+2}}\leqslant a_i+a_{i+1}+a_{i+2}-4\cdot\frac{a_i+a_{i+1}-2}{a_i+a_{i+1}-a_{i+2}}$$

$$=a_i+a_{i+1}+a_{i+2}-4\left(1+\frac{a_{i+2}-2}{a_i+a_{i+1}-a_{i+2}}\right)$$

$$\leqslant a_i+a_{i+1}+a_{i+2}-4\left(1+\frac{a_{i+2}-2}{4}\right)$$

$$=a_i+a_{i+1}-2$$

记$a_{n+1}=a_1,a_{n+2}=a_2$，在上式中令$i=1,2,\cdots,n$，得n个不等式，再依次相加，得

$$\frac{a_1^2+a_2^2-a_3^2}{a_1+a_2-a_3}+\frac{a_2^2+a_3^2-a_4^2}{a_2+a_3-a_4}+\cdots+\frac{a_n^2+a_1^2-a_2^2}{a_n+a_1-a_2}\leqslant 2s-2n.$$

9·263 设$n\in N,x_0=0,x_i>0,i=1,2,\cdots,n$，且$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=1$.
求证：

$$1\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1+x_0+x_1+\cdots+x_{i-1}}\cdot\sqrt{x_i+x_{i+1}+\cdots+x_n}}<\frac{\pi}{2}.$$

（中国中学生数学冬令营，1996年）

［证］ 因为

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1,$$

所以,由均值不等式可得

$$\sqrt{(1 + x_0 + x_1 + \cdots + x_{i-1})(x_i + x_{i+1} + \cdots + x_n)}$$

$$\leqslant \frac{1 + x_0 + x_1 + \cdots + x_n}{2} = 1,$$

从而有

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1 + x_0 + x_1 + \cdots + x_{i-1}} \cdot \sqrt{x_i + x_{i+1} + \cdots + x_n}}$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,$$

即求证的第一个不等式成立.

又因为 $0 \leqslant x_0 + x_1 + \cdots + x_i \leqslant 1, i = 1,2,\cdots,n$,

所以可令

$$\theta_i = \arcsin(x_0 + x_1 + \cdots + x_i), i = 0,1,\cdots,n.$$

于是 $\theta_i \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,且有 $0 = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_n = \frac{\pi}{2}$,从而有

$$x_i = \sin\theta_i - \sin\theta_{i-1}$$

$$= 2\cos\frac{\theta_i + \theta_{i-1}}{2} \cdot \sin\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{2}$$

$$< 2\cos\theta_{i-1} \cdot \sin\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{2}.$$

因为对 $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,有 $\sin x < x$,所以有

$$x_i < 2\cos\theta_{i-1} \cdot \frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{2} = (\theta_i - \theta_{i-1}) \cdot \cos\theta_{i-1},$$

故得 $\frac{x_i}{\cos\theta_{i-1}} < \theta_i - \theta_{i-1}, i = 1,2,\cdots,n$.

在上式两端对 i 从 1 到 n 求和,得到

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\cos\theta_{i-1}} < \theta_n - \theta_0 = \frac{\pi}{2}. \quad ①$$

由 θ_i 的定义知,

$$\sin\theta_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_i,$$

所以

$$\begin{aligned}&\cos\theta_{i-1}\\&=\sqrt{1-\sin^2\theta_{i-1}}\\&=\sqrt{1-(x_0+x_1+x_2+\cdots+x_{i-1})^2}\\&=\sqrt{(1+x_0+x_1+\cdots+x_{i-1})(x_i+x_{i+1}+\cdots+x_n)}\qquad ②\end{aligned}$$

将②代入①,即得要证的第二个不等式.

9·264　设 $r_1,r_2,\cdots,r_n$ 为大于或等于1的实数.证明:

$$\frac{1}{r_1+1}+\frac{1}{r_2+1}+\cdots+\frac{1}{r_n+1}\geqslant\frac{n}{\sqrt[n]{r_1r_2\cdots r_n}+1}.$$

(第39届国际数学奥林匹克预选题,1998年)

[证]　$n=1$ 时,不等式显然成立.

下面用数学归纳法证明 $n=2^k$(k 为非负整数)时,不等式成立.

设 $n=2^m$(m 为某个非负整数)时,不等式成立.如果 $r_1,r_2,\cdots,r_{2n}\geqslant 1$,那么就有

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{2n}\frac{1}{r_j+1}&=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{r_j+1}+\sum_{j=n+1}^{2n}\frac{1}{r_j+1}\\&\geqslant\frac{n}{\sqrt[n]{r_1r_2\cdots r_n}+1}+\frac{n}{\sqrt[n]{r_{n+1}r_{n+2}\cdots r_{2n}}+1}\\&\geqslant\frac{2n}{\sqrt[2n]{r_1r_2\cdots r_{2n}}+1}.\end{aligned}$$

因此,对于任意的非负整数 k,当 $n=2^k$ 时不等式都成立.

对于任意自然数 n,若 $m=2^k>n,k\in N$,则令

$$r_{n+1}=r_{n+2}=\cdots=r_m=\sqrt[n]{r_1r_2\cdots r_n},$$

于是,有

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{r_j+1}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{r_j+1}+\frac{m-n}{\sqrt[n]{r_1r_2\cdots r_n}+1}.$$

另一方面,由上面的证明可知

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{r_j+1}&\geqslant\frac{m}{\sqrt[m]{r_1r_2\cdots r_m}+1}\\&=\frac{m}{(r_1r_2\cdots r_n)^{\frac{1}{m}}(r_{n+1}^{m-n})^{\frac{1}{m}}+1}\end{aligned}$$

$$= \frac{m}{(r_1r_2\cdots r_n)^{\frac{1}{m}}\cdot[(r_1r_2\cdots r_n)^{\frac{m-n}{n}}]^{\frac{1}{m}}+1}$$

$$= \frac{m}{(r_1r_2\cdots r_n)^{\frac{1}{n}}+1}$$

$$= \frac{m}{\sqrt[n]{r_1r_2\cdots r_n}+1}.$$

由上面两式,有

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{r_j+1}+\frac{m-n}{\sqrt[n]{r_1r_2\cdots r_n}+1}\geqslant\frac{m}{\sqrt[n]{r_1r_2\cdots r_n}+1},$$

即

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{r_j+1}\geqslant\frac{n}{\sqrt[n]{r_1r_2\cdots r_n}+1}.$$

9·265　设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是正实数,且满足

$$a_1+a_2+\cdots+a_n<1.$$

证明:

$$\frac{a_1a_2\cdots a_n[1-(a_1+a_2+\cdots+a_n)]}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)}\leqslant\frac{1}{n^{n+1}}.$$

(第 39 届国际数学奥林匹克预选题,1998 年)

[证]　设

$$a_{n+1}=1-(a_1+a_2+\cdots+a_n).$$

显然 $a_{n+1}>0$. 于是得到和为 1 的 $n+1$ 个正数. 求证的不等式化为

$$n^{n+1}a_1a_2\cdots a_na_{n+1}\leqslant(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)(1-a_{n+1}).$$

对于每一个 $i\in\{1,2,\cdots,n,n+1\}$,由算术－几何平均不等式,有

$$1-a_i=a_1+\cdots+a_{i-1}+a_{i+1}+\cdots+a_{n+1}$$

$$\geqslant n\sqrt[n]{\frac{a_1a_2\cdots a_{n+1}}{a_i}},$$

将上式所表示的 $n+1$ 个不等式相乘,有

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_{n+1})$$

$$\geqslant n^{n+1}\cdot\sqrt[n]{\frac{(a_1a_2\cdots a_{n+1})^{n+1}}{a_1a_2\cdots a_{n+1}}}$$

$$=n^{n+1}\cdot a_1a_2\cdots a_{n+1}.$$

于是,求证的不等式成立.

如果 $n \geqslant 2$,等号当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \dfrac{1}{n+1}$ 时成立.如果 $n = 1$,等号对任意的 $a_1 \in (0,1)$ 都成立.

9·266　对于每个整数 $n \geqslant 2$,和 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in [0,1]$,求证:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{1 \leqslant k < j \leqslant n} x_k x_j \leqslant 1.$$

(罗马尼亚数学奥林匹克,1994 年)

[证]　用数学归纳法.

当 $n = 2$ 时,由于 $x_1, x_2 \in [0,1]$,因此

$$x_1 + x_2 - x_1 x_2 = 1 - (1 - x_1)(1 - x_2) < 1.$$

设当 $n = m$(正整数 $m \geqslant 2$)时,对于 $x_1, x_2, \cdots, x_m \in [0,1]$,有

$$\sum_{k=1}^{m} x_k - \sum_{1 \leqslant k < j \leqslant m} x_k x_j \leqslant 1.$$

当 $n = m + 1$ 时,

$$\sum_{k=1}^{m+1} x_k - \sum_{1 \leqslant k < j \leqslant m+1} x_k x_j$$

$$= \sum_{k=1}^{m} x_k - \sum_{1 \leqslant k < j \leqslant m} x_k x_j + \left(1 - \sum_{k=1}^{m} x_k\right) x_{m+1}.$$

考虑函数

$$f(x) = \left(\sum_{k=1}^{m} x_k - \sum_{1 \leqslant k < j \leqslant m} x_k x_j\right) + \left(1 - \sum_{k=1}^{m} x_k\right) \cdot x,$$

其中 $x \in [0,1]$.

由归纳假设,

$$f(0) = \sum_{k=1}^{m} x_k - \sum_{1 \leqslant k < j \leqslant m} x_k x_j \leqslant 1,$$

由已知条件,

$$f(1) = 1 - \sum_{1 \leqslant k < j \leqslant m} x_k x_j \leqslant 1.$$

因此,函数 $y = f(x), x \in [0,1]$ 在坐标平面上的图像是一个直线段,其两个端点的纵坐标都不大于 1.

因为 $f(x)$ 的最大值在端点上才能达到,所以对于$[0,1]$ 上任一实数 x,都有

$$f(x)\leqslant 1.$$

特别地,因为 $x_{m+1}\in[0,1]$,所以

$$f(x_{m+1})\leqslant 1,$$

即得

$$\sum_{k=1}^{m+1}x_k-\sum_{1\leqslant k<j\leqslant m+1}x_kx_j\leqslant 1.$$

由数学归纳法原理可知,本题得证.

9·267 a,b,c,d 都是正整数,$r=1-\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$,如果 $a+c\leqslant 1993$,且 $r>0$,求证:$r>\frac{1}{1993^3}$.

(韩国数学奥林匹克,1993 年)

[证] 由已知,

$$r=1-\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{bd-ad-bc}{bd},$$

由 $r>0$,得

$$bd>ad+bc>ad,$$

所以 $\quad b>a.$

类似地 $\quad bd>ad+bc>bc,$

所以 $\quad d>c.$

又因为 $\quad bd-(ad+bc)\geqslant 1,$

所以 $\quad r\geqslant\frac{1}{bd}.$

不妨设 $b\leqslant d$(对于 $b>d$ 的情形,可类似地进行证明).

关于 b,d 的关系,只有以下三种情况:

(1) $b\leqslant d\leqslant 1993$;

(2) $1993\leqslant b\leqslant d$;

(3) $b<1993<d$.

对于情况(1),显然有

$$r\geqslant\frac{1}{bd}\geqslant\frac{1}{1993^2}>\frac{1}{1993^3}.$$

对于情况(2),当 $a+c\leqslant 1992$ 时,我们有

$$r=1-\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\geqslant 1-\frac{a+c}{1993}\geqslant\frac{1}{1993}>\frac{1}{1993^3}.$$

当 $a+c=1993$ 时，容易证明 $d\geqslant 1994$（因为不然的话，必有 $d=b=1993$，$r=1-\frac{a+c}{1993}=0$，与 $r>0$ 矛盾）．此时，

$$r=1-\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\geqslant 1-\frac{a}{1993}-\frac{c}{1994}$$
$$=1-\frac{a+1993(a+c)}{1993\cdot 1994}$$
$$=1-\frac{a+1993^2}{1993\cdot 1994}$$
$$\geqslant 1-\frac{1992+1993^2}{1993\cdot 1994}$$
$$=\frac{1}{1993\cdot 1994}>\frac{1}{1993^3}.$$

对于情况(3)，我们有

$$r=\frac{bd-ad-bc}{bd}=\frac{(b-a)d-bc}{bd}$$
$$=\frac{b-a}{b}\cdot\left[1-\frac{bc}{d(b-a)}\right],$$

因为 $b>a$，所以 $b-a\geqslant 1$；又因为

$$d(b-a)-bc=bd-ad-bc\geqslant 1,$$

所以

$$0<\frac{bc}{d(b-a)}<1,$$

从而有

$$0<1-\frac{bc}{d(b-a)}<1.$$

由已知易知 $c\leqslant 1992$，因此

$$1-\frac{bc}{d(b-a)}\geqslant 1-\frac{1992b}{d}.$$

如果 $d\geqslant 1993b$，那么，

$$r=\frac{b-a}{b}\left[1-\frac{bc}{d(b-a)}\right]$$
$$\geqslant\frac{1}{b}\cdot\left(1-\frac{1992b}{d}\right)$$
$$\geqslant\frac{1}{b}\left(1-\frac{1992b}{1993b}\right)$$

$$= \frac{1}{1993b} > \frac{1}{1993^2} > \frac{1}{1993^3}.$$

如果 $d < 1993b$,那么

$$r \geqslant \frac{1}{bd} > \frac{1}{1993b^2} > \frac{1}{1993^3}.$$

综上所述,可知原命题得证.

9·268 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n \in [1,2]$ 且

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i^2,$$

求证:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3}{b_i} \leqslant \frac{17}{10} \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

并问等号成立的充要条件.

(中国高中数学联赛,1998 年)

[证] 由于 $a_i, b_i \in [1,2], i = 1,2,\cdots,n$,因此

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{\sqrt{\frac{a_i^3}{b_i}}}{\sqrt{a_i b_i}} = \frac{a_i}{b_i} \leqslant 2. \quad ①$$

从而有

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{a_i b_i} - \sqrt{\frac{a_i^3}{b_i}}\right)\left(2\sqrt{a_i b_i} - \sqrt{\frac{a_i^3}{b_i}}\right) \leqslant 0,$$

即 $$a_i b_i - \frac{5}{2} a_i^2 + \frac{a_i^3}{b_i} \leqslant 0.$$

由此可得

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3}{b_i} \leqslant \frac{5}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i b_i. \quad ②$$

由 ① 又可得

$$\left(\frac{1}{2} b_i - a_i\right)(2b_i - a_i) \leqslant 0,$$

即 $$b_i^2 - \frac{5}{2} a_i b_i + a_i^2 \leqslant 0,$$

$$a_i b_i \geqslant \frac{2}{5}(a_i^2 + b_i^2),$$

代入②，并注意已知条件 $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$，可得

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3}{b_i} \leqslant \frac{5}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \frac{2}{5}\sum_{i=1}^{n}(a_i^2 + b_i^2)$$

$$= \frac{5}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \frac{4}{5}\sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

$$= \frac{17}{10}\sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

要使等号成立必须使 $a_i = 1, b_i = 2$ 或者 $a_i = 2, b_i = 1$，再注意已知条件 $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$，可以断定，等号成立的充要条件是 n 为偶数，且 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中一半是 1，另一半是 2，$b_i = \frac{2}{a_i}$，$i = 1, 2, \cdots, n$.

附录

索引

本索引列出了本卷所载的全部数学竞赛题及一些相关题目，并将它们按出处归类．对于出处相同的题目，又按年代排列，以便读者查找．

括号内每题的第1个号码是章号，第2个号码是该章中的题号．例如(6·131)表示第六章第131题．

奥地利－波兰数学竞赛

1978年 (6·131)；
1979年 (6·126)；
1980年 (8·175)；
1988年 (9·179)．

奥地利数学奥林匹克

1972年 (8·39)；
1975年 (6·156)；
1983年 (5·75)．

澳大利亚数学奥林匹克

1982年 (6·168)；
1983年 (8·28)；
1989年 (1·51，1·70，1·71，6·3)；
1995年 (1·200，4·180，6·172)．

爱尔兰数学奥林匹克

1989 年（1·190，2·100，4·69，6·9）；

1991 年（1·115，2·32，3·78，6·53，6·142）；

1993 年（1·47，3·51，4·103，5·57，5·90，6·24）；

1994 年（8·73，9·101，3·91，4·157，4·258，6·68，6·171）.

巴尔干地区数学竞赛试题

1990 年（3·67，6·84）.

保加利亚数学竞赛

1961 年（5·74）；

1968 年（6·147）；

1976 年（5·142）；

1979 年（5·144）；

1980 年（5·53）；

1983 年（5·66）；

1984 年（5·40，5·55）；

1994 年（8·33，8·34，8·39，8·141，8·142，1·57，1·58，1·125，2·111，4·29，4·97，4·98，4·185，4·187，4·261，6·26，6·69，6·71，6·108，6·179）.

比利时数学奥林匹克

1977 年（6·144）.

北欧数学竞赛

1992 年（4·55，5·86）；

1994 年（1·61）.

朝鲜数学奥林匹克

1992 年（1·110，1·151，3·6，6·165）.

德国数学奥林匹克

1993 年 (1·130, 1·141, 6·119).

独联体数学奥林匹克

1992 年 (9·96, 9·130).

法国数学奥林匹克

1979 年 (6·154).

芬兰数学竞赛

1980 年 (5·97);

1983 年 (5·101).

芬兰、英国、匈牙利、瑞典四国数学竞赛

1980 年 (8·145).

国际数学奥林匹克 (*IMO*)

1959 年 (3·21, 4·90);

1960 年 (4·188, 9·1);

1961 年 (4·91, 4·126);

1962 年 (2·49, 4·89, 9·2);

1963 年 (3·57, 4·63, 4·141);

1964 年 (1·162, 9·142);

1965 年 (1·42, 4·167, 9·3);

1966 年 (3·54, 3·56, 4·150, 4·218);

1967 年 (1·161, 4·215, 8·16);

1968 年 (3·20, 3·22, 4·149, 6·34);

1969 年 (6·50, 9·186);

1970 年 (1·85, 2·25, 8·159);

1971 年 (2·68, 9·233);

1972 年 (1·165, 2·23, 6·150, 9·15);

1973 年 (4·47, 6·49, 8·87);

1974 年 (1·115, 4·214, 5·114, 6·7);
1975 年 (1·17, 5·147, 9·200);
1976 年 (2·83, 3·75, 4·48, 4·152, 4·213);
1977 年 (1·41, 2·16, 6·20, 8·18, 9·181);
1978 年 (2·60, 6·19, 8·144);
1979 年 (1·160, 4·231, 8·31);
1981 年 (2·10, 3·74, 6·11, 6·89);
1982 年 (4·250, 6·12, 8·158);
1983 年 (2·97, 6·164, 9·167);
1984 年 (1·159, 4·233, 9·161);
1985 年 (2·11, 5·120, 8·97);
1986 年 (2·12, 6·166);
1987 年 (3·44, 6·57, 9·29);
1988 年 (4·253, 6·18, 9·28);
1989 年 (1·99, 2·26);
1990 年 (5·127, 6·141);
1991 年 (1·75);
1992 年 (1·43, 2·101, 6·161);
1993 年 (5·113, 6·48);
1994 年 (9·97);
1995 年 (2·43, 2·110, 9·171);
1996 年 (2·73, 6·134);
1997 年 (1·134, 4·181);
1998 年 (1·54, 6·135);
1999 年 (6·180, 9·67).

国际数学奥林匹克预选题

1979 年 (9·55);
1981 年 (5·96);
1982 年 (8·25, 9·212, 9·243);
1983 年 (5·7);
1985 年 (8·41, 8·146);

1987 年 (8·124, 8·147, 9·30, 9·36, 9·46, 9·84, 9·122, 9·141, 9·163, 9·234);

1988 年 (8·43, 8·51, 8·70, 8·88, 8·135, 8·161, 8·162, 8·163, 9·93, 9·98, 9·124, 9·252);

1989 年 (8·23, 8·48, 8·56, 8·86, 8·121, 8·182, 9·50, 9·81, 9·131, 9·187, 9·210, 9·209, 9·251);

1990 年 (1·18, 1·121, 2·22, 2·33, 2·57, 2·58, 2·90, 6·22, 6·23, 6·104, 9·183);

1991 年 (9·59, 9·224);

1992 年 (8·17, 8·138, 8·179);

1994 年 (8·66, 6·73, 6·178);

1995 年 (4·123, 6·174, 8·106, 9·261, 9·262);

1996 年 (2·105, 5·41, 5·79, 5·133, 6·61, 6·72, 6·113, 6·133, 8·111, 9·172, 9·254, 9·257);

1997 年 (2·20, 2·69, 2·106, 4·178, 5·130, 5·131, 5·132, 6·177, 8·114, 9·259, 9·260);

1998 年 (6·64, 9·169, 9·264, 9·265).

韩国数学奥林匹克

1993 年 (1·55, 2·21, 4·184, 6·139, 9·267);

1994 年 (2·42, 3·90, 4·259, 6·138, 9·125).

荷兰数学竞赛

(1·169).

基辅数学奥林匹克

1935 年 (3·49, 3·62, 4·80, 4·99, 5·11);

1936 年 (3·3, 3·4, 3·47, 4·78, 4·79, 4·83, 4·94, 4·118, 4·121, 4·146, 5·10);

1939 年 (1·28, 1·29, 4·17);

1940 年 (1·163, 4·101);

1946 年 (1·8, 4·102, 4·191);

1947 年 (3·48, 4·159);

1948 年 (1·147);

1949 年 (4·130, 4·147);

1952 年 (4·192);

1953 年 (3·5);

1954 年 (1·35, 1·36, 4·132);

1970 年 (9·79);

1971 年 (9·240);

1972 年 (9·13);

1973 年 (4·82, 9·14, 9·34);

1975 年 (9·56, 9·128);

1977 年 (8·125, 9·90);

1978 年 (8·128, 8·129);

1979 年 (8·169);

1982 年 (8·130);

1983 年 (9·24).

捷克（和斯洛伐克）数学奥林匹克

1994 年 (6·63, 8·186, 9·32).

加拿大国家集训队训练题

1988 年至 1991 年 (2·1, 2·2, 2·15, 3·59, 3·71, 3·72, 4·44, 4·45, 4·105, 4·115, 4·116, 4·119, 4·138, 4·154, 4·212, 5·65, 5·146, 6·33, 6·43, 6·44, 6·45, 6·86, 8·15, 8·59, 8·69, 8·72, 8·95, 8·181, 9·8, 9·51, 9·53, 9·65, 9·80, 9·91, 9·106, 9·132, 9·133, 9·207, 9·208, 9·209);

1992 年 (8·24).

加拿大数学奥林匹克

1969 年 (3·2, 6·55);

1970 年 (4·139, 4·252, 5·32);

1971 年 (1·40, 5·48, 5·49);

1972年 (1·84, 1·158, 2·53, 2·98);
1973年 (3·42, 3·73, 4·33);
1974年 (3·43, 5·125, 6·92, 6·93);
1975年 (1·146, 6·35, 6·151, 8·26);
1976年 (1·83, 5·124, 8·12);
1977年 (2·50, 4·236, 5·123, 8·183);
1978年 (1·6, 4·171, 6·94);
1980年 (7·3);
1981年 (4·43, 5·47);
1982年 (4·71, 5·61);
1983年 (3·69, 4·170);
1984年 (1·20, 1·81, 9·16);
1985年 (4·180, 8·184);
1986年 (4·161);
1987年 (3·70, 4·251);
1988年 (2·28, 4·16, 8·63);
1989年 (1·49, 3·23, 8·2);
1990年 (4·68, 6·56, 7·4);
1991年 (1·5);
1992年 (1·80, 4·49);
1993年 (1·65, 6·52);
1994年 (3·32, 3·33);
1996年 (4·74, 4·156, 6·67, 6·115);
1997年 (1·172, 3·28, 9·102).

罗马尼亚数学奥林匹克

1962年 (5·23, 5·108);
1966年 (5·145);
1975年 (5·4);
1978年 (5·27, 5·93, 5·107, 6·129, 6·149, 6·158);
1979年 (5·95, 6·128, 6·145, 9·45);
1980年 (5·141);

1981 年 (6·157);
1982 年 (5·22, 6·155);
1983 年 (5·26);
1994 年 (3·92, 4·28, 4·124, 9·266).

罗马尼亚国家队选拔赛

1994 年 (1·94, 1·122, 1·204, 2·75, 5·151, 8·74, 8·75).

列宁格勒数学奥林匹克

1988 年 (9·177, 9·191);
1989 年 (8·68, 8·166, 9·150);
1991 年 (8·55, 9·215).

卢森堡国际数学竞赛

1980 年 (6·140).

美国 Mathcounts 数学竞赛

1988 年 (2·79, 2·88, 7·2).

美国纽约数学竞赛

1973 年 (5·82);
1975 年 (5·67, 5·137, 9·248);
1976 年 (5·139).

美国普特南数学竞赛

1940 年 (9·109);
1949 年 (8·172);
1953 年 (9·89, 9·156);
1956 年 (8·136);
1957 年 (9·123);
1958 年 (8·171);
1964 年 (8·115, 8·170);

1967 年 (9·159，9·178)；
1969 年 (8·126)；
1971 年 (9·99)；
1972 年 (8·94)；
1975 年 (9·92)；
1977 年 (9·244)；
1978 年 (9·242)；
1979 年 (8·90，9·31，9·241)；
1980 年 (9·95)；
1992 年 (8·123)；
1993 年 (1·128，2·74，3·93，4·179，6·132).

美国数学奥林匹克

1972 年 (7·6，9·33)；
1973 年 (4·135，4·219，7·15，8·160)；
1974 年 (5·115，7·17，9·137)；
1975 年 (5·6，7·16，9·134，9·189)；
1976 年 (5·87，6·159)；
1977 年 (4·56，5·30，9·192)；
1978 年 (2·85，4·230)；
1979 年 (7·18)；
1980 年 (4·93，4·189，9·144)；
1981 年 (9·112，9·120)；
1982 年 (6·59，6·130)；
1983 年 (4·57，7·7)；
1984 年 (2·24，4·60，5·38)；
1985 年 (2·96，4·66)；
1986 年 (1·78，6·103)；
1987 年 (3·77，5·121)；
1988 年 (1·164，4·65，5·34，6·46)；
1989 年 (2·102，3·25，5·122)；
1990 年 (2·9，2·95，4·70，4·216)；

1991 年 (2·17, 9·154);

1992 年 (1·21, 2·31, 3·45, 5·64);

1993 年 (1·68, 6·91).

美国数学邀请赛

1983 年 (2·4, 4·64, 6·78, 6·79, 6·80);

1984 年 (2·65, 2·89, 2·92, 4·59, 4·148, 4·234, 6·16, 6·17, 6·81, 7·9);

1985 年 (2·81, 4·232, 4·235, 7·11, 8·10);

1986 年 (1·187, 2·18, 2·54, 2·80, 4·51, 4·120, 4·144, 4·194, 5·12, 8·1);

1987 年 (1·46, 1·50, 1·149, 4·239, 6·77, 6·102, 7·12, 9·35);

1988 年 (2·52, 5·33, 6·5, 6·14, 6·15, 6·76, 7·8);

1989 年 (1·148, 2·36, 2·47, 4·67, 4·133, 5·39, 7·5, 8·21);

1990 年 (1·44, 2·8, 2·29, 2·48, 2·91, 3·26, 4·50, 7·13, 7·14);

1994 年 (2·103, 4·96, 4·183, 6·29, 6·30, 7·20, 8·78).

莫斯科数学奥林匹克

1945 年 (5·36);

1946 年 (4·145, 5·8, 5·89, 8·14);

1947 年 (5·9, 5·29, 9·6);

1948 年 (4·81, 4·169);

1950 年 (9·71);

1952 年 (9·103, 9·126);

1953 年 (5·83, 8·148, 9·72);

1954 年 (9·21, 9·22, 9·42);

1956 年 (8·22);

1957 年 (5·16, 8·62);

1958 年 (9·76);

1959 年 (8·151, 9·19, 9·20, 9·229);
1961 年 (8·46);
1962 年 (8·61, 9·43);
1963 年 (8·37, 9·136, 9·140, 9·155);
1965 年 (8·60, 8·116, 9·83);
1966 年 (8·7, 9·44);
1967 年 (8·20);
1968 年 (9·7);
1969 年 (8·89, 8·150);
1971 年 (8·3, 8·38, 9·85, 9·228);
1972 年 (9·77, 9·82, 9·225);
1975 年 (9·74);
1977 年 (8·118);
1978 年 (9·193);
1979 年 (8·100, 9·48, 9·250);
1980 年 (8·120, 9·188);
1981 年 (8·127);
1982 年 (9·87, 9·157);
1983 年 (9·127, 9·237);
1984 年 (9·70, 9·185, 9·201);
1985 年 (9·75);
1986 年 (8·167, 9·9, 9·10, 9·25, 9·57);
1987 年 (9·12, 9·139, 9·194);
1989 年 (1·25, 2·35, 4·54, 8·99, 9·58);
1990 年 (9·11, 9·47);
1991 年 (9·138);
1994 年 (1·56, 4·260);
1995 年 (1·53, 1·136, 5·42, 6·112, 8·143);
1996 年 (1·88, 1·89, 1·91, 3·89, 4·226, 4·227, 6·28, 8·76).

墨西哥数学奥林匹克

1988 年 (6·124).

波兰数学奥林匹克

1937 年 (1·111);
1951 年 (5·63);
1952 年 (4·37);
1953 年 (1·67, 4·199);
1954 年 (3·14, 6·25);
1955 年 (4·38, 5·116);
1957 年 (1·62, 5·15);
1958 年 (3·84, 5·31);
1959 年 (4·6);
1960 年 (4·25);
1963 年 (5·117);
1966 年 (4·39);
1968 年 (5·60);
1969 年 (4·26, 6·83);
1970 年 (6·82);
1972 年 (5·88, 6·39);
1973 年 (5·126);
1974 年 (5·118, 7·19);
1976 年 (1·66, 3·24, 4·200, 5·119, 6·146, 7·10);
1977 年 (5·98, 6·143);
1978 年 (5·99, 8·174);
1979 年 (5·69, 8·177);
1982 年 (9·247);
1984 年 (9·245);
1994 年 (1·59, 1·124, 2·44)

全俄数学奥林匹克;

1961 年 (1·14, 1·184, 1·192, 1·193, 1·194, 8·58);

1962 年 (1·15, 1·73, 1·100, 3·63, 5·13, 8·155, 8·155);

1963 年 (1·3, 1·26, 1·97, 1·120, 5·37);

1964 年 (1·48, 1·114, 1·155, 1·182, 1·183, 2·86, 3·10, 4·165);

1965 年 (1·12, 1·98, 2·61, 4·151);

1966 年 (1·96, 9·199);

1986 年 (1·11, 1·168, 4·175, 4·210, 5·46);

1987 年 (1·9, 1·34, 1·69, 1·166, 1·167, 1·188, 1·189, 2·56, 4·30, 4·140, 4·142, 4·162);

1988 年 (1·191, 3·19, 3·38, 3·60, 4·52, 4·106, 4·163, 4·177, 4·209, 4·240, 5·5, 9·94);

1989 年 (1·32, 1·33, 1·170, 2·46, 2·55, 2·63, 2·64, 4·128, 9·148, 9·149);

1990 年 (3·27, 4·2, 4·137, 4·160, 6·54, 8·92, 9·147, 9·175, 9·236);

1991 年 (9·145, 9·146, 9·235);

1994 年 (1·90, 2·108, 3·87, 3·88, 4·77, 4·256, 8·82);

1995 年 (1·131, 1·135, 1·201, 1·202, 4·75, 4·95, 5·45, 6·70, 8·83, 8·103, 8·104, 8·108);

1996 年 (1·92, 1·132, 1·133, 2·40, 5·78, 8·105, 8·107).

前南斯拉夫数学奥林匹克

1972 年 (9·246);

1976 年 (8·9, 9·152, 9·153);

1979 年 (6·153);

1981 年 (5·73);

1983 年 (6·127).

前捷克斯洛伐克数学奥林匹克

1954 年 (5·56);

1962 年 (5·21);

1967 年 (5·72);

1968 年 (8·40);
1974 年 (5·24);
1978 年 (8·47);
1983 年 (9·54);
1989 年 (2·7).

前联邦德国数学奥林匹克

1982 年 (9·218);
1986 年 (8·29);
1987 年 (8·64);
1988 年 (8·65).

前民主德国数学竞赛

1970 年 (5·52, 5·71);
1971 年 (5·70);
1974 年 (5·84);
1977 年 (5·138);
1980 年 (5·143, 9·78);
1982 年 (6·125);
1983 年 (5·14, 5·129).

前苏联教育部推荐试题

1988 年 (9·160);
1989 年 (9·202);
1990 年 (8·164, 8·165, 9·113);
1991 年 (8·6).

全苏数学奥林匹克

1967 年 (1·4, 1·79, 1·117, 4·116);
1968 年 (1·86, 3·41, 4·237, 8·156, 8·155, 9·198);
1969 年 (1·13, 1·37, 1·77, 4·21, 4·27, 9·109, 9·205);
1970 年 (1·2, 1·154, 1·180, 1·181);

1971 年 (1·179, 5·62, 9·168);

1972 年 (1·198, 2·82, 6·100, 6·101);

1973 年 (4·19, 9·110, 9·184);

1974 年 (1·39, 1·119, 1·178, 2·66, 4·61, 6·71, 6·99);

1975 年 (1·22, 1·177, 5·110, 9·49, 9·151);

1976 年 (1·197, 8·8, 8·101, 9·195, 9·253);

1977 年 (1·23, 2·30, 2·67, 3·68, 4·211, 5·77, 5·128, 8·134);

1978 年 (1·31, 1·153, 1·176, 6·4, 8·84, 8·133, 9·231, 9·232);

1979 年 (1·104, 1·185, 4·152, 8·102, 8·153);

1980 年 (1·1, 4·153, 4·173, 4·254, 8·122, 8·132, 9·166);

1981 年 (1·113, 1·196, 4·167, 5·35, 8·96, 9·26, 9·105);

1982 年 (1·195, 2·51, 5·148, 8·67, 9·111);

1983 年 (1·63, 1·103, 1·199, 4·92, 4·110, 5·80, 8·117);

1984 年 (1·102, 2·99, 4·58, 4·136, 5·58, 6·148, 8·131, 9·86);

1985 年 (1·24, 3·35, 4·62, 8·19, 8·149, 8·152, 9·4, 9·18, 9·52);

1986 年 (1·38, 1·82, 4·18, 4·229, 5·85, 9·121, 9·230);

1987 年 (3·39, 6·38, 9·23, 9·190);

1988 年 (1·174, 1·175, 2·34, 4·155, 4·168, 4·238, 4·249, 6·96, 6·97, 6·160, 9·119);

1989 年 (1·118, 4·248, 6·37, 6·75, 9·165);

1990 年 (1·152, 2·62, 4·22, 4·174, 5·59, 5·109, 5·119, 6·85, 9·108, 9·114, 9·238);

1991 年 (1·72, 1·108, 1·185, 3·9, 4·51, 6·90, 8·91, 9·158).

全苏数学冬令营

1991 年 (8·42, 8·44).

全苏数学夏令营

1991 年（8·137，9·164）.

日本国家队选拔试题

1990 年（1·16，2·14，2·52，2·87，3·66，4·53，6·2）.

瑞典数学奥林匹克

1988 年（8·168，9·37）.

瑞士数学奥林匹克

1977 年（6·169）.

圣彼得堡市数学选拔考试

1992 年（8·178）；

1993 年（9·223，9·249）.

世界城市际数学邀请赛

1985 年（8·13，9·220）；

1986 年（9·88）；

1987 年（9·17）；

1988 年（9·162）；

1995 年（1·93，1·143，1·144，1·145，8·77，8·109）；

1996 年（1·137，1·139，6·173，9·69，9·173）.

土耳其数学竞赛

1985 年（5·54）.

乌克兰数学奥林匹克

1992 年（4·125）.

新加坡中学数学竞赛

1978 年（5·20）；

1987 年 (3·52, 3·61, 5·50, 7·1);
1989 年 (1·45, 1·171, 3·58, 4·176).

匈牙利数学奥林匹克

1894 年 (4·223);
1897 年 (4·244);
1898 年 (6·95);
1899 年 (3·86, 4·4);
1901 年 (4·195, 4·198);
1903 年 (4·228, 5·18);
1908 年 (1·64, 1·112, 1·156, 4·5, 4·113, 4·224, 4·245);
1918 年 (4·40, 4·112, 4·193);
1923 年 (4·225, 5·91);
1926 年 (4·109);
1933 年 (1·90, 4·131, 6·36);
1935 年 (1·74, 9·221);
1936 年 (3·50, 4·243);
1941 年 (3·35);
1943 年 (4·111, 5·17);
1964 年 (3·13, 4·196);
1974 年 (3·83, 4·197, 4·221);
1976 年 (5·105);
1977 年 (5·140);
1979 年 (5·94, 5·100, 5·106);
1983 年 (5·19);
1990 年 (2·84, 3·46, 4·31).

英国数学奥林匹克

1967 年 (5·51);
1978 年 (5·102, 8·85);
1980 年 (5·28, 8·173);
1985 年 (5·103);

1994 年 (1·60, 1·205, 2·45, 8·35).

越南数学奥林匹克

1977 年 (5·25);

1994 年 (5·152, 8·140).

越南国家队选拔赛

1992 年 (4·182, 5·135);

1994 年 (4·257, 6·170).

亚太地区数学奥林匹克

1989 年 (2·6, 4·246, 6·152, 9·217);

1990 年 (9·216);

1991 年 (2·5, 9·239);

1993 年 (1·109, 4·247, 6·13, 6·51);

1994 年 (6·175).

友谊杯国际数学竞赛

1987 年 (8·93);

1988 年 (1·10, 1·157, 4·1, 4·127, 4·164, 9·143);

1991 年 (8·71).

中国安徽省数学竞赛

1978 年 (5·68).

中国安徽省合肥市数学竞赛

1994 年 (8·81, 9·256).

中国北京市数学竞赛

1956 年 (3·34, 3·81, 4·13, 4·14, 4·129, 4·220, 5·3);

1957 年 (1·29, 3·7, 3·79, 4·15, 4·32, 4·84, 4·85, 4·107, 4·158);

1962 年 (3·12, 3·55, 3·80, 4·11, 4·12, 4·23, 4·114);
1963 年 (1·173, 3·53, 4·122, 4·222, 4·241, 5·2, 5·92, 6·8);
1964 年 (3·1, 3·82, 4·9, 4·10, 6·1, 8·176);
1996 年 (6·27, 9·174).

中国东北数学竞赛

1989 年 (9·107).

中国国家集训队测验题

1991 年 (8·30, 8·57, 8·98, 9·39, 9·40, 9·60);
1993 年 (8·32, 9·62).

中国国家队选拔赛

1986 年 (9·180, 9·222);
1987 年 (9·100);
1988 年 (9·38);
1990 年 (9·66);
1992 年 (9·61, 9·63);
1993 年 (9·64);
1994 年 (9·213);
1995 年 (1·27, 2·78, 2·109, 5·80, 5·136);
1996 年 (1·127, 2·71, 4·76, 6·120);
1997 年 (2·39, 5·149, 8·112);
1998 年 (2·19, 2·70, 3·29, 8·113).

中国高中数学联赛

1978 年 (3·37, 4·3, 4·100, 6·74, 9·118);
1979 年 (4·41, 4·143, 8·52, 9·5, 9·117);
1981 年 (4·217, 6·10);
1983 年 (6·88, 9·104);
1984 年 (1·7, 9·197);

1986 年 (5·112);
1988 年 (8·53, 9·129);
1989 年 (8·54, 9·196);
1990 年 (2·3, 8·11);
1991 年 (1·76, 2·13, 8·49, 9·135, 9·204);
1992 年 (2·27, 9·73);
1993 年 (8·27);
1994 年 (8·5);
1995 年 (5·81, 6·109);
1996 年 (8·36, 9·68);
1997 年 (1·126, 2·77);
1998 年 (6·110, 9·268);
1999 年 (3·31, 6·111).

中国四川省数学竞赛

1988 年 (8·4, 9·203);
1989 年 (9·182).

中国上海市数学竞赛

1957 年 (3·18, 3·36, 3·64, 4·7, 4·34, 4·42);
1958 年 (1·19, 4·20, 4·88);
1960 年 (3·8, 3·11, 3·16, 3·17, 3·65, 4·35, 4·202, 4·203, 4·204, 4·205, 4·206, 6·40, 6·41, 6·42, 6·98, 6·106, 6·107);
1961 年 (4·201);
1962 年 (1·150, 3·15, 4·8, 4·24, 4·36, 4·87, 4·207, 6·6, 6·31);
1963 年 (4·86, 4·108, 4·208, 4·242, 5·1, 6·32);
1991 年 (8·19);
1994 年 (1·87, 2·107, 3·30);
1996 年 (1·140, 2·41);
1997 年 (2·76);

1998 年（1·52，5·43）.

中国河北省数学竞赛

1994 年（2·38，6·123，8·80）.

中国河南省数学竞赛

1998 年（9·255）.

中国湖南省数学竞赛

1998 年（8·110）.

中国中学生数学冬令营

1986 年（1·87，4·72，9·206）；
1987 年（2·93，4·73）；
1988 年（6·21，8·180，9·27，9·41）；
1989 年（6·105，6·167，9·214）；
1990 年（6·47，9·115）；
1991 年（1·106，2·94，4·172，6·163）；
1992 年（4·46，8·50，9·227）；
1993 年（1·105，2·37，6·87，9·116）；
1994 年（3·76，5·111，6·162）；
1995 年（1·203，6·121，6·122，6·136，9·258）；
1996 年（2·72，6·176，9·263）；
1997 年（1·138，6·116，6·117，8·185）；
1998 年（1·129，2·104）；
1999 年（4·255，5·129，5·150）.

中国国家队选拔试题

1990 年（3·85，6·60，9·226）.

中国台北市数学奥林匹克

1992 年（8·45，9·219）；

1994 年（1·123，5·134，6·65，6·66）.

中国香港数学奥林匹克

1994 年（1·95，6·137，9·170）.

中国澳门数学奥林匹克

1993 年（1·142，4·186，5·44，6·62，6·114，6·118，8·79）

历届国际数学奥林匹克概况

届次	时间	举办国家（或地区）	总分第一	总分第二	总分第三
1	1959 年	罗马尼亚	罗马尼亚 249 分	匈牙利 233 分	前捷克斯洛伐克 192 分
2	1960 年	罗马尼亚	前捷克斯洛伐克 257 分	匈牙利 248 分	罗马尼亚 248 分
3	1961 年	匈牙利	匈牙利 270 分	波　兰 203 分	罗马尼亚 197 分
4	1962 年	前捷克斯洛伐克	匈牙利 289 分	前苏联 263 分	罗马尼亚 257 分
5	1963 年	波　兰	前苏联 271 分	匈牙利 234 分	罗马尼亚 191 分
6	1964 年	前苏联	前苏联 269 分	匈牙利 253 分	罗马尼亚 213 分
7	1965 年	前民主德国	前苏联 281 分	匈牙利 244 分	罗马尼亚 222 分
8	1966 年	保加利亚	前苏联 293 分	匈牙利 281 分	前民主德国 280 分
9	1967 年	前南斯拉夫	前苏联 275 分	前民主德国 257 分	匈牙利 251 分
10	1968 年	前苏联	前民主德国 304 分	前苏联 298 分	匈牙利 291 分
11	1969 年	罗马尼亚	匈牙利 247 分	前民主德国 240 分	前苏联 231 分
12	1970 年	匈牙利	匈牙利 233 分	前苏联前民主德国 221 分	
13	1971 年	前捷克斯洛伐克	匈牙利 255 分	前苏联 205 分	前民主德国 142 分
14	1972 年	波　兰	前苏联 270 分	匈牙利 263 分	前民主德国 239 分
15	1973 年	前苏联	前苏联 254 分	匈牙利 215 分	前民主德国 188 分
16	1974 年	前民主德国	前苏联 256 分	美　国 243 分	匈牙利 237 分
17	1975 年	保加利亚	匈牙利 258 分	前民主德国 249 分	美　国 247 分
18	1976 年	奥地利	前苏联 250 分	英　国 214 分	美　国 188 分
19	1977 年	前南斯拉夫	美　国 202 分	前苏联 192 分	匈牙利、英国 190 分
20	1978 年	罗马尼亚	罗马尼亚 237 分	美　国 225 分	英　国 201 分
21	1979 年	英　国	前苏联 267 分	罗马尼亚 240 分	前联邦德国 235 分

届次	时间	举办国家(或地区)	总分第一	总分第二	总分第三
22	1981 年	美　国	美　国 314 分	前联邦德国 312 分	英　国 301 分
23	1982 年	匈牙利	前联邦德国 145 分	前苏联 137 分	前民主德国、美国 136 分
24	1983 年	法　国	前联邦德国 212 分	美　国 171 分	匈牙利 170 分
25	1984 年	前捷克斯洛伐克	前苏联 235 分	保加利亚 203 分	罗马尼亚 199 分
26	1985 年	芬　兰	罗马尼亚 201 分	美　国 180 分	匈牙利 168 分
27	1986 年	波　兰	前苏联、美国 203 分		前联邦德国 196 分
28	1987 年	古　巴	罗马尼亚 250 分	前联邦德国 248 分	前苏联 235 分
29	1988 年	澳大利亚	前苏联 217 分	中国、罗马尼亚 201 分	
30	1989 年	前联邦德国	中国 237 分	罗马尼亚 223 分	前苏联 217 分
31	1990 年	中　国	中　国 230 分	前苏联 193 分	美　国 174 分
32	1991 年	瑞　典	前苏联 241 分	中　国 231 分	罗马尼亚 225 分
33	1992 年	俄罗斯	中　国 240 分	美　国 181 分	罗马尼亚 177 分
34	1993 年	土耳其	中　国 215 分	德　国 189 分	保加利亚 178 分
35	1994 年	香　港	美　国 252 分	中　国 229 分	俄罗斯 224 分
36	1995 年	加拿大	中　国 236 分	罗马尼亚 230 分	俄罗斯 227 分
37	1996 年	印　度	罗马尼亚	美　国	匈牙利
38	1997 年	阿根廷	中　国 223 分	匈牙利 219 分	伊　朗 217 分
39	1998 年	中国 台湾	伊　朗	保加利亚	匈牙利 美国
40	1999 年	罗马尼亚	中国、俄罗斯 182 分		越　南
41	2000 年	韩　国	中　国 218 分	俄罗斯 215 分	美　国 184 分
42	2001 年	美　国	中国 225 分	俄罗斯、美国 196 分	

注：第 39 届 IMO 中国未参加.

编者的话



当今的世界,数学已成为广泛渗透到各种自然科学、社会科学,并发挥着重大作用的一门基础和应用学科.从教育要面向世界,面向未来,面向现代化这一高度来看,让青少年从小就打下扎实的数学基础,这对我国今后的发展是极为重要的.国际上为推动数学的发展而进行的数学奥林匹克活动,现在已成为一门培养和选拔数学人才的特殊学科.

当前,数学奥林匹克活动正方兴未艾,数学竞赛活动遍及五洲四海,尤其是我国中学生选手在国际数学奥林匹克大赛中屡夺金牌,成绩显赫,捷报频传,令世人瞩目.这些,充分显示了我国数学水平和中华民族的聪明才智,为祖国赢得了骄傲和荣誉.在这种情况下,许多数学奥林匹克的教练员,许多大学中学的教师,许多学生及其家长都渴望在自己的案头有一部能够指导数学奥林匹克解题的工具书.希望这部书能够收集国内外数学奥林匹克试题的精品,包揽奥林匹克数学专题和有关内容,以开阔自己的眼界,提高数学能力,品鉴数学的魅力;也希望这部书能够提供这些试题的更精确、更简捷的解法,以开拓思路,提高技巧.目前,应各界的这种渴求,这部五卷本《世界数学奥林匹克解题大辞典》即将问世了.

这部大辞典的出版,是中国数学奥林匹克委员会,南开大学数学系和河北少年儿童出版社通力合作的产物;是中国

数学奥林匹克专家和教练员辛勤劳动的结晶;也是老一代数学家关心和支持的结果.我们不能不非常高兴地告诉大家,这部辞典在编辑过程中得到了数学前辈陈省身先生、吴大任先生的关心和指导;中国数学会名誉理事长王元先生又为本辞典作序.可以这样说,如果没有作为数学泰斗的老一代数学家的关怀与支持,没有一批才华横溢的中青年数学家的努力,没有极具胆识的出版工作者的辛勤劳动,艰难而巨大的世纪工程——《世界数学奥林匹克解题大辞典》是不会这样顺利出版的.

这部大辞典精选了国内外数学竞赛的有代表性的试题,其中大部分是已经赛过的并经过锤炼的试题,还有少部分竞赛的备选题.本辞典共分五卷,其中有四卷是按奥林匹克数学一般的分类方法而分为《代数卷》、《几何卷》、《数论卷》、《组合卷》;为了普及奥林匹克数学,完善辞典中题目类型,又出版了《选择题卷》.

《世界数学奥林匹克解题大辞典》五卷共约 500 万字.《代数卷》、《数论卷》和《选择题卷》是按知识内容分章的;《组合卷》是按题目的内容分章的;《几何卷》则是按题目的结论分章的.每卷的正文包括试题,试题的出处及解答三部分,试题的多种解法,则由解 1、解 2 或证 1、证 2 给出.正文后有附录,附本卷常用的有关数学知识提要;还有本卷的索引,索引是按书中涉及到的参赛国家和竞赛名称按英文字母的顺序排列的.

《世界数学奥林匹克解题大辞典》的出版,无疑对我国数学奥林匹克事业的发展,对我国跨世纪科技人才的培养、造就和选拔有重要的促进作用,并为之摇橹扬帆,推波助澜!

愿数学奥林匹克之花香飘四海,

盼新一代科学精英普降神州!

本书的出版是一个大胆的尝试,殷切盼望读者帮助我们

完善辞典的编纂工作.我们相信,经过不断地去粗取精,去伪存真,去旧增新,伴随着我国数学水平的不断提高,这部大辞典将成数学奥林匹克的经典之作.